NOCIÓN DE NÚMERO RACIONAL EN GRADO TERCERO: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE ACCIONES CONCRETAS

AUTORES:

ANGELLY PADIERNA RODRÍGUEZ

ANA YORLEY ZAPATA GUTIÉRREZ

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y

HUMANAS

MEDELLÍN

2018

NOCIÓN DE NÚMERO RACIONAL EN GRADO TERCERO: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE ACCIONES CONCRETAS

AUTORES:

ANGELLY PADIERNA RODRÍGUEZ
ANA YORLEY ZAPATA GUTIÉRREZ

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dra. SOLANGE ROA FUENTES

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS
MEDELLÍN
2018

DEDICATORIA

Este trabajo lo queremos dedicar a:

Dios, por bendecirnos con este nuevo logro de formación profesional y personal.

Nuestros hijos Sara - Daniela y Emmanuel quienes son nuestra fortaleza e inspiración para seguir adelante cada día.

Nuestros esposos por su comprensión, paciencia y apoyo; en cada uno de los momentos vividos en este recorrido de dos años que muestran el gran amor que nos tienen.

Nuestros padres Ana (Marleny – Fabio) Angelly (Gladys –Héctor) por su apoyo y formación constante en todas las batallas de la vida, porque con su ejemplo nos han inspirado a trabajar y salir adelante sin importar las circunstancias siempre proyectarnos y lograr las metas propuestas.

Finalmente, a todas las personas que de una manera u otra siempre estuvieron pendientes de nuestra formación profesional, se interesaron por nuestro bienestar dentro y nos brindaron su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Con la elaboración de este trabajo de investigación que muestra un sueño cumplido de nosotras dos en formación profesional como Magister en Educación; queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a:

Dios, quien siempre nos acompaña y bendice cada minuto de nuestro caminar; nuestros hijos, esposos y familia por soportar con sacrificio nuestras ausencias por la dedicación a esta maestría y al trabajo.

Todos y cada uno de los profesores de la Maestría en Educación en didáctica de las matemáticas, quienes participaron con dedicación e incondicionalidad brindando sus conocimientos y su apoyo, sin escatimar esfuerzos, en beneficios de todos los que ingresamos a dicha Maestría.

A la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa, Rector Miguel Albeiro Zapata Córdoba y estudiantes que apoyaron y participaron de manera directa o indirecta este proceso investigativo

En especial a nuestros Asesores, Doctor Luis Albeiro Zabala Jaramillo y Doctora Solange Roa Fuentes, quienes, con su inmenso conocimiento, su incomparable calidad como maestros y seres humanos. Por su invaluable apoyo, compañía y paciencia compartiendo cada día sus conocimientos de manera desinteresada, lograron motivarnos cada día para no perder el norte y llevarnos de la mano en la realización de este trabajo.

RESUMEN

Obando (2003), argumenta que son muchas los cuestionamientos que surgen en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas alrededor del tema de la fracciones. En este trabajo se presenta un análisis cognitivo que permite determinar un camino de construcción de la noción de numero racional desde la perspectiva de la Teoría APOE (Acrónico de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Arnon et al., 2014). Dada la complejidad que presenta para los estudiantes la construcción de número racional, surge la siguiente pregunta: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales sobre la noción de número racional evidencian estudiantes de tercero de primaria?, en particular, se analiza la construcción de Objetos abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos.

Analizando el estudio de la noción de número racional, en diferentes investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, así como el estudio de libros de texto, se plantea una Descomposición Genética (DG) –modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto (Dubinsky, 1991)– que permite explicar aquellas Construcciones y Mecanismos Mentales, que hipotéticamente un estudiante pone visible, al construir la Noción De Número Racional como Objeto Matemático.

Esta investigación se sustenta metodológicamente en el desarrollo de la primera y tercera componente del Ciclo de Investigación de la teoría APOE. En la primera componente Análisis Teórico, se propone un modelo cognitivo de construcción de la Noción de Número Racional para niños de tercero de primaria, partiendo de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos. La segunda componente, diseño y aplicación de instrumentos, se inicia con el diseño de una Unidad Didáctica compuesta por un conjunto de tareas que son analizadas con base en el modelo cognitivo presentado en la primera componente. Esta investigación es de enfoque cualitativo y corte empírico experimental, tomando el estudio de caso, fundamentado, con 6 estudiantes que participan en el desarrollo de la investigación. Los resultados del trabajo se analizan a la luz de la descomposición genética preliminar y es retroalimentado por las evidencias obtenidas mediante la entrevista realizada.

Aunque inicialmente la teoría APOE fue diseñada e implementada para nociones y conceptos matemáticos avanzados, la aplicación de ésta en la presente investigación, permite ampliar esta visión y aplicarla en un contexto matemático donde se pueden establecer relaciones entre las Estructuras y Mecanismos Mentales que desarrollan estudiantes de primaria sobre la Noción de Número Racional. Tomando los elementos teóricos que explican cómo los estudiantes construyen Objetos abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos Concretos.

Finalmente, con esta investigación se presenta el análisis de los resultados para realizar el diseño de una Unidad Didáctica; la cual puede ser tomada por otros profesores de básica primaria para sustentar el diseño de sus clases y modelos de evaluación. Además, el uso de material concreto como las regletas, las tortas de fraccionarios, entre otros, desde una perspectiva cognitiva, permite señalar al docente de matemáticas, la necesidad de sustentar su uso y el impacto que el mismo puede tener en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a mediano y largo plazo.

ABSTRAC
Obando (2003) argues that there are many questions that arise in the teaching-learning processes of mathematics around the subject of fractions. In this paper we present a cognitive analysis that allows us to determine a path of construction of the notion of rational number from the perspective of the APOE Theory (Acronym of Action, Process, Object, Scheme) (Arnon et al., 2014). Given the complexity that the construction of rational number presents for students, the following question arises: What structures and mental mechanisms on the notion of rational number show third-grade students? In particular, the construction of abstract objects is analyzed. from the application of Actions on specific Objects.

Analyzing the study of the notion of rational number, in different researches in Mathematics Didactics, as well as the study of textbooks, a Genetic Decomposition (DG) is proposed - a cognitive model by means of which a student can build a concept (Dubinsky , 1991) - that allows to explain those Constructions and Mental Mechanisms, that hypothetically a student makes visible, when constructing the Notion of Rational Number as Mathematical Object.

This research is supported methodologically in the development of the first and third components of the APOE theory Research Cycle. In the first component Theoretical Analysis, a cognitive model of construction of the Notion of Rational Number for children of third grade of primary school is proposed, starting from the application of Actions on concrete Objects. The second component, design and application of instruments, begins with the design of a Didactic Unit composed of a set of tasks that are analyzed based on the cognitive model presented in the first component. This investigation is of qualitative approach and experimental empirical cut, taking the case study, founded, with 6 students that participate in the development of the investigation. The results of the work are analyzed in light of the preliminary genetic decomposition and are fed back by the evidence obtained through the interview.

Although initially the APOE theory was designed and implemented for advanced mathematical concepts and notions, the application of this in the present investigation, allows to extend this vision and apply it in a mathematical context where relationships can be established between the Structures and Mental Mechanisms developed by students of primary on the Notion of Rational Number. Taking the theoretical elements that explain how students construct abstract objects from the application of Actions on Concrete Objects.

Finally, this research presents the analysis of the results to design a Didactic Unit; which can be taken by other primary school teachers to support the design of their classes and assessment models. In addition, the use of concrete material such as strips, fractional cakes, among others, from a cognitive perspective, can point out to the teacher of mathematics, the

need to support its use and the impact that it can have on teaching processes and learning of mathematics in the medium and long term.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se tiene como objetivo principal analizar las estructuras y mecanismos mentales generados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Número Racional a través del diseño y desarrollo de una Unidad Didáctica fundamentada en una Descomposición Genética, bajo el marco de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Desde una investigación de corte empírico experimental y empleando un enfoque cualitativo, basado en el Estudio de Casos.

Este documento se encuentra estructurado en cinco capítulos que permiten exponer lo estudiado y analizar los resultados obtenidos. A continuación, se presenta un resumen de cada uno de ellos:

En el capítulo 1, se expone la problemática, antecedentes y objetivos de investigación. En el planteamiento del problema se establecen los elementos que dan origen a nuestro objeto de estudio, teniendo en cuenta antecedentes como las pruebas externas y las investigaciones realizadas del mismo.

El capítulo 2, hace referencia al marco teórico que fundamenta nuestra investigación, la Teoría APOE creada por Ed Dubinsky y desarrollada junto al grupo RUMEC –Research in Undergraduate Mathematics Education community– la cual está fundamentada en la idea de abstracción reflexiva de Piaget y tiene como objetivo principal permitir a los estudiantes la adquisición del conocimiento matemático de una manera estructural, para nuestro caso la Noción de Número Racional en estudiantes del grado tercero.

En el capítulo 3, se hace referencia al diseño metodológico, el cual es de enfoque cualitativo y de corte empírico experimental, se desarrollan la primera y tercera componente del ciclo de investigación y como resultado se propone una Unidad Didáctica fundamentada en la descomposición genética validada por el trabajo de los estudiantes en la entrevista.

El análisis de datos se establece en el capítulo 4, este análisis se realiza con la información obtenida en la aplicación de la entrevista que fue video grabada y transcrita par a un análisis más detallado de la información; en ella, verificamos el cumplimiento de los objetivos trazados y un paralelo, en forma descriptiva, de los *a priori* y *a posteriori* respecto al tipo de estructuras mentales que los estudiantes evidencian.

Finalmente, en el capítulo 5, se describen las conclusiones obtenidas en el desarrollo de la investigación relacionada con la Noción de Número Racional; las evidencias de un alcance favorable en los objetivos propuestos y por último se hacen algunas sugerencias para la elaboración de una Unidad Didáctica para la institución educativa El Triunfo Santa Teresa.

Índice

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el desarrollo del capítulo, se presentan los elementos que dan origen al problema de indagación; que se ha desarrollado en los últimos años con las diversas investigaciones en relación al objeto matemático de Noción de Número Racional en los grados de básica primaria, además se hace un análisis del currículum escolar colombiano y resultados en pruebas estandarizadas aplicadas en la educación básica en relación con el objeto matemático, dando un panorama de identificación del problema con la construcción abstracta del Objeto matemático de número racional. Con esta problemática entonces queremos dar respuesta a como los estudiantes realizan la construcción de objetos abstractos a partir de acciones concretas; así mismo, se presenta la hipótesis y los objetivos que direccionan la investigación.

1.1 PROBLEMÁTICA

La enseñanza de los fraccionarios es una de las labores más difíciles que deben llevar a cabo los docentes de primaria. Esta dificultad se evidencia en el alto porcentaje de estudiantes que fallan al aprender este concepto (Castro, 2001).

Así mismo, se propone que el aprendizaje de conceptos matemáticos como el de fracción se introduzca a partir de actividades en donde los estudiantes tengan la oportunidad de manipular objetos concretos para descubrir principios y soluciones matemáticas como fundamento de conceptos y nociones abstractas. Desarrollando los conceptos matemáticos mediante un proceso constante, donde cada estudiante cuenta con una secuencia de actividades de aprendizaje que vayan de lo concreto a lo simbólico; dado que el ciclo de aprendizaje es una interacción planificada entre el conocimiento estructurado y el estudiante, llevado acabo con ayuda de materiales diseñados adecuadamente. En esta vía Sánchez (2003) asegura que deben darse las condiciones adecuadas que ayuden a los estudiantes a experimentar estos procesos y consecuentemente a comprender y a crear situaciones que permitan a los estudiantes transmitirlas a otros.

En particular MEN (2006) sustenta que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de los números racionales, se debe a que:

> Están relacionados con diferentes tipos de situaciones (situaciones de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón, y como un operador). Y, además, pueden representarse de varias maneras ($\frac{3}{4}$ fracciones; $\frac{75}{100}$ fracciones decimales; 0.75, expresiones decimales; 75%, porcentajes) (p. 59)

Respecto a la complejidad conceptual, Ávila y Mancera (1989), plantean que “El concepto de fracción es complejo y no es posible aprenderlo enseguida. Es preciso adquirirlo a través de un prolongado proceso de desarrollo secuencial” (p. 26). Por tanto urge la necesidad de implementar una propuesta didactica, con el fin de promover que los estudiantes logren el desarrollo de altos niveles de conceptualización; que les permita construir nociones fundamentales sobre los números racionales que potencien su evolucion a través de su vida escolar.

La investigación que aquí se propone se desarrolla en la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa ubicada en el municipio de Medellín, Barrio doce de octubre parte alta, con una sede anexa en el barrio Picacho en la cual se realizará el trabajo de investigación. La Institución en cuanto a su organización, ofrece a la comunidad los servicios educativos desde los grados de preescolar, hasta finalizar la básica secundaria. En particular esta investigación se centra en analizar el tipo de estructuras que estudiantes de tercer grado (8 – 10 años) han desarrollado sobre la noción de número racional.

Según la práctica pedagógica se han evidenciado diversas falencias de aprendizaje en el área de matemáticas, la necesidad de trabajar en forma consciente para lograr avances significativos en la comprensión del concepto de número racional y sus diferentes significados. Hoy los estudiantes presentan dificultades al momento de operar este pensamiento numérico y no tienen un concepto claro de lo que son estos números y lo que representan; no reconocen cuáles son las fracciones propias y las impropias, ni las ubican correctamente en la recta numérica; es necesario tener en cuenta que este tema es fundamental en el área de matemáticas para iniciar la comprensión de los números racionales sus representaciones y propiedades.

La noción de número racional se debe afrontar con la ayuda de representaciones gráficas que visualicen la noción de unidad y sus partes con varias formas de representación. El concepto de número racional es fundamental y por lo tanto debe irse ampliando, hasta lograr que los estudiantes construyan el conjunto de los números racionales como un conjunto con estructura. Esto debería guiar las etapas del proceso de aprendizaje de las matemáticas y la necesidad de los números fraccionarios en la vida cotidiana.

Kieren (1983) afirma que:

> La expresión simbólica $\frac{a}{b}$ puede modelar cuatro significados o ideas matemáticas: medida, cociente, operador multiplicativo y razón, agrega un quinto significado la relación parte-todo, pero señala que este se puede encontrar presente en los otros cuatro significados, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes. (p. 506-508)

Aquí surge un cuestionamiento: ¿Qué estrategias y/o mecanismos de enseñanza debe implementar el maestro para promover la construcción de la noción de número racional en los estudiantes de grado tercero de primaria?

De acuerdo con la pregunta expuesta, en esta investigación se busca dimensionar los mecanismos y estructuras mentales que puedan desarrollar los estudiantes al construir la noción de número racional. Por tanto, se hace necesario trabajar los conceptos de fracción en su orden: concreto, simbólico y conceptual, mediante una metodología apropiada que promueva en los estudiantes la construcción de conocimiento no memorístico. El ámbito escolar y los saberes adquiridos no funcionan como herramientas para resolver estos problemas, sino que existen diferentes interpretaciones del concepto que deben desarrollarse en forma secuencial durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Lo que se busca entonces es que los estudiantes tengan una idea concreta sobre la noción de fracción que los lleve a construir una noción abstracta de número racional. Al respecto Vergnaud (1983, citado por Llinares, 2003, p. 189), afirma que: "El dominio de las fracciones hace parte de un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones que están en estrecha conexión".

Ahora bien, analizando un poco más el objeto matemático desde los últimos resultados de las diferentes pruebas realizadas en el país, puede afirmarse que Colombia ha presentado desempeños muy bajos en las diferentes pruebas de conocimiento. Por ejemplo, las pruebas SABER 3º, 5° y 9º, tiene como principal objetivo aportar al mejoramiento de la calidad de la educación en el país y para ello se aplican evaluaciones periódicamente que permiten controlar el desarrollo de las competencias en los estudiantes de educación básica. Este seguimiento de calidad de los sistemas educativos está liderado por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior –ICFES–. Los resultados de las pruebas han generado un impacto en la implementación de propuestas educativas para la adecuación de estrategias pedagógicas en el aula de clase, en las diferentes instituciones educativas públicas y privadas del país. Cabe mencionar que el Ministerio de Educación Nacional –MEN– busca optimizar el nivel académico, identificando las fortalezas y debilidades para llevar a cabo planes de mejoramiento con respecto a las competencias de las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Competencias Ciudadanas para los grados 3°, 5° y 9°. En el grado 11° se evalúan estas mismas áreas agregando los componentes de Lectura Crítica, Razonamiento Cuantitativo e inglés.

En el área de Matemáticas se evalúan 3 competencias: Interpretación y representación, formulación -ejecución, y argumentación, en 3 componentes: Numérico variacional, geométrico métrico y aleatorio.

Según el ICFES (2015) la competencia de interpretación y representación consiste en la capacidad de comprender y extraer la información obtenida en tablas, gráficos, conjunto de datos, diagramas, etcétera, para establecer relaciones matemáticas y patrones. La competencia de formulación y ejecución consiste en la habilidad de diseñar estrategias para resolver problemas, bien sea matemáticos o aquellos que puedan surgir en la vida cotidiana para ser analizados desde un tratamiento matemático. Finalmente, la competencia de argumentación se comprende como la capacidad que permite aprobar o rechazar conclusiones, interpretaciones, estrategias y representaciones en situaciones problemáticas, justificando por qué o cómo se llegó a estas.

En cuanto a los componentes, el numérico variacional hace referencias a todas las operaciones numéricas y algebraicas, el geométrico métrico al manejo con la geometría y las mediciones de diferentes magnitudes y el aleatorio a todas aquellas manipulaciones desde la estadística. En la siguiente sección se hace mayor énfasis en las características del componente numérico variacional, en donde puede centrarse la temática que interesa en esta investigación.

1.2 ANTECEDENTES

Conscientes de la manera poco práctica cómo se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones con los estudiantes de la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa, se hace necesario buscar nuevas estrategias metodológicas que potencien la construcción del pensamiento numérico, en particular enfocados en la noción de número racional.

En Colombia el en los estándares básicos de competencias de matemáticas se proyecta para los docentes de matemáticas orientaciones sobre la enseñanza del saber y afirman que:

> El paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. (MEN, 2006, p. 40)

En el campo de la didáctica de las matemáticas, referente a las fracciones y las nociones de números racional ha sido necesario establecer secuencias didácticas que buscan propiciar en los estudiantes el aprendizaje de los diferentes significados de las fracciones; de tal manera que puedan estructurar un uso más real de las construcciones mentales. Además de proporcionar una correcta experiencia con las interpretaciones de las fracciones para que los estudiantes logren comprender el concepto de fracción (Llinares y Sánchez 1988).

Para tener un panorama más amplio de lo que se ha comentado anteriormente, a continuación, se referencian algunas investigaciones del tema.

Hurtado (2012) en su propuesta sobre la enseñanza de fracciones por medio de situaciones problema para estudiantes del grado sexto, plantea el método de Polya para la solución de problemas. Este método consiste en el desarrollo de cuatro pasos: entender el problema, establecer un plan, ejecutar y revisar la solución. Inicialmente se realiza un estudio exploratorio sobre un grupo de situaciones problema individual donde se evidencian las dificultades de los estudiantes en la comprensión y desarrollo de problemas relacionados con el significado de fracción; esto permitió diseñar una propuesta didáctica basada en la enseñanza de las fracciones mediante la resolución de problemas. Uno de los ejemplos expuestos por Hurtado (2012) en su trabajo de grado es: “Se tienen dos tortas de igual tamaño. Si David comió un cuarto de una, y Juan comió tres octavos de la otra, ¿Quién comió mayor cantidad de torta?” (p.15).

En este planteamiento el autor pretende identificar cómo los niños interpretan y construyen fracciones y relaciones entre ellas para llegar a una respuesta (Ver figura 1).

