

**MODELO DE SELECCIÓN DE PORTAFOLIO ÓPTIMO DE ACCIONES USANDO EL
MODELO DE BLACK-LITTERMAN**

Sandra Milena Arboleda Ríos
John Malver Díaz Zapata
Cindy Lucia Galarcio Padilla
Laura Giraldo Cárdenas

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESPECIALIZACIÓN EN FINANZAS Y MERCADO DE CAPITALES
COHORTE 23
MEDELLÍN
2013

**MODELO DE SELECCIÓN DE PORTAFOLIO ÓPTIMO DE ACCIONES USANDO EL
MODELO DE BLACK-LITTERMAN**

Sandra Milena Arboleda Ríos

John Malver Díaz Zapata

Cindy Lucia Galarcio Padilla

Laura Giraldo Cárdenas

**Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Finanzas y Mercado de
Capitales**

Asesor Metodológico

Felipe Isaza Cuervo Ph. D (C)

Asesor Temático

M. Sc. Jorge Enrique Lotero

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESPECIALIZACIÓN EN FINANZAS Y MERCADO DE CAPITALS

COHORTE 23

MEDELLÍN

2013

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	4
GLOSARIO.....	5
1. INTRODUCCIÓN.....	7
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
3. OBJETIVOS.....	9
3.1 General.....	9
3.2 Específicos.....	9
4. JUSTIFICACIÓN.....	10
5. MARCO REFERENCIAL.....	11
Marco Teórico.....	11
6. METODOLOGÍA.....	18
7. RESULTADOS.....	24
<i>Modelo 1. Modelo de Black-Litterman</i>	24
<i>Modelo 2. Varianza mínima global restringida</i>	26
<i>Modelo 3. Maximiza la Utilidad</i>	26
8. CONCLUSIONES.....	30
9. ANEXOS.....	32
9.1. <i>Para el Modelo de Black-Litterman</i>	32
9.2. <i>Para el Modelo de Markowitz</i>	35
10. BIBLIOGRAFÍA.....	36

RESUMEN

La diversificación de los portafolios de inversión y su optimización es un tema central en el ambiente financiero, por este motivo este trabajo busca establecer un modelo que le permita a los operadores del mercado, tales como comisionistas de bolsa, fondos de pensiones, y a otros gestionar portafolios óptimos, en el cual el riesgo sea bajo optimizando los beneficios y a su vez permitiendo incluir variables dinámicas en el modelo. Metodológicamente el objetivo se alcanza utilizando el modelo Black-Litterman que calcula los retornos esperados de mercado como una combinación de un conjunto de expectativas específicas de cada inversionista y un punto de referencia neutral. Se toman como factores relevantes para la obtención de resultados las acciones del índice COLCAP.

Palabras Clave: *Riesgo, Black-Litterman, gestión de portafolios*

ABSTRACT

The diversification of investment portfolios and their optimization is a central topic in the finance environment, for this reason this work find establish a model that allows to the operators of markets, such as stockbrokers, pension funds, and other people manage optimal portfolios, in which the risk will low, optimizing the profits and at the same time allowing include variables dynamic in the model. Methodologically the objective is reached using Black-Litterman model that calculates the expected return of market as a combination of a group of specific expectations of each investor and neutral reference point. Relevant factors are taken to obtain results the COLCAP index actions.

Key Words: *Risk, Black-Litterman model, portfolio management*

GLOSARIO

ACCIÓN: es un título que le permite a cualquier persona (natural o jurídica), ser propietario de una parte de la empresa emisora del título, convirtiéndolo en accionista de la misma y dándole participación en las utilidades que la compañía genere. Además se obtienen beneficios por la valorización del precio de la acción en las Bolsas y le otorga derechos políticos y económicos en las asambleas de accionistas.

BETA: medida de riesgo sistemático que representa la variación del valor de una acción en relación con la variación del total del mercado, medida a través del mejor índice posible.

DIVIDENDO: valor pagado o decretado a favor de los accionistas, en dinero o en acciones, como retribución por su inversión; se otorga en proporción a la cantidad de acciones poseídas y con recursos originados en las utilidades generadas por la empresa en un determinado período.

ILIQUIDEZ: situación en la cual un agente no posee activos fácilmente convertibles en dinero o activos que puedan ser utilizados como medio de pago.

Q-TOBIN: modelo Desarrollado por James Tobin. Es la relación entre el Precio en Bolsa de una Compañía y su Valor en Libros (o contable) y se calcula mediante la siguiente división: Valor en Bolsa/Valor en Libros. Cuando la relación es mayor que uno (1), se dice que la compañía está sobrevalorada en Bolsa; y cuando la relación es menor que uno (1), la compañía está subvalorada en Bolsa.

RIESGO: es el grado de variabilidad o contingencia del retorno de una inversión. En términos generales se puede esperar que, a mayor riesgo, mayor rentabilidad de la inversión. Existen varias clases de riesgos: de mercado, solvencia, jurídico, de liquidez, de tasa de cambio, riesgo de tasa de interés.

SPREAD: diferencia en puntos básicos (porcentual) entre un activo cualquiera y el activo libre de riesgo, entre más puntos básicos de diferencia haya entre ellos, más riesgoso se

considerará el activo. Usualmente, en los mercados internacionales se toma como activo libre de riesgo los bonos del tesoro de USA a 30 años.

VOLATILIDAD: una acción se denomina volátil cuando su precio varía con gran amplitud en relación con la variación del mercado.

Fuente: Diccionario de términos financieros de la Bolsa de valores de Colombia¹

¹ <http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Glosario>

1. INTRODUCCIÓN

La creación de un portafolio eficiente según los postulados de *Markowitz* se basa en la idea de lograr un equilibrio entre rendimiento y riesgo, entendiéndose el riesgo como la variabilidad en el tiempo del precio de algún instrumento de inversión. Es así como se hace relevante este tipo de trabajo, porque le permite a los profesionales del mercado determinar, cuales son las alternativas que el mercado de capitales (acciones) le ofrece para colocar sus excedentes de liquidez.

Este trabajo hará un recuento histórico acerca de los avances logrados por diferentes autores en materia de creación de portafolios óptimos, se planteará un modelo de portafolio basado en la teoría más actual y se brindarán algunas conclusiones.

Para lograr este tipo de modelaciones, se trabajará con base en el modelo de *Black – Litterman, BL*, según el cual los individuos no solo toman decisiones basadas en la historia del instrumento en el cual quieren invertir, sino en las expectativas de esos mismos instrumentos, es decir, se hacen una imagen de cómo creen que se comportará en el futuro, por ello, el modelo BL, tiene en cuenta estas expectativas y mejora el modelo de *Markowitz* en cuanto a capacidad de predicción.

Este trabajo tratará de establecer un modelo que le permita a los operadores del mercado, tales como comisionistas de bolsa, fondos de pensiones, y otros a gestionar portafolios óptimos, en el cual el riesgo sea bajo optimizando los beneficios y a su vez permitiendo incluir variables dinámicas en el modelo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente el mercado Bursátil se introduce cada día más en el proceso de la globalización, lo que representa para el inversionista una enorme oportunidad para diversificar sus productos financieros, es por esta razón que la aplicación del Modelo de *Black-Litterman* le permitirá al inversionista, identificar los elementos que afectan su portafolio de inversión dentro de los mercados globales.

En nuestro país o a nivel mundial los inversionistas se hacen una pregunta muy frecuente, donde invertir, cual acción me generaría la mayor ganancia de una forma rápida y sin mayores riesgos?, esto es lo que normalmente ocurre cuando no se tienen los conocimientos necesarios acerca del tema, por tal motivo queremos asociarnos al mundo real de los mercados de capitales, para optimizar los recursos de los inversionistas, dar a conocer la mejor opción al momento de escoger el portafolio que pueda maximizar las utilidades a través de sus excedentes de capital.

3. OBJETIVOS

3.1 General

Estudiar las características del modelo Black-Litterman para la conformación de portafolios óptimos, ponderando el equilibrio del mercado con vistas sobre expectativas específicas de los agentes.

