La modelación como generadora de traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos con estudiantes de noveno grado de Educación Básica Secundaria

Emilsen Cardona Tamayo

Autora

John Henry Durango Urrego

Orientador

Maestría en Educación Matemática

Departamento de Ciencias Básicas

Medellín

Mayo - 2016

Dedicatoria

A mi mamá, que siempre me acompaña, aunque ya no esté.

A los profesores y estudiantes que consideran la educación como un medio de rebeldía contra las desigualdades sociales.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme este espacio de formación, a través del cual he sentido su presencia.

A mi orientador, John Henry Durango Urrego, con quien ha sido posible construir este trabajo.

A los profesores Jhony Alexander Villa y Jaime Hoyos que me permitieron compartir sus saberes.

A mi familia por su apoyo incondicional, que me ha dado fuerzas en los momentos de desmotivación.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

Estructura de la Memoria Escrita

Esta investigación informa en el Capítulo 1 el planteamiento del problema de investigación, aquí se presentan algunos elementos que dieron origen a su formulación desde el contexto institucional; tales como percepción de estudiantes y profesores respecto de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Este capítulo presenta algunos elementos desde los estándares y lineamientos curriculares, los cuales proponen el aprendizaje de objetos matemáticos mediante la relación entre los pensamientos y sistemas numérico, geométrico, métrico y algebraico, referido este último a la variación y asociado a la construcción de modelos matemáticos y la solución de problemas en contextos reales y matemáticos. Además, en este capítulo se informa sobre la necesidad de desarrollar competencias matemáticas que promueven el aprendizaje comprensivo y reflexivo a partir de la modelación y la resolución de problemas.

En el Capítulo 2 se informan los antecedentes teóricos, los cuales están referidos a las dificultades en los procesos aprendizaje y la enseñanza del algebra, dicha sección es sustentada en el presente capítulo a través de algunos estudios (Kieran y Filloy, 1989; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter y Moser, 1981 Kieran, 1989; Filloy, Puig, y Rojano 2008; Molina, 2006). Otro aspecto tratado en este capítulo lo constituye la modelación y el razonamiento algebraico, a partir de algunos estudios (Radford, 1996, 1997, 2003, 2004, 2010; Godino, Aké, Etchegaray, Neto, Lasa y Wilhelmi, 2014; Godino, 2002, 2014; Villa y Posada, 2006; Biembengut y Hein, 2004). El capítulo 3 presenta el diseño metodológico de la investigación, en cual se expone las características de la metodología cualitativa usadas. Así mismo, se informa sobre los instrumentos de recolección de la información y se describe el estudio de caso en el proceso investigativo. Finalmente, se informa sobre el contexto en el cual se lleva a cabo la investigación.

En los tres capítulos finales referidos al análisis e interpretación de datos, el estudio de caso y las conclusiones se informa sobre los resultados encontrados respecto del razonamiento algebraico con los estudiantes del grado noveno de Educación Básica Secundaria. Asimismo, en estos dos últimos capítulos propongo algunos de los beneficios de la modelación como estrategia didáctica. Por último, describo cada caso.

Capítulo 1

1. Planteamiento del Problema de Investigación

1.1. Introducción

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) propone la formulación, investigación y renovación del currículo en Colombia, producto de ello son los Estándares Básicos de Matemáticas, en donde se establecen relaciones entre los pensamientos y los sistemas numéricos, geométricos, métricos, sistemas de datos, algebraicos y analíticos. En particular, el pensamiento algebraico asociado con la variación, el cambio, y la representación, que cumple un papel fundamental en la resolución de problemas.

Para efectos de este estudio, utilizaremos la expresión “razonamiento algebraico” (Godino et al., 2014) al referirnos al pensamiento algebraico (MEN, 2006); este razonamiento está vinculado con la modelación de procesos y fenómenos que requieren la utilización de modelos matemáticos para el análisis y la interpretación de situaciones, en donde se hace necesaria la construcción de funciones de variable real. Asimismo, los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2003) proponen implementar en el currículo desde los primeros años de escolaridad el diseño de situaciones por parte del profesor, que impliquen la observación, la sistematización de regularidades y patrones, además del estudio de la dependencia de una cantidad cuando se controla el cambio de otra.

Esta investigación asume en su objeto de estudio la necesidad de indagar cómo la modelación genera traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rural San Francisco de Asís-Municipio de Jericó, y de esta forma generar en los estudiantes la comprensión de dichos objetos desde el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), enfoque que refiere la comprensión cuando un sujeto usa un objeto matemático de manera competente en diferentes prácticas y no como un proceso mental e individual.

1.2. Situación Problemática

Este planteamiento del problema tiene como punto de partida las dificultades en la comprensión de objetos algebraicos que presentan los estudiantes del grado noveno. Estas razones que a continuación se informan son sustentadas no solo a través del diálogo y de las conversaciones con los profesores de la institución en donde se desarrolla, sino también desde mi experiencia como profesora investigadora A continuación, se describen algunos comentarios de profesores de la institución en donde se lleva a cabo la investigación.

Es costumbre escuchar a los profesores expresiones como: “En los grados sexto y séptimo, los estudiantes realizan operaciones y aplican propiedades, pero en los grados octavo y noveno al preguntarles; por ejemplo, para qué sirve la propiedad asociativa en la suma de enteros no expresan ninguna razón. Además, al proponerles situaciones problema, ellos hacen los cálculos numéricos, pero no llegan a la representación algebraica del enunciado. Aunque en la primaria, y en los grados sexto y séptimo, ellos usan letras al trabajar con ecuaciones aditivas, no las utilizan para representar situaciones problema”. Otros profesores dicen: “Es que los estudiantes ofrecen los resultados, y hacen los cálculos mentales; sin embargo, no los expresan en lenguaje algebraico" o "cuando se trata de expresar en forma verbal expresiones algebraicas ellos no son capaces" o "casi nunca utilizan lo aprendido para solucionar problemas o situaciones de la cotidianidad. Los estudiantes aprenden para el momento, solo por una nota cuantitativa que valora sus aprendizajes".

En los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, uno de los factores asociados a la problemática aquí planteada lo constituye la prevalencia de la ejercitación de algoritmos, que dejan de lado las competencias matemáticas que promueven el aprendizaje comprensivo y reflexivo a partir de la modelación y la resolución de problemas, a través de las cuales el estudiante tiene la oportunidad de representar objetos algebraicos no sólo en el lenguaje numérico, sino además en el algebraico.

La relación entre el lenguaje natural y el algebraico ha sido objeto de estudio; por ejemplo, Puig y Cerdan (1990) se refieren a las relaciones en la constitución de objetos matemáticos, tales como: incógnita, ecuación y situaciones problema de enunciado verbal. Una de las dificultades en el lenguaje algebraico, a diferencia del natural, subyace en la rigurosidad de su formalismo, donde el estudiante automatiza fórmulas, lo que permite una escasa comprensión del objeto matemático (Freudenthal, 1983). Algunas investigaciones que se han desarrollado explican dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje entre estudiantes de Educación Básica cuando inician la etapa algebraica; por ejemplo, en Kieran y Filloy (1980) se exponen consecuencias de una enseñanza basada en algoritmos y operaciones sin la oportunidad de que los estudiantes se enfrenten a situaciones cotidianas, en donde usan expresiones verbales que les permita dotar de significado sus aprendizajes.

Por ejemplo, en el caso de situaciones aditivas y multiplicativas se enseñan a menudo al estudiante con simples operaciones inconexas de sus realidades y de sus intereses; en la aritmética se opera con valores conocidos en tanto que en el álgebra se generaliza sobre números y operaciones (Kieran y Filloy, 1980). En este sentido, el lenguaje algebraico se hace fundamental no solo para las matemáticas, sino necesario para otros saberes disciplinares por su carácter simbólico que le permite la modelación de fenómenos en el contexto de las matemáticas y de otras ciencias.

La modelación como estrategia didáctica sugiere la conexión de la cotidianidad y experiencias de los estudiantes como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas, donde la interacción con el mundo real propicia la creación de situaciones realistas a fin de involucrar al estudiante de una manera consciente y propositiva en el aprendizaje, y no solo de manera pasiva, como un simple receptor de conocimientos acabados. Para esta investigación, la modelación matemática se entiende como: "la actividad cognitiva de conversión entre el lenguaje natural y el registro simbólico algebraico, registros principales, apoyada en el registro gráfico y tabular, entendidos como registros auxiliares" (Villa, 2006 p. 103).

Las dificultades de los estudiantes en la aproximación a objetos algebraicos, tales como: variable, ecuación y función en la solución de problemas constituyen un aspecto fundamental en la etapa pre-algebraica del aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior es consecuencia de currículos rígidos e inflexibles diseñados en la escuela, los cuales predetermina el aprendizaje del álgebra en los grados: octavo y noveno, sin ofrecer oportunidades de inclusión del aprendizaje del álgebra a temprana edad (Félix, 2009).

Esta escasa promoción del razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad y la desconexión del álgebra en Primaria y Secundaria requiere de estrategias que proporcionen elementos a profesores y a estudiantes que permitan identificar avances en el aprendizaje del álgebra y obtener una caracterización de la actividad matemática de acuerdo con los procesos y los objetos utilizados, y no de acuerdo con los resultados obtenidos en la actividad propuesta.

Es por ello que los niveles de algebrización propuestos por Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2014) señalan una ruta integradora que ubica a los estudiantes en los mencionados niveles, de acuerdo con la actividad matemática que realizan, y no simplemente a la solución de la misma; por tal razón, el proceso de modelación permite al profesor identificar rasgos característicos del razonamiento algebraico en estudiantes del grado noveno, para luego diseñar actividades y estrategias que favorezcan este razonamiento y progreso de cada estudiante.

Los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas externas (como por ejemplo, en las Pruebas Saber[1]) muestran dificultades referidas a la solución de problemas cuando éstos aparte de la solución, requieren una representación algebraica. Específicamente, estas pruebas muestran dificultades de los estudiantes al traducir situaciones de enunciado verbal a una expresión algebraica. Esta dificultad se agudiza en la solución de problemas no rutinarios o de varias operaciones, problemas que demandan del estudiante la puesta en juego de relaciones entre variables e identificación de un modelo que le permita dar solución al problema planteado.

[1] Las pruebas Saber son las pruebas externas realizadas a las Instituciones Educativas en los grados tercero, quinto, séptimo, noveno y undécimo, por El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.

La compresión de objetos algebraicos como variable, razón de cambio, ecuación y función es una de las razones que hacen de este estudio, una oportunidad para mejorar el proceso de enseñanza y de aprendizaje no sólo en el grado noveno, sino en otros niveles escolares de la Institución Educativa San Francisco de Asís. Otra de las razones por las cuales se realiza esta investigación, la constituye el desinterés que se percibe en estudiantes al iniciar la etapa algebraica cuando ellos expresan: “Es que antes no hacíamos operaciones con letras, ¿por qué ahora las letras tienen valor?” El desinterés de los estudiantes por las matemáticas aumenta en el grado noveno ya que estos se enfrentan a solucionar problemas de enunciados verbales, los cuales requieren el uso del lenguaje algebraico, y a situaciones que demandan el uso de conceptos como variable, ecuación y función.

Estos desafíos pueden ser afrontados a medida que el estudiante involucra sus experiencias en el aprendizaje a través de la formulación y solución de problemas del contexto, en donde a través de la modelación, el estudiante sea quien aparte de buscar información, organice y pruebe un modelo y proponga hipótesis, en el cual haga uso de objetos matemáticos como variable, ecuación y función. Además, con la orientación del profesor y la cooperación de profesionales de otras ciencias como: ingenieros y biólogos para conformar equipos interdisciplinarios, a fin de encontrar explicaciones desde las matemáticas y otras ciencias a fenómenos del mundo real, logrando así la integración y el carácter holístico del conocimiento. En este sentido, a través de la modelación de fenómenos y de problemas de enunciado verbal los estudiantes en un ambiente de comunicación con sus pares y profesor, de una manera flexible, entablan conversaciones y a través de preguntas orientadoras, el profesor estimula al estudiante a encontrar relaciones, entre variables de un fenómeno o experiencias seleccionadas a fin de establecer el modelo que representa el fenómeno o situación.

De esta manera, el estudiante modifica el aprendizaje del álgebra ya que desde situaciones y fenómenos cotidianos; como la medida del caudal de la quebrada, se aproxima a objetos matemáticos como variable, constante, razón de cambio y función. A través de la modelación del fenómeno, el estudiante establecerá relaciones, identificará variables y representará un fenómeno mediante la traducción entre el lenguaje natural (verbal, gestual) al numérico y al algebraico.

Del mismo modo, el proceso de modelación requiere de tiempo, y es necesario el apoyo de estrategias como el "aprendizaje colaborativo"[2] que proporciona al estudiante experimentación a través de artefactos, como la calculadora, y éste mida, compare, cuantifique, y a través de relaciones y de operaciones, traduzca situaciones del lenguaje natural al numérico y algebraico al representar el fenómeno o situación propuesta; en oposición al aprendizaje tradicional, en el cual el profesor es el poseedor de la información, donde teorías y conceptos se entienden como conocimientos acabados, sin dar lugar a la experimentación y confrontación con la realidad.

En la presente investigación se apuesta por la modelación como estrategia didáctica en la aproximación con objetos algebraicos en el aula de clase, para proponer soluciones a la situación problemática anteriormente planteada; por tanto, se formula la siguiente pregunta:

> ¿Cómo la modelación genera traducción entre el lenguaje natural numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos?

---

[2] Vygotsky (1979) refiere el aprendizaje colaborativo como un fenómeno social, en el cual la adquisición del conocimiento es el resultado de la interacción de las personas que participan en un diálogo, dialogo que permite que cada persona contraste su punto de vista con el del otro para llegar a acuerdos.

1.3. Objetivos: General y Específicos

1.3.1 Objetivo General

Analizar cómo la modelación genera traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rural San Francisco de Asís-Municipio de Jericó.

1.3.2. Objetivos Específicos

Describir elementos de traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico. a través de la modelación como estrategia didáctica.

Identificar rasgos característicos del razonamiento algebraico en estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Rural San Francisco de Asís a través de la modelación de situaciones de enunciados verbales y de situaciones cotidianas.

Proponer situaciones de modelación desde el contexto sociocultural de la institución Educativa San Francisco de Asís que permitan la comprensión de objetos algebraicos por parte de los estudiantes.

Identificar relaciones de correspondencia entre el razonamiento algebraico propuesto en Radford (2003, 2010), y los niveles de algebrización propuestos en Godino et. al. (2014) y las fases de modelación propuestas en Villa (2006).

Capítulo 2

2. Antecedentes Teóricos

En este capítulo se presentan algunos antecedentes teóricos con respecto al razonamiento algebraico y a la modelación como estrategia didáctica a través de la cual se recrean ambientes de aprendizaje que favorecen la traducción entre el registro de representación del lenguaje natural, numérico y algebraico. La escritura de este capítulo se hace con el propósito de establecer un punto de partida teórico para la presente investigación.

2.1. "Algunas" dificultades en la transición de la aritmética al álgebra

Estudios referidos a las dificultades de la aritmética al álgebra son pertinentes para mi investigación, ya que tienen en común aspectos tales como: la transición de la aritmética al álgebra se da de forma explícita en los grados octavo y noveno, grados en los cuales se llevará a cabo el presente estudio, además uno de los objetivos refiere la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, lo cual implica identificar aspectos asociados a dicha traducción como son las dificultades; finalmente, la identificación de las dificultades de la transición de la aritmética al álgebra se convierten en una oportunidad para ajustar y obtener eficacia en el momento de llevar acabo la propuesta metodológica, ya que dicha propuesta no solamente se realizará con base en la observación de los estudiantes del grado noveno, sino además con lo que la teoría informa al respecto.

Kieran y Filloy (1989) afirman que en la fase de la transición del razonamiento numérico al algebraico se evidencian dificultades cognitivas y didácticas que ameritan reflexiones permanentes de investigadores y profesores, con miras a proponer estrategias que faciliten la comprensión del álgebra en los estudiantes que transitan por la Educación Básica Primaria a la Secundaria. No obstante, los profesores de Educación Primaria, por la premura de avanzar en los contenidos del área, se limitan a verbalizar conceptos sobre los cuales los estudiantes escasamente logran memorizar aprendizajes a corto plazo, perdiéndose la finalidad del acto comunicativo en la enseñanza. Al respecto, Kieran y Filloy (1989) afirman:

> En la escuela elemental los niños resuelven ecuaciones sencillas como $3+ \square = 10$ o $3 +n = 10$ que a veces se llaman “proposiciones del sumando faltante”. Sin embargo, estas proposiciones se presentan fuera del contexto de auténticas situaciones con el resultado de que el niño carece de un apoyo en “el mundo real” para interpretarlas. De hecho, los niños no utilizan ecuaciones para representar problemas aritméticos, y si se les pide una representación algebraica, los niños resuelven el problema y luego intentan dar la ecuación, y esta representa por regla general las operaciones, sin incluir incógnitas, además el resultado del cálculo está del lado derecho del signo igual. (p. 3)

En el mismo sentido, en los primeros años de escolaridad se puede incurrir en una confusión con el lenguaje matemático, presentándose ambigüedades en lo que el profesor quiere comunicar. D’Amore (2011) afirma: “Para muchos maestros de Educación Primaria existe identidad entre el concepto que se quiere enseñar, el símbolo matemático y sus referencias algorítmicas” (p. 260). Esta confusión posiblemente generada por el profesor, incita al estudiante a preferir el uso del lenguaje numérico debido a que en la Educación Básica Primaria las tareas matemáticas referidas al cálculo numérico y operaciones básicas son las de uso más frecuente en la actividad matemática de los estudiantes durante las clases.

La falta de claridad en la comunicación por parte de los profesores, se constituyen en un obstáculo en el proceso de aprendizaje. Según D'Amore (2011), la enseñanza está basada en la comunicación cuya finalidad es propiciar el aprendizaje. Esta dificultad en la comunicación por parte de los profesores está asociada a que gran parte de ellos en Educación Primaria deben enseñar casi todas las áreas del plan de estudios, razón por la cual se les dificulta poseer un dominio profesional adecuado en el lenguaje algebraico, que les permita transformar con flexibilidad expresiones del lenguaje natural al algebraico.