	ARGUMENTACIÓN		PROCESO	
	Con procedimiento	Sin procedimiento	Operación	Gráfica
Correcto	0	6	0	6
Incorrecto	0	24	0	24

Figura1. Tabla de resultados del primer problema de estudio exploratorio, argumentando su respuesta. Hurtado (2012).

Hurtado (2012) muestra en su estudio exploratorio, realizado con 30 niños, que 6 niños realizaron de forma correcta el gráfico, reconociendo que sus partes estaban repartidas en forma equitativa, sin explicar el procedimiento utilizado para llegar a la respuesta correcta. Los demás 24 niños, realizaron el gráfico sin tener en cuenta el reparto equitativo y confundiendo el numerador con el denominador. Ninguno de los niños desarrolló el problema con algún tipo de algoritmo, no dieron una descripción de procedimientos ni argumentaron sus respuestas.

Retomando los cuatro pasos para la solución de problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución; podemos observar en el cuadro de resultados que la mayoría no fue acertados, permite entonces plantear la importancia del uso de material concreto en la representación de las gráficas para luego llegar a una a la solución de problemas.

En la implementación realizada por Hurtado (2012) se tienen en cuenta cuatro momentos: 1. Diseño y aplicación de talleres, 2. Socialización de las soluciones realizadas por los estudiantes, 3. Retroalimentación y consenso de los conceptos y 4. Evaluación de la propuesta didáctica. Finalmente, en la investigación se logró observar que en su gran mayoría los estudiantes argumentaron los procedimientos realizados en la solución de problemas (p.31). (Ver figura 2).

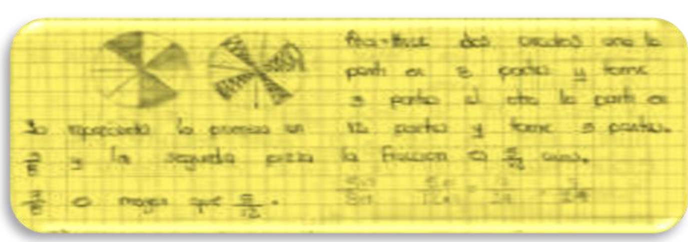


Figura 2. Respuesta de un estudiante Hurtado (2012).

Como puede verse en la figura 2 los niños toman partes de igual tamaño y hacen particiones en forma equitativa, algunos utilizaron la amplificación de fracciones para dar respuesta a este problema (p. 27).

Esta metodología permitió a los estudiantes reconocer la importancia de ser los intérpretes de su propio aprendizaje, pues les permitió leer, proponer, analizar, discutir y argumentar cada una de las soluciones. Estos avances posibilitaron que los estudiantes lograran dar significado a las fracciones.

Otro de los estudios retomados es el de Lamadrid y Valdemoros (2011) quienes el trabajo titulado "Resolución de problemas que implican identificar de manera constante la unidad de referencia: un estudio de caso" muestran la conceptualización que tienen los docentes con respecto a las fracciones. Este trabajo es una tesis de orden cualitativo con metodología de estudio de casos y se realiza en una escuela pública del Distrito Federal de México en el grado tercero. La investigación se dio mediante la implementación de observaciones, cuestionarios y entrevistas; se enfocó en la solución de problemas y para ello los cuestionarios permitieron al docente identificar dos etapas: resolver y plantear problemas que implicarán el uso de fracción.

La conveniencia de la investigación no se basa solamente, en el papel del docente en la enseñanza de fracciones, sino también en el referente teórico que emplean los investigadores, quien se apoya en los constructos teóricos desarrollados por Kieren (1983). En uno de los resultados obtenidos de la investigación se destaca que los docentes participantes no poseen una correcta conceptualización en la relación parte todo, mostrando mayor seguridad en la utilización del método discreto porque les permite la utilización de los números naturales y se apoyan en el conteo.

Al identificar en esta investigación elementos teóricos y metodológicos en la solución de situaciones con fracciones, nos resulta pertinente tomarla para nuestra investigación; desde el punto de vista que los docentes deben tener diferentes bases conceptuales sobre la enseñanza de fracciones para obtener un mejor resultado de aprendizaje entre los estudiantes.

En esta misma línea Flores (2012) desarrolla una investigación cuyo propósito es analizar los resultados obtenidos por algunos estudiantes al resolver un problema que tiene que ver con el reparto, siendo este uno de los mecanismos de formación en el modelo de Kieren (1983), sin dejar de lado la relación con nociones como medida, operador y cociente. Para esto se parte del reconocimiento de las dificultades que presenta tanto la enseñanza como el aprendizaje de las fracciones, primordialmente en los niveles básicos de formación.

Flores (2012) emplea el modelo teórico denominado conocimiento "ideal" del número racional desarrollado (Milevicich y Lois, citado en Flores, 2012). Como resultado de la investigación se puede evidenciar que la mayoría de significados relacionados a la noción de fracción son: parte todo, operador, medida, cociente, partición, la noción de unidad junto con la equivalencia de fracciones, la adición, la diferencia y el producto de fracciones; pero a la hora de interpretar el problema los estudiantes tienen dificultades para dar las respuestas. Aparentemente partir de una fracción y repartirla nuevamente en partes iguales no es suficiente para llegar a la noción de equivalencia y llegar al reparto solicitado. Uno de los problemas establecidos en el trabajo de grado se propone en la Figura 3.

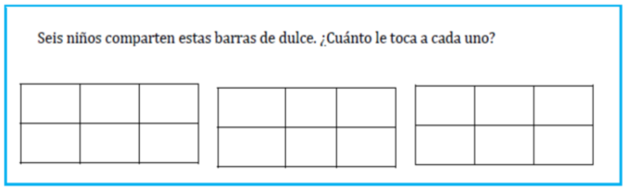


Figura 3. Problema retomado de Flores (2012).

El autor retoma este problema del estudio de Lamon (1999), que se desarrolló con niños de nivel de básica primaria. Al parecer el problema sería sencillo y directo para su solución, pero las respuestas de los estudiantes no evidenciaron una sola solución, por lo contrario, llevó a múltiples respuestas que fueron conducidas por sus percepciones e intuiciones, sin dejar apreciar el reparto equitativo.

Así mismo Meza y Barrios (2010), buscan fundamentalmente realizar un paralelo entre la enseñanza tradicional (magistral) y la enseñanza didáctica en el concepto de fracción, su equivalencia y aprendizaje de la suma, con estudiantes del grado sexto (10 - 11 años). Esta investigación tiene como eje fundamental diagnosticar la diferencia entre lo tradicional y lo didáctico, basado en autores como Kieren (1993), Brousseau (1986), estudios didácticos como los ejecutados por: Gallardo y Rojano (1988), Vasco (1994), Mancera (1992), entre otros.

Meza y Barrios (2010) presentan un pre test empleando metodología tradicional, para luego continuar con la implementación de un juego diseñado con antelación. Con éste se pretendía hallar la diferencia existente entre la enseñanza tradicional y la enseñanza lúdica propiciando con ello la construcción de la noción de fracción. Al finalizar la investigación se puede apreciar que el material dado a los estudiantes les permitió desarrollar el pensamiento lógico matemático y redescubrir el concepto de suma de fracciones, simplificación de fracciones y fracciones equivalentes. Los autores muestran que la participación fue más activa ya que el material facilitado les permitió enlazar conocimientos nuevos con conocimientos ya adquiridos, dándoles significado propio.

Al revisar algunas investigaciones relacionadas con la noción de número racional, se encuentra que son varios los trabajos que se han desarrollado entorno al concepto, la metodología y estrategias didácticas con diversos métodos y teorías; pero son escasos aquellos estudios que se centran en hacer un seguimiento a los mecanismos y estructuras mentales de los estudiantes. Esto desde una perspectiva cognitiva, para lograr analizar cómo un estudiante puede comprender o construir una noción, cuáles son los elementos necesarios para que se desarrolle el conocimiento matemático, en este caso, el de la noción de numero racional en grado tercero.

Cada uno de los trabajos retomados en los antecedentes de nuestro trabajo apunta a la dificultad con la que los estudiantes perciben la noción de números racionales. Lo que más interesa ahora son los aportes de la teoría APOE en la construcción de este concepto y para ello se parte de la importancia de reconocer que los objetos matemáticos no se aprenden directamente, pueden ser asimilados por los estudiantes si muestran las estructuras mentales apropiadas para comprenderlas. Estas estructuras son definidas en el capítulo 3 y como producto de este trabajo de investigación se presenta una descomposición genética refinada de la noción de número racionales que parte de la aplicación de Acciones sobre material concreto.

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde la Teoría APOE la implementación y desarrollo de la Noción de Número Racional; entendido desde su complejidad e interpretación matemática en el grado tercero como número fraccionario.

1.4 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que construyen los estudiantes de tercero primaria sobre la noción de número racional cuando parten de objetos abstractos a partir de Acciones concretas?

1.5 OBJETIVO GENERAL

Analizar las Estructuras y Mecanismos Mentales generados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de número racional, a través del diseño y desarrollo de una Unidad Didáctica, fundamentada en una Descomposición Genética.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar hipotéticamente las Estructuras y Mecanismos Mentales necesarios para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Número Racional.

- Diseñar una Descomposición Genética de la Noción de Número Racional que fundamente una Unidad Didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la Noción de Número Racional.

- Diseñar actividades de aula para estudiantes del grado tercero que propicien su razonamiento y argumentación sobre la Noción de Número Racional.

1.7 CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

La problemática planteada se ha realizado mediante un estudio detallado de referentes conceptuales teniendo en cuenta la importancia de introducir la enseñanza de fracciones mediante la manipulación de objetos con acciones concretas, que le permitan al estudiante descubrir principios y soluciones para llegar a un concepto abstracto. Respecto a la complejidad que se presenta en la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa, en esta temática se vio la necesidad de abordarla de tal forma que permita un mejoramiento en el manejo de fracciones en los estudiantes del grado tercero.

Los antecedentes tenidos en cuenta en el trabajo de investigación, parten de la importancia que el MEN le da al trabajo con fracciones y la aplicación de este objeto de estudio en las diferentes pruebas aplicadas. Del mismo modo las investigaciones realizadas por Flores (2012), Meza y Barrios (2010), Lamadrid y Valdemoros (2011) y Hurtado (2012) en sus investigaciones nos han permitido comprender la importancia de las fracciones desde parte todo, desarrollado en diferentes situaciones problemáticas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Este capítulo orienta la fundamentación del presente trabajo, a partir de la implementación del marco teórico APOE, el cual se convierte en el fundamento de la actividad investigativa tanto teórica como metodológica.

2.1 LA TEORIA

La teoría APOE –acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema– creada por Ed Dubinsky y desarrollada junto al grupo RUMEC –Researche in Undergraduate Mathematics Education community– se fundamenta en planteamientos Piagetianos y tiene como objetivo describir los conceptos matemáticos que se pueden aprender de una manera estructurada. Esta teoría interpreta cómo; un estudiante logra construir mentalmente la compresión de un concepto, enmarcando el saber matemático desde una mirada cognitiva. Para esto propone el diseño de la Descomposición Genética, como un modelo cognitivo que describe las Estructuras y Mecanismos Mentales que un estudiante debe lograr para comprender una noción matemática (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996).

La aplicación de esta teoría, en investigación en Didáctica de la Matemática favorece la comprensión y la construcción de los conceptos matemáticos, porque permite iniciar con la manipulación de la idea bien sea física o mental que genera Acciones, de tal manera que la repetición de las manipulaciones facilita la interiorización y el desarrollo de una inteligencia operativa. Según Piaget (Saunders y Binsham 1984, p. 142) esta inteligencia es entendida como la adaptación eficaz, al pensamiento racional y vinculado al progresivo desarrollo de las operaciones mentales, permitiendo formar procesos, los cuales a su vez son encapsulados para establecer objetos y finalmente todo esto instaurado en esquemas.

Finalmente se puede decir que la importancia que tiene este enfoque teórico dentro de las prácticas de aula, radica en que se convierte en una herramienta descriptiva y predictiva en la medida que le permite al docente y al investigador identificar las diferentes estructuras mentales de aprendizaje de los estudiantes, para poder así, garantizar procesos de enseñanza y aprendizaje más esquemáticos dotados de significado.

2.2. ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE como sustento teórico de investigación permite centrar la mirada en la idea cognitiva y fundamento epistemológico de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este caso para la noción de número racional –como fracción–, se describen las Estructuras: Acción, Proceso, Objeto y los Mecanismos Mentales: Interiorización, Coordinación y Encapsulación; con los cuales un estudiante puede construir cualquier noción matemática.

Podemos decir entonces, citando a Dubinsky (1996), que se asume el conocimiento matemático de un individuo como la respuesta a la interacción de la resolución de situaciones problemas escolares dentro de un contexto social y la construcción o reconstrucción de Acciones, Procesos y Objetos matemáticos que posteriormente serán Esquemas organizados.

Los elementos que describe la teoría APOE se sustentan en diferentes construcciones mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, las cuales son consideradas como etapas en la construcción de nociones matemáticas. Estos a su vez son relacionados con diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, encapsulación, que permiten mediar entre cada una de las construcciones y generar así una nueva estructura.

Esta teoría es el resultado del estudio del proceso de Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las Acciones y Procesos que se efectúan sobre un objeto de conocimiento (Kú, Trigueros y Oktaç (2008), citado por Gamboa, 2013).

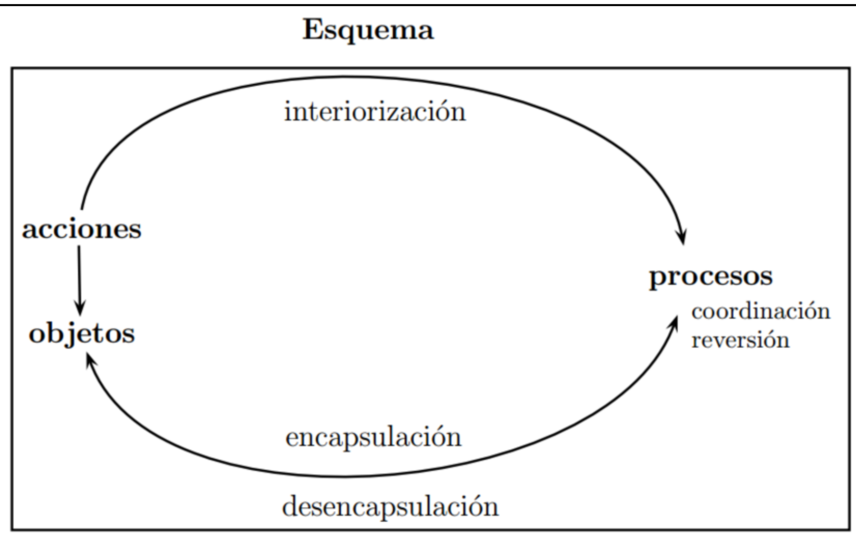


Figura 4. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon *et al*., 2014, p. 18)

Como puede verse en la figura 4, según la Teoría APOE la construcción de una noción matemática, inicia con la aplicación de Acciones sobre Objetos preexistentes. Dichas Acciones son interiorizadas en Procesos que pueden ser coordinados con otros Procesos o encapsulados en Objetos. A continuación, se describe con detalle cada una de las Estructuras, así como el Mecanismo que la origina.

Acciones: Son entendidas como las transformaciones de un Objeto cognitivo o físico, como aquellas ideas matemáticas que se perciben por el estudiante como externas y se realizan como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir (Gamboa, 2013).

Las Acciones pueden ser interiorizadas en Procesos; la principal diferencia radica en que la Acción deja de ser externa y por tanto el estudiante puede reflexionar sobre ella sin realizarla paso a paso.

Procesos: Son producto de una reflexión interna del estudiante, quien gracias a la repetición de la acción puede pensar en llevarlas a cabo de forma exclusivamente mental, sin necesidad de recibir un estímulo externo. Un Proceso puede coordinarse con otro o ser encapsulado en un Objeto. El resultado de la coordinación dos o más Procesos puede verse como uno solo y dar lugar a su encapsulación.

El mecanismo de encapsulación permite que el estudiante perciba el Proceso como un todo; como una estructura estática sobre la cual puede realizar nuevas Acciones y así dar pasó a una nueva aplicación del ciclo planteado (Ver figura 4).

Objetos: Esta estructura permite que el estudiante vea el Proceso como un todo sobre el cual puede: aplicar nuevas transformaciones –Acciones o Procesos– para dar paso a la construcción de relaciones entre la noción que se está adquiriendo o nociones pre existentes.

En algunos casos se ha considerado que, a partir de un Objeto, es posible que un estudiante logre empezar la construcción de su Esquema. O que un Esquema preexistente asimile el nuevo Objeto construido (Parraguez, 2013).

Finalmente, los Esquemas son una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas, caracterizados por ser dinámicos y por permitir una reconstrucción continua de las estructuras mentales que un individuo puede lograr gracias a su experiencia con diferentes problemas matemáticos.

La coherencia es un elemento fundamental de los Esquemas ya que determina la capacidad del individuo para decidir si se puede utilizar un Esquema específico para hacer frente a una situación matemática particular. Los Esquemas pueden describirse a través de los niveles Intra, Inter y Trans que describen las relaciones, transformaciones e invariantes respectivamente, que determinan su evolución (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017).

Descritas las construcciones mentales, los mecanismos y sus relaciones según la teoría APOE, estas se pueden representar en una Descomposición Genética. La cual es un modelo cognitivo que describe cómo se produce la comprensión de saber matemático a través de diferentes estructuras complejas de pensamiento y descripciones explícitas de las posibles relaciones entre las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. (Arnon, *et al*., 2014). La Descomposición Genética es considera el corazón de la Teoría APOE, ya que en ella se describen las estructuras y los mecanismos que un estudiante puede seguir para construir un concepto o noción matemática.

2.3. CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE LA APLICACIÓN DE ACCIONES SOBRE OBJETOS CONCRETOS.

Dado que la noción de número racional, centrada en la fracción que se propone estudiar en esta investigación se desarrolla en los primeros años escolares; tomamos a Arnon *et al*., (2014) donde se propone el uso de la teoría APOE para la enseñanza de matemáticas en la Escuela Básica. Aunque la teoría inicialmente fue pensada para explicar la construcción de conceptos abstractos, tratados generalmente en el nivel Universitario, Arnon *et al*., (2014) proyecta una modificación de las estructuras iniciales planteando la aplicación de transformaciones –Acciones– sobre Objetos concretos; que según Piaget los estudiantes se encuentran en la etapa de operaciones concretas, por lo tanto, la concepción que los estudiantes tengan del concepto son el resultado de la reflexión sobre las Acciones que realizan en lo real y manipulable –concreto– para construir Objetos abstractos (Ver figura 5).

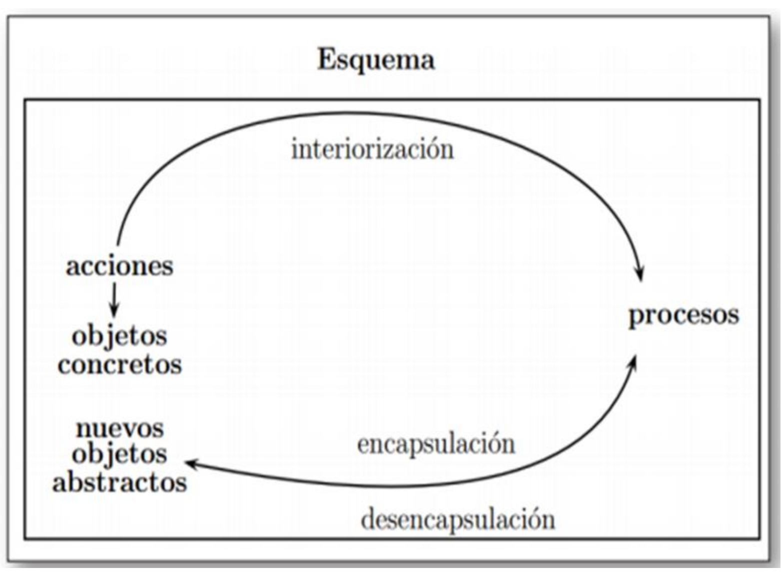


Figura 5. Construcción de objetos abstractos a partir de acciones sobre objetos concretos (Arnon *et al*., 2014, p. 154)

González y Roa-Fuentes (2017), muestran que los Objetos concretos que se muestran en la figura 5, implican todo aquello que involucra el uso de objetos físicos reales o imaginarios. Por ejemplo, el uso de materiales circulares divididos en partes congruentes para representar una fracción. Estos elementos serán analizados con mayor detalle en el siguiente capítulo cuando se muestre un camino cognitivo que señala qué Estructuras y Mecanismos puede seguir un estudiante para construir una noción de número racional.