3.2 Específicos

- Aplicar al mercado Colombiano un modelo que permita construir un portafolio óptimo de acciones siguiendo los lineamientos planteados en la propuesta de *Black-Litterman*.
- Analizar los resultados obtenidos con la aplicación del modelo de Black-Litterman al Índice COLCAP para la selección de portafolios.

4. JUSTIFICACIÓN

A nivel mundial, las empresas se enfrentan a decisiones que les permitan invertir sus excedentes de liquidez en activos que sean lo más rentable posible, con el fin de maximizar su función de beneficios. Los fondos de inversión, comisionistas de bolsa, fondos de pensiones, y demás profesionales del mercado deben hacer una gestión financiera que asegure el cumplimiento de dicho objetivo por lo que es relevante realizar este tipo de trabajo puesto que brindan una herramienta apropiada para el análisis de la información actual, en este caso, para el mercado de renta variable colombiano.

A nivel teórico este trabajo aportará una idea de cómo pueden ser utilizadas las expectativas en la toma de decisiones en el mercado de renta variable ya que actualmente las decisiones se toman con base en el análisis técnico (historia) o utilizando el análisis fundamental, el cual se basa en las probables situaciones que pueden afectar el rendimiento de un activo. El análisis aquí involucrado conlleva a la introducción de nuevas variables, que no se pueden ubicar dentro de los análisis ya mencionados, toda vez que son expectativas de los actores del mercado, es decir, son expectativas “racionales” de expertos en la administración de portafolios.

A nivel académico este trabajo nos permitirá optar al título de especialistas en finanzas y mercado de capitales y a la vez aplicar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del programa académico.

5. MARCO REFERENCIAL

Marco Teórico

Los portafolios de inversión pueden remontarse al estudio de (Markowitz, 1952), donde se condiciona la composición de un portafolio de inversión al concepto de minimización del riesgo. En su modelo Markowitz proporciona alternativas para el inversionista que quiere obtener la máxima rentabilidad sin someterse al nivel más elevado de riesgo así como diseñar una cartera óptima disminuyendo el riesgo sin afectar la rentabilidad. (Tobin, 1958), por su parte, hace una extensión del trabajo de *Markowitz*, el cual se concentra en el motivo especulativo de la demanda de dinero. Considera una cartera de activos financieros en la que el dinero es una reserva de valor segura pero que no otorga rendimientos o retornos futuros, mientras que los otros activos, como bonos, acciones, etc. si brindan rendimientos, que a su vez llevan implícito un riesgo, y a mayor riesgo mayor retorno futuro probable. Tobin formula un marco optimizador en el cual la demanda de dinero sale de las decisiones de maximizar una función de utilidad en la que los individuos están afectados no solo por el retorno esperado sino también por el riesgo de la cartera modificando la teoría de demanda especulativa de dinero de *Keynes*, en la cual si el rendimiento de los bonos es mayor al del dinero, solo se tendrán bonos por motivo especulativo. En el modelo de *Tobin*, el agente debe elegir una combinación de activos, dada su riqueza disponible para invertir, preferencias y coste de oportunidad.

El modelo de *Markowitz* se plantea como la minimización del riesgo, sujeto a la función de rentabilidad y se presenta de la siguiente forma:

$$\text{Min } \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i * x_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i * E(R_i) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(1)

Donde \mathbf{x} es la proporción del presupuesto del inversor destinado al activo financiero y es la incógnita del programa, si $\sigma^2(R_p)$, la varianza de la cartera p , y σ_{ij} , la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j . $E(R_{p(t)})$, es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p , de tal forma que al variar el parámetro V^* obtendremos en cada caso, al resolver el programa, el conjunto de proporciones x que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E(R_{p(t)}), \sigma^2(R)]$ o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es denominado «frontera eficiente». Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima. (Mendiazábal, Miera, & Zubia, 2002)

Por su parte, (Sharpe, 1964) tomando como punto de partida los trabajos de *Markowitz* y *Tobin*, desarrolló el modelo de **Capital asset pricing model** (CAPM), el cual es un modelo para calcular el precio de un activo y pasivo o una cartera de inversiones. Para activos individuales, se hace uso de la recta Línea de mercado de capitales (SML) la cual simboliza el retorno esperado de todos los activos de un mercado como función del riesgo no diversificable y su relación con el retorno esperado y el riesgo sistémico (β), para mostrar cómo el mercado debe estimar el precio de un activo individual en relación a la clase a la que pertenece.

Los anteriores trabajos forman las bases de la economía financiera y son el punto de partida para el desarrollo de los modelos de riesgo propuestos por otros autores posteriormente.

Los fundamentos propuestos por *Markowitz*, *Tobin* y *Sharpe*, formaron las bases para este tipo de trabajo, es así como a inicios de la década del noventa, se inicia una corriente de trabajos en materia financiera y economía financiera, aparecen entonces trabajos sobre selección óptima de portafolios y nuevas técnicas para la medición de riesgo.

(Atzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1998), por ejemplo, introduce cuales pueden ser los niveles de riesgo aceptable, este autor define el riesgo como una variable que fluctúa de acuerdo al valor futuro de una posición para sus diferentes estados de la naturaleza. Uno de los métodos más poco usados fue el desarrollado por (Zhang, Xiao, & Wang, 2008), por medio del cual sustituye los conceptos de media y varianza probabilística utilizados por *Markowitz* por el de media y varianza que vienen de un conjunto de números difusos, así se genera un escenario más favorable para la selección de inversiones ante situaciones de incertidumbre.

El modelo del que trata este trabajo, ideado por *Black F. and Litterman R*, más conocido como modelo de *Black-Litterman* (Black & Litterman, 1992), MBL, surge como un avance en la teoría de *Markowitz* la cual basa su análisis en la estimación de covarianzas, en las cuales, a pesar de poderse calcular adecuadamente, es difícil llegar a resultados de utilidad esperada de forma razonable, por lo que devuelve resultados de los rendimientos que son simples, que se conocen como optimizaciones sin restricciones, este problema es el que se trata de corregir con el uso del MBL. En el MBL, el inversionista debe indicar sus supuestos de rendimientos esperados, expresando su grado de confianza en donde sucederán estos supuestos, con ello el MBL calcula la asignación de activos, es decir, la elección óptima.

Ahora bien, frente al riesgo se pueden definir tres tipos de actitudes de los inversionistas, Propensión, Neutralidad y aversión al riesgo (Ruiz, Jimenez, & Torres, 2000), comúnmente se supone que el inversionista es averso al riesgo, por lo que asumir un nivel más elevado del mismo, supondrá un mayor retorno esperado por éste como compensación a la asunción del riesgo asociado a cada activo financiero, comparado con su costo de oportunidad, lo que podría ser un activo libre de riesgo. Mientras más averso sea el inversionista, más prima por riesgo exigirá como retorno, al respecto, (García, 2001) define que la prima de riesgo incluye tres conceptos básicos:

1. El supuesto de una ecuación que represente la prima.
2. La estimación de los parámetros relevantes de la prima.
3. El uso de los resultados de la estimación para evaluar e interpretar la prima de riesgo.

La pregunta que motivó la construcción y utilización de la prima de riesgo se puede expresar como: ¿Qué incremento en rentabilidad exigirán los inversores por asumir un riesgo mayor?, lo cual es consistente con lo que trato de explicar Markowitz en su trabajo de 1952 y que tiene parte de su respuesta en este trabajo.

(Buenaventura & Cuevas, 2005) Realizan una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión en la cual plantea la aplicación de un modelo de optimización en Excel que permite crear portafolios eficientes a partir de la teoría del Portafolio Moderno de (Markowitz, 1952) y empleado el concepto de la línea de mercado de capitales con activos disponibles en el mercado. En la composición de portafolios eficientes, se emplea la función de maximización de rentabilidad a riesgos definidos. Además la configuración de un portafolio óptimo usando la línea de mercado de capitales con una función de maximización de su pendiente. (Cootner, 1962), por ejemplo, sugirió que las desviaciones de los precios de los activos frente a sus valores intrínsecos, generaban oportunidades de inversión al entender que ambos valores tenderían a alinearse, las compras de acciones subvaluadas empujan los precios al alza y la venta de acciones sobrevaluadas empujaría el precio a la baja, en ambos escenarios hay oportunidades de negocio para el inversionista.