En este orden de ideas, el proceso de aprendizaje de objetos matemáticos, tales como el de variable es mediado por la comunicación entre el profesor y sus estudiantes. constituyéndose este objeto matemático en uno de los que aporta algebraica; además, este objeto es relevante en otras áreas del plan de estudio, como las ciencias sociales y naturales, donde los fenómenos sociales y naturales, están en constante cambio y variación, y son interpretados y representados mediante variables; esta situación favorece significativamente el acercamiento de los lenguajes natural, numérico y algebraico.

Algunas dificultades en la transición de la aritmética al álgebra subyacen en la utilización de las letras. En el inicio de la etapa algebraica, según Kieran (1989), los estudiantes usan letras tan sólo para nombrar magnitudes y dimensiones (A: área, P: perímetro, a: altura), donde las letras son utilizadas como etiquetas, sin dar lugar a su interpretación como elemento de variación y cambio en ecuaciones algebraicas. Además, el signo igual tiene una connotación de acción o preposición, más que una señal de equivalencia. Algunas de las consecuencias evidenciadas al inicio del álgebra en la etapa escolar (grados octavo y noveno en nuestro caso) la constituyen la interpretación de las letras como incógnitas y no como números generalizados, en tanto que la utilización errónea del signo igual interfiere con la interpretación de la ecuación, como expresión algebraica de equivalencia, donde las variables pueden ubicarse en ambos miembros de la expresión, y no solamente al lado izquierdo, como suele usarse por los estudiantes en las clases de matemáticas.

2.2. Modelación matemática y niveles de algebrización

En el presente estudio se priorizará a través de la modelación (como estrategia didáctica) la traducción del lenguaje natural al algebraico, para ello es fundamental que el profesor identifique rasgos característicos del razonamiento algebraico en los estudiantes, a fin de proponer tareas y actividades de modelación pertinentes; de acuerdo con las necesidades de cada uno.

Aunque la propuesta en esta investigación no contempla la intervención en la Educación Básica Primaria, si considera la posición teórica realizada en el programa “Early Algebra”[3] (Carraher y Schliemann, 2007; Knuth, 2011; Smith, 2011), en donde se concibe la posibilidad de desarrollar el razonamiento algebraico desde la Educación Básica Primaria; esta posición fundamenta algunas tareas de la propuesta metodológica ya que algunas de ellas (problema de varias operaciones combinadas) no poseen el nivel de exigencia para el nivel de escolaridad al cual se aplican (grado noveno); no obstante, son pertinentes debido a las dificultades que dieron origen a la presente investigación, las cuales refieren a una escasa promoción del razonamiento algebraico de los estudiantes del grado noveno; igualmente, algunos estudios concluyen que estudiantes con experiencias algebraicas en la Educación

[3] Álgebra temprana.

Básica Primaria obtienen buenos desempeños en el aprendizaje del álgebra en la Educación Secundaria (Strother, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi. 2012).

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2014) enfatizan en la identificación del nivel de algebrización que “corresponde a la actividad matemática realizada por el estudiante y no a la tarea” (p. 3). Estos niveles de algebrización están basados en distinciones ontosemióticas, tales como: presencia de objetos algebraicos, lenguajes utilizados y tratamiento a dichos objetos algebraicos. Dicha caracterización del álgebra escolar señala seis (6) niveles; los tres (3) primeros en la Educación Básica Primaria, y los tres (3) últimos en la Educación Básica Secundaria.

Los niveles de algebrización (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2014) caracterizan el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) de acuerdo con objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. Estos niveles permiten al profesor identificar rasgos característicos según objetos y lenguaje utilizados en la actividad matemática realizada por los estudiantes. Al respecto, Godino y Batanero (1994) refieren a objeto matemático, concepto o noción, en términos de una función semiótica cuyo antecedente es la expresión que nombra al objeto algebraico y el consecuente o significado es el sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona.

A continuación, se presentan algunas características de los niveles de algebrización, los cuales fueron considerados para caracterizar el razonamiento algebraico en el presente estudio, junto a las fases de generalización algebraica para estudiantes de secundaria (Radford, 2003, 2010), y las tres primeras etapas de modelación matemática (Villa, 2006). Para efectos de la caracterización del razonamiento algebraico, en la Tabla 1 se presentan tanto objetos algebraicos como lenguajes utilizados en las tareas realizadas por los participantes del presente estudio.

En el nivel uno (1) aparecen objetos intensivos[4] y su carácter de generalidad se reconoce de manera explícita a través del lenguaje natural e icónico. Pueden intervenir símbolos que refieran a los objetos intensivos reconocidos, pero no se opera con ellos, se identifican propiedades de las estructuras algebraicas de los Números Naturales y la igualdad como equivalencia; en tareas funcionales se reconoce la generalidad en un lenguaje diferente al algebraico.

El nivel dos (2) es intermedio de algebrización; ocurre el primer encuentro con la representación alfanumérica de ecuaciones, funciones y simplificación de expresiones. En tareas estructurales[5] las ecuaciones son de la forma $AX \pm B = C$, en tanto que en tareas funcionales se identifica la generalización, pero no se opera con variables para obtener formas canónicas de la expresión algebraica.

En el nivel tres (3) intervienen indeterminadas o variables, y se opera con ellas. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma AX ±BY=CX±D. En el nivel cuatro (4) se identifica un segundo nivel de generalidad con la utilización de parámetros al determinar familias de funciones en una función dada.

El nivel cinco (5) se caracteriza por el tratamiento de parámetros; por ejemplo, al hallar el término general de una progresión geométrica a través del tratamiento de dos parámetros, el primer término y la razón de la progresión.

---

[4] Los objetos intensivos según Godino (2002) están referidos a la dimensión dual extensivo-intensivo (ejemplar-tipo) en la cual es utilizado el objeto algebraico, donde lo intensivo indica la forma general (familia de funciones),$(y = mx + b)$ y lo extensivo está asociado al ejemplo de la familia de funciones $(y = 2x + 3)$.
[5] Las tareas estructurales están referidas a estructuras algebraicas (propiedades que las operaciones cumplen en un conjunto, tales como propiedad de la cerradura en la suma del conjunto de los enteros).

A continuación, se presentan rasgos característicos de algebrización según los niveles de razonamiento algebraico de generalización para estudiantes de secundaria (Radford, 2010) y las primeras tres fases de la modelación (Villa, 2006). En la Tabla 1 también se considera la clasificación de los niveles de algebrización (Aké, Etchegaray, Godino, Neto, Lasa y Wilhelmi, 2014). La Tabla 1 es uno de los instrumentos teóricos que permitió caracterizar el razonamiento algebraico de acuerdo con las tareas matemáticas y actividades de modelación de los dos estudiantes participantes de la investigación.

Nivel	Fases de la Modelación, (Lenguaje y objetos algebraicos)	Generalización factual	Generalización contextual	Generalización Simbólica	Nivel de algebrización Godino et al (2014)	Uso de Parámetros
A	Lenguaje natural (gestos, expresión verbal) Fase modelación Experimentación identificación de cantidades variables y datos en la situación a modelar.	Acciones concretas sobre números, expresión de la generalización a través del ensayo error.			Nivel 3 Representación de enunciados a través de ecuaciones	Relación de expresiones como: “el doble”,” la mitad de una cantidad variable”, a través de expresiones en el lenguaje alfanumérico 2x, 1x/2
B	Modelación fase abstracción Determinación de las relaciones funcionales entre las variables e información suministrada en la tarea o actividad a través de la expresión verbal.		Cálculo del término general en una secuencia dada las figuras o las cantidades. Determinación del modelo de una tarea o situación a través de la expresión verbal.		Nivel 4 Identificación dela Dependencia y covariación entre dos variables,	Dada una función, identifica familia de funciones pertenecientes a ella Reconocimiento de parámetro como constantes operadores coeficientes literarios (multiplicación, división potenciación).
C	Modelación fase resolución o determinación del modelo en el lenguaje algebraico			Uso de ecuaciones y funciones en tareas matemáticas Expresión del modelo en el lenguaje algebraico. Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas en forma gráfica y algebraica	Nivel 5 Tratamiento de parámetros para hallar la forma canónica de una expresión Dada la ecuación de la recta AX+BY+C=0, encuentra la pendiente y los interceptos x, y. Representa en forma gráfica y de la forma punto pendiente la ecuación general de la recta	Identificación de parámetro como número generalizado que cambia la forma de una gráfica o modifica una secuencia. Tratamiento a parámetros para obtener la forma canónica de una función

Tabla 1: Caracterización del Razonamiento Algebraico (Elaboración Propia)

Kieran (2007) y Radford (1996) afirman que no hay respuestas claras sobre qué tareas corresponden con los razonamientos algebraicos y cuáles no, y qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de razonamiento algebraico. No obstante, es posible encontrar afinidades entre Radford (2003, 2010) y Godino et al. (2014) de acuerdo a la práctica matemática y actividades de modelación realizadas por los estudiantes.

La importancia de identificar rasgos característicos del razonamiento algebraico se asocia con la necesidad de encontrar discontinuidades en el uso de distintos registros de representación semiótica y el tratamiento; este análisis de objetos y procesos algebraicos puede identificar los rasgos de las prácticas matemáticas sobre las cuales el profesor puede intervenir para potenciar el razonamiento algebraico en los estudiantes, entendiéndose como prácticas matemáticas a una actuación o una expresión verbal gráfica para resolver tareas y problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). En este sentido, Pino-Fan (2007) se refiere a los significados matemáticos asociados con objetos que intervienen en la solución de problemas y tareas matemáticas, por ello es preciso mencionar las redes socio epistémicas (Godino y Batanero, 1994).

En el análisis de los datos de la presente investigación se consideran las redes de objetos personales (del profesor), más que las institucionales, ya que en la Institución es prematuro hablar de comunidad académica; no obstante, la Institución Educativa en el plan de estudios para el grado noveno considera la aproximación a los objetos matemáticos: razón de cambio, función lineal y proporcionalidad. Esto se materializó en esta investigación a través de la adaptación de la tarea sobre funciones (Godino et al., 2014) y la tarea de modelación del aforo de la quebrada.

Modelación matemática como estrategia didáctica

La concepción de modelación que se asume en esta investigación se debe a las limitaciones del currículo de la Institución Educativa San Francisco de Asís, que aunque en el plan de estudios se promueva los proyectos de investigación, estos aún no han tenido el suficiente trabajo como para eliminar el asignaturismo[6] y promover la construcción de los conceptos matemáticos desde la actividad sociocultural de los estudiantes.

En esta investigación, la modelación se asume como estrategia didáctica que propicia ambientes colaborativos en el aula de clase, para aprovechar la participación y la actividad de los estudiantes en beneficio de la aproximación a objetos algebraicos; en este sentido, Bassanezi (2002) propone la modelación matemática como una actividad cíclica de abstracción y generalización en la cual el estudiante debe dar cuenta según Radford (2003, 2010) de un nivel del razonamiento algebraico de generalización simbólica que le permita establecer relaciones entre las variables que intervienen en la actividad matemática, o en el fenómeno del cual se desea encontrar el modelo, donde dichas relaciones entre variables pueden ser expresadas a través de relaciones y operaciones alfanuméricas, lo que corresponde en la modelación a la fase de abstracción, la cual refiere la obtención del modelo del fenómeno o tarea matemática (Bassanezi, 2002; Posada y Villa 2006).

En la presente investigación, la modelación propuesta como estrategia didáctica en la aproximación a objetos algebraicos sugiere identificar en las tareas matemáticas o fenómenos las mencionadas fases de la modelación matemática; fases de la modelación que están asociadas con el desarrollo de las fases del razonamiento algebraico (Radford, 2003, 2010,

[6] Expresión de los profesores, entendido como el plan de estudios escolar conformado por asignaturas y áreas.

2013); y los niveles de algebrización (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2014).

2.3. Lenguaje natural, numérico y algebraico.

El presente apartado tiene como fin informar sobre los antecedentes referidos a la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, donde algunos autores informan respecto de elementos presentes en dicha traducción tales como propiciar al estudiante tareas enriquecidas de contexto (imágenes, gráficos, secuencias) para que el estudiante encuentre significado desde lenguaje el natural, gráfico y numérico, y pueda realizar una "fiel copia "de la tarea matemática, por ejemplo un enunciado verbal, en el lenguaje algebraico; en este apartado se informa además algunas diferencias y similitudes entre el lenguaje natural numérico y algebraico, elementos fundamentales para hacer efectiva la traducción en la realización de tareas matemáticas por los estudiantes (Freudenthal, 1971; Freudenthal, 1983; Radford, 2004).

El lenguaje se concibe como una herramienta social, y su adquisición requiere el desarrollo de estructuras que permitan su aparición, específicamente la función simbólica (Freudenthal, 1983; Radford, 2004). El lenguaje se aprende en un contexto fáctico en conexión con el entorno humano, mientras más formal sea un lenguaje, más pobre puede ser el contexto de aplicación.

La traducción se concibe como el acto de reproducir el mismo contenido en otro lenguaje; por tanto, cabe mencionar la necesidad de darle significado a las expresiones aritméticas, de tal manera que en la fase de traducción al lenguaje algebraico se obtenga una reproducción exacta del contenido y de esta forma, el estudiante pueda manipular las expresiones algébricas con la misma facilidad que lo hace en el lenguaje numérico (Freudenthal, 1971).

Un lenguaje algebraico es aquel en donde las expresiones se pueden imitar, manejar y comprobar si son correctas al considerar su regularidad, sin importar el significado. En el lenguaje aritmético, los problemas obedecen a ciertas reglas al igual que en el lenguaje algebraico y natural, reglas que señalan, por ejemplo, como se construyen las palabras, porque 7+5= es admisible en tanto que 7+=5, no lo es. La secuencia contadora es un sistema formal como en un cuento donde cada palabra produce la siguiente, hay reglas formales para traducir un número en una lengua nativa a un número escrito en cifras, uno en árabe a uno en romano, los problemas aritméticos y su solución es un asunto formal, funciona de acuerdo con unas reglas 3+5=12, se adquiere por intuición y se convierte en una expresión lingüística automática, lo mismo sucede con las tablas de multiplicar, las unidades y las decenas son reglas, procesos formales.

En la enseñanza tradicional de la aritmética, errores cometidos por los profesores como el de escribir siempre la operación y luego el igual, no da lugar a la interpretación del signo igual como símbolo de equivalencia; por tanto, en expresiones como 8+x=12, no es asumida la x como resultado; de igual manera al trabajar reglas formales, como multiplicar por cien (100) y sumar decimales se hace fundamental justificarlas. Los significados en el lenguaje natural se convierten en reglas en el lenguaje aritmético y algebraico. Freudenthal en Puig (1997) sostiene que: “el campo semántico de los estudiantes debe ser lo suficientemente rico de tal forma que les permita la interpretación de un objeto mental en sus diferentes sistemas de representación” (p. 18).

En el mismo orden de ideas, Freudenthal (1983) se refiere a los objetos algebraicos como medios de organización de fenómenos. Esta idea es importante para la presente investigación ya que, en actividades como el aforo de la quebrada, los estudiantes se aproximan a objetos algebraicos tales como variable, razón de cambio, función, variable independiente, entre otros. Además, señala Freudenthal (1971) “los objetos mentales están en la mente de las personas porque son elaborados a partir de sus experiencias como medios de organización de fenómenos; los conceptos y los objetos matemáticos están en las matemáticas como disciplina, y también son medios de organización de fenómenos” (p.411).

Félix (2009) expone algunas dificultades de estudiantes en la constitución del objeto matemático variable, parámetro e incógnita de una manera significativa y diferenciada; este autor indaga por la necesidad de proporcionar al estudiante elementos donde pueda visualizar en forma explícita los tres (3) usos de la variable a través de la metodología 3uv (tres usos de la variable).

En el trabajo, el autor hace una descripción de los antecedentes de la investigación donde referencia el trabajo de Furinghetti y Paola (1994) en el cual se informa sobre las dificultades de este objeto algebraico en relación con la parte semántica y sintáctica. Ursini y Trigueros (1998) mencionan al respecto que los parámetros son números generales de segundo orden que permiten la generalización de una expresión algebraica, como la fórmula del área de un cuadrado, ecuaciones con coeficientes numérico; los parámetros indican familias de ecuaciones y funciones de primer orden como 4x-2b=6, f(x) = kx-4.

En este sentido, Radford (2003) identifica tres niveles de generalización pre-algebraicas en estudiantes de básica secundaria: una referida a la generalización factual, la cual está asociada al nivel concreto, donde el estudiante usa deícticos y gestos; la generalización contextual que indica un nivel más avanzado, que aunque no logra una representación algebraica, el estudiante generaliza sobre figuras y cantidades que no puede percibir con sus sentidos; y el último nivel, de generalización referido a la generalización simbólica, donde el estudiante hace uso de la representación alfanumérica para expresar la generalización a través de una función o ecuación. El uso de parámetros en una función es indicativo de una nueva capa de generalización (Radford, 2011).

Los estudiantes deben comprender el concepto de generalización de segundo orden, de lo contrario, incurrirían en una interpretación del parámetro como número general. El estudiante puede reconocer patrones, reglas y no alcanzar a simbolizar dichos patrones. En estas investigaciones se muestra el gran valor que tiene utilizar ecuaciones en forma simultánea, tales como, y= 3x-2, y= 1/2x-4 donde el estudiante de forma intuitiva identifica que los números representan algo común y luego deduce la ecuación punto pendiente de la recta; esta clase de ejercicios ayudan a darle sentido a la generalización al pasar de casos particulares a generales; asimismo, se evidencia en estas investigaciones que es necesario explicitar la función de los parámetros en expresiones como $(x-y)^2$ para que no se incurra en el error de interpretar al número dos como una indicación (Radford, 2003; Ursini, 1994); Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Trigueros, 2003; Ursini y Trigueros, 1998).

Otero (2007) en su estudio, explica el proceso de construcción de la noción de variable en niños de cuatro a ocho años de edad en situaciones experimentales; el autor describe como los niños usan el término cambio y las nociones antes y después que dan la idea de temporalidad, características como diferencia de peso y altura de los objetos dan la idea de variación, además concluye el autor que cuando los niños explican en un fenómeno la relación de causalidad establecen, relaciones entre variables.