Descritas las Construcciones Mentales y sus relaciones según el enfoque APOE, estas se pueden representar en un modelo denominado Descomposición Genética –DG– de un concepto matemático, el cual describe los elementos matemáticos que establece el concepto en estudio y representa una trayectoria preliminar de aprendizaje para conjeturar cómo se produce la comprensión de un saber matemático a través de diferentes estructuras complejas de pensamiento y descripciones explícitas de las posibles relaciones entre las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Arnon *et al*., 2014, p. 28).

2.4. CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

Según Arnon *et al*. (2014) la teoría APOE se provee de un Ciclo propio de investigación, que se ilustra en la Figura 10. Este Ciclo comprende tres componentes que se relacionan entre sí: Análisis Teórico, Diseño e Implementación y Observación, Análisis y Verificación de Datos (Ver figura 6).

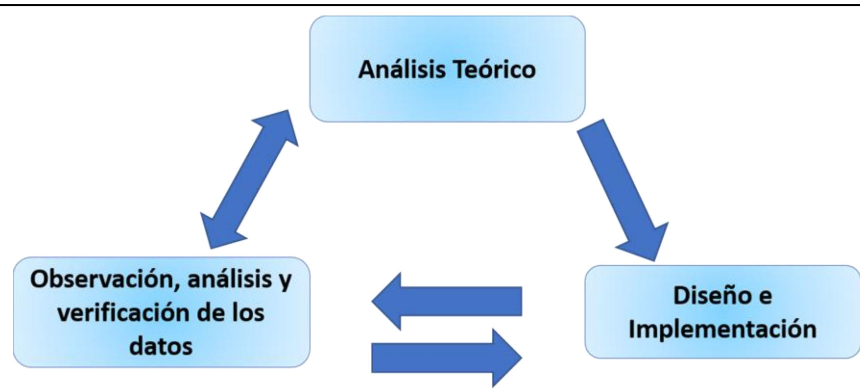


Figura 6: Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

El análisis teórico consiste en describir las Construcciones y Mecanismos Mentales que se dan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto o noción en matemáticas, es decir, en la construcción de la DG. El diseño y la implementación se fundamentan en el análisis teórico, el cual tiene como objetivo ayudar a establecer las Construcciones Mentales propuestas. Finalmente, la observación, análisis y verificación de los datos, es el momento del ciclo que permite evidenciar lo que sucede con cada uno de los estudiantes para llegar a una comprensión más profunda de cómo el concepto podría desarrollarse en sus mentes, a partir del análisis de unos instrumentos frente a la DG.

> Los tres componentes del ciclo de investigación se influencian entre sí. El análisis teórico impulsa el diseño y ejecución de la instrucción mediante la realización de actividades destinadas a fomentar la construcción mental por el análisis. Las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir, interiorizar los procesos, encapsular los procesos en los objetos, y coordinar dos o más procesos para la construcción de nuevos procesos. Una variedad de estrategias pedagógicas, tales como aprendizaje cooperativo, resolución de problemas en grupos pequeños, e incluso algunos cursos pueden ser muy eficaces para ayudar a los estudiantes a aprender las matemáticas que se trate. (Arnon *et al*., 2014. p. 94)

Este ciclo tiene como finalidad la descripción de la construcción de los conceptos matemáticos y tener una mirada más cercana y detallada del proceso investigativo (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Complementario a este ciclo de investigación, se propone desde la Teoría APOE el ciclo ACE (ACE teaching cycle: Activities, Class discussion and Excercises), que aporta elementos fundamentales para la enseñanza, se trata como dice Gamboa (2013), de reemplazar las lecciones con métodos interactivos, constructivos y con aprendizaje colaborativo. En este sentido el ciclo propone actividades en las cuales el estudiante se enfrentará a nuevas situaciones de resolución de situaciones problemas acercándose más a la noción de número racional, que le permitirá reflexionar desde un ejercicio personal y grupal, mediado por la socialización y discusión que ayudan a una mayor comprensión y adquisición del conocimiento; finalmente se presentan una serie de ejercicios que buscan fortalecer, ampliar y crear conexiones con otros Objetos matemáticos.

2.5. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

En la evolución de las Estructuras Mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas puede verse como un estudiante demuestra una concepción, Acción cuando únicamente realiza transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este individuo reflexiona sobre estas Acciones y las realiza conscientemente, se dice que las Acciones se han interiorizado, por lo que alcanza una concepción Proceso. Dos o más Procesos se pueden coordinar en un nuevo Proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el individuo los encapsula en Objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar Acciones. Los objetos se organizan en Esquemas, que a su vez se relacionan con otros Esquemas.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

ANÁLISIS TEÓRICO Y ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS

A continuación, se describe el diseño metodológico adoptado para esta investigación, con el cual se aborda la construcción de la noción de número racional, fundamentado en la teoría APOE (Asiala *et al.,* 1996). Esta investigación es de corte empírico experimental, se emplea un enfoque cualitativo basado en el estudio de casos. Principalmente esta investigación se centra en el desarrollo de la primera y tercera componente del ciclo de investigación –presentado con detalle en el capítulo anterior– propuesto por la teoría. Dado que se propone una descomposición genética resultado del desarrollo del Análisis Teórico que se valida a través del diseño, desarrollo y análisis de un conjunto de entrevistas semiestructuradas aplicadas a un grupo de 6 estudiantes.

3.1. GUIA DE INVESTIGACIÓN: ANÁLISIS TEÓRICO, RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.

El diseño metodológico de la investigación se presenta con un enfoque cualitativo, ya que según Bogdan y Taylor (1986), el enfoque cualitativo en permite obtener datos descriptivos, utilizando el lenguaje propio de cada persona, los escenarios son naturales y desde la perspectiva holística se estudia a la persona desde su propio marco de referencia. Esta investigación es de corte cualitativo dado que nos permite dar cuenta de las dificultades presentadas en un grupo de estudiantes frente al Objeto matemático.

En términos generales esta investigación se enmarca en el ámbito empírico experimental. El término empírico lo define Stake (2010) así:

> Empírico: está orientado al campo de observación; la atención se centra en lo que se observa, incluidas las observaciones hechas por los informadores; hace todo lo posible por ser naturalista, no intervencionista; y hay una relativa preferencia por la naturalidad lingüística en las descripciones, con un cierto desdén por las grandes expresiones. (p. 50)

Y el término experimental del diccionario en línea de la Real Academia Española –RAE– lo define como “Fundado en la experiencia, o que se sabe y alcanza por ella”.

Lo empírico en el contexto de esta investigación es

APOE será un guía de investigación, que propone en un primer momento establecer una Descomposición Genética del concepto matemático. Allí se establecen las estructuras y mecanismos mentales necesarios para comprender la Noción de Número Racional, desde el precisamente lo definido por Stake, nos enfocamos en los datos que se obtienen a través de entrevistas semiestructuradas realizadas a un grupo de 6 estudiantes. Lo experimental que inicialmente se dará por el análisis amplio en las entrevistas a los estudiantes –entrevistas que serán intervenidas según el desarrollo de las mismas–, con el fin de evidenciar en los estudiantes la construcción de objetos abstractos a partir de la aplicación de acciones concretas para construir una noción de número racional.

Para este trabajo el ciclo de investigación de la teoría pensamiento numérico –Análisis Teórico–, seguido de la Observación, análisis y verificación de los datos que serán recogidos con instrumentos como: los ejercicios propuestos en la entrevista y registro fotográfico, en función de la Descomposición Genética para refinarla y documentarla. Ciclo ACE como herramienta de enseñanza aprendizaje del Área desde la teoría APOE.

Por lo anterior la metodología se centra en diseñar una Descomposición Genética preliminar con base en el numérico –Análisis Teórico–, seguido de la –Recolección y análisis de datos–que serán recogidos con instrumentos que sustenta el diseño de una entrevista semiestructurada, de cuyo análisis surge un modelo cognitivo más cercano a como en la realidad los estudiantes pueden construir la noción de fracción.

Las entrevistas serán video grabadas, toma de fotografías y la transcripción del video con el propósito de analizar con mayor detalle cómo los estudiantes enfrentan las preguntas planteadas para identificar elementos diferenciadores en los objetivos y las diferentes construcciones mentales que podrán evidenciar cada uno de los estudiantes (Ver figura 7).

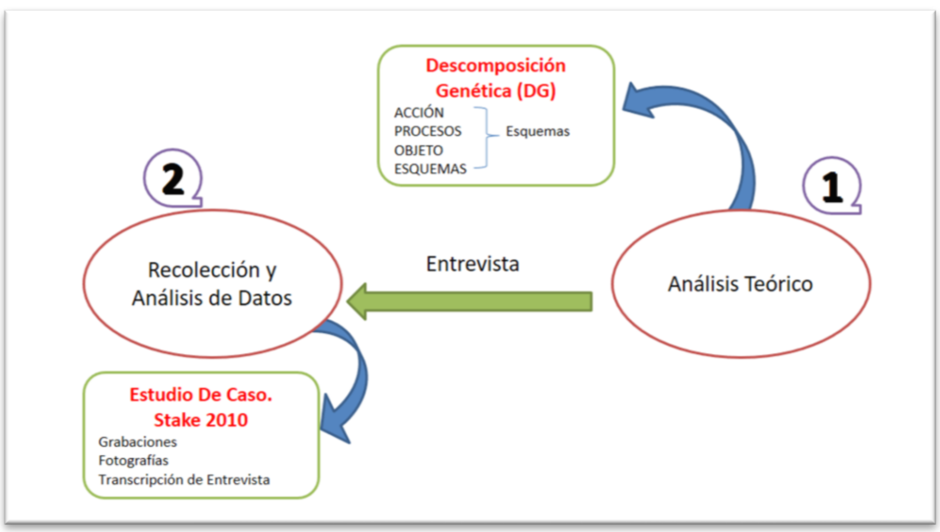


Figura 7. Guía orientadora de Investigación. Adaptación Roa, S. 2017

3.2. ANÁLISIS TEÓRICO

Como se muestra en la parte uno de la figura 7 la relación que se logra en el análisis teórico consiste en describir las Estructuras –Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas– y Mecanismos Mentales –Interiorización, Coordinación, Encapsulación y Desencapsulación– que un estudiante puede realizar para construir un determinado Objeto matemático.

> El propósito del análisis es responder a dos preguntas: (1) ¿los estudiantes evidencian la construcción mental descrita en el análisis teórico? (2) ¿Cómo los alumnos aprenden los contenidos matemáticos? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, entonces es

> necesario examinar y revisar la descomposición genética. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva y que la respuesta a la segunda pregunta es negativa, el análisis teórico es examinado y revisado. En cualquier caso, el ciclo se repite hasta que se ha respondido a estas preguntas positivamente y el profesor/investigador está convencido de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos. (Arnon *et al*., 2014. p. 93)

Roa Fuentes y Oktaç (2010) resaltan que, de los tres componentes, el componente teórico es el más importante pues es en esta instancia donde se establece la Descomposición Genética preliminar que dará cuenta de los resultados que se obtengan al desarrollar este ciclo de investigación. Debe entenderse que la descomposición genética no es única pues depende de los conocimientos que tengan los estudiantes y la visión de los investigadores. De esta manera es posible a través de la descripción de las Estructuras y Mecanismos Mentales, poder modelar la epistemología y cognición de un concepto matemático.

Este análisis teórico permite plantear una descomposición genética preliminar, que muestra un camino cognitivo de construcción de noción de número racional retomando las características particulares de cada estructura y mecanismo realizado por los estudiantes, con la utilización del material concreto.

Este primer componente del ciclo de investigación parte de una descomposición genética de la noción de número racional. La guía de nuestra investigación comienza analizando el concepto matemático con base en los antecedentes del concepto y la experiencia docente investigador, en resultados previos en didáctica de las Matemáticas, entre otros. Desde allí se realizan entrevistas de corte didáctico – filmadas y transcritas– en las cuales se busca que los estudiantes puedan deliberar sobre el objeto matemático, dando evidencias de las Estructuras y los Mecanismos Mentales que guían su actividad matemática.

Esta investigación se desarrolló en el primer semestre del 2018 en La Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa. Donde se pone de relieve las Construcciones Mentales que pueden ser enriquecidas en la medida en que un individuo enfrenta la solución de situaciones problemas.

3.3. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR.

La Descomposición Genética –DG– construida para la noción de número racional con la teoría APOE y sus aplicaciones en la educación matemática tienen los siguientes supuestos, que evidencian tres niveles en la construcción del concepto de noción de número racional: Acción, Proceso y Objeto; a través de la siguiente descomposición genética se quiere validar esta investigación evidenciando las construcciones mentales de los estudiantes, así como los mecanismos que las generan.

La versión preliminar de la –DG– (ver figura 8) necesita ser probada empíricamente. En el estudio empírico, los datos cualitativos se recopilan y analizan sobre la base de la teoría

APOE, que es la que ayuda a analizar los conceptos matemáticos proporcionados en la construcción del conocimiento que se requiere para su aprendizaje. Es importante aclarar que una –DG– no es única, pueden coexistir más de una –DG– de un mismo concepto. La validez de una –DG– proviene del análisis de los datos experimentales (Dubinsky, 1991).

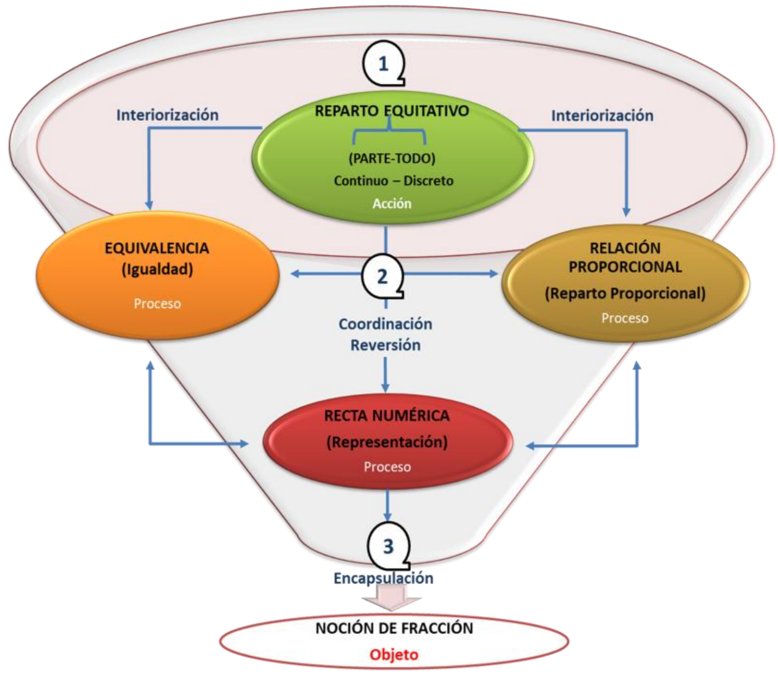


Figura 8. Descomposición genética preliminar de la noción de número racional del grado Tercero

A continuación se describe con detalle las estructuras que son representadas en la figura 8, además de los mecanismos que las generan.

ACCIONES

En esta investigación, al decir que un estudiante está evidenciando una construcción Acción de la noción de número racional, se establece que realiza Acciones desde lo concreto a lo numérico.

Acciones –sobre Objetos concretos– se dan, mediante el Mecanismo de interiorización, el cual para este objeto matemático está dado por las idea de relacionar Acciones que enuncien los contenidos utilizados para abordar los repartos equitativos y en general para la comprensión, representación, operación y argumentación de la parte todo como reparticón equitativa, que dan paso a Procesos de igualdad, proporcionalidad y recta numerica.

Como se muestra en la parte uno de la figura 8, la construcción de número racional inicia cuando el estudiante manipula material concreto, en este caso utilizamos las regletas de

Cuisenaire (1950). Según Piaget (1966) el material concreto permite la construcción de su conocimiento sobre la propia experiencia de los individuos, estas experiencias deben ser concretas. Con la descomposición genética se quiere mostrar cómo las acciones aplicadas sobre objetos físicos dan lugar a objetos matemáticos abstractos en la mente del estudiante, ya que el termino abstracto se refiere a la utilización de un concepto matemático sin ninguna representación física del mundo (Arnon et al. 2014).

En este caso el diseño de la entrevista está basado en la manipulación de material concreto, a partir de la cual se espera que los estudiantes identifiquen o reconozcan los diferentes significados asociados a los números racionales.

El uso de las regletas en el desarrollo de las actividades permite el desarrollo de las Acciones y hacen alusión al reparto equitativo –repartir– y la parte–todo. Y el mecanismo de interiorización desde dos perspectivas: La primera en un contexto continuo, en el que las representaciones más frecuentes suelen ser diagramas circulares o rectangulares –graficamente– y la segunda en un contexto discreto donde las representaciones son formadas por varias unidades, en este caso la unidad es el total de objetos que conforman el conjunto y la parte algunos elementos del conjunto –conteo–.

PROCESOS

Podemos entonces decir que un estudiante puede interiorizar una Acción repitiendo y reflexionando sobre ella. La interiorización de una Acción en un Proceso que permite a los estudiantes imaginar los pasos del Proceso sin realizar realmente cada pasó explícitamente (Asiala et al., 1996). Además, es capaz de hacer transformaciones al objeto matemático de manera interna, incluso de pensar en las posibles soluciones para la situación planteada.

Como se muestra en la parte dos de la figura, durante la práctica los estudiantes analizan los Objetos matemáticos y ensayan la construcción de algunos trazos que son elementos básicos que componen; en este caso la fracción tiene la capacidad de describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede revertirlos. Por lo tanto, el estudiante es capaz de dar solución de la situación en su mente, sin tener necesidad de realizarla de forma explícita las representaciones gráficas; de ahí se manifiesta que el estudiante tiene concepción Proceso.

La coordinación entre los procesos como la formalización que el estudiante logra por medio de relaciones entre las proporciones equivalentes representadas por diferentes figuras geométricas o formas cotidianas, conectando el conocimiento intuitivo de los estudiantes a nociones de número racional formales. También pueden utilizarse para desarrollar la comprensión de los estudiantes al ordenar y relacionar la igualdad entre fracciones.

La encapsulación se logra cuando el estudiante reconoce las características del Objeto, es decir que los estudiantes muestran, el manejo de la representación de las fracciones mediante la recta numérica que ayudan al niño a «conceptualizar» las relaciones parte-todo –continuo, discreto– en un contexto de proporcionalidad que resulta de nuevas relaciones de la unidad. Es decir, el manejo con la recta numérica –contextos de medida–puede ser un buen elemento que aporta a la adquisición de noción de equivalencia y proporcionalidad.

OBJETO

Los estudiantes no necesitan señales externas y el Proceso es percibido como interno. Si un estudiante se da cuenta de que una Acción o una operación se pueden aplicar a un Proceso, entonces el Proceso puede ser encapsulado en un Objeto.

Como se muestra en la parte tres de la figura 8 la construcción que se logra cuando los estudiantes evidencian que reflexionan sobre las Acciones aplicadas a un Proceso específico; por ejemplo, los estudiantes logran la construcción de las fracciones como gráfica concreta y abstracta en los ejercicios propuestos. En este caso, se dice que se ha realizado una reconstrucción o se ha encapsulado como un Objeto cognitivo en este caso la noción de número racional.