El modelo *Black-Litterman* como versión mejorada del modelo *Markowitz* considera los siguientes aspectos: hay n activos, con capitalizaciones $M_i = 1, 2, \dots, N$, la capitalización de mercado es igual al número de títulos o unidades del activo disponibles en el mercado por su respectivo precio. Las ponderaciones de mercado de los n activos están dadas por el vector $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, en donde la ponderación del activo i es:

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (2)$$

El coeficiente de aversión al riesgo del inversionista (λ), el cual es constante, se determina de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2} \quad (3)$$

Donde R_M es el retorno del mercado, R_f es la tasa libre de riesgo y σ_M^2 es la varianza del retorno del mercado, el exceso de retornos implícitos de equilibrio (Π) se puede expresar como sigue:

$$\Pi = \lambda \Sigma W \quad (4)$$

Estos retornos se llaman Retornos Implícitos de Equilibrio, debido a que si los precios de los activos se ajustan hasta los retornos esperados, sean iguales a lo que creen los inversionistas, haciendo la suposición de que en general se tiene la misma expectativa de mercado, dichos ajustes hacen que la demanda iguale la oferta.

Un portafolio está representado por la combinación de varios activos financieros, algunos mejores o más rentables que otros, según su nivel de riesgo. Dado lo anterior, se debe construir una “frontera eficiente”, donde el portafolio es más rentable, con el nivel de riesgo asumido por el inversionista; (Becerra & Melo, 2008) describen las medidas de dependencia con sus principales ventajas y desventajas y presentan la cópula como una estructura flexible que permite caracterizar diferentes tipos de dependencia. La Cópula es una función que aproxima el comportamiento de variables aleatorias a partir de sus comportamientos individuales. Así mismo, consideran que hay gran cantidad de factores de riesgo que interactúan constantemente en un portafolio de inversión. Por ello se han creado herramientas para modelar dicha interacción, por lo cual, el concepto de dependencia juega un papel fundamental. Cuando hay varios factores de riesgo, el inversionista puede identificar los comportamientos marginales a través de técnicas apropiadas, sin embargo, hay que tener en cuenta que el comportamiento de un factor de riesgo puede estar influenciado por comportamientos de otros factores de riesgo. Ahora, la selección de un portafolio óptimo puede no estar correlacionada al análisis del riesgo asociado a cada uno de los instrumentos que la conforman, (Castillo & Lama, 1998)

suponen que la existencia de un portafolio óptimo determina el “Teorema de Separación”, según el cual el inversionista puede realizar una selección óptima sin tener conocimiento de las preferencias hacia el riesgo del inversionista; de este modo, puede limitarse el problema de decisión a la elaboración de una frontera eficiente y elegir la combinación de instrumentos que se encuentren allí, aplicando así “parte” la teoría de (Markowitz, 1952)

Diversos estudios a nivel regional han tratado de construir modelos de carteras óptimas para el inversionista, pero se han centrado en casos particulares, (Cruz E. , 2011) centra su trabajo en desarrollar un modelo dual en el que se permita, primero, maximizar la rentabilidad y segundo, minimizar la inversión inicial requerida. De otro lado, (Puerta & Laniado, 2010) explican que la determinación de las alternativas en los títulos y sus respectivas ponderaciones, se destacan como las variables más relevantes. Sin embargo, existen otros factores que se deben tener en cuenta.

En cuanto al ámbito de aplicación del modelo de B-L, podemos encontrar diversos estudios dentro de los cuales podemos encontrar al de (Galvez Pinto, 2008), en el cual se realizó una comparación del modelo de B-L con el de Markowitz, y establecieron que en un escenario inter temporal, se obtienen fronteras eficientes de inversión en determinados momentos de tiempo, las cuales se comparan y se mide cual entrega mejores oportunidades de inversión.

Así mismo (Salazar Cruz, 2012), afirma que uno de los riesgos que debe tener en cuenta el inversionista al incursionar en los mercados internacionales es el riesgo cambiario, pues el rendimiento no solo dependerá de los precios del activo a invertir, sino también de la evolución de la moneda en su tasa cambiaria, por lo cual se hace necesario realizar un estudio que permita administrar de manera eficiente estos riesgos, por esto, el autor analiza de que forma el Modelo Black-Litterman administra los riesgos de los portafolios internacionales. Este estudio concluyó que la aplicación del modelo Black-Litterman, le permite al inversionista, identificar los elementos que afectan su portafolio de inversión dentro de los mercados globales.

En resumen, las cuatro posiciones se pueden simplificar como aparece en el cuadro 1.

TABLA 1. Principales modelos de selección de portafolios

Autor	Modelo	Ventajas	Desventajas
<p>Harry Markowitz (1952)</p>	$E(r_p) = \sum_{i=1}^n Z_i F(r_i)$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera la conducta racional del inversionista en condiciones de riesgo. • Frontera eficiente de portafolios 	<ul style="list-style-type: none"> • La única información que utiliza es la media y la varianza de los rendimientos • Se asume estabilidad del mercado
<p>William F. Sharpe (1964) CAPM</p>	$E(R_p) = \sigma_p + B_p E(R_{MT})$	<ul style="list-style-type: none"> • Considera dos tipos de riesgo, el sistemático y el no sistemático. • Mide la relación activo-mercado mediante el beta • El beta ofrece un método sencillo para medir el riesgo de un activo que no puede ser diversificado 	<ul style="list-style-type: none"> • Todos los inversionistas tienen la misma opinión acerca de la distribución de las rentabilidades y riesgos esperados. • El beta no siempre es un factor determinante en el rendimiento de un título
<p>Stephen Ross (1976) APT</p>	$E(R_i - R_f) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2} + \dots + \lambda_n \beta_{in}$	<ul style="list-style-type: none"> • La rentabilidad de los activos es generada por un proceso estocástico en el que intervienen varios factores de riesgo, no solo del mercado. 	<ul style="list-style-type: none"> • El modelo no dice cuántos ni cuáles son los factores de riesgo.

<p>Black-Litterman (1992)</p>	$[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P\Omega^{-1}Q]$	<ul style="list-style-type: none"> • Incluye las expectativas del inversionista y de acuerdo a su nivel de confianza será la ponderación del activo dentro del portafolio. • Permite una revisión flexible del mercado y por ende de estrategias de inversión. • Se logran portafolios razonables, intuitivos, equilibrados y estables en el tiempo 	<ul style="list-style-type: none"> • Se basa en el supuesto que el mercado tiene una distribución normal • Se requieren bases de teoría bayesiana.
--------------------------------------	--	--	--

Fuente: (Cruz R. , 2012)

6. METODOLOGÍA

El modelo de asignación de activos Black -Litterman utiliza la aproximación Bayesiana para inferir en los retornos esperados de los activos. Con el enfoque Bayesiano, los rendimientos esperados son variables aleatorias propias. Ellas no son observables, sólo se puede inferir su distribución de probabilidad y ésta inferencia se inicia con una creencia previa.

En el modelo Black-Litterman, la distribución de equilibrio CAPM es el punto inicial, los puntos de vista de los inversores son la información adicional es decir, se utiliza la aproximación Bayesiana para inferir en la distribución de probabilidad de los rendimientos esperados utilizando tanto el CAPM inicial y las vistas adicionales.