Molina (2006) presenta un experimento de enseñanza realizado con base en sentencias (expresiones numéricas con el signo igual) donde se promueve la integración del razonamiento algebraico y numérico desde la Educación Primaria y se evidencia la capacidad de los estudiantes para trabajar en aritmética de un modo algebraico, y de esta manera, el estudiante identifique generalidades y relaciones. Esta propuesta desde la Educación Primaria contiene el estudio y generalización de patrones, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación de simbolismo y la modelación como dominio de expresión y formalización de generalizaciones a temprana edad. Masón, Graham y Johnston (2005), y Carraher y Schliemann (2007) indican que el álgebra subyace a la aritmética, ya que consiste en aprendizaje de métodos y generalidades para hacer cálculos aritméticos y obtener el resultado, siendo el álgebra la que le permite al estudiante encontrar una forma estructurada de obtener dichos resultados. Es decir, para contar y hacer cálculos numéricos se requiere tener un método. Por su parte, Drijvers (2003) afirma que "el álgebra tiene sus raíces en la aritmética", en tanto que ésta brinda oportunidades al estudiante para razonar, generalizar y simbolizar; el álgebra generaliza la aritmética.

En este sentido, el uso del razonamiento relacional con expresiones aritméticas y algebraicas, concibe las expresiones como totalidades, susceptibles de ser ordenadas y transformadas, además se privilegia la exploración e identificación de patrones y relaciones sobre los números y operaciones (generalización), y de esta manera, que los estudiantes identifican propiedades y formas para resolver las operaciones.

Posada y Villa (2006) centran su propuesta didáctica en la función lineal desde la noción de variación, los registros semióticos de representación y el proceso de modelación matemática, entendida como la actividad cognitiva de transformación del lenguaje natural al algebraico. La propuesta está diseñada en cuatro fases, las cuales inician con un análisis de la importancia de la implicación de la función como herramienta fundamental para modelar fenómenos sociales, naturales y en las demás ciencias del conocimiento.

Este trabajo recoge los aportes de Sierpinska (1992), investigadora que destaca la importancia respecto de la construcción del objeto algebraico, función, desde una mirada de las relaciones y variación, más que por ejemplos prototipo y definiciones, además esta investigadora clasifica la comprensión del concepto de función de acuerdo a sus características y relación con otros conceptos desde el punto de vista de la variación; la comprensión desde los usos y el valor cultural, desde la interpretación de algunos de sus elementos, características y su relación con otros conceptos, además de la comprensión desde los diferentes sistemas de representación. Posada y Villa (2006) referencia la conceptualización de Sfard respecto de función; una que atiende al carácter estructural; es decir, objeto estático e integrado, y otra interpretación de tipo operacional, siendo ambas interpretaciones complementarias. Los investigadores de este trabajo acogieron el enfoque operacional de función por ser dinámica y acomodarse a las características de la modelación de fenómenos de variación y cambio.

Vergel (2015) identifica y estudia las formas del razonamiento algebraico, de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos en estudiantes de cuarto y quinto de 9 y 10 años en el aula en actividades sobre generalización de Patrones. En un segundo apartado Vergel (2015) expone la fundamentación teórico de su estudio, la cual es abordada desde la concepción de cultura y su implicación en el aprendizaje, la mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotsky (2007) y su influencia en el desarrolla el razonamiento, que a la vez es determinante en la teoría de la objetivación; este trabajo se fundamenta en el gesto como medio semiótico de objetivación y las ideas de nodo semiótico son analizados desde la actividad matemática desarrollada por los estudiantes.

Esta investigación caracteriza el razonamiento algebraico de acuerdo al enfoque de Radford (2010), quien lo analiza desde tres elementos a saber: la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica, siendo esta última la que aporta al presente estudio por estar en consonancia con la pregunta de investigación. Este autor concluye que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, las miradas, la ritmicidad y la actividad perceptual, son manifestaciones del razonamiento algebraico temprano; otro aporte de este estudio tiene que ver con el apoyo que hacen los estudiantes del lenguaje natural para expresar nociones de tiempo como: "sigue sucesivamente" a través de expresiones corporales; este autor señala, además la necesidad de incorporar al lenguaje algebraico la dimensión lingüística con los deícticos espaciales (el que sigue, aquí, arriba)

Este autor concluye que las secuencias figurales propician una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un elemento importante en el desarrollo del razonamiento algebraico. Estas estructuras fueron un referente para efectuar la generalización. Finalmente, a manera de recomendación, este estudio sugiere la necesidad de involucrar aspectos corpóreos en el aprendizaje del álgebra escolar.

2.4. Resumen del Capítulo

El presente capítulo informó sobre los antecedentes y referentes teóricos de la investigación, los cuales tienen como punto de partida las dificultades manifiestas en el proceso de aprendizaje en la etapa de transición al álgebra. En la investigación efectuada por Kieran y Filloy (1989) se concluye que las dificultades presentadas por los estudiantes cuando inician el aprendizaje del álgebra en forma explícita (grados octavo y noveno) son el reflejo de errores didácticos y la usencia de la promoción del lenguaje algebraico en el inicio de la escolaridad.

De otro lado, Carpenter y Moser (1984) ratifican lo expuesto por Kieran y Filloy (1989) al afirmar que las dificultades de los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra son consecuencia de un arraigo en el aprendizaje desde el lenguaje numérico sin dar lugar al acercamiento entre el lenguaje algebraico y numérico desde enunciados verbales. Puig y Rojano (2008) culpan de dificultades al inicio del álgebra en estudiantes a un aprendizaje procedimental basado en algoritmos, durante la Educación Básica Primaria; D'Amore (2011) se suma a la lista de los autores que indican como causante de las dificultades en el aprendizaje al inicio del álgebra en el grado noveno, a la prevalencia del aprendizaje procedimental y algorítmico durante la Educación Básica Primaria.

Finalmente, Kieran y Filloy (1989), Filloy, Puig y Rojano (2008), D'Amore (2011) y Carpenter y Moser (1984), coinciden y se ratifican en la necesidad de iniciar el aprendizaje del álgebra desde la Básica Primaria; para ello, plantean la posibilidad de utilizar estrategias que permitan a los profesores vincular el contexto sociocultural del estudiante y situaciones cotidianas a través de estrategias didácticas como la modelación que les posibilite inferir regularidades, afianzarse en la generalización a fin de determinar modelos de tareas matemáticas y de fenómenos del mundo real. En este orden de ideas, resulta fundamental en la planeación de las tareas de modelación por parte del profesor, identificar o caracterizar el razonamiento algebraico de los estudiantes.

La modelación de situaciones matemáticas y cotidianas permite al estudiante transitar desde situaciones cotidianas (lenguaje natural y numérico) hasta lograr la expresión algebraica o modelo del fenómeno, y en este sentido, caracterizar el razonamiento algebraico aparece como ruta integradora para identificar los rasgos que den indicios de un aprendizaje progresivo en el álgebra de los estudiantes.

La parte final de este capítulo refiere la necesidad de aproximar los procesos de traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, a través de situaciones de modelación, ya que algunos estudios concluyen que desde la Educación Primaria se puede iniciar el aprendizaje del álgebra; señalan estos autores la necesidad de dar significado y argumentar las operaciones aritméticas, ya que dichos significados, se constituyen luego en las leyes del álgebra (Freudenthal, 1983; 1971, 1997; Radford, 2004; Ursini y trigueros, 1998, 2004; Molina, 2006).

Capítulo 3

3. Diseño Metodológico

En este capítulo se informan las características de la metodología cualitativa usadas en esta investigación. Dichas características corresponden con el carácter holístico, dinámico y orientado hacia el proceso del objeto de investigación. Para el diseño metodológico se han utilizado algunas fuentes para recolección de los datos, tales como la observación directa y el diálogo entre estudiante y profesor. Posteriormente, se describe en qué consiste el estudio de caso. Finalmente, se informa sobre el contexto en el cual se lleva a cabo la investigación e instrumentos de recolección de datos y la metodología. El esquema metodológico de la investigación se presenta en la Ilustración 1.

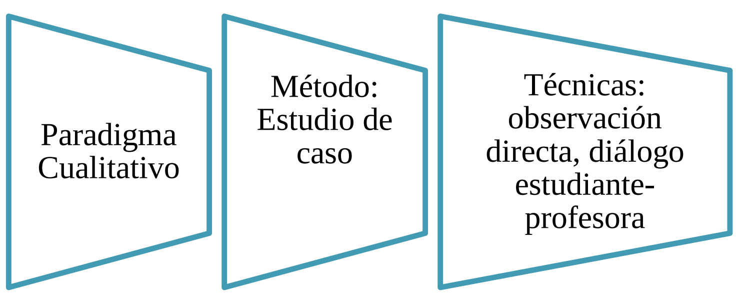


Ilustración 1: Esquema Metodológico de la investigación

3.1. Enfoque metodológico

En la investigación se utilizará el enfoque fenomenológico-hermenéutico en el cual se hará uso del diálogo entre estudiantes y profesora, basado en tareas con grupos colaborativos conformados por tres (3) estudiantes del grado noveno de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Rural San Francisco de Asís.

3.2. Metodología cualitativa

Esta investigación se orienta por una metodología cualitativa ya que interpreta la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico a través de la modelación como estrategia didáctica, y en la aproximación a objetos algebraicos. La modelación privilegia la interacción entre estudiantes, profesora y contexto debido a que el comportamiento humano está determinado por significados e intereses que cada persona le otorga a la actividad que realiza.

En este sentido, las tareas de modelación propician espacios de diálogo a través de los cuales cada estudiante cambia el rol de ser receptor de conocimiento, a ser él quien busca y transforma dicho conocimiento en beneficio de su interés. Es así como, desde el contexto sociocultural de la Institución Educativa San Francisco de Asís, se presentan actividades de modelación que permiten que los estudiantes del grado noveno se aproximen a objetos algebraicos por medio de la cotidianidad de cada uno. Por su parte, en esta investigación se destaca al investigador como un agente activo en los hallazgos, ya que estos ocurren en la interacción entre la investigadora y el fenómeno.

La comprensión resulta valiosa al identificar procesos de traducción a través de situaciones de modelación llevadas a cabo por estudiantes, donde la observación y el diálogo durante la práctica pedagógica permiten la comprensión del objeto de estudio durante las experiencias vividas entre investigadora y estudiantes (Stake, 1999). La observación directa y los diálogos con los participantes proporcionan a la investigadora una comprensión directa del objeto de estudio.

La interpretación desde la experiencia hace que la investigadora permanezca en contacto con el desarrollo de los acontecimientos (Stake, 1999). Ello favorece la modelación de situaciones cotidianas y escolares, como la actividad de aforo de la quebrada, donde se pretende que los estudiantes se aproximen a la expresión C= V.A[7]. No obstante, se consideran otras construcciones de los estudiantes como la identificación de formas geométricas para calcular áreas, la realización del mapa del recorrido en el cual cada estudiante establecerá relaciones de proporcionalidad entre las distancias recorridas, las dimensiones de los objetos (concepto de semejanza), además de la forma como cada estudiante asocia y utiliza el concepto de área de superficies que ha aprendido en grados anteriores.

3.3. Experiencias para la comprensión

El lenguaje es una producción humana que se da a través de la interacción con el contexto, por ello es necesario en el contexto social, el diálogo y la observación directa para lograr comprensión de la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico en tareas matemáticas y actividades de modelación

[7] El caudal entendido como la relación de proporcionalidad inversa entre velocidad y área; ecuación de caudal.

3.4. Hacia la interpretación

La interacción permanente con los estudiantes en actividades en el aula, la observación y el diálogo, permiten interpretar el significado de expresiones, gráficas y gestos, ya que estos son elementos del lenguaje. Los antecedentes teóricos presentados en el capítulo 2, permiten establecer puntos en común a fin de obtener una aproximación desde la experiencia.

3.5. Estudio de caso

En esta investigación se usa el estudio de caso debido a que se requiere un estudio descriptivo con el fin de identificar elementos de la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, a través de actividades de modelación y tareas matemáticas en la aproximación a objetos algebraicos con estudiantes del grado noveno de Educación Básica inmersos en su contexto de situaciones de aula (Stake, 1999, 2005).

El estudio de caso como método de investigación se fundamenta en que los resultados se basan en múltiples recursos de evidencia; para esta investigación se utilizó el registro fotográfico de cada una de las tareas matemáticas realizadas por los estudiantes con su respectiva intervención, a través de la entrevista semiestructurada a cada uno de los participantes.

Los casos corresponden a dos, la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, a través de la modelación como estrategia didáctica en la aproximación a objetos algebraicos de Emily, y el caso de la traducción entre el lenguaje, natural numérico y algebraico, a través de la modelación como estrategia didáctica en la aproximación a objetos algebraicos de Diego.

En esta investigación se utilizaron procesos de triangulación. En la fase diagnóstica la información fue suministrada por los profesores del área en colaboración con la profesora investigadora; en esta fase se eligió el objeto de estudio, así como los participantes, a quienes les fue aplicada la tarea diagnóstica sobre el razonamiento algebraico (Jaramillo, Mesa, Monsalve, Múnera, Obando, Posada, Restrepo y Vanegas, 2007). Posteriormente, fueron aplicadas las tareas sobre funciones, el problema de una operación (Puig y Cerdan, 1990) y las tareas de modelación del aforo en los grifos y en la quebrada.

A partir de estos instrumentos se realizó una entrevista semiestructurada y posterior a ello se realizó el análisis teniendo en cuenta los referentes teóricos. El estudio de caso obedece a un diseño, donde el caso se estudia apreciando su complejidad y su singularidad, mediante consideraciones con su interrelación en el contexto y a través de la recolección de datos que demanden la interacción de la investigadora, participantes y contexto en el cual está inmerso el objeto de estudio. La investigadora, aunque interactúa con los estudiantes, no asume posiciones para modificar el objeto de estudio, su voz en el informe es imparcial; en la presente investigación además cumplió el rol de profesora.

3.5.1. Contexto[8]

Esta investigación se realiza con estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Rural San Francisco de Asís del municipio de Jericó; institución ubicada a doce kilómetros del casco urbano. La institución posee dos sedes, las cuales distan entre sí ocho kilómetros. Los estudiantes cuya vivienda dista entre dos hasta cinco kilómetros se sirven

[8] Tomado de la página web del municipio de Jericó http://www.jerico-antioquia.gov.co/index.shtml.

del transporte escolar, el cual es subsidiado por el municipio con un aporte mínimo de cada estudiante.

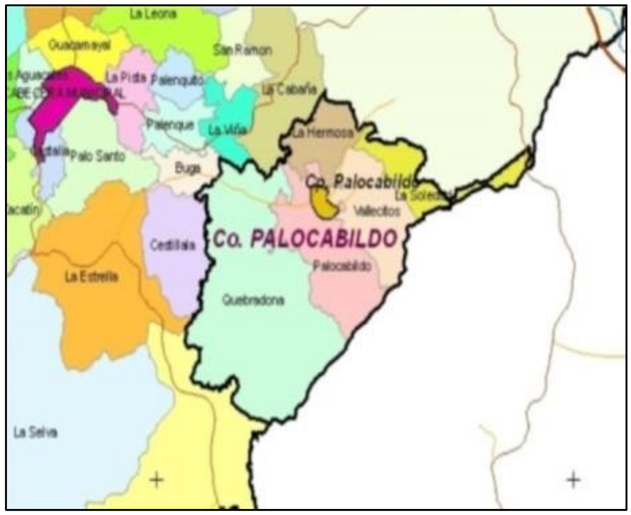
El escaso nivel educativo de gran parte de los padres de familia es quizás uno de los factores determinantes en la falta de motivación de los estudiantes para profundizar y continuar realizando trabajos y tareas en su hogar, ya que no hay un acompañamiento por parte de ellos. Además, a ello se suma la escasa o falta de conectividad a internet y acceso a la información en horario extraescolar.

La Institución Educativa se ha consolidado como un referente en cuanto a la conservación ambiental debido a su modalidad en la media técnica, que a través del plan de estudios promueve la cultura ambiental en los estudiantes para que estos se apropien del entorno de una de una manera responsable con el medio ambiente.

La Institución por estar ubicada en una zona de exploración minera ha acarreado confrontaciones de índole verbal, en las cuales se han involucrado padres de familia, estudiantes y algunos profesores. Los profesores en su gran mayoría han adoptado un punto de vista a favor de la preservación del medio ambiente, y en los padres la adopción de puntos de vista está dividida, por ser precisamente la minería una fuente generadora de ingresos en las familias.

El Municipio de Jericó está ubicado en la subregión suroeste de Antioquia, limita por el norte con los municipios de Tarso y Fredonia, por el Oeste con los municipios de Fredonia y Támesis, por el sur con los municipios de Támesis, Jardín y Andes, y por el oeste con Andes y Pueblorrico. El municipio de Jericó cuenta con una población total de 12103 habitantes, de los cuales 8460 están ubicados en la parte urbana y los restantes 3643 habitantes se ubican en la parte rural. Este municipio tiene un área superficial de 193 km^2.

La economía del municipio de Jericó se basa en la agricultura. En los últimos dos años, el sector turístico se ha fortalecido a causa de la declaración de la única Santa Colombiana: La Madre Laura. La ilustración 2 presenta el mapa del corregimiento.



[9]

Ilustración 2: Mapa del corregimiento Palocabildo

3.5.2. Participantes

En este proceso se hizo un seguimiento a los estudiantes a través de la observación directa durante las clases, con el fin de identificar en cada participante aspectos, como la motivación de los estudiantes al realizar las tareas.

Los participantes de la investigación son: Emily y Diego. Emily es una estudiante que disfruta del trabajo en matemáticas, muestra de ello es la frecuente participación con preguntas o aportes. Ella posee facilidad para comunicar sus razonamientos; en el trabajo colaborativo, ella asume un rol protagónico sin desconocer la participación de los demás compañeros que integran su grupo de trabajo, ella es ordenada y estudiosa.

[9] Tomado de la página web del municipio de Jericó http://www.jerico-antioquia.gov.co/index.shtml

Diego sobresale en el grupo de noveno por su espontaneidad, además posee facilidad para comunicarse y relacionarse con sus compañeros y profesores. Él manifiesta interés por aprender, ello se evidencia en el empeño durante las actividades de clase.