En otras palabras, el estudiante está en la capacidad de: Explicar y construir los elementos que componen la noción de número racional mediante su representación en la recta numérica, la traficación de repartos equitativos y la construcción de relaciones de proporcionalidad. Por tanto, la noción de número racional no se adquiere inmediatamente. Las primeras experiencias de los estudiantes con ¨mitades¨ y ¨tercios¨ –relación parte todo– deben estar vinculadas a la habilidad de desarrollar el mecanismo de –dividir, contar, repartir, compartir e igualdad–, y la habilidad de manejar la inclusión de clases, hasta llegar al trabajo con las razones y proporciones de los jóvenes adolescentes, relacionada con la comparación y el manejo de dos conjuntos de datos al mismo tiempo; además, del desarrollo del Esquema de la proporcionalidad, existe un largo camino que recorrer.

3.4. DISEÑO Y ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO

En un comienzo se selecciona un grupo de la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa el grado tercero de básica primaria, ya que en estos grados es donde se concentra la enseñanza de la noción del número racional, conforme a los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional. Las edades de los estudiantes están comprendidas entre 8 y 10 años. El grupo con el que se realiza el estudio se caracterizan por presentar un desempeño medio, entre los restantes estudiantes pertenecientes al mismo grado.

Considerando la Descomposición Genética preliminar, basada en el análisis teórico de la noción de número racional; como se muestra en la parte dos de la figura 7 se diseña una entrevista, la cual según la teoría APOE la considera como un medio relevante para la recolección de datos; dado que permite identificar las construcciones mentales que desarrollan los estudiantes establecidos en la descomposición genética. La entrevista aplicada plantea preguntas de solución de situaciones problemas apoyadas en describir las Estructuras y Mecanismos Mentales, para analizar cómo los estudiantes han construido y/o están construyendo el Objeto matemático anteriormente expresado.

Es importante tener en cuenta que para mostrar los datos obtenidos que aporten los elementos de nuestra descomposición genética, un aspecto por resaltar es el análisis a priori que debe conducir el instrumento de nuestra investigación, de tal manera que se muestre que las situaciones planteadas permitan generar en los estudiantes procesos cognitivos.

3.5. DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA

Como instrumento de recogida de datos, se construye una entrevista basada en las estructuras y mecanismos mentales presentados en la descomposición genética preliminar. Cada una de las preguntas de la entrevista semiestructurada, tiene una relación directa con una sección de la –DG– propuesta, ya que su objetivo es recoger datos que evidencien el tipo de construcción mental que han desarrollado los estudiantes para construir la noción de número racional.

Para clarificar más aun lo expuesto anteriormente, presentamos a continuación el análisis a priori de la entrevista.

En el siguiente diagrama presentamos la finalidad de cada una de las seis preguntas planteadas en la entrevista, así como el análisis a priori de las posibles respuestas y planteamientos que los estudiantes puedan presentar ante ellas.

3.5.1 ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA.

Reparto equitativo (parte- todo) continúo.

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

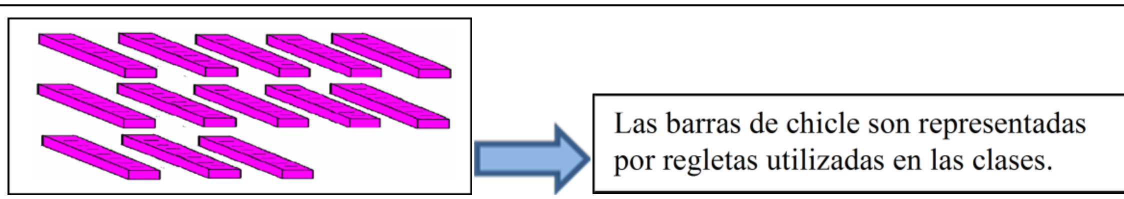


Figura 9. Actividad retomada de (Hincapié. 2003. p. 23)

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno?
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran?
c. ¿Qué se puede hacer con la barra de chicle que sobra?

Reparto equitativo (parte- todo) discreto.

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

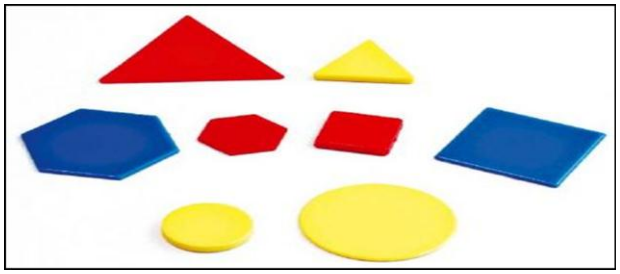


Figura 10. Actividad adaptada de (Valdemoros, 2011. p. 55)

a. ¿Cuántos objetos hay?
b. ¿Cuántos triángulos hay?
c. ¿Cuántos círculos hay?
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos?
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules?

Reparto proporcional.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; se come una parte y le da dos a Javier.

Figura 11. Reparto Proporcional.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? ________________________
b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? ____________________________
c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? ____________________________

Recta numérica (representación).

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$

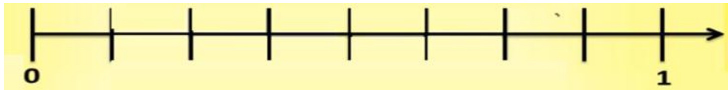


Figura 12. Recta numérica.

Equivalencias (igualdad)

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

Figura 13. Actividad adaptada de (Hincapié. 2003. p. 183)

a. El listón de color café, ¿Qué parte es del listón de color rosado?

b. El listón de color verde claro, ¿Qué parte es del listón de color azul?

c. El listón de naranja, ¿Qué parte es del listón de color verde oscuro?

d. El listón de color verde oscuro, ¿Qué parte es del listón de café?

e. El listón de madera blanco, ¿Qué parte es del listón amarillo?

Noción de número racional (objeto).

P6. Víctor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Víctor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.
b. ¿Qué observas del dibujo realizado?

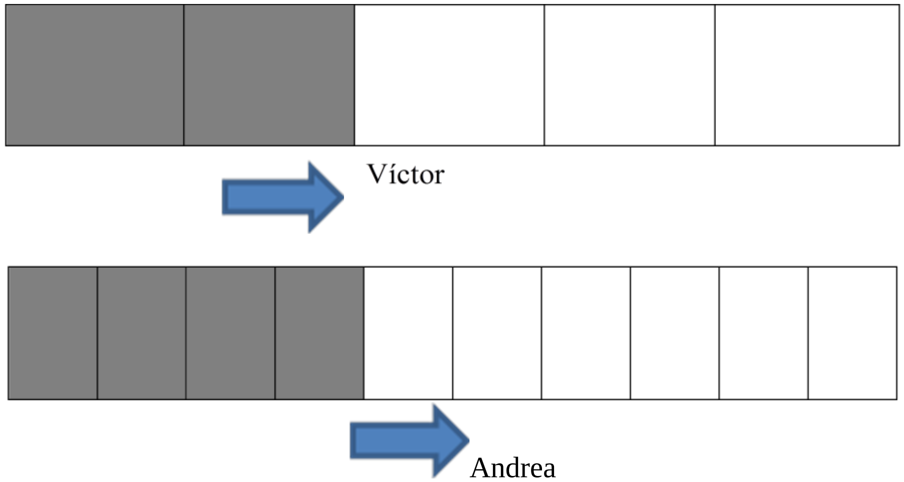


Figura 14. Interpretación que puede realizar el alumno.

3.5.1.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADAS.

PREGUNTA	OBJETIVO	ANÁLISIS A PRIORI	CONSTRUCCIÓNES MENTALES	
			ESTRUCTURAS	**MECANISMOS**
P1 y P2	Reconocer los diferentes contextos en los que la fracción como relación parte–todo adquiere significado.	Se busca que los estudiantes identifiquen el "todo" o "unidad", conociendo una parte de ella; representando el *compartir* de objetos en una o varias partes iguales de la unidad entera o de un conjunto.	**ACCIÓN-INICIADORA** Utilizar fracciones para *contar*, *medir*, *repartir* y *compartir*. **ACCIÓN** Parte-todo (continuo-Discreto)	**INTERIORIZACIÓN** Los estudiantes serán capaces de identificar la fracción como parte de un todo, en un contexto continuo, en el que las representaciones más frecuentes suelen ser diagramas circulares o rectangulares; y además en un contexto discreto donde las representaciones son usadas desde los conjuntos de objetos discretos como unidades.
P1 y P2	Representar fracciones en contextos continuos y discretos.	El propósito de estas tareas, es que los estudiantes, al *repartir* la unidad en partes iguales, destaquen la *medición* de trazos congruentes y que por medio del *conteo* la unidad es el total de elementos que conforman el conjunto y la parte algunos elementos del conjunto.		

<table>
<tr>
<td>P3</td>
<td>Comprensión informal de tamaño relativo para desarrollar el concepto temprano de razonamiento proporcional.</td>
<td>Los estudiantes pueden hacer coincidir proporciones equivalentes representadas por diferentes figuras o formas; de esta manera el conocimiento intuitivo de los estudiantes permite generar inicialmente mecanismos de coordinación.</td>
<td rowspan="2">PROCESOS

Equivalencia (Igualdad)

.

Representación en la Recta Numérica

Relación de Proporcionalidad</td>
<td rowspan="2">COORDINACIÓN
Este mecanismo se evidencia cuando los estudiantes pueden construir relaciones entre la cantidad de partes repartidas equitativamente y el tamaño de las mismas.
Determinando que la unidad puede componerse de distintas formas de acuerdo a los fragmentos que se elijan.

Los estudiantes que evidencian este mecanismo demuestran que la relación parte todo (tanto en su representación continua como discreta), constituye el fundamento de la interpretación de las fracciones como medida; llegando a representar de diferente maneras las fracciones equivalentes.</td>
</tr>
<tr>
<td>P4</td>
<td>Resuelve problemas en los que se requiere la gráfica de fracciones en la recta numérica.</td>
<td>El manejo de la representación de las fracciones a través de la recta numérica debe ayudar al estudiante a «conceptualizar» las relaciones parte-todo en un contexto y reconocer contextos equivalentes que proceden de nuevas divisiones de la unidad.
Es decir, el manejo con la recta numérica (contextos de medida y repartir) puede ser una buena introducción a la noción de equivalencia: la misma parte de la unidad recibe nombres diferentes en función del número de divisiones.
Un adecuado recurso didáctico para desarrollar estas ideas que relacionan las fracciones y la noción de medida lo pueden constituir los números representados en las</td>
</tr>
</table>

		regletas de color. Este material está formado por regletas de madera de diferentes colores y diferentes longitudes.		
P5	Comparar fracciones representadas con material concreto, para observar la equivalencia entre fracciones.	El estudiante demuestra con las fracciones que representan la misma cantidad, aunque parezcan diferentes. Y se origina la reflexión sobre la equivalencia de las fracciones obtenidas reconociéndolas como dos formas de escribir la misma cantidad.		
P6	Explicar y construir los elementos que componen la noción de fracción como la recta numérica, la graficación de repartos equitativos y relaciones proporcionales. Logrando su graficación y simbolización numérica.	Los estudiantes representan fracciones como parte de un todo, dentro de los diferentes contextos de la fracción (Continuo, discreta, recta numérica, equivalencias y proporcionalidad).	**OBJETO** Noción de número racional (como fracción)	**ENCAPSULACIÓN** En cuanto a la interpretación del concepto fracción se amplió, de la concepción de fracción como expresión de una parte de un todo hacia una concepción en la que la fracción expresa: comparación de una medida, comparación entre dos cantidades y situación de reparto.

3.6. ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS

Con base en este análisis y teniendo en cuenta la población que nos interesa, desarrollamos la tercera componente Recolección, Observación y Análisis de Datos. En esta participan 6 estudiantes de grado tercero. La diversidad de esta población en los diferentes procesos matemáticos adquiridos y su formación matemática permite analizar cómo evoluciona la noción de número racional y con esto, las estructuras y los mecanismos necesarios para su construcción en los contextos tomados en cuenta en esta investigación (Ver figura 15).

Figura 15. Diseño y Análisis del instrumento.

Por lo tanto, en este trabajo pretendemos obtener información significativa que permita refinar la Descomposición Genética Preliminar; diseñando y aplicando un cuestionario inicial para la situación experimental de las entrevistas semi-estructuradas lo que, en algunos momentos del desarrollo de la actividad, serán las herramientas que permitirán obtener tal información de los estudiantes.

Se realizarán dos actividades, cada una de las cuales se distribuirá en dos fases:

Primera Fase: Observación de la situación experimental – entrevista – grabada y toma de datos individual.

Segunda Fase: Desarrollo de analisis y verificación de resultados de la entrevista semi-estructurada.

La actividad en general será grabada con el propósito de observar cómo los estudiantes enfrentan las tareas planteadas para poder identificar elementos diferenciadores en los objetivos, eventualmente se realizará la entrevista semiestructurada para obtener mayor información y se aplicarán cuestionarios al inicio y al final de la investigación si fuese necesario.

3.7. ESTUDIO DE CASOS

Este método es aplicado a la presente investigación, debido a que sobresale entre los diseños de tipo cualitativo. Según Stake (2010) la nota distintiva de ésta es la comprensión de la realidad del objeto de estudio, es decir, "es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11).

En esta investigación el Estudio de Casos, permite identificar las características particulares y complejas de los estudiantes, para lograr apreciar situaciones generales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este caso a partir de la noción de número racional.

El estudio de casos como método, establece como los constructos de la Teoría APOE permiten analizar el trabajo de los estudiantes durante la investigación. Es decir, por medio de la experiencia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de número racional en algunos estudiantes es posible proponer una Descomposición Genética de dicha noción; planteando así de manera particular la forma general de enseñar y aprender la noción de número racional en estudiantes de tercero primaria.

3.8. POBLACIÓN

Cada una de las actividades es aplicada a 6 estudiantes, con edades comprendidas entre los 8 y 10 años, pertenecientes al grado tercero de básica primaria de la I.E. El Triunfo Santa Teresa de la ciudad de Medellín; con características similares tanto a nivel académico como comportamental. En cuanto a sus procesos de aprendizaje tienen algunos vacíos en la operatividad con los números naturales y la comprensión, manejo y apropiación del análisis de resolución de situaciones problema, aun así, han mostrado agilidad en la manipulación de material concreto, lo que podría mostrar mejores resultados en nuestra investigación.

Dichos estudiantes estarán nombrados de la siguiente forma:

ESTUDIANTES
E1, E2, E3, E4, E5, E6

Docente investigador estará nombrado de la siguiente forma:

DOCENTE
D

3.9. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

El anterior capitulo nos permite visualizar todo el diseño metodológico con el cual se abordará el ejercicio investigativo relacionado con la noción de número fraccionario. Tomando como guía el ciclo propio que propone la teoría APOE –Análisis Teórico y el Análisis y Verificación de Datos–, cada uno de los dos componentes de este ciclo a su vez se relaciona con otros elementos como la descomposición genética preliminar de la Noción de Número Racional desde lo teórico y finalmente la implementación de instrumentos de verificación de resultados desde la aplicación de entrevista semiestructurada aplicada al estudio de casos. Todo esto estudiado desde una investigación empírico experimental con un enfoque cualitativo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo haremos un análisis general de los datos obtenidos durante la aplicación de la entrevista semiestructurada. Mediante la identificación y representación de las Estructuras y Construcciones Mentales que se revelaron en los estudiantes dando valides a nuestra Descomposición Genética Preliminar finalizando con la tercera componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE –Análisis y Verificación de Datos–. Mostrando las evidencias que los estudiantes manifestaron sobre la noción de número racional durante el desarrollo de la misma.

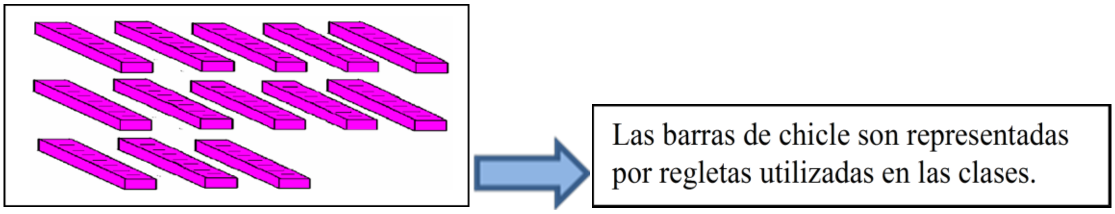
4.1. ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA

Los datos que obtuvimos en la entrevista, los examinamos con base en las Construcciones Mentales detallados en nuestra descomposición genética preliminar para validarla o refinarla a través de la aparición de nuevas variables para tener en cuenta. Por lo tanto, establecemos que la pauta de las construcciones que un estudiante hace en torno a un concepto está explícita en la manera como se presenta por primera vez, luego realizamos la transcripción y las reflexiones de cada una de las preguntas elaboradas en la entrevista teniendo en cuenta el análisis a priori de la intervención; con el fin de responder desde la DGP cómo los estudiantes construyen la noción de número racional, permitiendo analizar el alcance en cada momento del aprendizaje, a la vez qué de las Estructuras y Mecanismos Mentales se desarrollan.

A continuación, se presenta el análisis de algunas respuestas de los estudiantes en la entrevista semiestructurada. Se rotularán a los estudiantes –E–, seguida de un número que se asigna para mantener el anonimato, –E1, E2, E3, E4, E5 Y E6–. Además, el docente investigador se rotulará –D– para una mejor mirada de ese análisis. Aplicamos la entrevista el día 7 del mes de marzo del año 2018, en una de las aulas de calidad de la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa durante un tiempo aproximado de dos horas con los estudiantes. Las seis preguntas que diseñamos como instrumento, las íbamos leyendo una a una al estudiante, quien contaba con un lápiz para escribir el desarrollo de sus soluciones. Las entrevistas fueron grabadas por una cámara de video móvil de toda la escena y las hojas de respuestas.

A continuación, presentamos el análisis de nuestros resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una de ellas agregamos apartados de la transcripción e imágenes del instrumento diagnóstico que fundamentan nuestras observaciones (puede verse completo en los anexos).

ACCIÓN Iniciadora de La noción de número racional: Dadas las barras de chicle –material concreto las regletas–, el estudiante puede encontrar la forma de contar, medir, repartir y compartir las unidades, en partes iguales.



Actividad retomada de (Hincapié. 2003. p. 23)

Pregunta 1 –P1–. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno?
Desde la teoría APOE E1 muestra Acciones iniciadoras de medir y contar. Cuando indica y dice en voz alta

> P: ¿Qué características tienen los chicles?
> E1: Son de igual tamaño.
> [Toma regletas de la mesa y las selecciona para formar grupos de dos]
> E1: …tocaba también darle a Juan José.
> [Luego de leer nuevamente el problema menciona]
> E1: ¡Ah! No hay que darle a Juan José.
> [Toma regletas de la mesa y las selecciona para formar grupos de tres]

Como muestra el extracto de la entrevista E1 logra establecer otras de las Acciones iniciadores que son el compartir y repartir; luego de su intervención y análisis de la situación problema escribe la respuesta a la pregunta y realizar la representación gráfica con las *regletas de Cuisiner*. En esta pregunta también mostramos las respuestas de E2, E3 yE4 (Ver figuras 16 a la 21).

Figura 16. E1. P1

Figura 17. E1 –P1

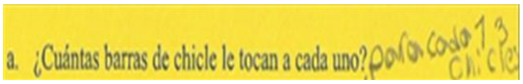

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? para cada 1 3 chicles

Figura 19. E2 –P1


a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno?