Supongamos que hay N -activos en el mercado, que pueden incluir acciones, bonos, divisas y otros activos. Los rendimientos de estos activos tienen una distribución normal con μ siendo el rendimiento esperado y Σ la matriz de covarianza. Es decir:

$$r \sim N(\mu, \Sigma),$$

Donde r es el vector de los rendimientos de los activos. En equilibrio, todos los inversores en su conjunto tienen la W_{eq} cartera de mercado. Las primas de riesgo de equilibrio, Π , son tales que si todos los inversores tienen el mismo punto de vista, la demanda de éstos activos es exactamente igual a la oferta formidable (Black, 1989). Suponiendo que la tolerancia al riesgo promedio total es representado por el parámetro de aversión al riesgo δ , las primas de riesgo de equilibrio vienen dadas por:

$$\Pi = \delta \Sigma W_{eq}.$$

El modelo Bayesiano previo es que los retornos esperados, μ , se centran en los valores de equilibrio, es decir que se distribuyen normalmente con la media de Π ,

$$\mu = \Pi + \epsilon^{(p)},$$

Donde $\epsilon^{(p)}$ es un vector aleatorio con distribución normal con media cero y matriz de covarianza $T\Sigma$, donde T es una escala que indica la incertidumbre del CAPM inicial

Además del CAPM previo, el inversor también tiene una serie de puntos de vista sobre los rendimientos del mercado. Una vista se expresa indicando el rendimiento esperado de un portafolio, p , que tiene una distribución normal con media igual a q y una desviación estándar dada por ω . Sea K el número total de los puntos de vista, P está en $K \times N$ como una matriz cuyas filas son los pesos de cartera y Q está en K como vector de los retornos esperados en estos portafolios.

Es decir:

$$P' = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_K)$$

$$Q' = (q_1, q_2, \dots, q_N)$$

A continuación, los puntos de vista de los inversores se pueden expresar como:

$$P\mu = Q + \epsilon^{(v)},$$

Donde $\epsilon^{(v)}$ es una inferencia no observable, normalmente distribuida con un vector aleatorio igual a cero y una matriz de covarianza diagonal Ω . Se supone, además, que la $\epsilon^{(f)}$ y $\epsilon^{(v)}$ son independientes.

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{(f)} \\ \epsilon^{(v)} \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} T\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}\right)$$

A continuación, estos puntos de vista, se combinan con el CAPM inicial del modelo Bayesiano. El resultado es que los rendimientos esperados se distribuyen como $N(\bar{\mu}, \bar{M}^{-1})$, donde la media $\bar{\mu}$, está dada por:

$$\bar{\mu} = [(T\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(T\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q],$$

Y la matriz de covarianza \bar{M}^{-1} es dada por:

$$\bar{M}^{-1} = [(T\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}.$$

Con base a la anterior se realizará un análisis fundamentado en datos históricos desde el mes de enero de 2013 hasta el 30 de agosto de 2013 de las acciones del COLCAP y el valor histórico de este índice. Ésta información se tomará de la página oficial de la Bolsa de Valores de Colombia, con la información del precio histórico de las acciones que conforman el índice y el valor histórico del mismo. Se construirán las matrices de correlación y de covarianzas, con las cuales se estimará el modelo, adicionalmente, se supondrán las expectativas del mercado y con ellas, finalmente, se estimarán los resultados del modelo, con el cual se tratará de optimizar el portafolio siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Seleccionar las clases de activos deseadas y el índice representativo.

Tomar el ponderador de la acción y el precio de cierre de la misma al corte de Agosto de 2013. Posteriormente se multiplicaron estos dos factores para hallar las unidades del índice, y con la suma total de las unidades del índice se generó el porcentaje de participación de cada acción en el COLCAP.

2. Seleccionar un periodo histórico desde el 1 de enero hasta el 31 de agosto de 2013

Tabla 2. Especies que constituyen el índice COLCAP

NEMOTÉCNICO	DESCRIPCIÓN	PONDERADOR	PRECIO HOY	PARTICIPACIÓN
ECOPETROL	ECOPETROL S.A.	0.0775718614	4,335.00	19.44202289%
PFGRUPSURA	GRUPO INVERSIONES SURAMERICANA	0.0058759999	38,980.00	13.24255387%
PFBCOLOM	BANCOLOMBIA S.A.	0.0070297565	26,880.00	10.92490531%
GRUPOARGOS	GRUPO ARGOS S.A.	0.0084471920	21,840.00	10.66628383%
NUTRESA	GRUPO NUTRESA S.A.	0.0044865218	27,500.00	7.13330203%
EXITO	ALMACENES EXITO S.A.	0.0032334013	31,980.00	5.97841704%
PREC	PACIFIC RUBIALES ENERGY CORP	0.0020968012	36,660.00	4.44424362%
CEMARGOS	CEMENTOS ARGOS S.A.	0.0081633300	9,160.00	4.32325612%
ISA	INTERCONEXION ELECTRICA S.A. E.S.P.	0.0072925640	9,240.00	3.89583322%
CORFICOLCF	CORPORACION FINANCIERA COLOMBIANA S.A.	0.0014631134	38,580.00	3.26353546%
BOGOTA	BANCO DE BOGOTA S.A.	0.0007208715	69,980.00	2.91662057%
ISAGEN	ISAGEN S.A. E.S.P.	0.0158780398	3,065.00	2.81368516%
PFDVVNDA	BANCO DAVIVIENDA S.A.	0.0017772996	24,680.00	2.53602730%
EEB	EMPRESA DE ENERGIA DE BOGOTA S.A. E.S.P.	0.0264411174	1,560.00	2.38480316%
PFAVAL	GRUPO AVAL ACCIONES Y VALORES S.A.	0.0317523329	1,380.00	2.53339472%
CLH	CEMEX LATAM HOLDING	0.0023361953	15,000.00	2.02604249%
PFAVH	AVIANCA HOLDINGS S.A.	0.0021550421	4,060.00	0.50585953%
CNEC	CANACOL ENERGY LTD	0.0009375303	7,200.00	0.39027070%
PMGC	PETROMINERALES LTD	0.0003666890	11,900.00	0.25228593%
BVC	BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA S.A.	0.2250972504	25.10	0.32665706%

Fuente: BVC, Cálculos propios.

Participación de una acción en el Índice

COLCAP es un indicador que refleja las variaciones de los precios de las 20 acciones más líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), donde el valor de la Capitalización Bursátil Ajustada de cada compañía determina su nivel de ponderación.

$$I^k(t) = E \sum_{i=1}^n W_i^k P_i(t) \quad \#$$

Dónde:

- $I^k(t)$: Valor del índice para (t) en el trimestre k.
(t): Día o instante en el cual se calcula el índice
W: Peso o ponderación para la acción i fijo, durante k.
k: Identifica el trimestre en el que W está vigente.
E: Factor mediante el cual se da continuidad al índice cuando se presente un rebalanceo de la canasta o en caso de darse eventos corporativos que lleven a variaciones en el índice.
n: Número de acciones en el índice en el momento (t)
 $P_i(t)$: Precio de cierre vigente de la acción i en t.

La participación máxima que puede tener una acción en el índice en la fecha de cálculo de la canasta informativa es de 20%. Para tal efecto, en el proceso de cálculo de las participaciones, los excedentes serán repartidos a prorrata entre las acciones restantes del índice que tengan una participación inferior a 20%.

La participación de la acción *i* dentro del índice en el instante *t* se define de la siguiente manera:

$$\text{Participación } I(t) = \frac{W_i P_i(t)}{\sum_{i=1}^n W_i P_i(t)}$$

Donde,

W_i	Ponderador de la acción i , en el instante t .
P_i	Precio de la acción i en t .
t	Instante en el cual se calcula el índice.
I	1, 2, ..., n acciones que componen el índice.
n	Número de acciones en el índice en el instante t .

En suma, el peso de cada acción dentro del índice se obtiene al realizar el cociente entre, el ponderador de cada acción multiplicado por su precio en el periodo t y dividiendo por la sumatoria de los productos entre los ponderadores y los precios de cada acción en el mismo periodo.

3. Tomar la DTF como tasa libre de riesgo expresada en términos nominales diarios, y restársela a los rendimientos diarios de cada activo.
4. Calcular para los activos los retornos promedios históricos, las desviaciones estándar y los retornos.
5. Asignar diferentes expectativas a las vistas de cada uno de los activos
6. Estimar los retornos del modelo de Black-Litterman, desviaciones estándar y correlaciones futuras esperadas.