En la presente investigación, aparte de los participantes seleccionados (Diego y Emily) los cuales permitirán estudiar los casos que forman parte del análisis, también son observadas las situaciones de los demás estudiantes del grado noveno durante las clases y actividades en el área de matemáticas, con el fin de obtener información no solamente en forma individual a través del diálogo y tareas matemáticas; sino además del trabajo colaborativo como en la tarea del aforo de la quebrada.

3.5.3. Acciones para la elaboración de instrumentos

La observación del objeto de estudio a través de la experiencia, proporciona información pertinente para el análisis de los casos, de tal forma que la información obtenida sea confiable y válida, ya que los instrumentos se emplean con estudiantes del grado noveno con el fin de comprender e interpretar desde el mismo nivel de escolaridad la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico, a través de la modelación de situaciones cotidianas y matemáticas.

Las actividades matemáticas están referidas a situaciones en las cuales el estudiante moviliza las competencias matemáticas (formular y resolver problemas, comunicar, modelar procesos y fenómenos de la realidad y realizar algoritmos); es por ello que en toda actividad matemática, se hace necesario que el estudiante además de proponer soluciones a cada una de las tareas propuestas en la actividad comunique y argumente a sus compañeros sus soluciones. La situación problema exige del estudiante un estado de desequilibrio en el cual él debe establecer relaciones y operaciones entre la información suministrada (datos) y la pregunta por resolver, a fin de encontrar solución a la situación planteada. Así, el problema requiere que el estudiante ponga en juego conceptos previos en contextos diversos. La tarea es el paso a paso en una actividad matemática, es cada una de las preguntas que van conduciendo a la solución final de la actividad.

3.5.4. Instrumentos y técnicas utilizadas

El estudio de caso demanda la utilización de instrumentos que faciliten la recolección de datos en forma detallada con respecto al objeto de estudio. El diálogo y la observación son técnicas que permiten obtener información clara y precisa del objeto (Stake, 1999). En este estudio, se hará uso del diálogo, la observación directa durante las clases; además, de la información suministrada por los participantes a través de las tareas de modelación. La observación se realiza durante la ejecución de la investigación para interpretar el objeto de estudio.

3.5.5. Momentos de la investigación

3.5.5.1. Momento de diagnóstico

Al iniciar esta etapa se realizó un conversatorio con los profesores de matemáticas de la Institución respecto de las dificultades en el proceso de aprendizaje en el área, en las cuales la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico se hizo relevante. Posterior a ello, la investigadora informa sobre el tema de investigación, el cual se realizará con estudiantes del grado noveno de la Institución. En este momento de diagnóstico se propuso a los estudiantes del grado noveno una situación sobre el razonamiento algebraico, durante la primera semana escolar. Esta actividad se realiza con el objetivo de encontrar rasgos y características del razonamiento algebraico en los estudiantes del grado noveno, según los objetos algebraicos y el lenguaje utilizado al resolver la tarea; adicionalmente, se espera que estos traduzcan enunciados verbales con el uso de operaciones numéricas y, posterior a ello, simbolicen las relaciones entre las magnitudes que intervienen en la situación.

***3.5.5.2.*Momento de Aplicación de tareas sobre modelación**

En esta fase de la investigación se presentan a los estudiantes situaciones de modelación, en las cuales se busca obtener información no solamente a través del diálogo sino de la observación directa durante la realización de la actividad en el aula. Gran parte de las tareas fueron propuestas en grupo, para considerar la construcción del saber como actividad fundamentada en la acción social de cada persona y determinada por la cultura (Leontiev, 1977; Radford, 2004).

La actividad intelectual de cada estudiante está relacionada con el saber, el razonamiento y la cultura; así mismo, la actividad está conformada por un objetivo que la orienta con un valor científico y una significación cultural que mediatiza la actividad semiótica en un primer estrato; el otro componente son los medios, los cuales permiten materializar la actividad y mediatizarla en un segundo estrato de la actividad semiótica (objetos, instrumentos, signos, el lenguaje, entre otros). Según Vygotsky (1979) citado por Radford (2004) el uso de signos, instrumentos y objetos (en la presente investigación se utilizaron calculadoras, instrumentos para medir el tiempo y longitudes, vasijas, internet, libros de consulta), altera el funcionamiento cognitivo, de la misma forma en que las herramientas tecnológicas alteran el proceso natural de adaptación, al determinar la forma de operación en el trabajo. A continuación, describo dos de las tareas propuestas.

3.5.5.2.1. Tarea cuestionario sobre funciones.

Esta tarea es tomada del cuestionario propuesto por Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2014) para evaluar el razonamiento algebraico elemental.

Institución Educativa San Francisco de Asís

Nombre

Considera la secuencia de figuras para responder cada una de las preguntas.

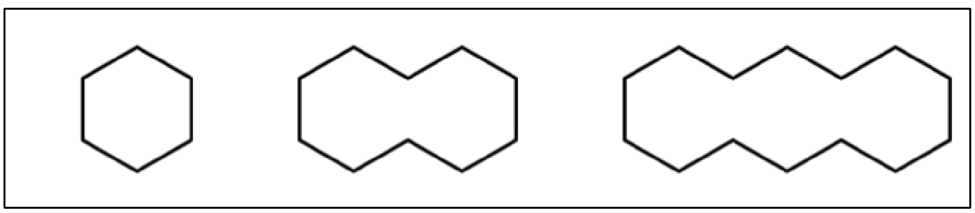


Ilustración 3: Tarea sobre funciones

a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia, describe los pasos para encontrar estos términos,
b) ¿Qué operaciones y en qué orden?
c) ¿Cómo cambian las figuras?, ¿existe alguna regla o patrón para encontrar la siguiente descríbela?
d) ¿Cuál será el número de elementos para formar la figura en la posición 50?
e) ¿Puedes encontrar más de una forma de hallar la figura en cualquier posición? Explica

Cuestionario y Tarea sobre la salida de campo a la quebrada

Previo a la salida se identificarán algunos conceptos como aforo, caudal, sección transversal, velocidad, volumen ya que en la modelación es fundamental que los estudiantes tengan los conceptos previos relacionados con el fenómeno para modelar (Posada y Villa, 2006), a fin de lograr por parte de estos un nivel de abstracción que permita establecer relaciones entre las variables e identificar regularidades y, de esta manera se pueda obtener una simplificación del fenómeno. Seguidamente se detallan algunas preguntas que orientaron la actividad.

a) Elabora el croquis del recorrido

b) ¿Es lo mismo medir el volumen de un dado que medir el volumen de una parte en la quebrada? Explica cómo lo haces.

c) En clase de educación física con el profesor y tus compañeros mide tu velocidad y la de ellos. Al medir la velocidad de la quebrada: ¿Cómo lo haces?, ¿utilizas el mismo procedimiento? Explica.

d) ¿Cómo es el caudal en un tramo de tres metros en la quebrada, aumenta disminuye o permanece constante?

e) Elabora la gráfica de la velocidad – tiempo.

f) ¿Cómo medirías el caudal en uno de los grifos del colegio?

g) Al medir el caudal de la quebrada, ¿qué cambia cuando lo haces en el grifo del colegio?

h) ¿Cómo es la velocidad en la parte donde la quebrada recorre tramos de mayor área y profundidad?, ¿es mayor?, ¿es menor que en la parte más estrecha o permanece constante? Explica.

Con la realización del croquis, se espera que los estudiantes se aproximen a un mapa que pueda servir de ubicación, es decir, donde se considere la relación de las distancias entre puntos y sitios estratégicos (estimación de medidas y cantidades). Aunque la estimación de medidas no es el tema central de la investigación, si posee gran valor, ya que los estudiantes por grupo desde su lenguaje natural conjeturan, predicen y dan cuenta de situaciones reales en forma gráfica (traducción al lenguaje gráfico).

Asimismo, se espera que en los dibujos y en las gráficas, los estudiantes usen la semejanza respecto del tamaño real (proporcionalidad). En la respuesta a la pregunta b, se espera que los estudiantes desde la medición de los volúmenes regulares e irregulares identifiquen aspectos invariantes en esta magnitud. Para la pregunta c, se espera al igual que en el caso del volumen identifiquen la velocidad como variable dependiente, la covariación entre variables; la velocidad, el tiempo y distancia. En la pregunta d, se espera que el estudiante amplié la conceptualización de covariación, e identifique las relaciones de velocidad y área como situación de proporcionalidad inversa, lo cual determinan que el caudal permanezca constante; y exprese esta relación en forma algebraica a través de la expresión **V*A** = caudal o gasto volumétrico. En la tarea e, se espera que el estudiante realice la gráfica e interprete amplíe el concepto de covariación y dependencia entre las variables tiempo y velocidad.

Capítulo 4

4. Análisis e Interpretación de Datos

Cuando en el aprendizaje intervienen acciones como el diálogo con pares, acuerdos para la gestión de información y parte desde intereses de quien aprende, este deja de ser una repetición de información. En este capítulo discuto cada una de las actividades de modelación y tareas matemáticas realizadas por los participantes.

La primera tarea matemática discutida en este capítulo muestra la traducción entre el lenguaje natural, numérico y algebraico a través de la intervención realizada con la actividad de razonamiento algebraico propuesta en Posada, Gallo, Gutiérrez, Jaramillo, Monsalve, Múnera, y Vanegas (2007). Esta actividad propone elementos del lenguaje natural (situación de enunciado verbal), que el estudiante debe expresar en el lenguaje numérico y relaciones funcionales (lenguaje algebraico) con el fin de llegar a la solución requerida.

La segunda tarea propuesta sobre funciones motiva a que los estudiantes por grupos de trabajo colaborativo argumenten desde el lenguaje natural (gestos, expresión verbal) y el lenguaje numérico (operaciones entre cantidades) a fin de determinar a través de relaciones (lenguaje algebraico), la función requerida para hallar cualquier término de la secuencia a través de la figura propuesta para esta situación sobre funciones.

En el problema de una sola operación presentado por Emily se expone el uso recurrente que hace Emily del lenguaje natural para llegar al cálculo numérico requerido (lenguaje numérico). Esta actividad, aunque por su nivel de complejidad no corresponde a estudiantes de básica secundaria se propuso con la intención de analizar la traducción entre el lenguaje natural al numérico.

Finalmente, en este capítulo se muestra a través de actividades de modelación (aforo de la quebrada y la medición del caudal a través del método volumétrico en los grifos del colegio) como los estudiantes distribuidos en grupos de trabajo colaborativo logran avanzar hacia la fase de la abstracción en la modelación, no obstante, no logran consolidar la etapa de la resolución, la cual requiere que el estudiante obtenga un nivel de razonamiento algebraico simbólico (Radford, 2003, 2010, 2013); es decir, que el estudiante formule el modelo en lenguaje algebraico.

4.5. Tarea 1: Diagnóstico sobre razonamiento algebraico

Durante el primer momento de la investigación se trabajó con los estudiantes la siguiente tarea:

En la empresa de viajes JAVO Ltda. se tiene que el valor de un paquete turístico a cualquier destino nacional por persona es de $350000. Sin embargo, para cualquier grupo se hace un descuento de $2000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir, si viaja una pareja se hace un descuento de $ 4000 a cada uno de ellos. De igual manera, si es un grupo de cinco, personas se hace un descuento de $10000 (cinco veces $2000) a cada uno de los viajeros.

a. ¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas? ¿y para un grupo de 23 personas?

b. Si el costo para un grupo es de $ 9800000. ¿cuántas personas hacen parte del grupo?

c. Completa la

d. Tabla **2** con base en esta información.

Número de Miembros del grupo	Valor del descuento por persona	Valor tiquete Por persona	Valor total del viaje Para el grupo
2			
5			
	14000		
		310000	
50			
62			

Tabla 2: Tarea sobre razonamiento algebraico

(Posada, Gallo, Gutiérrez, Jaramillo, Monsalve, Múnera y Vanegas, 2007)

e. Según las condiciones de la situación: ¿cuáles cantidades permanecen constantes y cuáles varían?

f. Exprese con palabras la relación que existe entre cada una de las siguientes cantidades:

- Número de miembros del grupo y valor del descuento por persona.
- Número de miembros del grupo y valor del tiquete por persona.
- Número de miembros del grupo y valor total del viaje para el grupo.
- Represente mediante símbolos cada una de las anteriores relaciones.

En la realización de esta actividad los estudiantes se motivaron a realizar los cálculos mentales a priori, sin establecer relaciones entre las cantidades; ello denota la preferencia de estos, por utilizar el lenguaje numérico y como informa Radford (2010) utilizan el razonamiento probable, razonamiento que no es producto de procesos de generalización sino del tanteo.

En la siguiente entrevista se presenta la intervención realizada con el apoyo del registro de los estudiantes.

Investigadora:	Exprese con palabras la relación que existe entre cada una de las siguientes cantidades. [En el cuaderno de Emily, la profesora señala: número de miembros del grupo y valor del descuento por persona].
Emily:	Aumenta el valor total del viaje.
Investigadora:	¿Cómo es ese aumento?
Emily:	Profe… igual
Investigadora:	¿Cómo así, explica?
Emily:	profe no espere ¡ah!… ya es que en el ejercicio no tuvimos en cuenta que el descuento de 2000 era cundo viajan 2 entonces le descuentan 2000 más 2000. Ósea 4000 a cada persona si profe no leímos bien ¡oh! el valor del descuento aumenta, cuando el grupo se aumenta y cuando aumentan las personas disminuye el valor del tiquete por persona o sea que es contrario.
Investigadora:	¿Cómo así?
Emily:	Si profesora, se están relacionando en forma contraria, inversa
Investigadora:	¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas?
Emily:	[se queda callada durante ochenta (80) segundos] y propone 3500000 pero no hace ninguna operación.
Investigadora:	Según las condiciones de la situación ¿cuáles cantidades permanecen constantes y cuáles varían?
Emily:	El valor del descuento es un cambio constante.

Los estudiantes poseen una escasa comprensión del objeto algebraico constante; es decir, los estudiantes no utilizan este objeto algebraico en diferentes contextos (Batanero y Font, 2007); por tanto, fue necesario conceptualizar al respecto con el grupo de estudiantes. Un aspecto para rescatar es que, aunque el grupo de estudiantes no identificó la relación incremento de viajeros con aumento en el descuento por persona con la expresión “cambio constante”, sólo la estudiante Emily pudo justificar esta relación.

Los demás estudiantes no identificaron los valores constantes; según ellos, todos varían. Al proponerles situaciones de enunciado verbal realizan los cálculos mentales y proporcionan la respuesta a la situación planteada, sin usar la representación algebraica (Kieran y Filloy, 1989), lo cual denota la falta de relación entre el lenguaje natural, aritmético y algebraico cuando dan respuesta a situaciones de enunciado verbal, ello demuestra la desconexión entre expresiones verbales numéricas y algebraicas; además de la prevalencia de lo numérico al efectuar cálculos mentales desligados de una representación algebraica de la situación. Aunque Emily no responde inicialmente a la pregunta realizada, posteriormente en el diálogo, establece la relación que es igual al costo del viaje, luego pausa su participación. Esta pausa indica la búsqueda de significado de la relación de igualdad de aumento desde el lenguaje natural. En este caso, la expresión verbal se concibe como la traducción en el acto de reproducir el mismo contenido a otro lenguaje Freudenthal (1971), donde dicha reproducción requiere encontrar el significado con el objeto algebraico correspondiente (relación de proporcionalidad directa entre el descuento y el número de integrantes).

La aproximación a dicho objeto algebraico desde el lenguaje natural se aprecia con Emily al expresar: “el descuento de 2000 era cuando viajan dos (2) integrantes entonces le descuentan 2000 más 2000, o sea 4000 a cada persona”. Además, Emily establece la relación funcional: aumento en el número de personas con disminución en el valor del tiquete por persona, de esta forma, Emily usa una aproximación a la proporcionalidad inversa desde el lenguaje natural (expresión verbal).

Aunque con la actividad, Emily no obtiene una representación en el lenguaje algebraico de las relaciones entre las cantidades, sí establece relaciones funcionales desde el lenguaje natural (expresión verbal) y desde el lenguaje aritmético al efectuar el cálculo mental y de esta forma, Emily logra aproximaciones a objetos algebraicos en el lenguaje natural, lo cual constituye avances en la traducción entre el lenguaje natural y algebraico.

Investigadora:	Exprese con palabras la relación que existe entre cada una de las siguientes cantidades. (señala en el cuaderno números de personas y valor del tiquete por persona)
Emily:	Aumenta el valor total del viaje.
Investigadora:	¿Cómo es ese aumento?
Emily:	Profesora […] igual
Investigadora:	¿Cómo así? Explica.

Emily: Profesora, no espere, ¡ah!… ¡ya! [pausa] en el ejercicio no tuvimos en cuenta que el descuento de 2000 era cuando viajan 2 entonces […] le descuentan 2000 más 2000. O sea 4000 a cada persona, ¡si profesora! no leímos bien ¡Eh¡, ¡El valor del descuento aumenta, cuando el grupo se aumenta, cuando aumentan las personas disminuye el valor del tiquete por persona o sea que es contrario!

4.6. Tarea 2: Sobre funciones.

Esta tarea fue tomada del cuestionario propuesto por Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray, y Lasa. (2014) para evaluar el razonamiento algebraico elemental. Al proponer esta tarea a los estudiantes, se busca que ellos encuentren la regla general en el lenguaje natural o algebraico para hallar el número de segmentos e identifiquen los objetos algebraicos variable dependiente e independiente y la función.

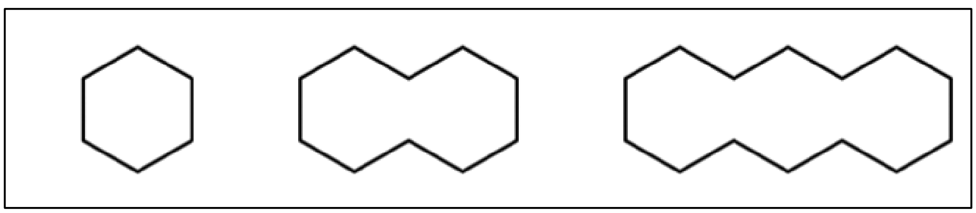


Ilustración 4: Tarea sobre funciones

La tarea 2 se fragmentó en dos partes: una correspondiente con secuencias de figuras para encontrar la función, y otra tarea de modelación para identificar en forma gráfica la función lineal que representa una situación de enunciado verbal (volumen de agua-tiempo). En el desarrollo de esta tarea solamente el estudiante Diego asoció la gráfica a la situación planteada, pero no aporta la justificación correspondiente a dicha asociación.