Figura 18. E1 – P1 escrito

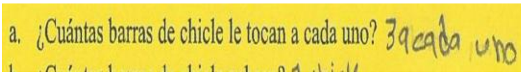

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3 a cada uno

Figura 21. E3 –P1


a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3

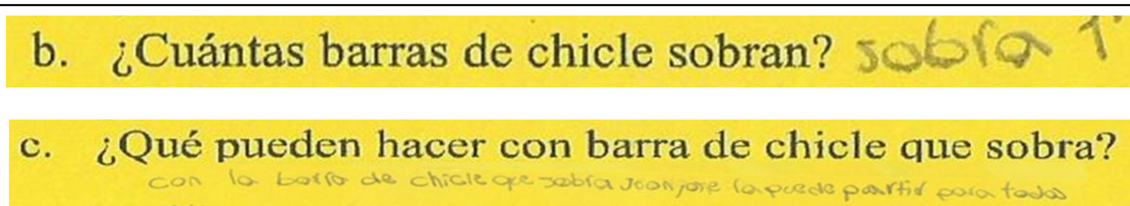
Figura 20. E4 –P1

b. ¿Cuántas barras de chicle sobran?
c. ¿Qué pueden hacer con la barra de chicle que sobra?

La acción determinada en las preguntas b. y c. se evidencian cuando el estudiante intenta repartir la que sobra en pedacitos iguales, pero es importante la observación que hace el E1 “si se le da un pedacito a cada uno sobrarían también 3 pedacitos entonces Juan José puede comérsela”. E1 ha construido la Acción de repartir y compartir y por medio del material concreto da una representación de una o varias partes iguales de la unidad entera o de un conjunto (Ver figura 22).

Figura 22. E2 y E4 –P1

Los estudiantes **E2, E3, E5 y E4** logran aplicar una acción al realizar las reparticiones con las regletas dadas sin mayor dificultad y escriben las respuestas correspondientes; Dando lugar a la validación de la construcción mental propuesta en nuestra Descomposición Genética Preliminar –DGP–. Con la interiorización de la Fracción en el contexto continúo. A continuación, mostramos una de las respuestas de los estudiantes. (Ver figura 23).


b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? sobra 1

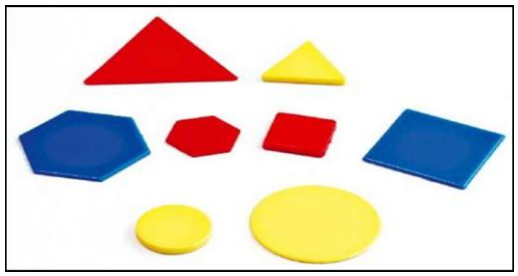
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?
con la barra de chicle que sobra Juan jose la puede partir para todos

Figura 23. E2–P1. b y c.

A la luz de la Teoría APOE **E6** no muestra ninguna Acción, al formar el reparto no logra representar una o varias partes iguales de la unidad entera en esta primera actividad. (Ver figura 24)

Figura 24. E6 –P1

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.



Retomando Figura 11. Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

a. ¿Cuántos objetos hay?
b. ¿Cuántos triángulos hay?
c. ¿Cuántos círculos hay?
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos?
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules?

El propósito de estas situaciones problemas, es que los estudiantes, al dividir la unidad en partes iguales, destaquen un número particular de esas partes, para interiorizar las fracciones como parte de un todo discreto.

Es muy importante mencionar que al leer la actividad la estudiante **E6** pregunta qué son bloques lógicos, lo que llama la atención porque es muy importante que al trabajar material concreto en este caso los bloques lógicos el estudiante debería estar familiarizado con ellos. (Ver figura 25)

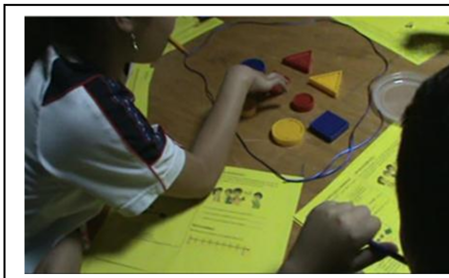


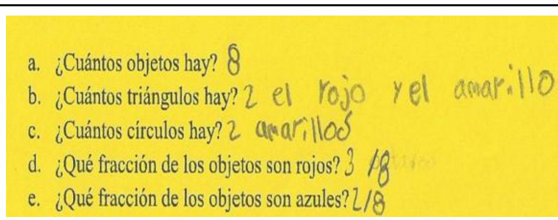
Figura 25. E6 –P2

La estudiante **E6** logra ejecutar una ***acción*** en esta actividad al reconocer una ***parte- todo discreto.***

Al realizar la representación con el material concreto se hizo importante para ellos que la representación quedara igual a la dada en la entrevista. Por ejemplo, **E4** utiliza sus dedos para señalar los objetos cuando inicia la entrevista. Lo que va evidenciando que necesita realizar el *Conteo* comprobando la ***Interiorización*** de la *Acción* parte-todo discreto (Ver figura 26).

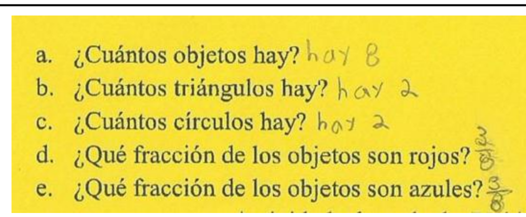
Figura 26. E4 –P2

En las respuestas a las preguntas a., b. y c., no se realizaron intervenciones orales ni preguntas orales entre los estudiantes y el profesor – investigador. Los estudiantes se mostraron seguros al realizar la Acción de contar las figuras geométricas –Parte-todo discreto–, donde la unidad es el total de elementos que conforman el conjunto y la parte algunos elementos del conjunto. A continuación, se muestran algunas respuestas (Ver figuras 27 y 28).



a. ¿Cuántos objetos hay? 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? 2 el rojo y el amarillo
c. ¿Cuántos círculos hay? 2 amarillos
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? 3 /8
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? 2/8

Figura 27. E5 –P2

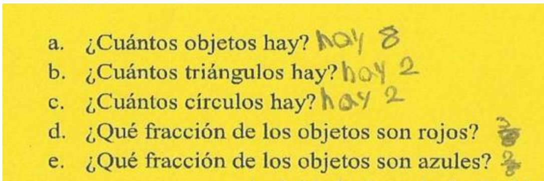


a. ¿Cuántos objetos hay? hay 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? hay 2
c. ¿Cuántos círculos hay? hay 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? $\frac{3}{8}$
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? $\frac{3}{8}$

Figura 28. E6 –P2

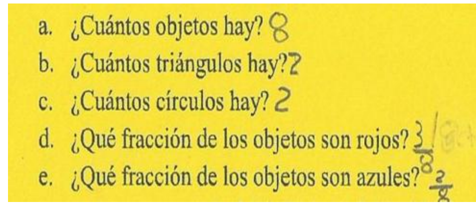
Cuando se hace la pregunta utilizando la palabra “fracción”, en los ítems d. y e., surge la duda sobre el significado de la palabra fracción; en el siguiente párrafo se evidencia la interiorización de algunos estudiantes frente a la noción de número racional ha ido adquiriendo en este Proceso.

Según la DGP en el razonamiento realizado por E**2** se evidencia que ha construido un Proceso al decir “que es como partir en pedacitos iguales”, y hace un gesto de partir utilizando sus manos. Igualmente, **E1** dice de forma segura que es dividir y **E3** dice que es fraccionarlos. En estos tres estudiantes se identifica una interiorización de la Acción en el Procesos reconociendo algunas de las diferentes formas en que emerge la noción de número racional (Ver figuras 29 y 30).



a. ¿Cuántos objetos hay? hay 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? hay 2
c. ¿Cuántos círculos hay? hay 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos?
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules?

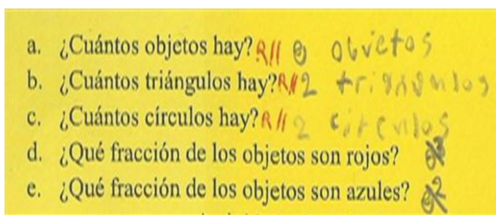
Figura 29. E2 –P2



a. ¿Cuántos objetos hay? 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? 2
c. ¿Cuántos círculos hay? 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? 3/8
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? 2/8

Figura 30. E3 –P2

Retomando nuevamente la DGP **E1.** También se acerca al Proceso al reconocer que son tres de ocho, piensa y dice tres octavos, este estudiante va generando un mecanismo de coordinación construyendo una interpretación y una determinación que la unidad puede componerse de acuerdo a los fragmentos que se eligen y llegando hasta una lectura correcta de la fracción. (Ver figura 31)



a. ¿Cuántos objetos hay? R// 8 obvietos
b. ¿Cuántos triángulos hay? R//2 triangulos
c. ¿Cuántos círculos hay? R// 2 circulos
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos?
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules?

Figura 31. E1 –P2

Los demás estudiantes escribieron en forma correcta la fracción, pero ninguno hizo comentarios o preguntas relacionado a ello.

PROCESO El problema planteada evidencia un reparto en la comprensión informal de tamaño relativo para desarrollar el concepto temprano de razonamiento proporcional.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; Se come una parte y le da 2 a Javier.

Retomando Figura 12. Reparto Proporcional.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro?
b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier?
c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro?

Para el desarrollo de esta pregunta no se facilita material concreto en la realización de las representaciones gráficas, los estudiantes estarán en condiciones de hacer coincidir proporciones equivalentes representadas por diferentes formas cotidianas, conectando el conocimiento intuitivo de los estudiantes a nociones de número racional formales.

E6: la estudiante no logra concentrarse, mientras se hace la lectura del cuestionario no lee y se limita a jugar con las manos, mientras los demás están atentos a sus hojas y participando activamente del proceso de lectura para comprender la situación. (Ver figura 32)

Figura 32. E6. Brazos cruzados

Al finalizar la lectura se les pide que representen la situación problema, es importante aclarar que, para esta P3, no se utiliza material concreto; para ir evidenciando nuestra –DGP–.

> **E2:** dice "que él había entendido otra cosa diferente, que la Laura se comía dos pedazos de la manzana y le dio los otros dos a Javier, siempre tuvo claro que el reparto se hizo de cuatro, pero ya entendí".

Con respecto a la pregunta *a*, se observa las distintas formas de acuerdo a los fragmentos que se elijan. Los estudiantes **E1** y **E2**, hacen representaciones diferentes, observando en ellos y desde la DGP diferentes Procesos E3 reparte cada manzana en cuatro partes iguales, al preguntarle por este reparte él nos explica que es lo mismo, porque a cada uno le tocan dos pedazos, lo que nos permite observar que el estudiante ha demostrado un Mecanismo De Coordinación. (Ver figuras 33 y 34)

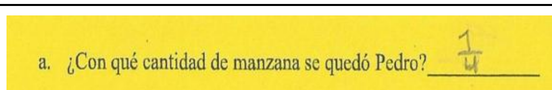


Figura 33. E2 – P3.

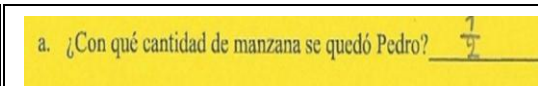


Figura 34. E1 – P3.

Desde la DGP se evidencia en **E1** un buen Proceso de reparto proporcional, al reconocer que un pedazo de la partición de E2 es igual a dos de su partición, identificamos aquí la forma en la que realiza transformaciones al objeto matemático de manera interna e incluso pensó en la relación de las soluciones planteadas; para esta misma situación problema el estudiante **E2** interviene para evidenciar el Proceso con un objeto concreto utilizando una hoja como material concreto para explicar la situación**.** (Ver figuras 35 y 36)

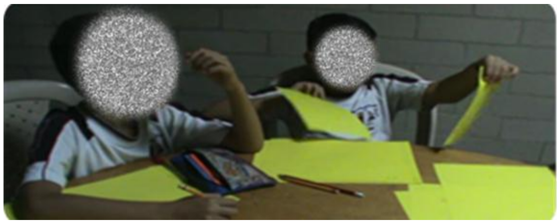


Figura 35. E2 Representando – P3.

Figura 36. E2 Representando – P3.

El estudiante **E2** evidencia reflexión de las Acciones aplicadas con un Proceso especifico que hace con las hojas de papel sobre proporcionalidad llegando al objeto al tomar una hoja de papel e imaginar la representación de dividir en dos la unidad y luego dividirla en cuatro, muestra que se puede tomar la mitad o dos pedazos si la divido en cuatro, aquí el estudiante ya demuestra que las fracciones pueden representar la misma cantidad, aunque parezcan diferentes.

Finalmente, en la interacción que tiene estos dos estudiantes. El estudiante **E1** llega a concluir que: "Laura se comió "un cuarto" y dio "dos cuartos" a Javier", y así escriben los dos estudiantes las respuestas de las preguntas b y c. (Ver figuras 37 y 38)

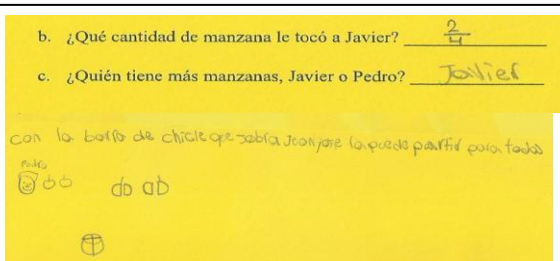


Figura 37. E2 – P3.

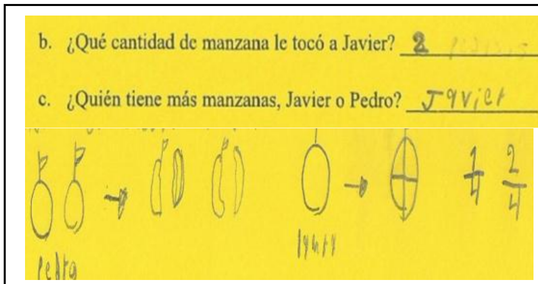


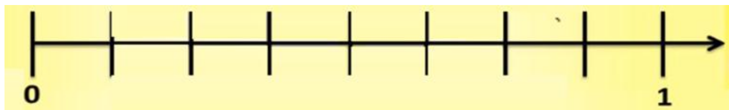
Figura 38. E1 – P3.

Para este momento y teniendo en cuenta la teoría APOE el estudiante ha encapsulado el objeto matemático al lograr la concepción de fracción como comparación entre cantidades de reparto.

Finalmente, este mecanismo es más evidenciado cuando los estudiantes anteriores en sus relatos y escritos construyen relaciones entre las cantidades, partes y tamaños de las manzanas; determinando que la unidad puede ser desfragmentada y seguirá siendo una;

mostrando así que la relación parte todo (tanto en su representación continua como discreta), constituye el fundamento de la interpretación de las fracciones como medida.

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$



Retomando Figura 13. Recta numérica.

Se evidencia en E**4** que puede construir relaciones entre la cantidad de partes y el tamaño de las mismas, aunque inicialmente había contado mal, pide algo para corregir y comprende que la unidad puede componerse de distintas formas de acuerdo a los fragmentos que se elijan. (Ver figura 39)

Figura 39. E4 Representando – P4

Teniendo en cuenta la DGP el estudiante **E6** apenas está en una Acción de conteo, no ubica correctamente la fracción en la recta numérica, no logra hacer la interiorización de Acciones realizadas durante la pregunta, pues no identifica la fracción como parte de un todo. (Ver figura 40)

Figura 40. E6 Representación errónea– P4

Los demás estudiantes **E1, E5, E2 y E3** constataron la coordinación al construir relaciones entre la cantidad de partes y el tamaño de las mismas, siendo el uso de la recta numérica la añadidura para llegar a la equivalencia de fracciones. (Ver figuras 41 a la 44)

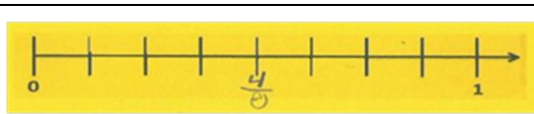


Figura 41. E1 Representación – P4

Figura 42. E2 Representación – P4

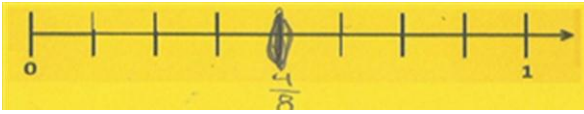


Figura 43. E5 Representación – P4

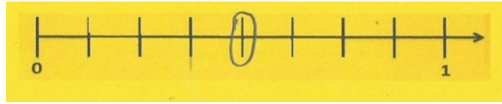
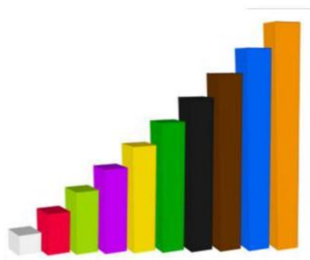


Figura 44. E3 Representación – P4

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera**.** Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!



Retomando Figura 14. Actividad adaptada de (Hincapié. 2003. p. 183)

a. El listón de color café, ¿Qué parte es del listón de color rosado?

b. El listón de color verde claro, ¿Qué parte es del listón de color azul?

c. El listón de naranja, ¿Qué parte es del listón de color verde oscuro?

d. El listón de color verde oscuro, ¿Qué parte es del listón de café?

e. El listón de madera blanco, ¿Qué parte es del listón amarillo?

En el desarrollo de esta actividad los estudiantes realizarán comparación de fracciones con material concreto (para este caso las regletas), ellos estarán en capacidad de dar inicio a la reflexión sobre equivalencias.

Analizando los resultados de las entrevistas, podemos decir que esta concepción de equivalencia es fundamental en la construcción de este concepto de noción de número racional. Al parecer los estudiantes que consiguen deliberar que las fracciones representan la misma cantidad, aunque parezcan diferentes pueden continuar la evolución de sus Abstracciones Reflexivas mostrando la construcción de Objeto desde lo concreto (para este caso las regletas siendo lo concreto a lo abstracto de noción de número racional).

Los estudiantes **E1**, **E2** y **E5** representan Procesos con las regletas de forma acertada e inmediata al realizar la comparación entre las unidades. (Ver figura 45)

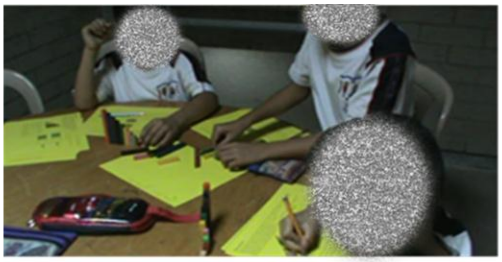
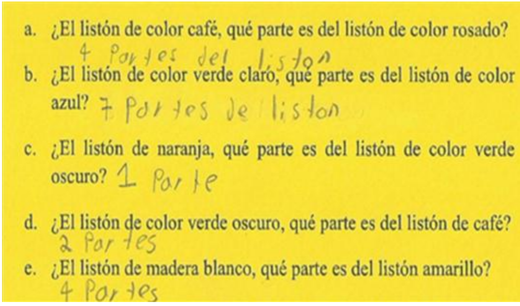


Figura 45. E1, E2 y E5 Representando – P5

Validando la DGP en esta pregunta, el **E6** solo hace un Proceso, mostrando poca interacción entre la cantidad de parte y el tamaño que debe tener la construcción. (Ver figura 46)

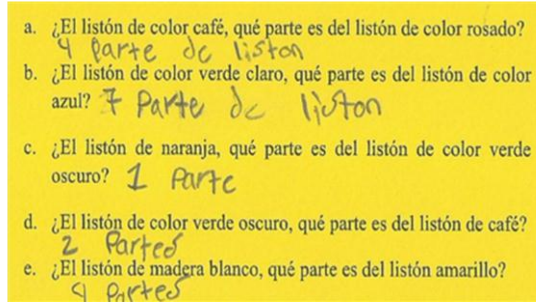
Figura 46. E6 Representando – P5

E6 y **E5** los estudiantes, logran la concepción Proceso de la equivalencia de las fracciones a través de la comparación de las partes de las unidades que ellos mismos cubren con el material que se está manipulando o dividen con unidades de referencia que ellos mismos construyen, dando pie a que se logre una relación precisa para lograr el Objeto (Ver figuras 47 y 48)



a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
4 Partes del liston
b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? 7 Partes de liston
c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? 1 Parte
d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
2 Partes
e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
4 Partes

Figura 47. E5 Respuestas – P5



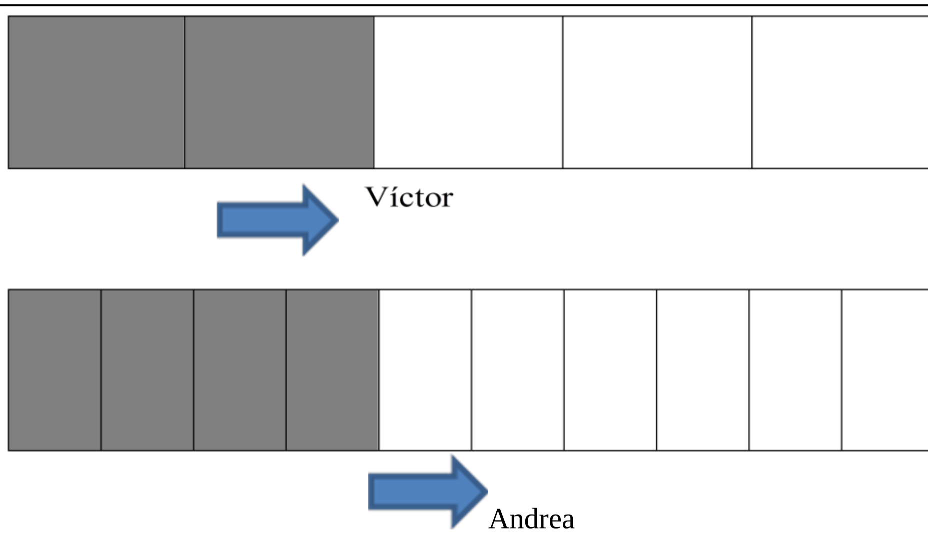
a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
4 Parte de liston
b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? 7 Parte de liston
c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? 1 Parte
d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
2 Partes
e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
4 Partes

Figura 48. E6 Respuestas – P5

OBJETO Comparar fracciones desde la Parte-todo Desde lo continuó y lo discreto, representadas con material concreto y observar la equivalencia entre fracciones para llegar a una reconstrucción o encapsulación del objeto.