Adicionalmente, el modelo parte de los siguientes supuestos: Los retornos se encuentran normalmente distribuidos. Cada retorno sobre una inversión tiene asociado una distribución de probabilidad para el próximo período. Los inversionistas tienen visiones sobre los activos que podrían formar mejores portafolios. Puede estimarse un nivel de confianza para cada visión emitida. Los inversionistas no están absolutamente seguros sobre las visiones que emiten. Los riesgos son tomados sobre los activos en que se tienen visiones. Se ignoran todo tipo de impuestos y costos de transacción. Los mercados son eficientes, por tanto los precios reflejan toda la información disponible y se ajustan rápidamente a todas las variables que podrían afectar el valor de los activos. Los inversionistas son racionales. No existe el arbitraje

7. RESULTADOS

Tabla 3. Participaciones posteriores de las especies del índice.

Modelo 1. *Modelo de Black-Litterman*

	Er	Posterior Weights
ECOPETROL	0.04137	18.516%
PFGRUPSURA	0.03263	26.807%
PFBCOLOM	0.03253	26.255%
GRUPOARGOS	0.02015	-8.912%
NUTRESA	0.02334	6.794%
EXITO	0.02371	5.694%
PREC	0.03525	7.772%
CEMARGOS	0.02194	-10.078%
ISA	0.03955	3.710%
CORFICOLCF	0.01332	3.108%
BOGOTA	0.00679	6.483%
ISAGEN	0.02916	18.211%
PFAVAL	0.00817	-17.140%
PFDVVNDA	0.01505	2.271%
EEB	0.02298	2.413%
CLH	0.01274	1.930%
PFAVH	0.00409	0.482%
CNEC	0.03984	0.372%
BVC	0.02357	0.240%
PMGC	0.02215	0.311%
		95.238%

Litterman supone que el mercado está permanentemente en un estado de equilibrio puntual, en que la oferta por activos es equiparada con la demanda por los mismos. El equilibrio instantáneo puede ser comprendido como el "centro de gravedad", del cual los mercados se desvían en todo instante, según la información que surja, pero el sistema y la información en él presionarán los precios permitiendo que el mercado vuelva a equilibrarse. La idea de equilibrio es básica para el modelo, y se entiende como un estado ideal. No obstante, es posible llegar a una aproximación razonable de éste, del que se puedan sacar ventajas. Dados los resultados del modelo de Black-Litterman pueden presentar desequilibrios puntuales por la dinámica de la información, se plantea como solución alternativa la estimación de los retornos y los pesos relativos mediante el uso del modelo de Markowitz, pero usando el vector de retornos esperados calculados con el modelo de Black-Litterman.

Las visiones que los inversionistas tienen del mercado indican sobre qué activos podrá tomar posiciones que le ofrezcan ventajas. Los resultados obtenidos permiten que las decisiones de inversión tengan incorporadas las expectativas de los agentes del mercado (profesionales gestores de portafolios), dichas decisiones solo se pueden basar en los activos sobre los cuales se realizaron previsiones (tienen expectativas), Ahora, para los activos sobre los cuales no existen expectativas, el modelo entrega como rentabilidades esperadas, las correspondientes al estado de equilibrio.

Para el caso concreto se tiene expectativas sobre las acciones de PFGRUPSURA, PFCOLOMB, GRUPOARGOS, PREC, CEMARGOS, BOGOTA, ISAGEN Y PFAVAL.

Para PFGRUPOSURA, por ejemplo, tiene expectativas positivas por parte de los inversionistas y según los resultados obtenidos se deduce que es necesario Comprar acciones de esta empresa. CEMARGOS, por el contrario, tiene perspectiva negativa y la decisión debe ser No comprar acciones de Cemargos, su rendimiento su peso relativo se observa negativo, lo que indica que dentro del portafolio deben evitarse estos activos.

Del mismo modo, según las visiones de la matriz P (ANEXO) se pueden deducir cuales serías las decisiones de inversión optimas según el modelo de Black – Litterman.

Cabe añadir que para obtener resultados consistentes en términos de equilibrio del portafolio, y que los pesos relativos de los activos que conforman el portafolio sumen el 100%, se toman como insumos los resultados del modelo del Black-Litterman para realizar los cálculos con el modelo de Markowitz.

Tabla 4. Modelo 2. Varianza mínima global restringida

Stock	Weights
ECOPETROL	0.000000%
PFGRUPSURA	12.701235%
PFBLOM	0.000000%
GRUPOARGOS	2.479260%
NUTRESA	0.000000%
EXITO	0.000000%
PREC	0.632544%
CEMARGOS	0.000000%
ISA	0.000000%
CORFICOLCF	13.687795%
BOGOTA	32.763374%
ISAGEN	0.000000%
PFAVAL	0.000000%
PFDVVNDA	0.000000%
EEB	0.000000%
CLH	0.000000%
PFAVH	29.527079%
CNEC	0.000000%
BVC	1.681543%
PMGC	6.527171%
Σw_i	100.000000%
$E(R_p)$	1.196421%
σ_p	6.100097%
$E(U)$	0.080085%
$\text{Prob}(r < 0)$	42.225366%

Tabla 5. Modelo 3. Maximiza la Utilidad

Stock	Weights
ECOPETROL	2.296589%
PFGRUPSURA	22.728981%
PFBCOLOM	4.920002%
GRUPOARGOS	0.000000%
NUTRESA	0.000000%
EXITO	0.341250%
PREC	3.074730%
CEMARGOS	0.000000%
ISA	0.000000%
CORFICOLCF	8.572021%
BOGOTA	24.000100%
ISAGEN	3.573283%
PFAVAL	0.000000%
PFDVVNDA	0.000000%
EEB	0.000000%
CLH	0.000000%
PFAVH	22.795181%
CNEC	0.000000%
BVC	2.533443%
PMGC	5.164421%
Σw_i	100.000000%
$E(R_p)$	1.761819%
σ_p	6.956047%
$E(U)$	0.310221%
$\text{Prob}(r < 0)$	40.002639%

Como se muestra en el *modelo 2* de varianza mínima global restringida de Markowitz, se observa que la rentabilidad esperada es de 1.2%, mientras que la desviación estándar es de 6.1%, es decir, las rentabilidades oscilan alrededor de la media dispersándose en este valor. Ahora, los W_i o pesos relativos de las acciones dentro del portafolio estimado por este modelo se obtienen al minimizar la desviación de los resultados con la restricción de las rentabilidades esperadas del modelo de Black – Litterman, dado que estas rentabilidades esperadas incluyen las expectativas de los agentes del mercado, al realizar la estimación del modelo de Markowitz, este queda con estas expectativas incorporadas implícitamente.

El objetivo de realizar la estimación por medio del modelo de Markowitz fue la de obtener resultados más consistentes en términos de los pesos relativos de las acciones dado que al estimar por el modelo de Black-Litterman, los pesos relativos no suman siempre 100% y algunos de ellos presentan valores negativos, debido a los desequilibrios que se pueden presentar en el modelo.

Según este modelo, el portafolio que genera la mínima varianza está compuesto por 8 activos del universo de veinte que tiene el índice Colcap y las proporciones en las que deben tenerse en el portafolio están dadas en la columna weights.

Así mismo el *modelo 3*, que maximiza la utilidad ofrece la posibilidad de incrementar la utilidad esperada, pero con el costo de una mayor desviación, es decir, asumiendo un mayor riesgo 6.96%. Como es de esperarse, al asumir un mayor riesgo, tiende a incrementarse el retorno esperado. La selección está dada por la inclusión dentro del portafolio de 11 de los veinte activos del índice Colcap y las proporciones en las que deben tenerse en el portafolio están dadas en la columna weights del *modelo 3*.

Un plan eficiente en el sentido de Markowitz es encontrar las combinaciones de activos que tengan las varianzas mínimas, para diferentes valores de rendimientos promedio, en este orden de ideas, se tiene que tanto el modelo 2 como el modelo 3 garantizan la mínima varianza de los portafolios.

8. CONCLUSIONES

Se concluye que el modelo de Black-Litterman sirve para estimar los retornos esperados con un mayor nivel de confianza dado que éste modelo es dinámico al incorporar las proyecciones de los agentes sobre el mercado. Se debe tener en cuenta que el resultado al que se llegó es que el mayor beneficio del modelo se encuentra en la posibilidad de enfrentar los problemas tradicionales en la gestión de un portafolio de inversión pero de una manera más sistémica, dinámica y transparente de cara al inversionista.