La tarea correspondiente a la modelación sobre funciones fue propuesta en forma individual, para ello cada estudiante da solución a la tarea, luego se conformaron grupos de tres estudiantes para socializar las respuestas y realizar el diálogo. En esta tarea se observa que los estudiantes acuden a sus compañeros para corroborar sus soluciones y sus razonamientos, la situación de modelación planteada en equipos de tres integrantes suscitó discusión e interés en ellos. Posteriormente, se creó un diálogo en el cual los estudiantes del grado noveno fueron participando en forma espontánea, es de anotar que estudiantes que casi nunca participan, en clases magistrales, durante la realización de tareas en grupo como en este caso, se apropian de la tarea, comparten y comparan explicaciones.

Dichas explicaciones son argumentadas con manifestaciones del lenguaje natural como expresiones verbales y gestos, tales como intentar formar el hexágono con los dedos de sus manos y luego indicar los lados por donde se unen cada vez que se cambia de posición. En términos de Godino, Batanero y Font (2007, p. 5): "Estos objetos algebraicos de carácter ostensivo (símbolos, gráficos, expresiones verbales) emergen en prácticas y tareas metamatemáticas", dichos objetos son rasgos característicos del razonamiento algebraico. En el siguiente diálogo se presenta la intervención realizada en este caso.

Investigadora:	¿Cómo cambian las figuras?
Emily:	Van aumentando como […] y señala la figura de a cuatro en cuatro.
Investigadora:	¿A partir de qué posición se da ese aumento?
Emily:	Desde la primera**.**
Investigadora:	¿Se puede hablar de un aumento constante?
Emily:	Si profesora [moviendo la cabeza en señal de confusión], Emily, continúa diciendo profe es que es un aumento que no cambia**.**
Investigadora:	Explica una manera para hallar la cantidad de segmentos en cualquier posición.
Emily:	Profesora sumando cuatro (4) a cada posición.
Investigadora:	**¿**Cómo encontrarías el número de segmentos en la posición cincuenta?
Emily:	Se multiplica por cuatro, y se restan las multiplicaciones por dos, Según la posición.

El grupo conformado por Emily, Diego y otro estudiante del grado noveno inició con una expresión aritmética y algebraica, ya que aparece la letra E relacionándola con la palabra hexágono.

Emily no asocia el objeto variable independiente con el número de la posición de la figura, y variable dependiente con el número de segmentos que componen la figura en la posición indicada. Llama la atención la no identificación de la palabra segmento y confundirla con sedimento.

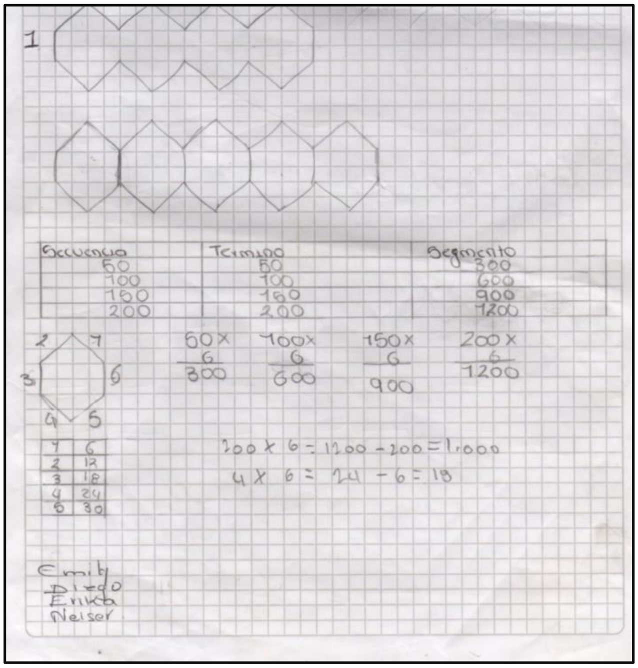
Emily luego discute con su compañero de grupo y agrega: si es que al juntarlos no se cuentan los de adentro, se queda pensando en silencio y finaliza afirmando que solo se pierde un segmento, esta nueva explicación corresponde a técnicas de recuento personal, ya que Emily se vale tanto de la información visual como de la intuición. Ella aún no logra un nivel de abstracción que le permita emitir juicios sin considerar el gráfico propuesto en la tarea. En términos de Radford (2003), Emily está en el nivel de generalización pre-algebraico factual ya que necesita percibir la figura para emitir algún juicio de generalidad.

Además, según Carpenter, Hiebert y Moser (1981), las técnicas de recuento personal inhiben el paso a un nivel superior de solución de problemas de varias operaciones combinadas.

En el equipo, Diego propone organizar los datos en una tabla donde muestran la multiplicación del número del término por el número de segmentos, y luego restan la posición del término; es decir, para el término 200 restan 200 para el término 2, multiplican 2*6 y restan 2, en este caso los estudiantes identifican al número 6 como constante; además, identifican una incipiente relación de dependencia de la operación resta del número de términos, pero no identifican con precisión la operación que se debe restar, es decir, no identifican que la figura en la posición n se compone de n hexágonos y por tanto se necesitan 6n segmentos y se deben suprimir los lados interiores. Tampoco establece una expresión que le permita hallar el número de segmentos que se deben restar $(-2(n-1))$)donde identifique la posición n con el objeto algebraico variable.

Al respecto, Félix (2009) en su trabajo con estudiantes universitarios, resalta la dificultad de éstos para utilizar con flexibilidad símbolos, además de utilizar en forma memorística el objeto algebraico variable y no diferenciar parámetro e incógnita. En esta tarea, la expresión $-2(n-1)$, el estudiante al relacionar el número 2 con el número de segmentos a restar estaría haciendo aproximaciones a uno de los tres usos de la variable –en este caso a su forma paramétrica–, como lo menciona Ursini y Trigueros (1998) al explicar que los parámetros son números generales de segundo orden que permiten la generalización de una expresión algebraica. En esta investigación los autores resaltan la importancia de propiciar al estudiante actividades donde pueda manipular y visualizar de forma explícita las diferentes interpretaciones y usos del objeto algebraico variable.

En este orden de ideas, Radford (2003) en estudiantes de secundaria, encuentra tres tipos de generalización pre-algebraica: La generalización factual, que corresponde a las generalizaciones asociadas a un uso concreto de los símbolos numéricos, manifestadas en términos deícticos (aquí, arriba) y gestos, la generalización contextual que corresponden a un nivel más avanzado y la generalización simbólica. No obstante, en dichas generalizaciones no se logra una representación algebraica; sin embargo, el estudiante logra generalizar sobre figuras y cantidades que puede percibir con los sentidos. La ilustración 5 presenta el registro gráfico sobre la tarea de funciones realizada por Diego.



Diego y los otros tres integrantes del equipo de trabajo acuden al registro tabular, donde a través de las operaciones $2oo\ x\ 6-200;\ 4\ x\ 6-6$ ubica el número de segmentos de cada término.

Aunque expresa relación de dependencia con cantidades conocidas, no logra identificar las cantidades variables.

Ilustración 5: Tarea sobre funciones realizada por Diego y Emily

A continuación se presenta una parte del diálogo con los estudiantes alusivo a esta Ilustración.

Investigadora:	Explica el proceso para hallar el número de segmentos en cualquier posición.
Diego:	Profe… por eso hicimos las multiplicaciones por seis, porque el hexágono tiene seis (6) segmentos y el otro número es la posición.
Investigadora:	Entonces ¿Para encontrar el número de segmentos en la posición cincuenta basta multiplicar 6 por 50?
Diego:	¡Ah! no profesora, es que se pierden unos segmentos, y van aumentando dependiendo de la posición, ósea que se resta la posición.

En esta tarea los estudiantes encuentran regularidades, pero aún no expresan la fórmula de la secuencia; el estudiante puede reconocer patrones, reglas y no alcanzar a simbolizar dichos patrones en expresiones algebraicas que le permita establecer el modelo, en este caso la fórmula para calcular cualquier término de la secuencia (Ursini y Trigueros, 2004). Al respecto, algunos autores encuentran estudiantes que expresan los elementos de un problema en lenguaje natural, pero que fueron incapaces de expresarlo a través de una fórmula, ecuación o función (lenguaje algebraico) (Vergel, 2014; Bazzini y Chappini, 1994).

En este estudio se deja abierta la posibilidad de familiarizar al estudiante a través de situaciones de modelación que le permitan establecer las relaciones entre operaciones, en este caso, cuando el estudiante expresa la relación de dependencia, resta del número de términos y así obtener la traducción de un fenómeno o tarea matemática del lenguaje natural al aritmético y algebraico. En este sentido, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, (2014) señalan que se pueden establecer operaciones, pero no calcular sobre objetos extensivos ya que las operaciones son efectuadas sobre cantidades conocidas. En la tarea que resuelve Diego, él necesita construir los hexágonos para hallar la cantidad de segmentos en una posición cualquiera.

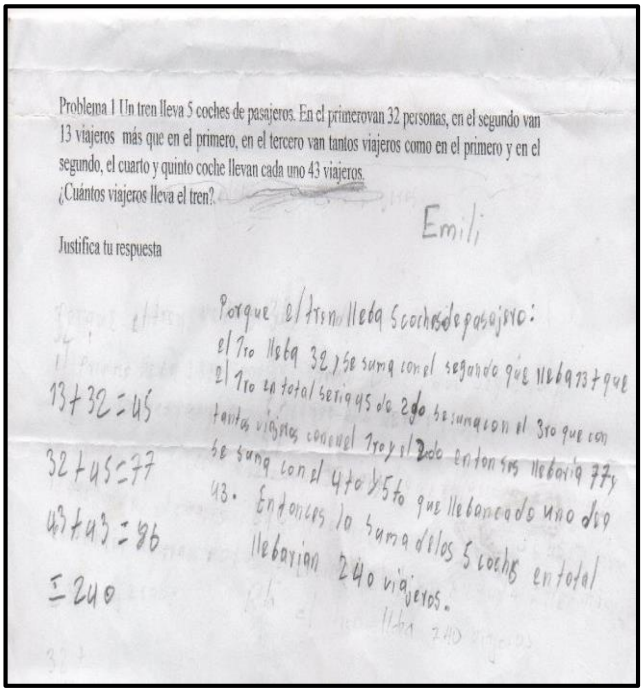
Kieran y Filloy (1989), y Filloy, Puig y Rojano (2008) en sus investigaciones informan sobre las dificultades que presentan los estudiantes al expresar a través de una ecuación el enunciado de un problema o una situación. Estos autores manifiestan la necesidad de propiciar situaciones enriquecidas de contexto al estudiante. En la tarea propuesta, el hexágono permite a los estudiantes a través de la gráfica relacionar la posición con la variable dependiente a través de la operación resta, además, el estudiante puede establecer la relación del número dos (2) con los dos segmentos que se van eliminando del hexágono y luego descubrir que la multiplicación por dos es constante (uso de parámetros en forma intuitiva) para que en un ambiente de clase flexible (participación espontánea) infieran dichas generalizaciones.

En esta investigación se encuentran dificultades en el aprendizaje del álgebra ya que los estudiantes del grado noveno, al usar ecuaciones en las soluciones de situaciones de enunciado verbal, aunque este grupo de estudiantes establece operaciones aun no alcanzan a hacer cálculos con objetos extensivos, es decir, el estudiante permanece en el nivel 0 de algebrización (Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2014). Esta situación también es sustentada con lo expresado por Filloy, Puig y Rojano (2008) al informar sobre la dificultad referida a la puesta en ecuación del enunciado de un problema, la cual presupone procesos de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

4.7. Tarea 3: Problemas con el uso de varias operaciones

Este Problema es tomado de Puig y Cerdan (1990): Un tren lleva 5 coches de pasajeros. En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más que en el primero, en el tercero van tantos viajeros como en el primero y en el segundo, el cuarto y quinto coche llevan cada uno 43 viajeros. ¿Cuántos viajeros lleva el tren?

En la solución propuesta por Emily empieza repitiendo la expresión: “trece viajeros más que” hace un silencio de cinco segundos y luego establece la relación entre las expresiones “13 viajeros más que” a través de la suma. Ello da muestra de procesos de traducción (Freudenthal, 1971); el proceso de traducción implica expresar el contenido en otro lenguaje y para ello es necesario comprender el contenido del objeto en el lenguaje desde el cual se realiza el proceso de traducción. En este caso, esta repetición en forma verbal da muestra de elementos de traducción entre el lenguaje natural y el aritmético. A continuación, presento la solución propuesta del problema por Emily.



Problema 1 Un tren lleva 5 coches de pasajeros. En el primerovan 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más que en el primero, en el tercero van tantos viajeros como en el primero y en el segundo, el cuarto y quinto coche llevan cada uno 43 viajeros.
¿Cuántos viajeros lleva el tren?

Emili

Justifica tu respuesta

Porque el tren lleba 5 coches de pasajero:
el 1ro lleba 32, se suma con el segundo que lleba 13 + que
el 1ro en total serian 45 de 2do se sumacon el 3ro que con
tantos viajeros con el 1ro y el 2do entonses llebaria 77 y
se suma con el 4to y 5to que lleban cada uno de
43. Entonces la suma de los 5 coches en total
llebarian 240 viajeros.

13 + 32 = 45
32 + 45 = 77
43 + 43 = 86
= 240

Emily justifica la operación diciendo: el tren lleva 5 coches con pasajeros, el primero lleva 32, se suma con el segundo que lleva 13 más que el primero , en total serían 45, el tercero lleva tantos viajeros como el primero y segundo en total serían 47, el cuarto y quinto lleva cada uno 43, en total el coche lleva 240 viajeros.

Ilustración 6: Problema de una operación realizado por Emily

4.8. Tarea 4: Primera salida a la quebrada y aforo volumétrico

Esta tarea reviste importancia ya que las quebradas de la vereda representan gran parte del sector recreativo de los estudiantes, y de esta forma como menciona Katja Maaß (2007) citado en Villa (2015), las actividades culturales en las cuales está inmerso el estudiante debe constituirse en generadoras de aprendizaje en el aula de clase de matemáticas. En este mismo sentido, Bassanezi citado en Biembengut (1990), y Biembengut y Hein (2004) hablan de la importancia de vincular las actividades y prácticas culturales de la comunidad al proceso de aprendizaje en el aula.

Después de discutir en el aula conceptos como caudal, aforo, sección transversal, se dispuso con el grado noveno realizar el recorrido y el aforo de la quebrada. En el análisis de esta actividad se consideran las participaciones de todos los estudiantes del grado noveno, ya que la actividad aparte de estar orientada por equipos de tres estudiantes, también requiere de la observación y discusión de todos los estudiantes en torno a los resultados obtenidos (medición de velocidad, áreas), además de la determinación de métodos para medir, cuantificar y registrar la información.

Al medir la velocidad, los estudiantes no se ponían de acuerdo en el grupo integrado por tres estudiantes del grado noveno, cuya identidad es reemplazada por estudiante 1 estudiante 2 y estudiante 3. A continuación, se muestra un fragmento del diálogo suscitado.

Estudiante 1:	Pero es que la velocidad en educación física el profe no la mide con el tiempo aquí ¡hemm! ¡no sé!
Estudiante 2:	¡Ehhhh! ya se, claro medimos un tramo del río como en la cancha, pero […]
Estudiante 1:	¡sí medimos el tramo claro! y dejamos caer algo, una tapa, este borrador y estaríamos midiendo la velocidad si como en la cancha, solo que el que se desplaza aquí es el río.

Diego y Emily toman nota de lo expresado por sus compañeros y permanecen callados en señal de confusión.

Los estudiantes discuten respecto de la pregunta cómo medir la velocidad, luego manifiestan que hay que escoger una parte donde la quebrada no tenga obstáculos que el agua corra libremente. A continuación, se presenta la ilustración 7.

Ilustración 7: Primer aforo de la quebrada

En esta primera salida a la quebrada, los estudiantes pese a tener una socialización en clase de conceptos nuevos como aforo y sección transversal, además de tener el cuestionario (guía de preguntas), solo alcanzaron a determinar cómo medir la velocidad, aun no lograron determinar cómo medir el caudal. Emily y Diego coincidieron en afirmar lo siguiente: profe para medir el área por donde pasa la quebrada no es lo mismo como medimos el área del tablero, del piso, es que aquí el agua está corriendo y el terreno es muy “deformado”. Emily y Diego con la palabra deformado hacen referencia a formas irregulares. En el aula de clase los estudiantes realizaron la actividad de medir el volumen de agua en función del tiempo caudal (método volumétrico).

Por grupos y con un recipiente en el cual se conocía la medida del volumen, ellos registraron los datos volumen y tiempo, y posteriormente realizaron la gráfica volumen-tiempo en el plano cartesiano. A continuación, se presenta el registro gráfico realizado por Diego.