P6. Víctor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Víctor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina**.**

¿Qué observas del dibujo realizado?



Retomando Figura 15. Interpretación que puede realizar el alumno.

En la última pregunta se interpreta según lo escuchado en la entrevista que los estudiantes han logrado la construcción del concepto de noción de numero racional con gran facilidad utilizando el material concreto y luego logrando la abstracción reflexiva desde la concepción de fracción como expresión de una parte de un todo hacia una concepción en la que la fracción expresa: comparación de una medida, comparación entre dos cantidades, situación de reparto; como lo observamos a continuación. (Ver figura 49)

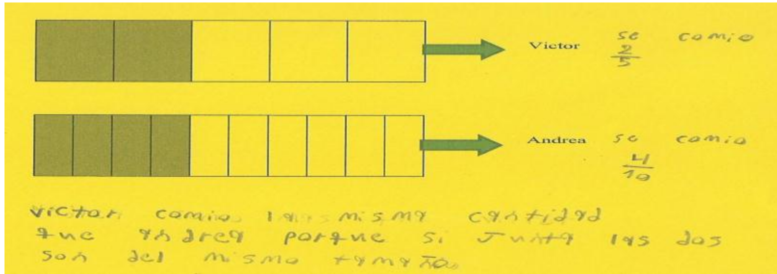


Figura 49. E1 Respuestas – P6

Los estudiantes que dieron evidencias de poseer la concepción objeto consideran la fracción como elementos de una unidad. Tomando las respuestas de cada uno se demuestra que en nuestra descomposición genética preliminar describimos estas construcciones en términos de las transformaciones que un estudiante pudiera realizar sobre la producción de las fracciones como gráfica concreta y abstracta en los ejercicios propuestos. En este caso, decir que se ha realizado una reconstrucción o se ha encapsulado los Procesos como un objeto cognitivo seria la evidencia de una concepción objeto. (Ver figura 50)

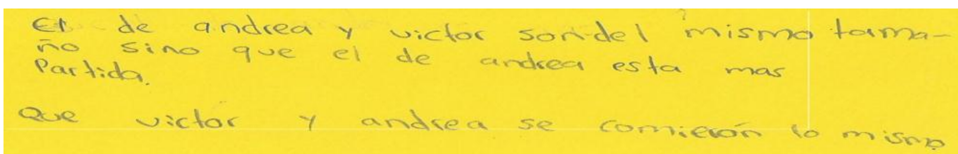


Figura 50. E4 Respuestas – P6

E5: la estudiante inicialmente, dice que Andrea comió más, pero luego observa bien el ejercicio y aclara que es igual, sólo que el de Andrea tiene más pedacitos, llegando a una buena comparación con fracciones que representan la misma cantidad, aunque parezcan diferentes. (Ver figura 51)

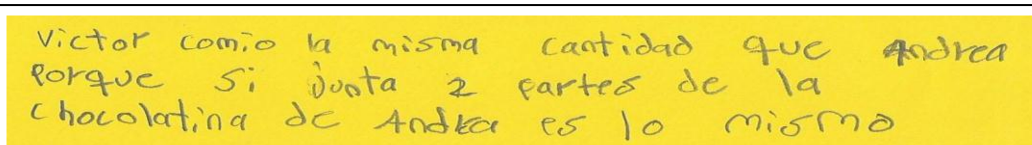


Figura 51. E5 Respuestas – P6

Desde la DGP **E5** logra una encapsulación del Objeto matemático explicando que ambos comieron lo mismo, aunque se vean más pedacitos en la de Andrea. El estudiante finalmente logra la interpretación amplia de la concepción de fracción como expresión de una parte de un todo hacia una concepción en la que la fracción expresa: comparación de una medida, comparación entre dos cantidades, situación de reparto; utilizando las regletas como material concreto.

4.2. CONCLUSIÓN DEL CÁPITULO.

De acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la entrevista, se logró evidenciar la manera como los estudiantes logran comprender la noción de número racional a partir de su manipulación, desde el objeto concreto con las regletas –Acciones–, pasando por una formalización de repartos equitativos y proporcionales –Procesos–, hasta llegar al Objeto abstracto de noción de número racional –Objeto–.

De igual manera a partir de los resultados se logró evidenciar la manera como los estudiantes por medio de la manipulación de las regletas logran llegar a abstracciones del objeto de investigación.

Es así como la Descomposición Genética queda validada como un modelo para la enseñanza y aprendiza de la noción de número racional en básica primaria.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Con base en los resultados presentados en el capítulo anterior y el desarrollo de la propuesta de investigación, se busca exponer a continuación, algunas conclusiones que revelan los medios de comprobación y el enfoque de la Teoría APOE. Esto permitió evidenciar las construcciones Mentales de los estudiantes de grado tercero, con la reconstrucción de Objetos abstractos a partir de Acciones concretas en situaciones asociadas a la construcción de la fracción como primera noción de número racional.

5.1. EN RELACIÓN CON LA PREGUNTA PROBLEMATIZADORA.

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que construyen los estudiantes de tercero primaria sobre la noción de número racional cuando parten de objetos abstractos a partir de Acciones concretas?

Desde el aprendizaje:

Como se puede observar en el análisis de datos, los estudiantes dan cuenta que las implicaciones de enseñanza y aprendizaje han sido fundamentadas desde la Teoría APOE; ya que se puede apreciar un mayor nivel de comprensión del concepto de la noción de número racional. Esto se evidencia cuando los estudiantes manipulan material concreto realizando Acciones como: comparar, trasladar, solapar, entre otras. La realización de dichas Acciones permitió en algunos estudiantes logra el mecanismo de interiorización, donde el estudiante logra identificar la fracción sin necesidad de hacer la comparación de manera física sino mental. La segunda interiorización se da en la identificación de algoritmos que sustituyen comparar y permitan una mirada más trasfondo de equivalencias y proporcionalidad.

Desde la enseñanza:

Durante la aplicación de la entrevista, se evidencian las Construcciones Mentales ya sea a partir de la Interiorización de la Acción de repartos equitativos o de la coordinación de equivalencias y proporcionalidades. Cada uno de los estudiantes hizo movimientos desde cada una de sus respuestas utilizando o no el material concreto, dando validez al análisis propuesto en la descomposición genética.

5.2. EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS.

Retomando los objetivos propuestos en esta investigación, así como el de la pregunta formulada, podríamos afirmar que se lograron en su integridad, ya que el análisis de datos y la Descomposición Genética preliminar permite realizar la premisa de esta afirmación sobre la construcción de Objetos abstractos a partir De Acciones concretas.

Tomando el objetivo general, el cual plantea: Analizar las Estructuras y Mecanismos Mentales generados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de número racional, a través del diseño y desarrollo de una Unidad Didáctica, fundamentada en una Descomposición Genética.

Se puede afirmar que se ha logrado, a partir del análisis de la teoría APOE y las evidencias de la validación de la Descomposición Genética del concepto de la noción de número racional desde la comparación, medición, partición, equivalencias, proporcionalidad y finalmente la representación abstracta de este objeto en cada uno de los estudiantes en las diferentes Construcciones Mentales.

En cuanto a los objetivos específicos, planteados para la noción de número racional, encontramos:

1.5 OBJETIVO GENERAL

Analizar las Estructuras y Mecanismos Mentales generados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de número racional, a través del diseño y desarrollo de una Unidad Didáctica, fundamentada en una Descomposición Genética.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. **Caracterizar hipotéticamente las Estructuras y Mecanismos Mentales necesarios para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Noción de Número Racional.**

Durante la intervención, se pudo evidenciar que los estudiantes identificaron con apropiación y conexión cada una de las Estructuras y Mecanismos Mentales al dar solución a las diferentes situaciones problemas planteados, lo cual, determina su capacidad al haber realizado la construcción de objetos abstractos a partir de las Acciones concretas.

2. **Diseñar una Descomposición Genética de la Noción de Número Racional que fundamente una Unidad Didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la Noción de Número Racional.**

Fue posible realizar esta Descomposición Genética Preliminar, planteada para favorecer las Construcciones y Mecanismos Mentales que los estudiantes realizan desde el objeto de investigación. Los datos evidenciados en el análisis a posteriori muestran que la DGP es validada desde las Acciones y los Procesos que se llegan a construir, y estos hallazgos son el insumo para la construcción de una Unidad Didáctica pertinente para el Grado Tercero de esta investigación.

3. **Diseñar actividades de aula para estudiantes del grado tercero que propicien su razonamiento y argumentación sobre la Noción de Número Racional.**

Es aquí donde se comienzan a dar sugerencias didácticas basadas en el análisis de datos presentados en esta investigación, en relación a la forma como puede aprender un estudiante el razonamiento y la argumentación en la práctica con los números racionales. Implementando, además, actividades de aula que propician el desarrollo de las competencias matemáticas de formulación y ejecución, construcción del conocimiento desde una estructuración interna, la cual, se da mediante un proceso continuo producido desde la manipulación de Acciones Concretas para la construcción de Objetos Abstractos.

5.3. EN RELACIÓN CON LA TEORÍA

En el transcurso de esta investigación, la Teoría APOE nos brinda los elementos necesarios para identificar como docentes investigadoras, las situaciones en donde se evidencia que los estudiantes alcanzan Acciones, Procesos y Objetos**.** A través de los hallazgos durante la aplicación de las actividades y las entrevistas semiestructuradas, se observa como los estudiantes van identificando los Procesos de representación gráfica en recta numérica como medición o en los diferentes diagramas que les permitían ir coordinando para formar ese Objeto, no obstante, proponemos dar mayor importancia a la utilización de Objetos Concretos para lograr una mejor interiorización de las Acciones y Procesos, con los estudiantes que muestran haber obtenido la etapa en la que los Objetos efectúan Acciones consecuentes de la asimilación en la noción de número racional como objetos abstractos . Sin embargo, muestran que se ha encapsulado el Proceso cuando realizan las representaciones de equivalencia, proporcionalidad y gráfica de forma abstracta en un Objeto. Y que los estudiantes han mostrado solucionar las diferentes situaciones problema que se les presentaban con una comparación de manera adecuada cada vez que íbamos avanzando; los estudiantes ya no hacen referencia a Objetos concretos**.** Aunque comenzaron su aprendizaje con Acciones sobre Objetos concretos durante la entrevista al finalizar, realizan una construcción cognitiva de Objetos abstractos, como se anuncia en la teoría APOE, lo que permite una gran validación de nuestra investigación frente a la Teoría.

Finalmente, La importancia que tiene este enfoque teórico dentro de las prácticas de aula radica en que se convierte en una herramienta descriptiva y predictiva en la medida que le permite al docente y al investigador identificar las diferentes Estructuras y Mecanismos Mentales de aprendizaje de los estudiantes, para poder así, garantizar procesos de enseñanza

5.4. EN RELACIÓN A LA VALIDACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA.

La validación de la Descomposición Genética se fundamenta en que los estudiantes participantes han tenido interés en las matemáticas y bases fundamentadas en la utilización de material concreto y que, en la educación primaria hasta hoy, no han tenido la oportunidad de que se les presente este objeto matemático de estudio. Los resultados nos dan validez a la DGP ya que muestran la manera como se desarrollaron las Estructuras y Mecanismos Mentales propuestas de la noción de número racional en cada uno de ellos.

Las actividades diseñadas en la entrevista no solo constituyeron un instrumento para validar hábilmente la DGP, sino que se justificó como una continuidad de autoaprendizaje, toda vez que, a partir de su diseño e instrucciones iniciales, los seis estudiantes mostraron las Construcciones Mentales necesarias para la comprensión de este Objeto de noción de número racional.

El elemento clave en el resultado de esta investigación es que los estudiantes lograron desarrollar las actividades, construyendo desde la Estructura de Acción hasta los Procesos y Objeto, conceptos que se sustentan en el objeto matemático que no conocían y que fue presentado solo con la entrevista donde se inicia con una instrucción del docente y luego la desarrollan ellos mismos.

5.5. EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA.

Con esta investigación se logra diseñar una Unidad Didáctica validada desde la Teoría APOE y se construye su respectivo análisis cognitivo. Esta Unidad, puede ser retomada por otros profesores de básica primaria para sustentar el diseño de sus clases. Además, de darle importancia al uso de material concreto desde una perspectiva cognitiva, para generar un impacto mayor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la utilización de la Teoría APOE para construir una secuencia de enseñanza, permite que los estudiantes desarrollen unas nociones claras de las competencias propuestas por cada grado.

De esta manera los resultados arrojados desde nuestra investigación, pueden ser clarificados mediante una nueva aplicación del ciclo de investigación que hemos desarrollado; Este ciclo puede ser llevado a cabo utilizando la componente del diseño e implementación de la enseñanza, es decir por medio del ciclo **ACE**, diseñar actividades de aula que permitan evidenciar de mejor manera la viabilidad de la DGP pero todo esto pensando en obtener testimonios más específicos sobre las construcciones mentales que los estudiantes realizan en torno a el concepto noción de número racional. Pensamos que resultaría muy interesante la elaboración de un modelo de educación que busque seguir la cimentación de los conceptos, desde las acciones concretas para llegar a las construcciones abstractas, asumiendo entonces las consideraciones teóricas y didácticas que hemos planteado como resultado de nuestra investigación.

5.6. PROPUESTAS PARA CONTINUAR OTRAS INVESTIGACIONES.

Finalmente, queremos concluir nuestra investigación con un gran reto, es la construir de la Unidad Didáctica, extendiendo el grado de dificultad para trabajar con los estudiantes de los grados siguientes e incrementar así la comprensión de este concepto, con sus diferentes significados propiciando en los estudiantes el aprendizaje de la noción de los números racionales.

Por lo tanto, se hace necesario mejorar la comprensión de los conceptos de fracción en sus diferentes contextos no solo en los estudiantes, sino también en los docentes de básica primaria, que trabajen con material concreto que permitan la construcción del concepto de fracción y otros conceptos relacionados con este; hasta llegar al trabajo con las razones y proporciones de los jóvenes adolescentes, relacionada a la habilidad de comparar y manejar dos conjuntos de datos al mismo tiempo, y del desarrollo del esquema de la proporcionalidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). Teoría APOE: Un Marco para la Investigación y Desarrollo de Currículo en la Educación Matemática. Nueva York.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996) Un marco para la investigación y desarrollo curricular en la educación de matemáticas de pregrado. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed. s) Investigación en la educación colegiada de las matemáticas. Vol. 2. Providence, Sociedad Americana de Matemática... p. 1-32.

Ávila, A. y Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. En Pedagogía. *Revista de la Universidad Pedagógica Nacional*, 6. (p. 26).

Bogdan, R., y Taylor, S. (1986). Introducción: ir hacia la gente. Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación, 15-27.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 7 (2), 33-115.

Castro, E. (2001). Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. España: Síntesis.

Dubinsky, E. (1991). Abstracción reflexiva en Pensamiento Matemático Avanzado, En Pensamiento Matemático Avanzado, D. Tall (Ed.). Kluwer Academic Publishers. pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. “Educación matemática” 8(03), 24-41

Flores, R. (2012). La noción de fracción como comparador parte–todo. Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 9(2), 155 188.

Gamboa, M. (2013). Construcción cognitiva de la raíz cuadrada una mirada desde la teoría APOE. Tesis de maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.

González Rojas, D. E., y Roa Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal. Enseñanza de las ciencias, 35(2), 0089-107

Hincapié M, C. (2003). “Construyendo El Concepto De Fracción Y Sus Diferentes Significados, Con Los Docentes De Primaria De La Institución Educativa San Andrés De Girardota”. (Tesis de Magister Universidad Nacional de Colombia).

Hurtado Orduz, M. E. (2012). Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

ICFES (2015) Resultados de Colombia en TIMSS 2014/5. Resumen ejecutivo. Bogotá: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.

Kieren, T. (1983). La construcción del número racional. Sus elementos y mecanismos. En T. Kieren (Ed.), Investigaciones recientes sobre el aprendizaje de números (pp. 125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación matemática, 20(2), 65-89

Lamadrid, P y Valdemoros, M. (2011). Resolución de problemas que implican identificar de manera constante la unidad de referencia: un estudio de caso. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf

Lamon, S. J. (1999). Enseñanza de fracciones y razones para la comprensión: conocimiento esencial y estrategias educativas para maestros. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). Fracciones: la relación parte-todo. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Llinares, S. (2003). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Educación S.A.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. “educación matemática, 4(02), 30-54.

Meza, A., y Barrios, A. (2010). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones

Ministerio de Educación Nacional. MEN (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Milevicich, L. y Lois, A. (2010). La resolución de situaciones problemáticas en la formación de profesores. Acta latinoamericana de matemática educativa, 23,1127-1136. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, *8*(2), 157-182.Piaget, J. (1966). Psicología de la inteligencia. Buenos Aires: Psique.

Parraguez, M. (2013). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial* (Doctoral dissertation).

Piaget, J. (1969). Biología y conocimiento. París: Gallimard.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13 (1), 89 – 112.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, *10*(4), 15-32.

Sánchez, J. (2003). La enseñanza de la Matemáticas. Fundamentos teóricos y bases psicológicas. Madrid: CCS.

Saunders R. y Binsham A. (1984). Perspectivas Piagetianas en la Educación Infantil. Ministerio de Educación y Cultura. Madrid. Ed. Monta (Pág. 142)

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Vasco, C. E. (1994). Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas II.

Vergnaud, G. (1983). Estructuras multiplicativos. En R. Lesh y M. Landau, Eds., Adquisición de conceptos y procesos matemáticos. Nueva York: Prensa Académica

ANEXO 1

EVIDENCIAS DE LAS RESPUESTAS DE ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

Respuestas del Estudiante E1 a las preguntas P1 y P2

REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

Las barras de chicle son representadas por regletas utilizadas en las clases.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? R// 3 [illegible]
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? R// 1 [illegible]
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?