Como se pudo observar, la gestión de portafolios requiere de amplias capacidades de análisis, dado que los elementos que deben ser considerados al momento de diseñar una estrategia son realmente amplios, entre ellos la duración, los betas, deltas, coeficientes, sensibilidades, los métodos de simulación, expectativas racionales de los agentes, entre otros.

Al realizar un análisis del modelo de Black-Litterman, obtener las rentabilidades esperadas y utilizarlas como insumo del modelo de Markowitz se obtienen resultados más consistentes en la medida en que este resultado incluye implícitamente las expectativas de los agentes incluidas en las rentabilidades esperadas de Black-Litterman.

Otra de las conclusiones a las que se llegó es que las expectativas también se pueden modelar, con esto se lograría un mayor alcance al momento de eliminar cualquier elemento subjetivo del modelo Black Litterman. La aplicación en conjunto de los modelos Black Litterman y Markowitz al índice COLCAP, representa una excelente alternativa para aquellos inversionistas que buscan obtener un mejor rendimiento de su portafolio de inversión, para esto es necesario también que se estime los posibles riesgos que puedan afectar los retornos esperados como lo son, el riesgo cambiario, el riesgo político, el riesgo crédito y el riesgo liquidez que puede afectar al índice en el mercado bursátil. De esta manera el inversionista tendrá un panorama mucho más amplio al momento de realizar una inversión y todas estas expectativas pueden ser incluidas en el modelo de Black – Litterman.

Finalmente este trabajo no solo enriquece y complementa aún más el estudio del Modelo Black Litterman, sino que da una pauta al inversionista para la conformación de portafolios óptimos, ponderando el equilibrio del mercado con vistas sobre expectativas específicas de los agentes que participan en él.

9. ANEXOS

9.1. Para el Modelo de Black-Litterman – Matriz de Correlaciones –

Equilibrium Inputs																				
Accion	ECOPELROL	PFGRUPSURA	PFCOLOM	GRUPOARGOS	NUTRESA	EXITO	PREC	CEMARGOS	ISA	CORFICOLCF	BOGOTA	ISAGEN	PFAVAL	PFDVAVNDA	EEB	CLH	PFAVH	CNEC	BVC	PMGC
Weights	19.442023%	13.242554%	10.924905%	10.666284%	7.133302%	5.978417%	4.444244%	4.323256%	3.895833%	3.263535%	2.916621%	2.813685%	2.536027%	2.384803%	2.533395%	2.026042%	0.505860%	0.390271%	0.252286%	0.326657%
ECOPELROL	1.00000000	0.264665592	0.189337996	-0.025596475	0.18666039	0.281215263	0.143668021	0.277075159	0.268666303	0.189365168	0.091636981	0.123354508	0.269925194	0.173741467	0.129598980	0.095984618	0.228042351	0.210203729	0.127890818	0.118900000
PFGRUPSURA	0.264665592	1.000000000	0.289121428	0.430924780	0.390997177	0.319902276	0.167011540	0.281800174	0.410552222	0.337565223	0.041556364	0.331510367	0.326634141	0.230264525	0.328261946	0.231280878	-0.191733688	0.231740437	0.205690751	-0.039800000
PFCOLOM	0.189337996	0.289121428	1.000000000	0.488949411	0.181150152	0.167546144	0.058844999	0.419478179	0.336636697	0.246234982	0.073258213	0.139640066	0.169078820	0.190161942	0.326401919	0.068603726	0.068615172	0.207568428	0.322856938	0.129200000
GRUPOARGOS	-0.025596475	0.430924780	0.488949411	1.000000000	0.296909664	0.641187652	0.001349403	0.549281850	0.603584207	0.420011967	-0.273447980	0.471430210	0.524266473	0.604547746	0.371712338	0.359137708	0.010146978	0.248592445	0.029515041	0.231000000
NUTRESA	0.18666039	0.390997177	0.181150152	0.296909664	1.000000000	0.298015593	0.177505507	0.206276826	0.195934840	0.129487956	0.040522553	0.142893291	0.238436047	0.004973652	0.186013214	0.053549140	0.147591985	0.107438631	0.160477885	0.351900000
EXITO	0.281215263	0.319902276	0.167546144	0.641187652	0.298015593	1.000000000	-0.009679401	0.310195767	0.351873700	0.143241202	-0.028073549	0.190497213	0.318259612	0.145632456	0.226873964	-0.038613110	0.108869943	0.128026692	0.135891801	-0.002800000
PREC	0.143668021	0.167011540	0.058844999	0.001349403	0.177505507	-0.009679401	1.000000000	0.105625970	0.149016593	0.070126946	-0.024634132	-0.016847427	0.120919484	0.002991143	0.119374207	0.139915595	-0.046807778	0.175484393	0.191758329	0.180900000
CEMARGOS	0.277075159	0.281800174	0.419478179	0.549281850	0.206276826	0.310195767	0.105625970	1.000000000	0.430427361	0.335636189	0.022330083	0.236183463	0.147397054	0.048807309	0.388049217	0.288544401	0.057744388	0.205123396	0.079939597	0.039200000
ISA	0.268666303	0.410552222	0.336636697	0.603584207	0.195934840	0.351873700	0.149016593	0.430427361	1.000000000	0.249464521	0.024911766	0.384982256	0.221874631	0.186819442	0.390513916	0.129401784	0.358754674	0.231111833	0.134133695	0.319600000
CORFICOLCF	0.189365168	0.337565223	0.246234982	0.420011967	0.129487956	0.143241202	0.070126946	0.335636189	0.249464521	1.000000000	0.108848111	0.240351532	0.230137822	0.100089573	0.227479104	0.102608577	-0.117539222	0.160856236	0.136493184	-0.119600000
BOGOTA	0.091636981	0.041556364	0.073258213	-0.273447980	0.040522553	-0.028073549	-0.024634132	0.022330083	0.024911766	0.108848111	1.000000000	0.051104106	0.229516581	-0.114627027	-0.074513268	0.070068022	-0.232699171	0.085764376	0.109771068	-0.447700000
ISAGEN	0.123354508	0.331510367	0.139640066	0.471430210	0.142893291	0.190497213	-0.016847427	0.236183463	0.384982256	0.240351532	0.051104106	1.000000000	0.195965723	0.153730301	0.355212667	0.139894902	-0.006571677	0.122249908	0.142445625	0.188400000
PFAVAL	0.269925194	0.326634141	0.169078820	0.524266473	0.238436047	0.318259612	0.120919484	0.147397054	0.221874631	0.230137822	0.229516581	0.195965723	1.000000000	0.150145914	0.125412344	0.152600345	-0.048421075	0.128524055	0.166768782	0.241900000
PFDVAVNDA	0.173741467	0.230264525	0.190161942	0.604547746	0.004973652	0.145632456	0.002991143	0.048807309	0.186819442	0.100089573	-0.114627027	0.153730301	0.150145914	1.000000000	0.110324425	0.070189322	0.097646949	0.177633597	0.138998009	0.284400000
EEB	0.129598980	0.328261946	0.326401919	0.371712338	0.186013214	0.226873964	0.119374207	0.388049217	0.390513916	0.227479104	-0.074513268	0.355212667	0.125412344	0.110324425	1.000000000	0.149026259	0.463820385	0.222314254	0.123379580	0.143300000
CLH	0.095984618	0.231280878	0.068603726	0.359137708	0.053549140	-0.038613110	0.139915595	0.288544401	0.129401784	0.102608577	0.070068022	0.139894902	0.152600345	0.070189322	0.149026259	1.000000000	-0.010837798	0.266785409	-0.003609776	0.174600000
PFAVH	0.228042351	-0.191733688	0.068615172	0.010146978	0.147591985	0.108869943	-0.046807778	0.057744388	0.358754674	-0.117539222	-0.232699171	-0.006571677	-0.048421075	0.097646949	0.463820385	-0.010837798	1.000000000	0.259277709	-0.011851502	-0.097900000
CNEC	0.210203729	0.231740437	0.207568428	0.248592445	0.107438631	0.128026692	0.175484393	0.205123396	0.231111833	0.160856236	0.085764376	0.122249908	0.128524055	0.177633597	0.222314254	0.266785409	0.259277709	1.000000000	0.115276331	-0.137600000
BVC	0.127890818	0.205690751	0.322856938	0.029515041	0.160477885	0.135891801	0.191758329	0.079939597	0.134133695	0.136493184	0.109771068	0.142445625	0.166768782	0.138998009	0.123379580	-0.003609776	-0.011851502	0.115276331	1.000000000	0.010200000
PMGC	0.118900000	-0.039800000	0.129200000	0.231000000	0.351900000	-0.002800000	0.180900000	0.039200000	0.319600000	-0.119600000	-0.447700000	0.188400000	0.241900000	0.284400000	0.143300000	0.174600000	-0.097900000	-0.137600000	0.010200000	1.000000000