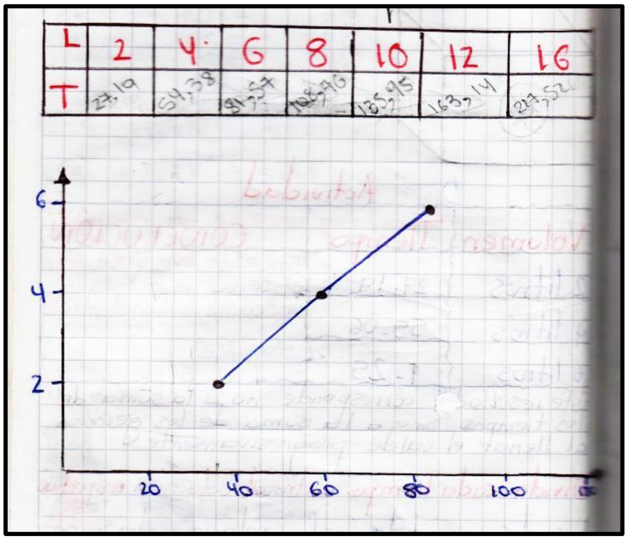


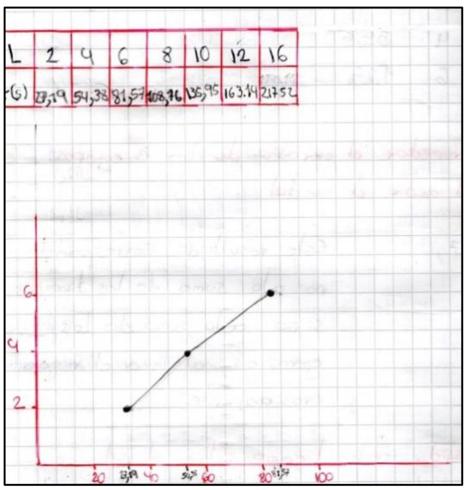
Ilustración 8: Registro gráfico del aforo volumétrico por Emily

En esta tarea Emily logra plasmar el registro gráfico y tabular del aforo volumétrico en uno de los grifos del colegio, y como informa Villa (2006) ambos registros son auxiliares del registro de representación lenguaje natural, numérico y algebraico, lo cual favorece la traducción del lenguaje natural al numérico y algebraico, en la aproximación al objeto algebraico función lineal como razón de cambio constante

Al realizar dicha grafica Emily y Diego afirman lo siguiente:

Emily	¡Claro profesora! mire que la línea siempre es hacia arriba
Investigadora:	¿Cómo así?
Emily:	¡Sí¡, es decir; a más tiempo más cantidad de agua
Investigadora:	¿Cómo podrías expresar lo que acabas de decir en forma simbólica?
Emily:	¡hem! no se profesora es que si el volumen aumenta dos (2) litros el tiempo va aumentando 27,19 segundos.
Investigadora:	Según los datos: ¿cómo es el cambio en el volumen respecto del tiempo?
Emily:	¡sí!... son los mismos.
Investigadora:	¿Cómo así?
Emily:	Profe, sí que cuando el tiempo aumenta el doble el volumen también aumenta el doble, o sea que están aumentando a la vez, están aumentando ambos, pero en iguales partes el doble del tiempo y el doble de volumen, el aumento es igual para el volumen y el tiempo.

Emily, al decir en iguales partes, indicó que las variables tiempo y volumen están relacionadas directamente pero aún no es clara dicha covariación en términos de dependencia entre variables. Según Lozano, Trigueros y Ursini (2000) citados en Otero (2007), la ausencia de una comprensión multifacética de este concepto (cada uso de la variable requiere acciones específicas. Para el uso de la variable en relación funcional es necesario reconocer la correspondencia entre cantidades y sus representaciones gráfica tabular y enunciado verbal) al inicio de la escolaridad, debido a que las dificultades en el aprendizaje de este objeto algebraico se reflejan en grados posteriores; además, como expresa Carlson (2002) en Otero (2007), respecto de la modelación de dos cantidades variables en la noción de razonamiento covariacional con estudiantes universitarios existen dificultades al representar imágenes de razón de cambio continuo, particularmente en la representación e interpretación de una razón creciente y de una decreciente en situaciones físicas como el llenado de agua con velocidad constante. La ilustración 9 presenta el registro gráfico del aforo volumétrico realizado por Diego.



Diego obtiene la representación tabular y gráfica del objeto algebraico función lineal a través de la medición del caudal en los grifos del colegio. La realización de esta tarea le permite a Diego la aproximación al objeto algebraico función lineal.

Ilustración 9: Registro gráfico de aforo volumétrico por Diego

Continuación del diálogo

Investigadora: El volumen y el tiempo, ¿Cómo están relacionados?

Emily: ¡Ah! ya profe, en este caso la relación es directa por que como le dije aumentan: el volumen y el tiempo están cambiando.

Investigadora: O sea que cuando dos variables están relacionadas en forma directa; ¿esta relación se puede expresar a través de qué operación?

Emily: Se queda pensando y luego dice: ¡hem! profe no sé.

Investigadora: El volumen y el tiempo están cambiando ¿Cómo es ese cambio?

Diego: Profesora es el mismo, es un cambio que no varía es constante.

Investigadora: ¿Qué es la constante?

Diego: Profesora en el ejercicio por ejemplo de la gráfica: siempre la inclinación es la misma, es decir, no aumenta ni disminuye, es constante.

Investigadora: ¿El grado de inclinación constante de la recta de que otra forma se puede representar?

Diego: Como una operación es que ¡mire sí, profesora! claro siempre me está dando lo mismo si divido el volumen entre el tiempo; ha sí...cada vez que pasa 27,19 segundos el volumen de agua aumenta 2 litros, o sea que se puede expresar 2 litros /27,19 segundos ó 4 litros/54,38segundos siempre el resultado es constante.

Diego escribe en el cuaderno la operación y la realiza utilizando calculadora. Además, él relaciona el registro grafico (la línea recta) con la división, pero aun no expresa esta relación a través del lenguaje algebraico, tal como k= v/t donde la constante sería el caudal que a su vez en la gráfica estaría representado por la pendiente que es referida por Diego como un resultado constante. Además, Diego expresa verbalmente y a través del cálculo numérico (división) la relación de proporcionalidad, pero no logra generalizar dicha relación a través de la función mencionada.

Al respecto, Arzarello, Bazzini y Chappini (1994) citados en Vergel (2014), en su investigación constataron que los estudiantes hacen uso del lenguaje natural para expresar los elementos y solución de un problema, pero son incapaces de expresarlo en el lenguaje algebraico.

4.9. Tarea 5: Segunda salida a la quebrada

Previo a esta actividad, los estudiantes tuvieron una charla[10], para luego realizar la salida de campo a la parte donde la quebrada nace. Esta charla se orientó por aspectos tales como división de la faja[11], las formas geométricas presentes en la sección transversal y la distancia más recomendada entre faja y faja. Al respecto un estudiante del grado noveno se

[10] Con la ingeniera ambiental Juliana Patiño y la bióloga Liliana Correa.
[11] Faja: cada una de las partes en las cuales se divide la sección transversal de la quebrada.

refiere el concepto de caudal como la cantidad de agua que pasa por una parte del rio. A continuación, presento el registro fotográfico de la actividad.

Ilustración 10: Fotografía de la salida al aforo de la quebrada con estudiantes mediante asesoría

Ilustración 11: Fotografía de estudiantes cuando van a medir el caudal de la quebrada

Investigadora:	¿De qué depende el caudal en el río?
Estudiante:	el caudal depende del ¡hem! […] clima si profe según la temporada el caudal aumenta en temporadas de invierno y en temporada seca disminuye es decir cambia con el clima
Investigadora:	Me refiero al caudal en un día; por ejemplo, en este momento

Estudiante:	ah!, ¡profe pues […] si claro profe!, cuando el agua corre con más intensidad hay más agua, pero también depende de la parte que recorre ósea el área
Profesor:	¿Cómo es la velocidad donde la quebrada recorre tramos de mayor área y profundidad?
Emily:	profe a nosotros nos hadado en este tramo dos segundos con 29…
Investigadora:	*Veintinueve ¿qué?,*
Emily:	Profe veintinueve ¡hem!… *Emily hace una pausa y luego afirma,* sí profe como son dos unidades después del segundo entonces son centésimas de segundo dos segundos con veintinueve centésimas de segundo y a ellos Emily señala el otro equipo que está haciendo el aforo en la parte donde la sección transversal es más ancha: a ellos les dio cinco segundos con veintitrés centésimas. ¡Si profe! es que cuando la quebrada pasa por la parte de más anchura si más ancha merma la velocidad y aquí donde es más estrecha y menos profunda la velocidad es mayor
Investigadora:	¿Podrías expresar esa relación de velocidad, área y caudal que acabas de decir en forma simbólica?
Emily:	Se queda pensando… si profe, lo que le dije cuando la velocidad aumenta el área disminuye.

Ilustración 12: Aforo realizado por Emily y Diego

Investigadora:	¿Y qué pasa con la cantidad de agua en este tramo de tres (3) metros?
Emily:	Es como la misma sí profesora no ha cambiado.
Investigadora:	Entonces dime que permite que la cantidad de agua en este tramo sea constante.
Emily:	¡Profesora las que están cambiando son la velocidad y el área […] (pausa), pero el agua es la misma, profe no entiendo ah! si, ya, al aumentar la velocidad es porque la parte de la quebrada es más angosta
Investigadora:	Es decir, esa parte a que te refieres es […]
Emily:	profesora el área.
Investigadora:	¿Entonces?

Investigadora: ¿Me podrías decir qué es el caudal?
Emily: Profesora es la cantidad de agua que hay en una parte de la quebrada por ejemplo en este tramo de tres (3) metros señalando un tramo de la quebrada.

Ilustración 13: Fotografía de Emily cuando señala el caudal

Investigadora: Y entonces ¿el caudal equivale a qué?
Emily: ¡ah! eso profe como es el mismo es igual entonces […] Emily se queda pensando.
Investigadora: pero ha cambiado la velocidad y el área, y el caudal es el mismo.
Emily: Profesora o sea que el caudal se puede hallar a través de una operación donde una aumente y la otra cantidad disminuya para que esté constante una, ósea, el resultado que sería el caudal.

Es decir, que cuando se multiplica, una aumenta y la otra disminuye para que permanezca constante el caudal. Emily establece la relación de proporcionalidad inversa entre las variables área y velocidad en forma verbal, e indica el caudal como la magnitud que permanece constante y no logra traducirlo a la expresión algebraica (Filloy, Puig y Rojano, 2008). La puesta en ecuación de una situación presupone procesos de traducción del lenguaje natural al algebraico, siendo dicho proceso el que fundamenta en gran medida la solución.

Además, en la investigación realizada por Arzarello, Bazzini y Chappini (1994), informan que los estudiantes hacen uso del lenguaje natural para expresar los elementos y solución de un problema, pero son incapaces de expresarlo en el lenguaje algebraico.

Además, como afirma Radford (2000) respecto a la transición de lo particular a lo general, en su investigación se demuestra que dicho proceso de transición toma tiempo y es necesario el acompañamiento de tareas de modelación y problemas que estimulen el afianzamiento de la generalización algebraica

Es preciso mencionar que los estudiantes se pusieron de acuerdo en hacer la actividad en tres grupos y; según ellos, para comparar resultados. A continuación, se presenta el registro fotográfico durante el aforo realizado por Diego.

Ilustración 14: Fotografía del aforo medido por Diego

Diego desde su grupo de trabajo al registrar la información manifiesta confusión en el momento de tomar los datos; no obstante, se hubiese explicado el concepto de aforo en clase. Por ello fue preciso retomar el concepto para aclarar dudas. En la medición del área de la sección transversal, los estudiantes fueron orientados con las siguientes preguntas: *¿Cómo* *medir el área de la sección transversal en la quebrada? y ¿Qué figuras geométricas pueden formarse?*

Antes de empezar a hacer las mediciones de profundidad, y dividir el ancho en partes iguales los estudiantes Emily y Diego conjeturaron respecto de las figuras que se formarían, (triángulos, rectángulos y trapecios); registraron los datos y posterior a ello construyeron las formas geométricas encontradas con su respectiva medida, luego realizaron la suma de las áreas para encontrar el área total de la faja donde corroboraron lo expresado a través de la observación y medición, la velocidad es mayor en la parte donde el área es menor y disminuye en la parte donde el área es mayor.

Esta actividad muestra la construcción del saber como actividad fundamentada en la acción social de cada persona entendida la actividad en términos de Leontiev (1977) citado en Radford (2004). La actividad intelectual de cada estudiante está relacionada con el saber, el razonamiento y la cultura, donde la actividad está conformada por un objetivo que la orienta (obtener la ecuación del caudal en función del área y la velocidad) con un valor científico y una significación cultural, que en esta tarea está referida a la estrategia utilizada para que el estudiante se apropie del objeto algebraico; en este caso, la modelación matemática que mediatiza la actividad semiótica en un primer estrato.

El otro componente corresponde con los medios, los cuales permiten materializar la actividad y mediatizarla en un segundo estrato de la actividad semiótica (objetos, instrumentos, signos, el lenguaje, entre otros). Según Vygotsky, citado por Radford (2004) el uso de signos, instrumentos y objetos (en la presente investigación se utilizaron calculadora, instrumentos para medir el tiempo y longitudes, vasijas, internet, libros de consulta), altera el funcionamiento cognitivo, de la misma forma en que las herramientas tecnológicas alteran el proceso natural de adaptación, al determinar la forma de operación en el trabajo.

Los estudiantes no utilizan con flexibilidad los símbolos, no comprenden y tampoco interpretan parámetro e incógnita de una manera significativa y diferenciada. En este trabajo, el autor indaga por la necesidad de proporcionar al estudiante elementos donde pueda visualizar en forma explícita los tres (3) usos de la variable a través de la metodología 3uv (tres usos de la variable).

Capítulo 5

5. El Estudio de Caso

5.1. El Caso de Emily

5.1.1. Traducción de Emily en la solución de la Tarea 1

En las respuestas de Emily a la solución de la Tarea 1, por ejemplo: "el descuento de 2000 era cuando viajan 2, entonces le descuentan 2000 más 2000. O sea 4000 a cada persona si profe no leímos bien ¡oh! el valor del descuento aumenta, cuando el grupo se aumenta y cuando aumentan las personas disminuye el valor del tiquete por persona. La traducción entre el lenguaje natural y numérico se aprecia cuando Emily desde su expresión verbal (lenguaje natural), establece operaciones y relaciones entre las cantidades (cálculos mentales); no obstante, estas relaciones entre las cantidades y los cálculos mentales expresados por Emily refieren al uso de un lenguaje verbal lo cual demuestra aun arraigo en el lenguaje natural.

5.1.2. Modelación de Emily en la solución a la tarea 1

En la solución de esta tarea, ella propone establecer relaciones entre las magnitudes. Emily alcanza a enunciar las relaciones y hace cálculos mentales, pero no logra afianzarse en el ciclo donde la modelación sugiere determinar el modelo (Bassanezi, 2002; Biembengut y Hein, 2004; Villa, 2007; Biembengut y Hein, 1990) que le permita establecer ya no desde el lenguaje natural ni desde el lenguaje numérico (cálculos sobre cantidades conocidas) la generalización lo cual sugiere según Radford (2010) calcular y efectuar operaciones con expresiones alfanuméricas (fórmulas). Emily al concluir es contraria la relación entre las cantidades no simboliza dicha relación. La Tabla 3 categoriza la tarea realizada por Emily

NIVEL B	La determinación de las relaciones funcionales en una tarea matemática es indicativo del segundo nivel de generalización (Radford, 2010)
CATEGORÍA: Determinación de las relaciones funcionales entre variables en forma verbal.	

Tabla 3: Categorización sobre la resolución de la tarea realizada por Emily

5.1.3. Razonamiento algebraico de Emily en las soluciones de tareas

Emily realiza cálculos mentales que expresa en el lenguaje natural (expresión verbal) (Radford, 2003, 2010), esto es indicativo de un nivel de generalización algebraico contextual ya que Emily enuncia formas reducidas de expresión “el descuento de 2000 era cuando viajan dos, entonces le descuentan 2000 más 2000 o sea 4000”. En este sentido, Radford (2010), informa sobre la contracción semiótica como una forma reducida de expresión (utilización de signos, gestos, palabras, fórmulas por estudiantes para lograr la objetivación del saber), en este caso Emily recurre a las palabras.

5.1.4. Traducción de Emily en la solución a la Tarea 2

Emily al expresar operaciones da muestras de un afianzamiento desde el lenguaje natural al numérico cuando relaciona el número cuatro con los lados de la figura y cuando expresa que al multiplicar sucesivamente por dos se eliminan los lados de los hexágonos que se van juntando. Aquí se identifican rasgos de generalidad desde el lenguaje numérico al relacionar el número dos con el número de segmentos que se eliminan al juntar dos hexágonos; no obstante, como señala Radford (2003) los estudiantes expresan reglas que aún no es el resultado de inferencias sobre objetos y cantidades que no pueden ser percibidos por el estudiante, al respecto Radford (2008, 2013) señalan que dichas fórmulas son el resultado de un razonamiento probable ya que los estudiantes pueden escribir fórmulas alfanuméricas como producto del ensayo-error o meras adivinanzas, además Godino, Gonzato, Aké, y Wilhelmi. (2014) señalan que los estudiantes pueden calcular operaciones sobre objetos conocidos, pero no hacerlo con cantidades variables o indeterminadas (cantidades desconocidas.). La Tabla 4 categoriza la traducción de Emily en la tarea 2

NIVEL A	En esta actividad se aprecia el razonamiento probable, producto del ensayo error
CATEGORÍA: Identificación de la dependencia entre variables (Godino et al., 2014)	

Tabla 4: Categorización en la traducción de Emily en la tarea 2

5.1.5. Modelación de Emily en la solución a la Tarea 2

En lo expresado por Emily aún no hay una expresión de generalidad que le permita expresar las relaciones y operaciones entre cantidades y variables a través del modelo; en este caso la fórmula para hallar la cantidad de segmentos en cualquier posición. Por tanto, Emily no logra la fase de abstracción respecto de la modelación, aunque hace aproximaciones a la generalización al escribir el factor dos en forma repetida e indicar dicha multiplicación como resta y al expresar que se suma cuatro a cada posición. La Tabla 5 categoriza la modelación de Emily en la tarea 2

NIVEL A	Identificación de cantidades variables, aproximación a uno de los tres usos de la variable(parámetro) al identificar el dos como constante multiplicador
CATEGORÍA: Fase de experimentación en la modelación	

Tabla 5: Categorización de la modelación de Emily en la tarea 2

5.1.6. Razonamiento algebraico de Emily en la solución a la Tarea 2

En la realización de esta tarea Emily da muestras de un incipiente razonamiento algebraico de generalización contextual, sin llegar a consolidarse en esta fase (Radford, 2010) ya que no logra obtener, aunque sea desde la expresión verbal las relaciones entre las cantidades y variables que le permitan establecer la regla general o patrón para calcular el número de segmentos en cualquier término de la secuencia. La Tabla 6 categoriza el razonamiento algebraico de Emily en la tarea 2.

NIVEL A	La determinación de las relaciones funcionales (Radford, 2010)
CATEGORÍA: Representación parcial de enunciados verbales a través de ecuaciones, segundo nivel de algebrización (Godino et al., 2014).	