Actividad retomada de (Hincapié. 2011. p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? R// 8 [illegible]
b. ¿Cuántos triángulos hay? R// 2 [illegible]
c. ¿Cuántos círculos hay? R// 2 [illegible]
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? [illegible]
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? [illegible]

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E2 a las preguntas P1 y P2

REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

Las barras de chicle son representadas por regletas utilizadas en las clases.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? para cada 3
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? sobra 1
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?

Actividad retomada de (Hincapié. 2011. p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? hay 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? hay 2
c. ¿Cuántos círculos hay? hay 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? [illegible]
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? [illegible]

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E3 a las preguntas P1 y P2

REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

Las barras de chicle son representadas por regletas utilizadas en las clases.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3 q cuarto [illegible] uno
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? 1 chicle
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra? 1

Actividad retomada de (Hincapié. 2011, p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? 2
c. ¿Cuántos círculos hay? 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? $\frac{1}{8}$
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? $\frac{2}{8}$

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E4 a las preguntas P1 y P2

REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

Las barras de chicle son representadas por regletas utilizadas en las clases.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? 1
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?

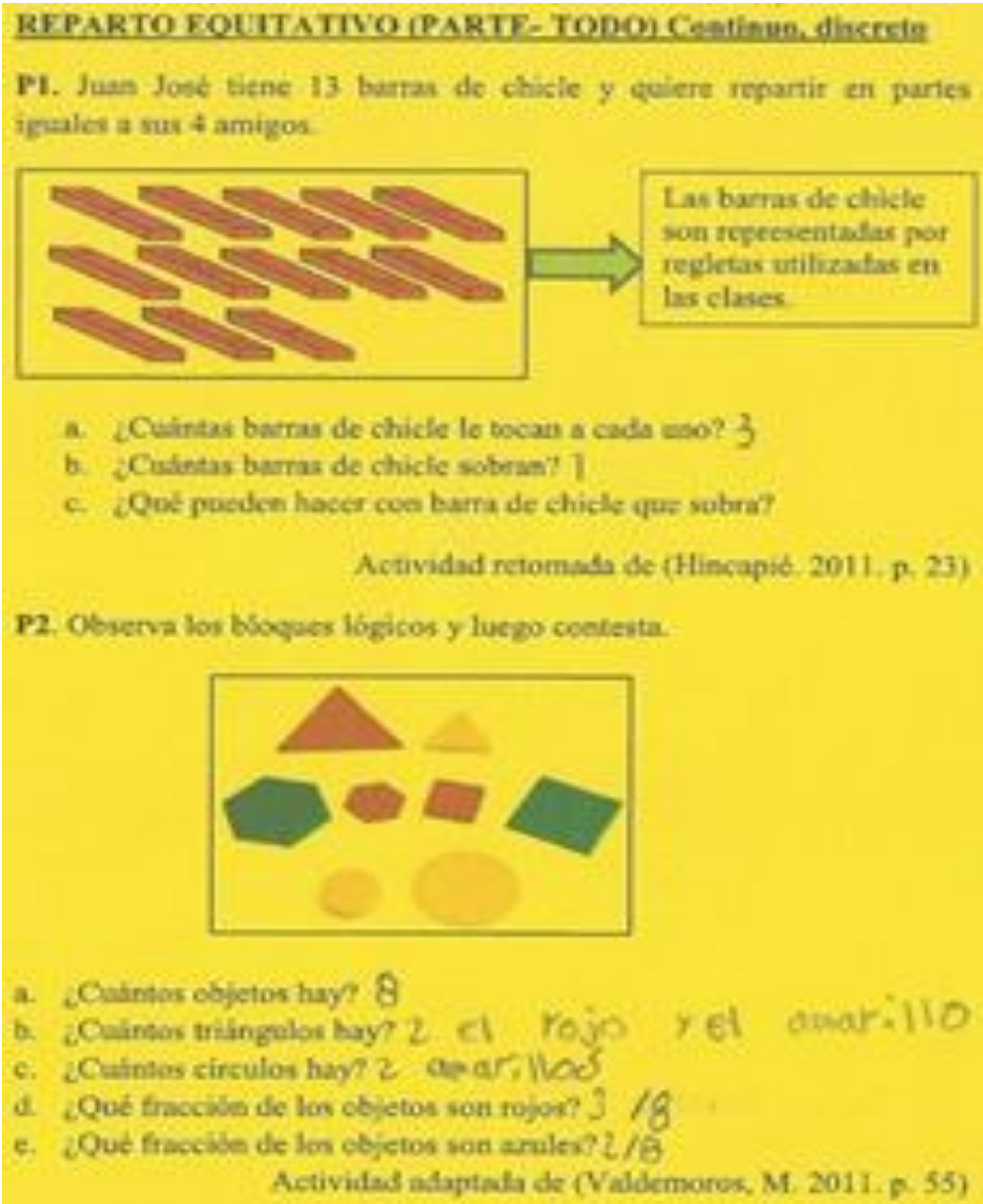
Actividad retomada de (Hincapié. 2011. p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? 2
c. ¿Cuántos círculos hay? 2
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? 3 $\frac{3}{8}$
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? $\frac{2}{8}$

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E5 a las preguntas P1 y P2



REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

Las barras de chicle son representadas por regletas utilizadas en las clases.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3
b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? 1
c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?

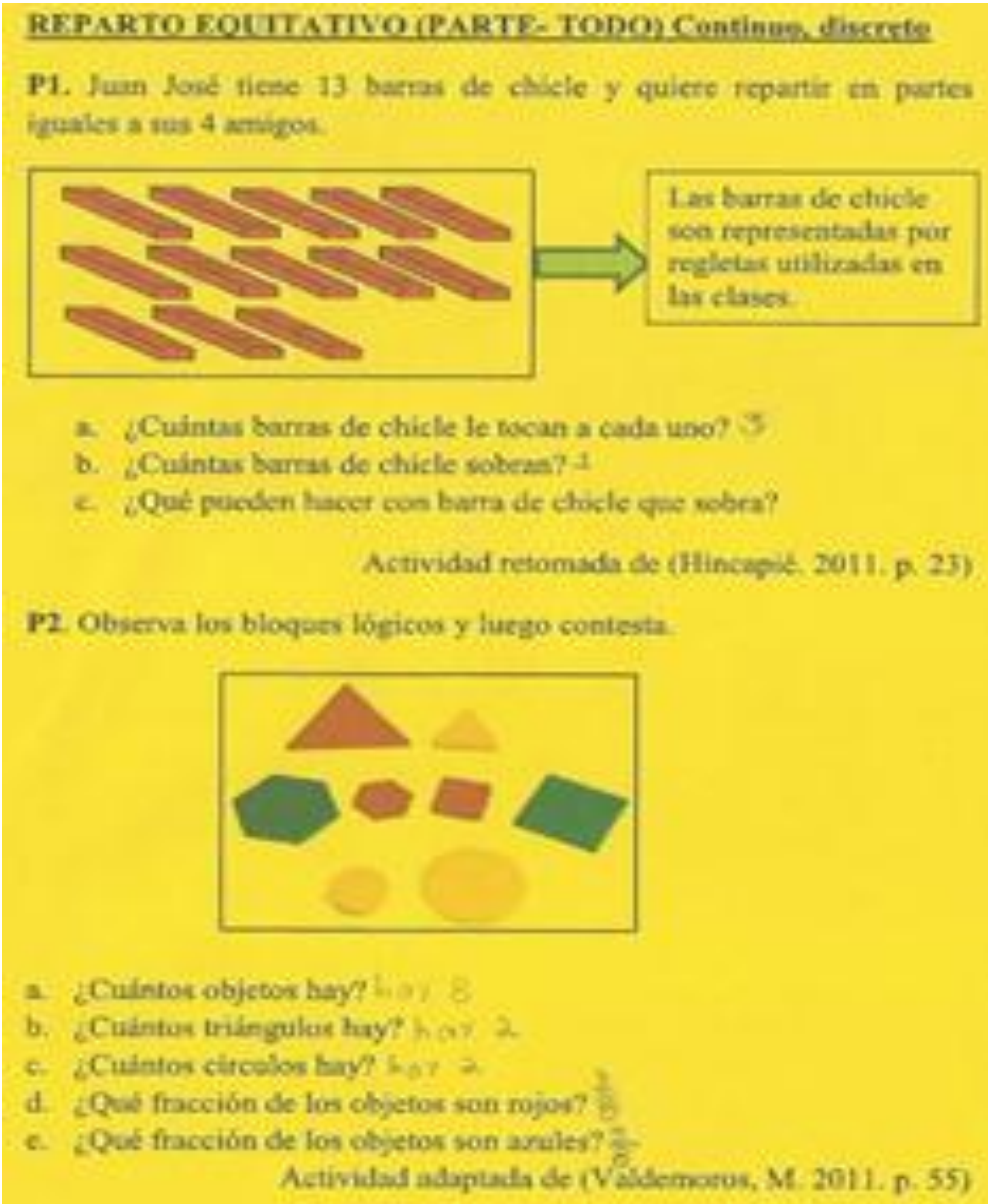
Actividad retomada de (Hincapié. 2011. p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? 8
b. ¿Cuántos triángulos hay? 2 el rojo y el amarillo
c. ¿Cuántos círculos hay? 2 ~~de~~ amarillos
d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? 3 /8
e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? 2/8

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E6 a las preguntas P1 y P2



REPARTO EQUITATIVO (PARTE- TODO) Continuo, discreto

P1. Juan José tiene 13 barras de chicle y quiere repartir en partes iguales a sus 4 amigos.

a. ¿Cuántas barras de chicle le tocan a cada uno? 3

b. ¿Cuántas barras de chicle sobran? 1

c. ¿Qué pueden hacer con barra de chicle que sobra?

Actividad retomada de (Hincapié. 2011. p. 23)

P2. Observa los bloques lógicos y luego contesta.

a. ¿Cuántos objetos hay? hay 8

b. ¿Cuántos triángulos hay? hay 2

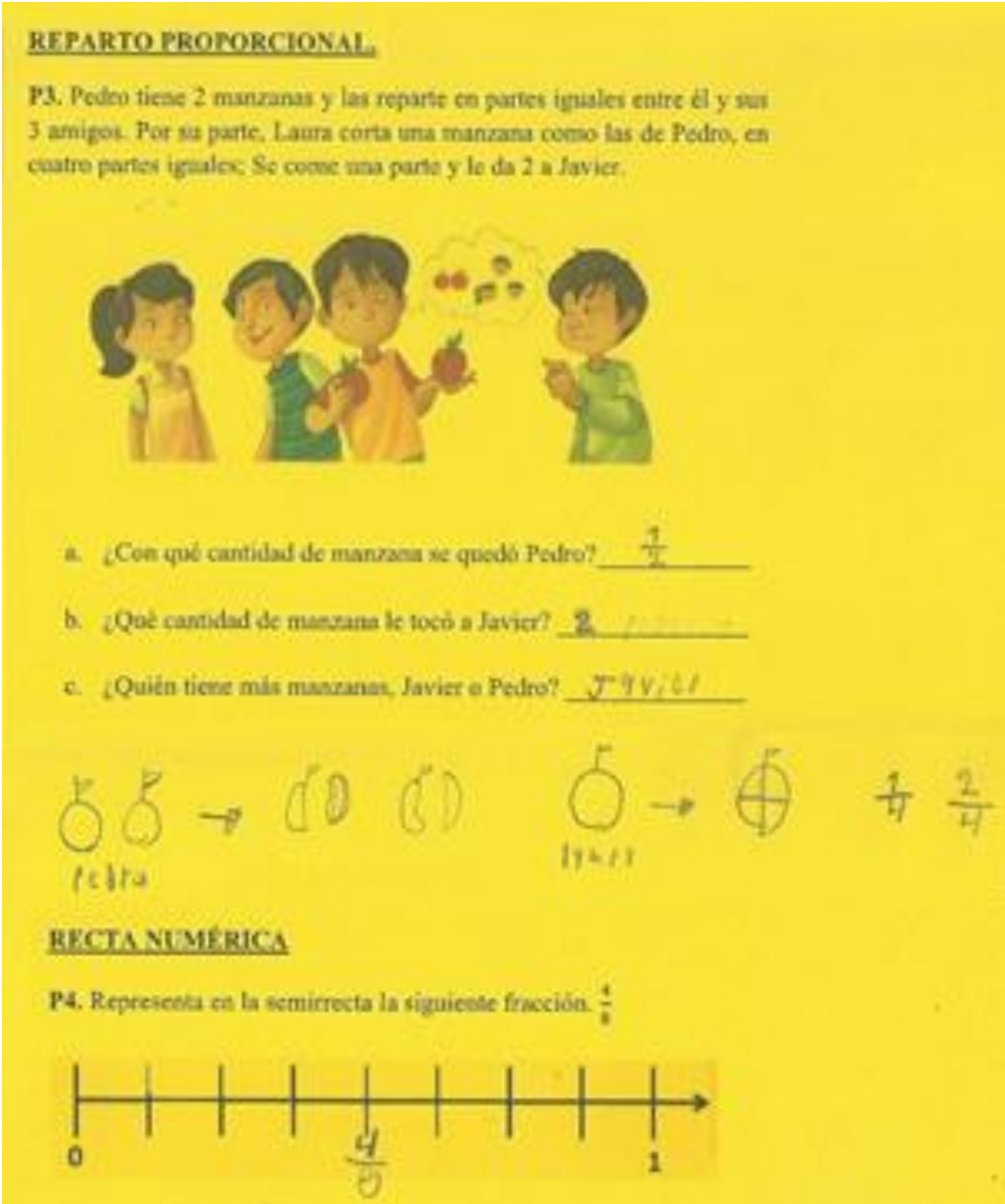
c. ¿Cuántos círculos hay? hay 2

d. ¿Qué fracción de los objetos son rojos? $\frac{3}{8}$

e. ¿Qué fracción de los objetos son azules? $\frac{2}{8}$

Actividad adaptada de (Valdemoros, M. 2011. p. 55)

Respuestas del Estudiante E1 a las preguntas P3 y P4



Respuestas del Estudiante E2 a las preguntas P3 y P4

REPARTO PROPORCIONAL.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; Se come una parte y le da 2 a Javier.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? $\frac{1}{4}$

b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? $\frac{2}{4}$

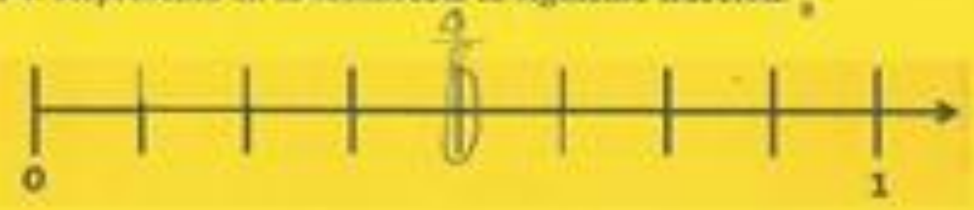
c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? Javier

Con [illegible]

P3-E2

RECTA NUMÉRICA

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$



Respuestas del Estudiante E3 a las preguntas P3 y P4

REPARTO PROPORCIONAL.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales. Se come una parte y le da 2 a Javier.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? 1

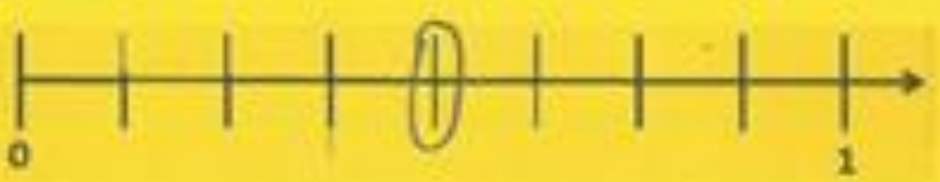
b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? 1 cuarto

c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? Javier

[illegible]

RECTA NUMÉRICA

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$



Respuestas del Estudiante E4 a las preguntas P3 y P4

REPARTO PROPORCIONAL.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; Se come una parte y le da 2 a Javier.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? 0

b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? 2

c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? jabes

Juan jose quedo [illegible]

RECTA NUMÉRICA

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$

Respuestas del Estudiante E5 a las preguntas P3 y P4

REPARTO PROPORCIONAL.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales: Se come una parte y le da 2 a Javier.

a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? con 1 parte

b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? 2

c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? Javier

Se la da a la Profe o al Profesor

RECTA NUMÉRICA

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$

Respuestas del Estudiante E6 a las preguntas P3 y P4

REPARTO PROPORCIONAL.

P3. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte en partes iguales entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; Se come una parte y le da 2 a Javier.

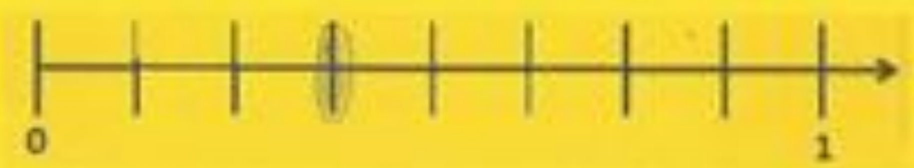
a. ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? Se quedo con una parte

b. ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? 2

c. ¿Quién tiene más manzanas, Javier o Pedro? Javier

RECTA NUMÉRICA

P4. Representa en la semirrecta la siguiente fracción. $\frac{4}{8}$



Respuesta del Estudiante E1 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
la 4 parte

b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? la 6 parte

c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? la 4 parte

d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
la 4 parte

e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
4 parte

Actividad adaptada de (Cardozo 2007, p. 183)

Respuesta del Estudiante E2 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
es la 4 parte

b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? es la 3 parte

c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? es la 6 parte

d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
es la 8 parte

e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
es la 1 parte

Actividad adaptada de (Cardozo 2007, p. 183)

Respuesta del Estudiante E3 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
es 4 partes del color cafe

b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? es 3 partes del color azul

c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? es 6 bloques del liston naranja

d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
es 6 bloques del color cafe

e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
es 1 bloque del liston amarillo

Actividad adaptada de (Cardozo 2007. p. 183)

Respuesta del Estudiante E4 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
   La 8
b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul?
   La 3
c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro?
   La 10
d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
   La 6
e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
   La 1

Actividad adaptada de (Cardozo 2007. p. 183)

Respuesta del Estudiante E5 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
4 parte de liston

b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? 7 Parte de liston

c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? 1 Parte

d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
2 Partes

e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
9 Partes

Actividad adaptada de (Cardozo 2007. p. 183)

Respuesta del Estudiante E6 a la pregunta P5

EQUIVALENCIAS

P5. Las estructuras de mi casa serán de madera. Utilizaré piezas de madera de diferentes tamaños: para las ventanas, vigas, mirador y para el kiosco del patio. La madera se corta en listones, con estos listones se construyen los marcos que luego se unen para ser la estructura y el cerramiento de la casa. Y yo hasta el momento tengo 10 listones de diferentes tamaños y los he pintado de colores vistosos porque así quiero que sea mi casa. ¡Que refleje alegría en cada rincón!

a. ¿El listón de color café, qué parte es del listón de color rosado?
4 Partes del liston

b. ¿El listón de color verde claro, qué parte es del listón de color azul? 7 Partes de liston