– Vector de desviaciones estándar –

STD. DESV.	0.234904618	0.163309	0.198693278	0.210011802	0.19385949	0.259875218	0.345748369	0.258295705	0.269053859	0.145472403	0.149818843	0.208600558	0.163589978	0.229910497	0.190921119	0.285149022	0.153858905	0.433963009	0.224990987	0.535374128
------------	-------------	----------	-------------	-------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

– Matriz de Covarianzas –

COVARIANCE	ECOPETROL	PFGRUPSURA	PFCOLOM	GRUPOARGOS	NUTRESA	EXITO	PREC	CEMARGOS	ISA	CORRIFOLCF	BOGOTA	ISAGEN	PFAVAL	PFDVAVNDA	EEB	CLH	PFAVH	CNEC	BVC	PMGC
ECOPETROL	0.05518018	0.01015311	0.00883716	-0.00126274	0.00849776	0.01716704	0.01166841	0.01681149	0.01698025	0.00647101	0.00322499	0.00604452	0.01037270	0.00938326	0.00581229	0.00642932	0.00824194	0.02142815	0.00675921	0.01495308
PFGRUPSURA	0.01015311	0.02666983	0.00938153	0.01477935	0.01237858	0.01357664	0.00943011	0.01188690	0.01803922	0.00801952	0.00101675	0.01129335	0.00872626	0.00864562	0.01023492	0.01077015	-0.00481760	0.01642346	0.00755771	-0.00347977
PFCOLOM	0.00883716	0.00938153	0.03947902	0.02040285	0.00697765	0.00865132	0.00404253	0.02152830	0.01799633	0.00711727	0.00218075	0.00578774	0.00549578	0.00868692	0.01238197	0.00388689	0.00209762	0.01789770	0.01443306	0.01374368
GRUPOARGOS	-0.00126274	0.01477935	0.02040285	0.04410496	0.01208802	0.03499401	0.00009798	0.02979587	0.03410522	0.01283175	-0.00860369	0.02065269	0.01801161	0.02918993	0.01490406	0.02150684	0.00032787	0.02265606	0.00139461	0.02597246
NUTRESA	0.00849776	0.01237858	0.00697765	0.01208802	0.03758150	0.01501381	0.01189759	0.01032891	0.01021970	0.00965172	0.00117693	0.00577849	0.00756163	0.00022168	0.00688470	0.00296013	0.00440223	0.00903858	0.00699951	0.03652277
EXITO	0.01716704	0.01357664	0.00865132	0.03499401	0.01501381	0.06753513	-0.00086971	0.02082178	0.02460316	0.00541519	-0.00109302	0.01032688	0.01353016	0.00870125	0.01125650	-0.00286135	0.00435307	0.01443837	0.00794554	-0.00038957
PREC	0.01166841	0.00943011	0.00404253	0.00009798	0.01189759	-0.00086971	0.11954193	0.00943296	0.01386226	0.00352716	-0.00127604	-0.00121509	0.00683932	0.00023777	0.00787997	0.01379425	-0.00249001	0.02633003	0.01491693	0.03348545
CEMARGOS	0.01681149	0.01188690	0.02152830	0.02979587	0.01032891	0.02082178	0.00943296	0.06671667	0.02991275	0.01261150	0.00086412	0.01272571	0.00622820	0.00289842	0.01913630	0.02125209	0.00229483	0.02299244	0.00464563	0.00542077
ISA	0.01698025	0.01803922	0.01799633	0.03410522	0.01021970	0.02460316	0.02991275	0.07238998	0.00976402	0.00100418	0.02160705	0.00976570	0.01155633	0.02005994	0.00992776	0.01485113	0.02698448	0.00811974	0.04603661	
CORRIFOLCF	0.00647101	0.00801952	0.00711727	0.01283175	0.00365172	0.00541519	0.00352716	0.01261150	0.00976402	0.02116222	0.00237229	0.00729362	0.00547678	0.00334756	0.00631795	0.00425634	-0.00263079	0.01015480	0.00446742	-0.00931471
BOGOTA	0.00322499	0.00101675	0.00218075	-0.00860369	0.00117693	-0.00109302	-0.00127604	0.00086412	0.00100418	0.00237229	0.02244569	0.00159712	0.00562519	-0.00394832	-0.00213135	0.00299335	-0.00536394	0.00557604	0.00370015	-0.03590963
ISAGEN	0.00604452	0.01129335	0.00578774	0.02065269	0.00577849	0.01032688	-0.00121509	0.01272571	0.02160705	0.00729362	0.00159712	0.04351419	0.00668732	0.00737282	0.01414679	0.00832126	-0.00021092	0.01106666	0.00668544	0.02104039
PFAVAL	0.01037270	0.00872626	0.00549578	0.01801161	0.00756163	0.01353016	0.00683932	0.00622820	0.00976570	0.00547678	0.00562519	0.00668732	0.02676168	0.00564715	0.00391698	0.00711843	-0.00121875	0.00912418	0.00613814	0.02118605
PFDVAVNDA	0.00938326	0.00864562	0.00868692	0.02918993	0.00022168	0.00870125	0.00023777	0.00289842	0.01155633	0.00334756	-0.00394832	0.0073282	0.00564715	0.05285884	0.00484267	0.00460152	0.00345414	0.01772297	0.00719006	0.03500626
EEB	0.00581229	0.01023492	0.01238197	0.01490406	0.00688470	0.01125650	0.00787997	0.01913630	0.02005994	0.00631795	-0.00213135	0.01414679	0.00391698	0.00484267	0.03645087	0.00811313	0.01362468	0.01841934	0.00529984	0.01464730
CLH	0.00642932	0.01077015	0.00388689	0.02150684	0.00296013	-0.00286135	0.01379425	0.02125209	0.00992776	0.00425634	0.00299335	0.00832126	0.00711843	0.00460152	0.00811313	0.08130997	-0.00047548	0.03301313	-0.00023159	0.02665468
PFAVH	0.00824194	-0.00481760	0.00209762	0.00032787	0.00440223	0.00435307	-0.00249001	0.00229483	0.01485113	-0.00263079	-0.00536394	-0.00021092	-0.00121875	0.00345414	0.01362468	-0.00047548	0.02367256	0.01731173	-0.00041026	-0.00806423
CNEC	0.02142815	0.01642346	0.01789770	0.02265606	0.00903858	0.01443837	0.02633003	0.02299244	0.02698448	0.01015480	0.00557604	0.01106666	0.00912418	0.01772297	0.01841934	0.03301313	0.01731173	0.18832389	0.01125532	-0.03196896
BVC	0.00675921	0.00755771	0.01443306	0.00139461	0.00699951	0.00794554	0.01491693	0.00464563	0.00811974	0.00446742	0.00370015	0.00668544	0.00613814	0.00719006	0.00529984	-0.00023159	-0.00041026	0.01125532	0.05062094	0.00122863
PMGC	0.01495308	-0.00347977	0.01374368	0.02597246	0.03652277	-0.00038957	0.03348545	0.00542077	0.04603661	-0.00931471	-0.03590963	0.02104039	0.02118605	0.03500626	0.01464730	0.02665468	-0.00806423	-0.03196896	0.00122863	0.28662546