Tabla 6: Categorización del razonamiento algebraico de Emily en la tarea 2

5.1.7. Traducción de Emily en la solución a la Tarea 3

Con la realización de esta tarea se indagó sobre la traducción entre el lenguaje natural al numérico. Los elementos de traducción encontrados en esta tarea remiten a identificar la forma como Emily acude al lenguaje natural (expresión verbal) repitiendo reiteradamente la expresión “trece viajeros más que” Emily al repetir indaga por el significado desde la expresión verbal, ello da muestra de la necesidad de encontrar significado en el lenguaje natural para luego realizar el cálculo numérico. Al respecto, Kieran y Filloy (1989), Freudenthal (1983) y Radford (2004) se refieren al lenguaje como una herramienta social que se aprende en un contexto fáctico; y en este sentido, la repetición de la expresión verbal le permite a Emily expresar de otra forma (lenguaje numérico) el mismo contenido. La Tabla 7 categoriza la traducción entre el lenguaje natural y numérico en la tarea 3.

NIVEL A	Emily indaga por el significado de la expresión “tres más” desde el lenguaje natural.
CATEGORÍA	Relación de expresiones el doble, la mitad de una cantidad desconocida con 2x, 1/2x.

Tabla 7: Categorización de la traducción de Emily entre el lenguaje natural y numérico en la tarea 3

5.1.8. Modelación de Emily en la solución a la Tarea 4

A través del registro tabular y gráfico Emily logra aproximaciones al objeto algebraico cambio constante al expresar “son los mismos”, Emily establece la covariación directa entre volumen y tiempo desde el lenguaje natural con las expresiones “volumen y tiempo aumentan en iguales partes” y desde el registro gráfico; cuando Emily continua expresando “es un cambio que no varía” queriendo significar que la inclinación de la recta es la misma, con ello logra afianzarse en la expresión de la recta como la covariación entre dos variables que están relacionadas en forma directa.

En este caso, Emily logra la generalización desde el lenguaje oral, alcanza la fase de abstracción en la modelación con la expresión: “es un cambio constante”, así esta generalización no sea manifestada con un lenguaje alfanumérico, sin lograr la fase de la modelación resolución donde se expresa el modelo a través de una fórmula o ecuación. La Tabla 8 categoriza la modelación en el caudal de los grifos del colegio realizada por Emily.

NIVEL B	Emily generaliza la expresión de la recta en forma verbal y gráfica.
CATEGORÍA	Fase de la abstracción en la modelación y nivel tres de algebrización. (Godino et al., 2014)

Tabla 8: categorización de la modelación en la tarea del caudal en los grifos del colegio

5.1.9. Modelación de Emily en la solución a la Tarea 5

Durante esta salida de campo los estudiantes tuvieron una previa asesoría de una ingeniera forestal de CORANTIOQUIA[12], con el motivo de identificar técnicas de aforo de quebradas. La modelación matemática en términos de Bassanezi (2002) propone las fases de Experimentación, en las cuales adoptan las técnicas y formas de registrar la información. En la actividad, los estudiantes por equipo asumieron sus roles de registro medición y consulta respecto de términos desconocidos y técnicas de aforo con profesionales (ingeniera y bióloga) en internet y biblioteca.

La fase de la abstracción de la modelación fue orientada desde el aula con el diálogo respecto de las variables que intervienen en la tarea (distancia, tiempo velocidad área). Emily en su equipo de trabajo se encargó de medir. Además, Emily y sus compañeros comparan los registros y deducen elementos fundamentales de los objetos algebraicos implicados como proporcionalidad inversa al relacionar el tiempo registrado por otro equipo de trabajo con el suyo y expresar “a ellos les dio cinco segundos y a nosotros nos dio dos segundos con 29...” Desde la tarea, Emily establece la relación entre área (sección transversal) y velocidad en el lenguaje natural (al señalar con su mano la sección transversal, y desde la expresión verbal) pero no logra la fase de modelación que refiere a la resolución donde es expresado el modelo a través de una ecuación o función. La Tabla 9 categoriza la modelación de Emily en la tarea 5.

NIVEL B	En esta tarea hay aproximaciones hacia la modelación como proceso, no obstante no se logren todas las fases
CATEGORÍA	Fase de la modelación, abstracción obtención del modelo a través de la expresión verbal

Tabla 9: Categorización de la modelación de Emily en la Tarea 5

[12] Corporación Autónoma Regional de Antioquia.

5.2. El Caso de Diego

5.2.1. Traducción de Diego en la solución a la Tarea 2

En la realización de esta actividad Diego se vale del registro gráfico (hexágonos) para calcular la cantidad de segmentos en una posición pedida, lo cual se apoya teóricamente en lo que expresan Godino et. al (2014) al señalar que se pueden establecer operaciones, pero no calcular sobre objetos extensivos, las operaciones son efectuadas sobre cantidades conocidas. Diego en el intento de construir una tabla donde registra, el término o la posición y su correspondiente número de segmentos que obtiene al multiplicar la posición por la constante seis y restarle el número que indica la posición; da muestras según Freudenthal (1971) de indagación por el significado desde la gráfica y por expresarlo a través de operaciones (lenguaje numérico), no obstante Diego no logra afianzarse en la traducción al lenguaje algebraico ya que sólo logra establecer operaciones con cantidades conocidas, sin llegar a la función requerida. La Tabla 10 muestra elementos de traducción desde la gráfica al lenguaje numérico.

NIVEL B	Diego realiza generalizaciones y utiliza para ello la gráfica del hexágono, además en el proceso de traducción utiliza el registro gráfico.
CATEGORÍA	Traducción del lenguaje natural al numérico.

Tabla 10: Categorización de la traducción de Diego entre el lenguaje natural al numérico

5.2.2. Modelación de Diego en la solución a la Tarea 2

Diego al comunicar y justificar los razonamientos a sus compañeros trabaja la fase de experimentación en la modelación ya que es donde el estudiante registra y organiza la información; la fase de abstracción en esta tarea se manifiesta cuando surgen expresiones gráficas como la realización de hexágonos y luego expresa en forma verbal (lenguaje natural) “se pierden unos segmentos, se resta la posición”. La Tabla 11 categoriza la modelación de Diego en la tarea 2.

NIVEL A	Diego expresa relaciones de covariación entre cantidades pero desde el lenguaje natural.
CATEGORÍA	Modelación fase experimentación.

Tabla 11: Categorización de la modelación de Diego en la Tarea 2

5.2.3. Modelación de Diego en la solución a la Tarea 4

Durante la fase de experimentación en la modelación matemática, Diego toma la iniciativa al presentar los datos en el registro tabular, actitud que demuestra la adopción de técnicas y métodos en la consecución de la información, la fase de abstracción de la modelación en el desarrollo de esta actividad se ve reflejada en la expresión gráfica y las relaciones que establece Diego al expresar: “ cambio constante” y relacionarlo con el grado de inclinación de la recta, al referirse que esta corresponde con una constante.

Al establecer la razón entre el volumen y el tiempo e identificar el resultado como constante, Diego logra llegar a la fase de la abstracción en la modelación ya que desde el lenguaje natural (expresión verbal) y el lenguaje numérico (razón entre volumen y tiempo) generaliza la constante de proporcionalidad directa; además, en la actividad realizada por Diego en la fase de razonamiento algebraico usa la generalización contextual ya que la generalización aún no trasciende hacia la expresión simbólica. En esta actividad, Diego a diferencia de Emily si logra afianzarse en el lenguaje numérico al establecer la relación funcional desde dicho lenguaje. La Tabla 12 categoriza la modelación de Diego en el aforo volumétrico.

NIVEL B	La generalización contextual es determinante para obtener la fase de la abstracción en la modelación
CATEGORÍA: Modelación fase abstracción Determinación de las relaciones funcionales entre las variables e información suministrada en la tarea o actividad a través de la expresión verbal.	

Tabla 12: Categorización de la modelación de Diego en el aforo volumétrico

5.2.4. Modelación de Diego en la solución a la Tarea 4 y 5

La modelación matemática como estrategia didáctica evolucionó ya que fueron considerados diversos elementos de la modelación como proceso. Desde sus equipos de trabajo, los estudiantes tomaron dos jornadas en la tarde para compartir dudas e inquietudes con profesionales (ingeniera y bióloga) respecto de técnicas de aforo; además, de estas charlas con profesionales los estudiantes también participaron en una actividad práctica de aforo con algunos padres de familia, una ingeniera, una bióloga y la profesora-investigadora durante un día no escolar a fin de precisar detalles ya que la actividad requiere de la comprensión de conceptos propios de otras áreas (caudal y aforo). Durante esta fase de experimentación se pudo apreciar el interés de los estudiantes al interactuar con profesionales de otras áreas. La Tabla 13 categoriza la modelación de Diego en el aforo de la quebrada.

NIVEL B	La generalización contextual es determinante para obtener la fase de la abstracción en la modelación.
CATEGORÍA: Modelación fase abstracción. Determinación de las relaciones funcionales entre las variables e información suministrada en la tarea o actividad a través de la expresión verbal.	

Tabla 13: Categorización de la modelación de Diego en el aforo de la quebrada

5.2.5. Traducción de Diego del lenguaje natural al numérico y algebraico

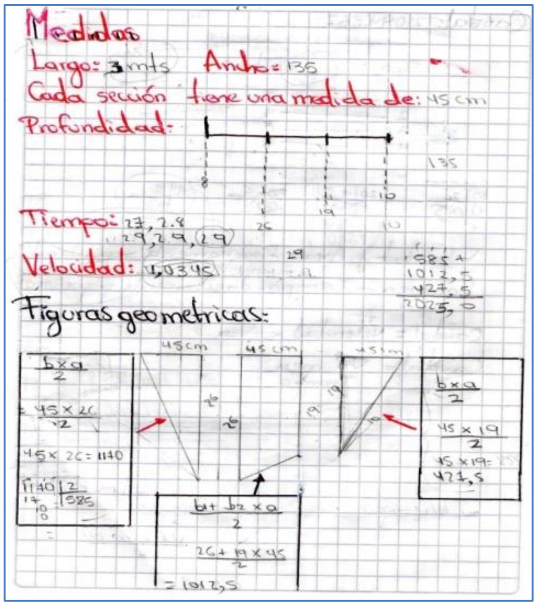
Durante esta fase de experimentación, Diego se encargó de conseguir la cinta métrica para medir longitudes considerables y el objeto para lanzar a la quebrada, así mismo Diego con la orientación de la profesora y demás estudiantes determinaron las variables para tener en cuenta en la actividad de modelación (tiempo, distancia sección transversal de la quebrada, velocidad, área).

Diego utilizó el registro gráfico para realizar operaciones sobre los datos que le permitieran establecer relaciones funcionales entre caudal, área y velocidad, lo cual es indicativo de traducción entre el lenguaje natural numérico (operaciones), y aunque no logre la consolidación en el lenguaje algebraico la determinación de relaciones funcionales es muestra de generalización algebraica. La Tabla 14 categoriza la traducción entre el lenguaje natural y numérico realizado por Diego en la actividad sobre el aforo de la quebrada.

NIVEL B	Durante esta tarea de modelación se aprecian elementos de traducción tales como realización de figuras geométricas en correspondencia con las formas y medidas registradas durante la actividad
CATEGORÍA: Traducción entre el lenguaje natural y numérico Expresión a través de operaciones de las relaciones funcionales entre cantidades variables y constantes. Determinación del modelo de una tarea o situación a través de la expresión verbal.	

Tabla 14: Categorización de la traducción entre el lenguaje natural y numérico

En la fase de abstracción Diego transformó el registro de información realizado por sus compañeros en figuras geométricas conocidas (triángulos, rectángulos trapecios), lo cual es señal de traducción entre el lenguaje natural y numérico; además, Diego utiliza el lenguaje de las formas (geométrico) como registro auxiliar para posterior a ello establecer los cálculos respectivos de cada una de las partes de la quebrada registrada. La ilustración 15 presenta el registro gráfico de las formas geométricas realizadas por Diego sobre la faja medida en la quebrada por sus compañeros.

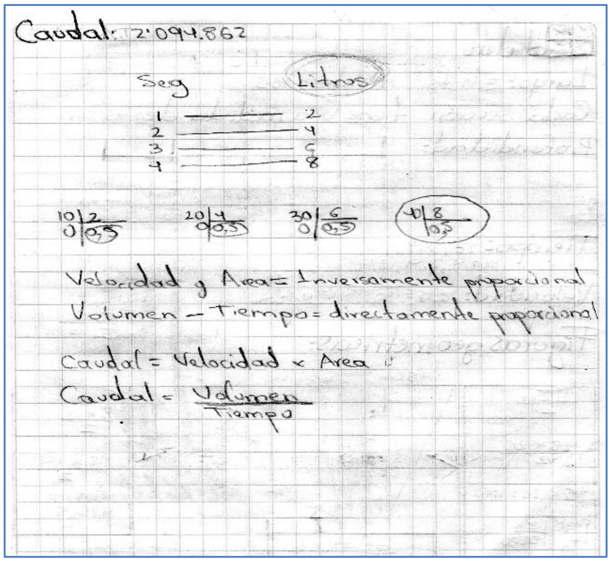


Diego establece la correspondencia entre las formas observadas en la quebrada con figuras geométricas conocidas (triángulo, trapecio rectángulo).

Ilustración 15: Registro gráfico realizado por Diego sobre el aforo de la quebrada

5.2.6. Razonamiento algebraico de Diego en la solución a la Tarea 5

En el siguiente registro numérico y algebraico realizado por Diego se aprecia la consolidación de la expresión funcional a través de la fórmula de caudal lo cual indica el afianzamiento del razonamiento algebraico al expresar la generalización a través de la fórmula. Diego logra establecer la dependencia entre las cantidades. La ilustración 16 presenta el registro numérico y algebraico realizado por Diego, al relacionar la proporcionalidad directa e inversa en la fórmula de caudal.



Diego no solamente establece la relación de proporcionalidad inversa entre área y velocidad, sino además establece aproximaciones entre la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa al expresar el caudal como expresión de la proporcionalidad directa e inversa y, para ello, utiliza las dos ecuaciones.

Ilustración 16: Registro escrito por Diego de proporcionalidad directa e inversa.

En dicho registro gráfico se aprecia la relación que Diego logra establecer entre las dos formas de medir el caudal en el grifo y en la quebrada; este caso a diferencia del caso de Emily y la modelación en el aforo de la quebrada, Diego si logra avanzar hacia el nivel de generalización simbólica al expresar la ecuación del fenómeno.

Finalmente, Diego reconoce dos formas para expresar el caudal, a través de la razón de cambio entre volumen y tiempo (proporcionalidad directa) y a través de la relación de proporcionalidad inversa entre las variables área y velocidad. Ello lo expresa a través del registro gráfico, donde realiza los correspondientes cálculos numéricos y representa a través de figuras geométricas cada una de las fajas en las cuales se divide la sección transversal. La Tabla 15 presenta la categorización del razonamiento algebraica de Diego en el aforo de la quebrada.

NIVEL C	COMENTARIOS: En esta tarea se aprecia el progreso de Diego a lo largo de la intervención ya que expresa en el lenguaje algebraico la generalización (ecuación)
CATEGORÍA: Razonamiento algebraico, Expresión a través de operaciones de las relaciones funcionales entre cantidades variables y constantes y Determinación del modelo en el lenguaje algebraico	

Tabla 15: Categorización del razonamiento algebraico de Diego en la Tarea del aforo de la quebrada

Capítulo 6

6. Conclusiones

La modelación propuesta como estrategia didáctica, en su fase inicial de experimentación evidencia la utilización de técnicas y métodos, siendo la tarea sobre funciones y la de medición del caudal donde los estudiantes adoptan la realización de gráficos (la realización de hexágonos), además de operaciones y en el caso del aforo de la quebrada, a partir de la medición de cada una de las áreas de la faja, al identificar las formas con figuras geométricas conocidas (conceptos previos), el estudiante está expresando o traduciendo situaciones matemáticas y cotidianas al lenguaje gráfico.

En la fase de la abstracción de la modelación se explicitan más los elementos de traducción ya que en la tarea del aforo de la quebrada los estudiantes logran establecer las cantidades que son variables y sus relaciones funcionales es decir que se pasa a un nivel de generalización intermedio entre el contextual y simbólico, produciéndose de esta manera traducción desde el lenguaje natural pasando por el numérico y grafico hasta llegar a la generalización del fenómeno (actividad de aforo).

Se aprecia la actividad resuelta en el equipo de Emily, y Diego pone en evidencia la utilización del lenguaje icónico al valerse de dibujo para reproducir no solamente la gráfica, sino que además hay muestras de trazos en el dibujo, no obstante no logra afianzarse en la generalización de patrones, que aunque existe traducción no logra avanzar hacia el lenguaje algebraico Emily sólo logra traducir a relaciones numéricas pero sobre el dibujo en particular, relaciones que no alcanza a generalizar; las relaciones surgen a partir de valores conocidos, lo que deja abierta la necesidad de apoyar las tareas matemática con gráficas para que el estudiante identifique a través de estas representaciones patrones o reglas generales y pueda establecer las relaciones y operaciones que le permitan pasar de un lenguaje de gestos y dibujos al lenguaje algebraico al encontrar lo general en lo particular, en este caso la fórmula que le permita hallar el número de segmentos en cualquier posición.