– Vector de retornos esperados –

Prior Returns	0.041109501	0.029897821	0.031362008	0.039362551	0.025844857	0.041519946	0.027521471	0.043449885	0.04775523	0.017411339	0.001930617	0.023879733	0.022304678	0.023446633	0.024374582	0.023390971	0.006137901	0.04318869	0.016714208	0.03476197
---------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	------------	-------------	------------

9.2. Para el Modelo de Markowitz

Stock	Exp Ret	Std Dev	Correlation																			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4.14%	23.49%																				
2	3.26%	16.33%	1.000	0.265	0.189	-0.026	0.187	0.281	0.144	0.277	0.269	0.189	0.092	0.123	0.270	0.174	0.130	0.096	0.228	0.210	0.128	0.119
3	3.25%	19.87%	0.265	1.000	0.289	0.431	0.391	0.320	0.167	0.282	0.411	0.338	0.042	0.332	0.327	0.230	0.328	0.231	-0.192	0.232	0.206	-0.040
4	2.01%	21.00%	0.189	0.289	1.000	0.489	0.181	0.168	0.059	0.419	0.337	0.246	0.073	0.140	0.169	0.190	0.326	0.069	0.069	0.208	0.323	0.129
5	2.33%	19.39%	-0.026	0.431	0.489	1.000	0.297	0.641	0.001	0.549	0.604	0.420	-0.273	0.471	0.524	0.605	0.372	0.359	0.010	0.249	0.030	0.231
6	2.37%	25.99%	0.187	0.391	0.181	0.297	1.000	0.298	0.178	0.206	0.196	0.129	0.041	0.143	0.238	0.005	0.186	0.054	0.148	0.107	0.160	0.352
7	3.52%	34.57%	0.281	0.320	0.168	0.641	0.298	1.000	-0.010	0.310	0.352	0.143	-0.028	0.190	0.318	0.146	0.227	-0.039	0.109	0.128	0.136	-0.003
8	2.19%	25.83%	0.144	0.167	0.059	0.001	0.178	-0.010	1.000	0.106	0.149	0.070	-0.025	-0.017	0.121	0.003	0.119	0.140	-0.047	0.175	0.192	0.181
9	3.96%	26.91%	0.277	0.282	0.419	0.549	0.206	0.310	0.106	1.000	0.430	0.336	0.022	0.236	0.147	0.049	0.388	0.289	0.058	0.205	0.080	0.039
10	1.33%	14.55%	0.269	0.411	0.337	0.604	0.196	0.352	0.149	0.430	1.000	0.249	0.025	0.385	0.222	0.187	0.391	0.129	0.359	0.231	0.134	0.320
11	0.68%	14.98%	0.189	0.338	0.246	0.420	0.129	0.143	0.070	0.336	0.249	1.000	0.109	0.240	0.230	0.100	0.227	0.103	-0.118	0.161	0.136	-0.120
12	2.92%	20.86%	0.092	0.042	0.073	-0.273	0.041	-0.028	-0.025	0.022	0.025	0.109	1.000	0.051	0.230	-0.115	-0.075	0.070	-0.233	0.086	0.110	-0.448
13	0.82%	16.36%	0.123	0.332	0.140	0.471	0.143	0.190	-0.017	0.236	0.385	0.240	0.051	1.000	0.196	0.154	0.355	0.140	-0.007	0.122	0.142	0.188
14	1.51%	22.99%	0.270	0.327	0.169	0.524	0.238	0.318	0.121	0.147	0.222	0.230	0.230	0.196	1.000	0.150	0.125	0.153	-0.048	0.129	0.167	0.242
15	2.30%	19.09%	0.174	0.230	0.190	0.605	0.005	0.146	0.003	0.049	0.187	0.100	-0.115	0.154	0.150	1.000	0.110	0.070	0.098	0.178	0.139	0.284
16	1.27%	28.51%	0.130	0.328	0.326	0.372	0.186	0.227	0.119	0.388	0.391	0.227	-0.075	0.355	0.125	0.110	1.000	0.149	0.464	0.222	0.123	0.143
17	0.41%	15.39%	0.096	0.231	0.069	0.359	0.054	-0.039	0.140	0.289	0.129	0.103	0.070	0.140	0.153	0.070	0.149	1.000	-0.011	0.267	-0.004	0.175
18	3.98%	43.40%	0.228	-0.192	0.069	0.010	0.148	0.109	-0.047	0.058	0.359	-0.118	-0.233	-0.007	-0.048	0.098	0.464	-0.011	1.000	0.259	-0.012	-0.098
19	2.36%	22.50%	0.210	0.232	0.208	0.249	0.107	0.128	0.175	0.205	0.231	0.161	0.086	0.122	0.129	0.178	0.222	0.267	0.259	1.000	0.115	-0.138
20	2.22%	53.54%	0.128	0.206	0.323	0.030	0.160	0.136	0.192	0.080	0.134	0.136	0.110	0.142	0.167	0.139	0.123	-0.004	-0.012	0.115	1.000	0.010
			0.119	-0.040	0.129	0.231	0.352	-0.003	0.181	0.039	0.320	-0.120	-0.448	0.188	0.242	0.284	0.143	0.175	-0.098	-0.138	0.010	1.000

10. BIBLIOGRAFÍA

- Atzner, P., Delbaen, F., Eber, J., & Heath, D. (1998). Coherent Measures of Risk., (págs. 1-24).
- Becerra, O., & Melo, L. (2008). Medidas de riesgo financiero usando cópulas: Teoría y aplicaciones. *Borradores de Economía Nro. 489*, 1-96.
- Buenaventura, G., & Cuevas, A. (2005). Una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión y su aplicación al caso colombiano. *Estudios Gerenciales Nro. 95*, 13-36.
- Castillo, P., & Lama, R. (1998). *Evaluación de portafolio de los inversionistas institucionales: fondos mutuos y fondos de pensiones*. Lima.
- Cootner, P. (1962). Stock prices: Random versus systematic Changes. *Industrial Management Review Vol. 3 Nro. 2*, 24-45.
- Cruz, E. (2011). Un modelo para portafolios de inversión. *Scientia et Technica No. 47 Año XVII*, 113-120.
- Cruz, R. (2012). *Aplicación del Modelo de Black - Litterman a la Selección de Portafolios Internacionales*. Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Galvez Pinto, R. M. (2008). *Análisis costo beneficio de la implementación del modelo de Black-Litterman para la asignación de activos en portafolios de inversión*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- García, A. (2001). Prima de riesgo y volatilidad con un modelo M-GARCH. *Revista Asturiana de Economía Nro. 22*, 143-152.
- Jaureguizar, C. (2007). Black Litterman Global Asset Allocation Model. *Noesis Quantitative Research*, 2-8.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal Of Finance Vol. 7 Nro. 1*, 77-91.
- Mendiazábal, A., Miera, L., & Zubia, M. (2002). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras. *Cuadernos de Gestión Vol. 2 No. 1*, 33-45.
- Puerta, A., & Laniado, H. (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, una análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía*, 243-273.

- Ruiz, G., Jimenez, J., & Torres, J. (2000). *La gestión del riesgo financiero*. Madrid: Pirámide.
- Salazar Cruz, R. (2012). *Aplicación del Modelo de Black Litterman a la selección de portafolios internacionales*. Ciudad de México.
- Sharpe, W. (1964). Capital Assets Prices: A theory of market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal Of Finance*. Vol. 19 Nro. 3, 425-442.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Toward Risk. *Review of Economic Studies* No. 67, 65-86.
- Ursula, A. (2003). Análisis comparativo de las necesidades ambientales de las pyme en Chile, Colombia y México. *Serie Medio Ambiente y Desarrollo* Nro. 74, 7.
- Zhang, W., Xiao, W., & Wang, Y. (2008). A fuzzy portfolio selection method based on possibilistic mean and variance. *Soft Computing* Vol. 33 No. 6, 627-633.