Esta recomendación es ilustrada en el capítulo dos donde Kieran y Filloy (1989) y Puig y Rojano (2008) informan sobre la necesidad de presentar al estudiante situaciones enriquecidas de contexto (en este caso gráfico, el hexágono) para que en forma intuitiva descubra generalidades, establezca relaciones entre cantidades e identifique cantidades variables y constantes y pueda determinar el modelo de la situación planteada

En la tarea propuesta el hexágono permite a los estudiantes a través de la gráfica relacionar la posición con la variable dependiente a través de la operación resta, además el estudiante puede establecer la relación del número 2 con los dos segmentos que se van eliminando del hexágono y luego descubrir que la multiplicación por dos es constante (uso de parámetros en forma intuitiva) para que en un ambiente de clase flexible (participación espontanea situaciones de modelación) infieran dicha generalizaciones este estudio encuentra esta dificultad en el aprendizaje del algebra los estudiantes del grado noveno poner en ecuación situaciones de enunciado verbal aunque este grupo de estudiantes establece operaciones aun no alcanzan a calcular con objetos extensivos, las operaciones son efectuadas sobre cantidades conocidas Godino (2014) es decir se permanece en el nivel 0 de algebrización

Problemas de varias operaciones combinadas:

Aunque el problema propuesto por Puig sobre varias operaciones combinadas incluye una única operación el análisis de la actividad realizada por Emily y Diego quienes en forma verbal expresan las relaciones entre las cantidades y proponen la solución pero no se logra cristalizar el proceso de traducción al lenguaje numérico y algebraico ya que expresiones como “13 más que el primero” aún no se logra una reproducción de esta expresión en el del lenguaje numérico, la observación de la actitud de Emily al repetir en varias ocasiones expresiones como “tantos viajeros como en el primero y en el segundo” y luego escribir $32 + 45 = 77$ ello muestra rasgos de traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje numérico, donde Emily, haciendo uso en forma recurrente de la expresión verbal (lenguaje natural) logra escribir la relación de las cantidades a través de la suma, lo que demuestra la necesidad de Emily de encontrar significado en el lenguaje natural, para luego hacer la traducción al lenguaje numérico.

Freudenthal hace alusión a la actividad de traducción como el acto de reproducir el mismo contenido en otro lenguaje; en este sentido es preciso mencionar la necesidad de darle significado a las expresiones aritméticas de tal manera que, en la fase de traducción al lenguaje algebraico, se obtenga, una reproducción exacta del contenido y de esta forma el estudiante pueda manipular las expresiones algébricas con la misma facilidad, que lo hace en el lenguaje numérico.

Actividad: salida a la quebrada

Cuando se presentan a los estudiantes escenarios conocidos surge el interés de estos por aprender a través de la modelación como estrategia didáctica donde se recrean conceptos y se obtienen aproximaciones de nuevos conceptos; el estudiante haciendo uso del lenguaje natural (expresión verbal, gestos) encuentra desde su experiencia significados a conceptos tales como áreas irregulares razón de cambio, variable, constante y a través del dialogo dirigido y la entrevista semiestructurada con el profesor y haciendo uso de operaciones numéricas (lenguaje numérico) logra expresar relaciones de proporcionalidad en este caso la proporcionalidad inversa a través del producto de cantidades y luego obtener una aproximación al lenguaje algebraico a través de la expresión: Caudal = velocidad *área.

Al establecer generalidades se aproxima a la comprensión del objeto algebraico constante en este caso caudal a través de la relación de proporcionalidad inversa entre Área y velocidad; así mismo a través del dialogo con sus pares infiere propiedades del fenómeno en este caso la relación de proporcionalidad inversa entre el área y la velocidad y desde su lenguaje natural establece relaciones entre cantidades que cambian y otras que son las mismas (constante) refiriéndose a la expresión de caudal como dice Emily. El estudiante en este sentido obtiene aproximaciones entre el lenguaje natural y el algebraico al establecer relaciones de proporcionalidad e identificar cantidades invariantes (caudal) y variables (área y velocidad).

Por otra parte esta actividad de modelación permite que Emily y Diego confrontan un concepto de área que fue aprendido en el aula de clase en superficies conocidas (cuadrados, triángulos, trapecios) la acomodación al concepto de área permite ampliar la percepción en tanto que como expresa Emily y Diego el área por donde corre el agua es muy “deformada” (lenguaje natural) al referirse a las formas irregulares de la superficie, en este sentido el estudiante conjetura y utiliza lo aprendido para obtener aproximaciones desde la realidad y obtener información que le permita corroborar e interpretar sus observaciones a través de relaciones entre cantidades y operaciones.

En la actividad de cálculo volumétrico del caudal (medición del caudal en los grifos del colegio utilizando recipientes) Emily y Diego logran afianzar el significado de razón de cambio constante y logran establecer dicha la relación como línea recta con aumento constante aproximación al objeto algebraico (función lineal). En La aproximación a la razón de cambio constante (función lineal) también se puede apreciar el afianzamiento en la aproximación de este objeto algebraico (función lineal) en la actividad de la proyección de la sombra y el tiempo donde los estudiantes establecen la comprensión en diferentes contextos (registro de representación tabular, registro de representación gráfico y observación del fenómeno) en diálogos con los estudiantes durante las clases con expresiones de los estudiantes como “puedo saber qué hora es al medir la longitud de la sombra ya que la longitud siempre aumenta lo mismo”, “aumento igual” estas manifestaciones del lenguaje natural como señala Radford (2010) constituyen la transición razonamiento algebraico contextual al factual.

Es de notar la dificultad que manifestaron los estudiantes al representar fenómenos discontinuos, en este caso al no poder registrar la sombra (día con nube). En la tarea propuesta para observar en casa sobre el eclipse lunar los estudiantes expresan disfrute al participar al día posterior en clase en forma espontánea con apreciaciones como profe al igual que en las actividades de la sombra y en la medición del caudal en los grifos del colegio las cantidades cambian en forma constante a medida que pasa el tiempo.

Este estudio deja abierta la posibilidad de ampliar la relación que existe entre proporcionalidad inversa y proporcionalidad directa, a través de prácticas como esta donde caudal puede ser expresado a través de la relación entre el producto área por velocidad (proporcionalidad inversa) y como razón de cambio entre el volumen y el tiempo (proporcionalidad directa).

Objetivos logrados

Con el objetivo general de la presente investigación me he propuesto analizar como la modelación genera traducción entre el lenguaje natural numérico y algebraico en la aproximación a objetos algebraicos. La consecución de este objetivo me permitió aparte de analizar el papel de la modelación en la traducción entre el lenguaje natural numérico y algebraico obtener una aproximación a objetos algebraicos tales como variable dependiente y variable independiente, constante, razón de cambio constante. A continuación, explico los elementos de traducción encontrados entre el lenguaje natural numérico y algebraico.

La modelación como estrategia didáctica como la he propuesto en el presente estudio me permitió analizar en los casos la traducción entre el lenguaje natural el cual en su mayor parte fue la expresión verbal acompañada en algunas situaciones de gestos y dibujos. La traducción del lenguaje natural al numérico se aprecia en la tarea realizada por Emily sobre el problema de una operación planteado por Puig y Cerdan (1990) Emily recurre a la repetición en forma reiterada de la expresión “trece viajeros más que” como señala Freudenthal (1971) esta repetición desde el lenguaje en el cual se traduce es indicativo de encontrar significado a la expresión para hacer una fiel copia o reproducción, en este caso al lenguaje numérico.

En la tarea propuesta sobre el razonamiento algebraico, la respuesta de Emily “el descuento de 2000 era cuando viajan 2 entonces le descuentan 2000 más 2000. Ósea 4000 a cada persona si profe no leímos bien ¡oh! el valor del descuento aumenta, cuando el grupo se aumenta y cuando aumentan las personas disminuye el valor del tiquete por persona la traducción entre el lenguaje natural y numérico se aprecia al Emily desde su expresión verbal (lenguaje natural) establecer operaciones y relaciones entre las cantidades (cálculos mentales) no obstante estas relaciones entre las cantidades y los cálculos mentales Emily los exprese en forma verbal. En la realización de esta tarea, aunque prevalece el lenguaje natural (expresión verbal) Emily manifiesta elementos de traducción del lenguaje natural al numérico con la expresión de asombro (¡oh¡), lo cual es muestra de indagación por el significado de la expresión desde el lenguaje natural, y al establecer las relaciones de aumento y disminución entre las cantidades. al establecer la relación de aumento del número de personas con disminución del tiquete por persona Emily “copia” o hace una reproducción en el lenguaje numérico a través de las palabras aumento y disminución.

Diego al construir una tabla donde registra, el término o la posición y su correspondiente número de segmentos que obtiene al multiplicar la posición por la constante seis. y restarle el número que indica la posición; da muestras según Freudenthal (1971) de indagación por el significado desde la gráfica y expresarlo a través de operaciones (lenguaje numérico), los trazos, el registro de los cálculos en la tabla muestran elementos de traducción desde la gráfica al lenguaje numérico.

Desde la actividad aforo de la quebrada la traducción del lenguaje natural al numérico se da cuando Emily identifica en el fenómeno y luego expresa que el caudal es el mismo, pero hay otras cantidades que cambian como el área y la velocidad; al establecer generalidades se aproxima a la comprensión del objeto algebraico constante desde el lenguaje natural

Cuando Emily establece relaciones entre cantidades que cambian y otras que son las mismas (constante) refiriéndose a la expresión de caudal como dice, Emily. Esta actividad proporciona la traducción desde el lenguaje natural el momento que Emily señala el caudal en la actividad y lo asocia como una constante de proporcionalidad inversa entre área y velocidad, no obstante, no obtenga la expresión algebraica de caudal al Emily establecer relaciones entre cantidades que cambian y las que son constantes en el fenómeno observado. Emily está traduciendo una situación cotidiana a una relación entre cantidades variables y constantes. En este sentido, aunque Emily no logre expresar dichas relaciones en el lenguaje algebraico, si se aproxima a la expresión general del fenómeno.

En el objetivo dos de la presente investigación me he propuesto identificar indicios y rasgos característicos del razonamiento algebraico en los estudiantes participantes del presente estudio y para ello he tenido en cuenta los niveles de generalización algebraica para estudiantes de secundaria planteados por Radford (2003, 2010) los lenguajes y objetos algebraicos (Godino et al., 2014) presentes en la solución de cada tarea propuesta, además de las fases de modelación propuestas en Posada y Villa (2006), Biembengut y Hein (2004). A continuación, informo sobre los hallazgos referidos a este objetivo.

A través de la tarea sobre razonamiento algebraico Emily da muestras de estar en la fase de generalización contextual ya que establece relaciones funcionales sobre las cantidades conocidas, pero no se afianza en el nivel algebraico de generalización simbólica que le permita representar dichas relaciones en el lenguaje algebraico. El lenguaje que utiliza es lenguaje natural, los objetos algebraicos presentes en esta tarea son la noción de constante e indeterminada o variable pero dicha representación aún no se consolida desde el lenguaje algebraico, ya que Emily al expresar “El valor del descuento es un cambio constante” se aproxima a la noción de razón de cambio constante.

En la tarea sobre sobre funciones se aprecia la comprensión del objeto algebraico constante cuando Diego para el término 2, multiplican 2*6 y restan 2, en este caso el estudiante identifica al número 6 como constante; pero sobre una tarea en particular es decir como lo expresa Godino (et al 2014) reconoce los intensivos, pero no opera con ellos para encontrar la generalización que le permita determinar la función de la secuencia. En términos de Radford (2010) aunque identifica el parámetro como una segunda capa de generalización, dicha aproximación a este objeto algebraico aun no le permite establecer las relaciones funcionales entre las cantidades para encontrar la función pedida;

No obstante en esta tarea, Diego identifica una incipiente relación de dependencia al restar el número de términos, al expresar que se resta 2, pero no identifica con precisión la operación que se debe restar, es decir no identifica que la figura en la posición n se compone de n hexágonos y por tanto se necesitan 6n segmentos, no obstante al expresar que siempre se debe restar 2 es muestra de obtener una generalización “parcial” ya que aún no establece la relación funcional que permite hallar cuantos segmentos se restan en cualquier término de la secuencia.

El objetivo tres referido a proponer situaciones de modelación desde el contexto sociocultural de la institución Educativa San Francisco de Asís que permitan la comprensión de objetos algebraicos por parte de los estudiantes, este objetivo tiene su realización a través de la tarea de modelación de aforo en la quebrada y la medición del caudal en los grifos del colegio, tareas de modelación que me permitieron identificar elementos de traducción del lenguaje natural (gestos, expresión verbal)al numérico (operaciones) y al algebraico con la fórmula de caudal en la aproximación a objetos algebraicos como proporcionalidad directa e inversa, constante y razón de cambio constante

El objetivo cuatro referido a la identificación de correspondencias entre las investigaciones realizadas sobre el razonamiento algebraico por Radford (2003, 2010) y los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) encuentran aproximaciones referidas a los objetos algebraicos utilizados por estos autores en la caracterización del razonamiento algebraico, ambos coinciden en aspectos como: identificar un segundo nivel de generalización con el uso de parámetros, asociar la generalización a las operaciones y tratamientos que se realicen a los objetos algebraicos al obtener la expresión canónica de una ecuación , además estos autores coinciden en la utilización del lenguaje algebraico como señal de generalización simbólica

Por otra parte, proponer situaciones de modelación desde el contexto sociocultural de la institución Educativa San Francisco de Asís que permitan la comprensión de objetos algebraicos por parte de los estudiantes, más que uno de los objetivos del presente estudio, es una prioridad para el plan de estudio en el área de matemáticas, en beneficio obtener un aprendizaje pertinente y significativo para los estudiantes, la actividad de modelación aforo de la quebrad se constituyen en una estrategia que vincula la participación de estudiantes, padres de familia y en el proceso de aprendizaje delos estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Torino, 52(1),* 105-125.

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *In Proceedings of the 29t^h Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia (Vol. 2, pp. 129-136).

Bassanezi, R., (2002). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. (1990). Modelação matemática como método de ensino e aprendizagem no 1o e 2o graus (Doctoral dissertation, tesis de maestría, UNESP, Rio Claro).

Biembengut, M & Hein, N, (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar Matemáticas. *Revista de Educación Matemática,16,* 105-125.

Biembengut, M y Hein, N. (1990). Modelo, modelación y modelaje. Departamento de Matemática - CCEN Universidade Regional de Blumenau– Brasil. Recuperado el 17 de mayo de 2015 de http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Causado R (2014) Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). (Tesis de doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in Mathematics Education*, 179-202.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27-39.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* 669-705.

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment, Design Research on the understanding of the concept of parameter. Dissertation. Utrecht University Center for Science and Mathematics Education, Wilco, Amersfoort. Freudenthal Institute, Utrecht, NL. (publicación electrónica)

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14(1),* 55-72.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* 669-705.

D'amore, B. (2006). Matemática, didáctica de la matemática y lenguajes, Didáctica de la Matemática (251- 292), Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2011). Didáctica de las matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

Félix, L (2009). Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones: un estudio con estudiantes universitarios. Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26(3),* 327-342.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3 (3/4),* 413-435.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Traducción de Luis Puig, Textos seleccionado México. En Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3),* pp. 325-355.

Godino, J & Font, V. (2000). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3),* pp. 325-355.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques, 22(2/3),* 237-284.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39(1-2),* 127-135.

Godino, J. D., Batanero, M., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino. J, Castro. W, Aké, L, Wilhelmi. (2012) Naturaleza del razonamiento algebraico. *Bolema.* 483-511.

Godino, J., Gonzato, M., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 32(1).*

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32.1*, 199-219.

Godino, J. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Universidad de Granada.

Godino, J; Wilhelmi, M. R; & Aké, L. Etchegaray, S., & Lasa, A. (2014) Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológicas. Recuperado de: http://www.raco. cat/index. php/Ensenanza/article/viewFile/287515/375668

Posada, F., Gallo, O., Gutiérrez, J., Jaramillo, C., Monsalve, O., Múnera, J., & Vanegas, M. (2007). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. prensa libre, Universidad de Antioquia.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol, en Karplus, (ed.), pp. 163-169.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (390-419). New York: Macmillan

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra,* pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), 229-240.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J., & Knuth, E.(Ed.), Early algebraization. (pp.5-21). Berlin: Jinfa Cai Erik Knuth Editors.

Mapa del corregimiento de Palocabildo (2004). Tomado de la página web del municipio de Jericó http://www.jerico-antioquia.gov.co/index.shtml

Mason, J., Johnston-Wilder, S. & Graham, A. (2005). Developing thinking in algebra. London: Published in association with The Open University and Paul Chapman 1st Edition

Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias & Ciudadanas. Bogotá.

Molina, M. (2006). Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria. Tesis doctoral.

Leontiev, A., & Vigostky, L. (1988). Una contribución a la teoría del desarrollo de la psiquis infantil. Vigostky, L. et al. Lenguaje, desarrollo y aprendizaje. Sao Paulo: Icone.

Leontiev, A. (1977). Activity and Consciousness. Philosophy in the USSR, Problems of Dialectical Materialism. Moscow, Progress Publishers.

Otero, J. (2007). La construcción de la noción de variable. Tesis de maestría no publicada. México.

Pino-Fan, L.; Castro W., & Velásquez H. (2013). El conocimiento didáctico-matemático: una propuesta de evaluación de tres de sus facetas: FUNES. Universidad de los Andes.

Posada, F; Villa, J (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. (Tesis de maestría), Universidad de Antioquia Facultad de Educación. Colombia

Puig, L., & Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 35-48).

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. La educación matemática en la enseñanza secundaria, 61-94.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al. (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre, Repères (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques de France), juillet, 28, 81-96.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22(2),* 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning. 5(1),* 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (ed.), Atti del convegno di didattica della matematica 2004, Alta Scuola Pedagogica. Locarno: Suisse, pp. 11-27.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. In Investigación en didáctica de la matemática: homenaje a Encarnación Castro (pp. 3-12). Comares.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25, 23-58.

Stake, R. (1999). Investigación con estudios de casos: Morata.

Smith, M. (2011). A procedural focus and a relationship focus to algebra: How US teachers and Japanese teachers treat systems of equations. In *Early Algebraization* (pp. 511-528). Springer Berlin Heidelberg.

Strother, S. (2011). *Algebra Knowledge in Early Elementary School Supporting Later Mathematics Ability*. University of Louisville.

Stake, R. (2005). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata, tradução do original de 1995, The art of case study research.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Recuperado de 2014 http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática. 12 (2),* 27-48.

Ursini, S., & Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. Investigaciones en Matemática Educativa II. CINVESTAV-IPN. Mexico.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática, 6(3),* 90-108.

Ursini S. y Trigueros M. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. Mathematics Education Vol. 12 (pp. 1-29).

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas un marco de referencia y un ejemplo. Onceava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Maracaibo. Venezuela.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas, 19,* 63-85.

Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. Magis. *Revista Internacional de Investigación en Educación, 8(16),* 133-148.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (Tesis Doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano.

Vygotsky, L. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Editorial Crítica, Barcelona.

Vygotsky, L. (1997). Educational psychology. Boca Raton: St. Lucie Press.

Vygotsky, L. (2007). Pensamiento y habla. Buenos Aires: Ediciones Colihue.