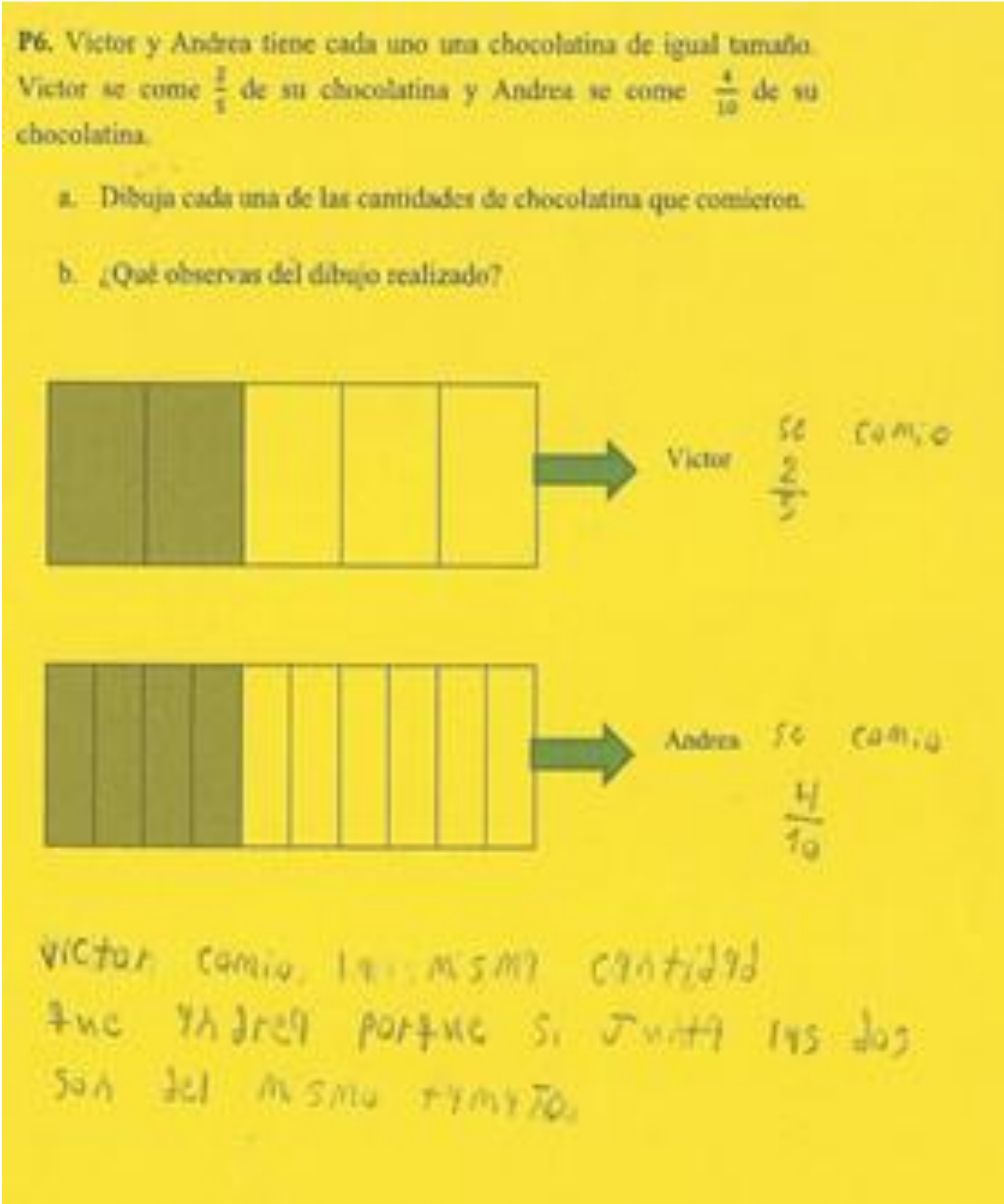
c. ¿El listón de naranja, qué parte es del listón de color verde oscuro? 1 Parte

d. ¿El listón de color verde oscuro, qué parte es del listón de café?
2 Partes

e. ¿El listón de madera blanco, qué parte es del listón amarillo?
4 Partes

Actividad adaptada de (Cardozo 2007, p. 183)

Respuesta del Estudiante E1 a la pregunta P6



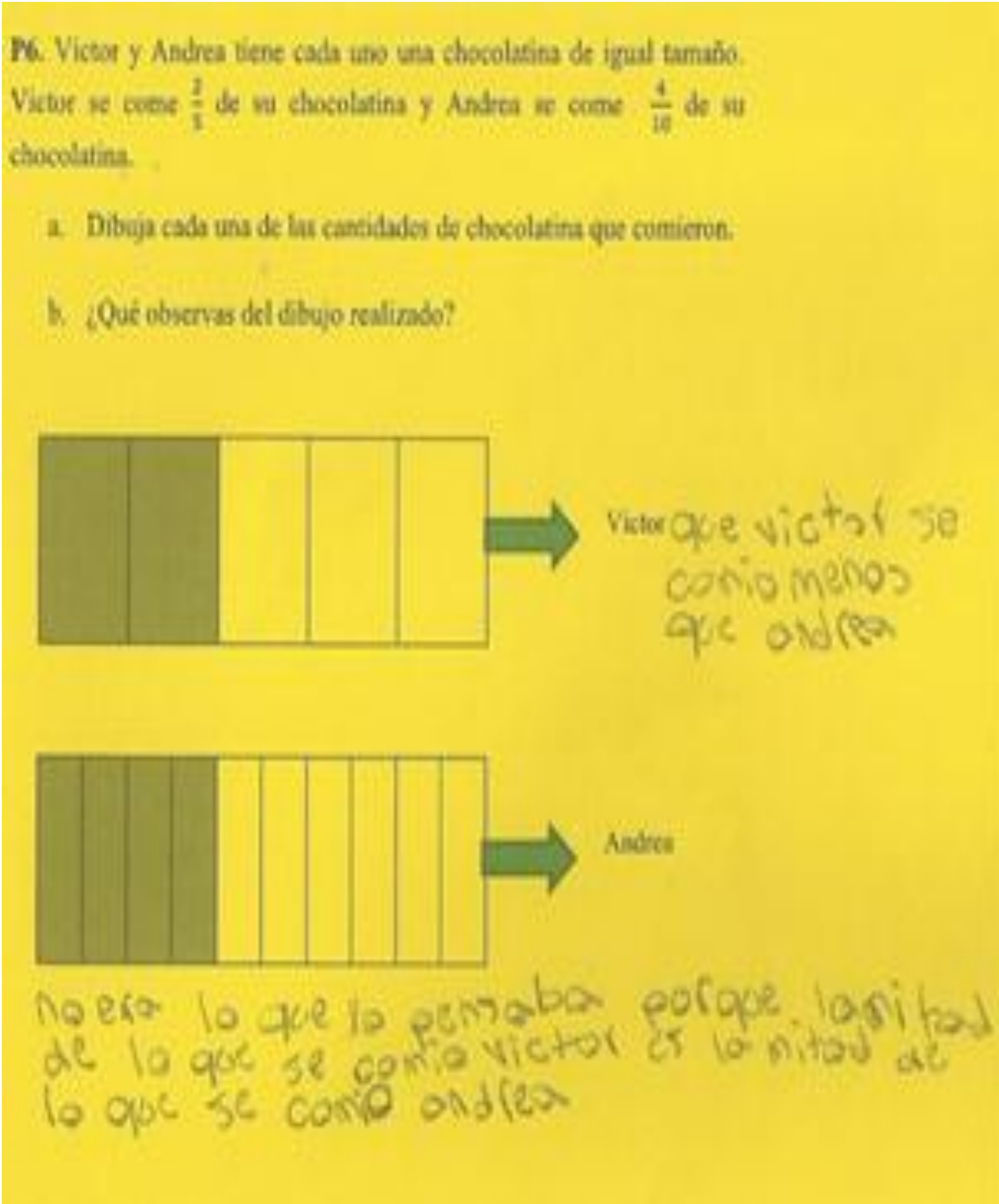
P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

b. ¿Qué observas del dibujo realizado?

victor comio la misma cantidad que andrea porque si junta las dos son del mismo tamaño.

Respuesta del Estudiante E2 a la pregunta P6



P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

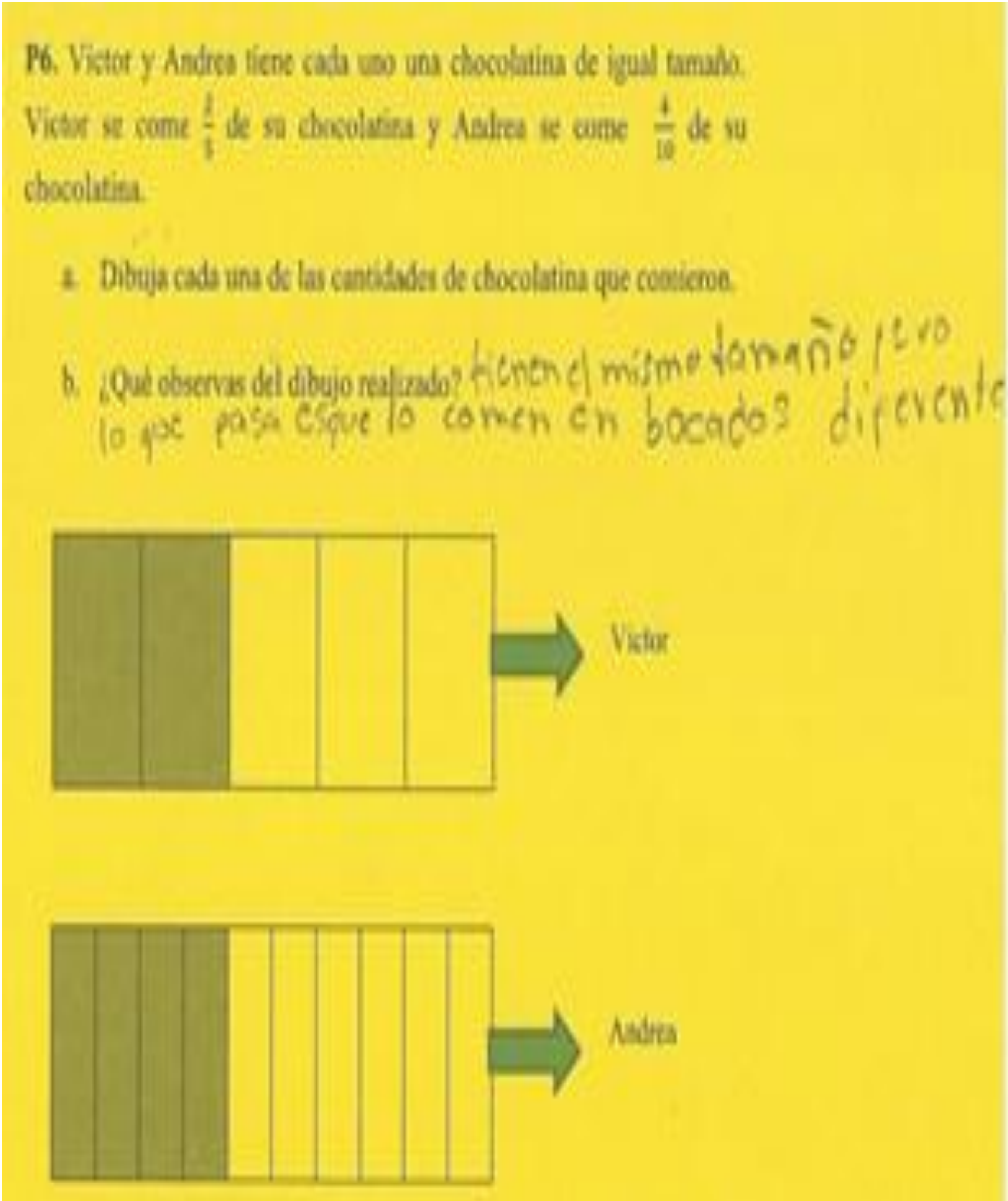
b. ¿Qué observas del dibujo realizado?

Victor que victor se comio menos que andrea

Andrea

no era lo que lo pensaba porque la mitad de lo que se comio victor es la mitad de lo que se comio andrea

Respuesta del Estudiante E3 a la pregunta P6



P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

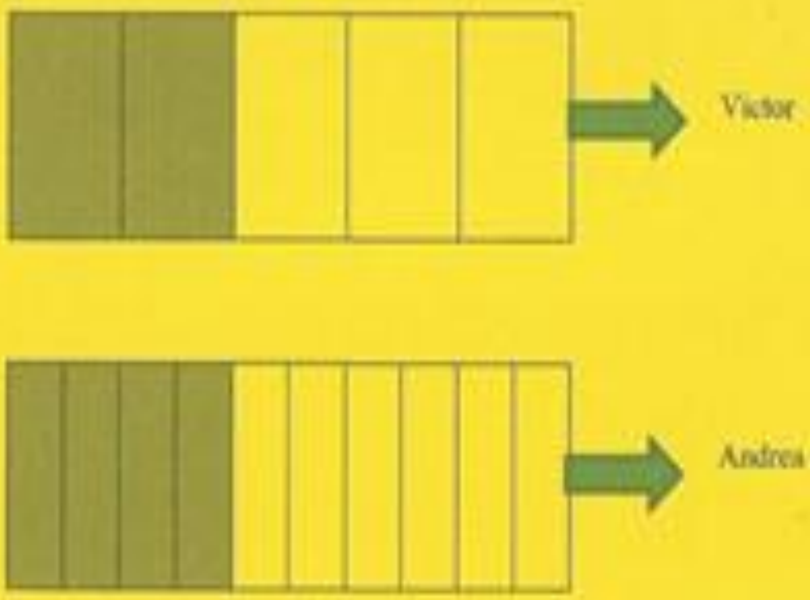
b. ¿Qué observas del dibujo realizado? tienen el mismo tamaño pero lo que pasa es que lo comen en bocados diferente

Respuesta del Estudiante E4 a la pregunta P6

P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

b. ¿Qué observas del dibujo realizado?



El de andrea y victor son del mismo tamaño sino que el de andrea esta mas Partida

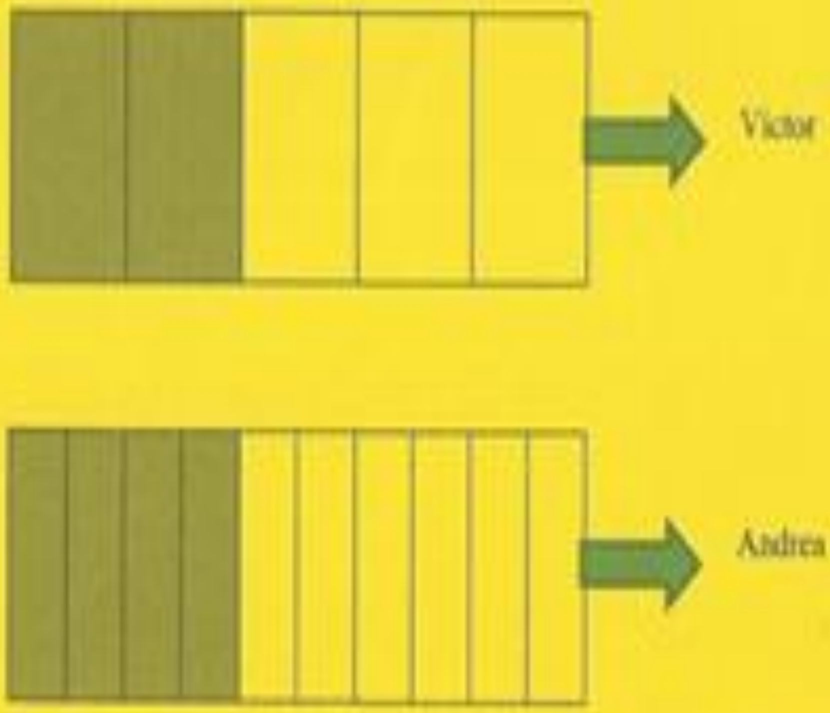
Que victor y andrea se comieron lo mismo

Respuesta del Estudiante E5 a la pregunta P6

P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

b. ¿Qué observas del dibujo realizado?



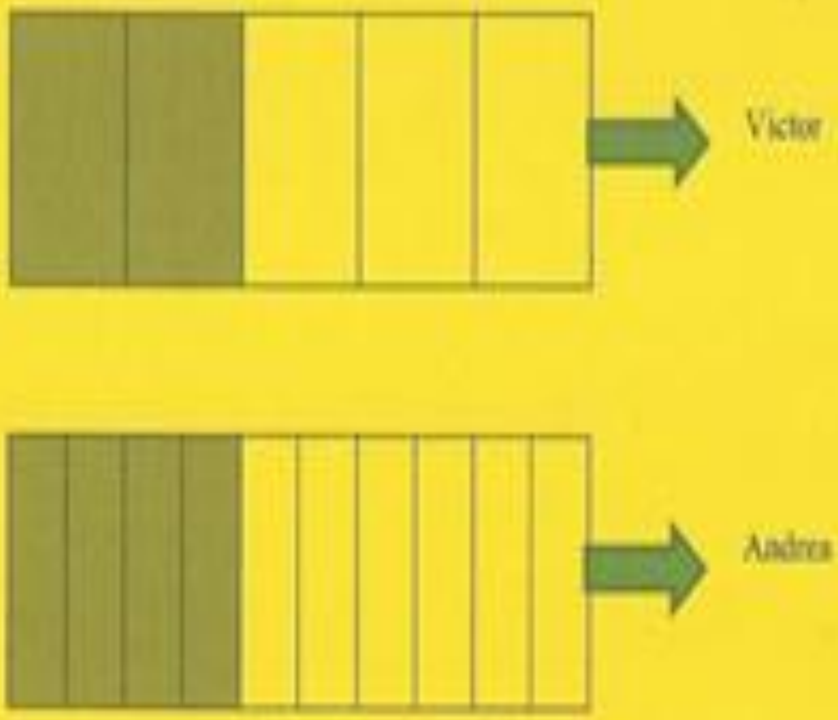
Victor comio la misma cantidad que Andrea porque si junta 2 partes de la chocolatina de Andrea es lo mismo

Respuesta del Estudiante E6 a la pregunta P6

P6. Victor y Andrea tiene cada uno una chocolatina de igual tamaño. Victor se come $\frac{2}{5}$ de su chocolatina y Andrea se come $\frac{4}{10}$ de su chocolatina.

a. Dibuja cada una de las cantidades de chocolatina que comieron.

b. ¿Qué observas del dibujo realizado?



Victor comio la misma contidad que Andrea
Porque si Justas los 2 son del mismo tamaño

ANEXO 2

UNIDAD DIDÁCTICA GRADO TERCERO

AUTORAS: ANGELLY PADIERNA RODRIGUEZ Y ANA YORLEY ZAPATA GUTIERREZ.

NOMBRE DE LA I. E.: EL TRIUNFO SANTA TERESA, MEDELLÍN, COLOMBIA

TÍTULO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN.

ÁREA: MATEMÁTICAS

RESUMEN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Tomando en cuenta el tema de fracciones como uno de los puntos que presenta mayor dificultad en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos; la siguiente Unidad Didáctica, tiene el propósito de mostrar cómo promover las Acciones y Procesos en los estudiantes desde los conocimientos previos y la construcción mental del saber, para llegar a la encapsulación del concepto de noción de los fraccionarios en el grado tercero de básica primaria, permitiendo facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos.

Se pretende abordar la enseñanza de los fraccionarios en el grado tercero de básica primaria con una intervención pedagógica y didáctica partiendo de un diagnóstico obtenido mediante la aplicación de un a priori, como punto de partida y utilizando varias clases para la construcción de los significados básicos del concepto de fracción y la aplicación de un a posteriori, que permita visualizar los resultados de la intervención pedagógica y didáctica aplicada a los estudiantes.

La Unidad Didáctica tratara de verificar las habilidades y la contextualización de las actividades propuestas desde los diferentes contextos; como la resolución de problemas, actividades en el aula de clase utilizando diferentes materiales didácticos concreto como los juegos en grupo; diversidad de material regletas, bloques y demás, con el fin de reforzar los conocimientos que se adquirieron a lo largo de todas las clases; además actividades para ayudar a los estudiantes a que construyan los mecanismos apropiados para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas.

De esta manera las estructuras mentales, denominadas Acciones, Procesos y Objetos, están relacionadas de tal modo que sus conexiones determinan el conocimiento matemático de un individuo.

TEMÁTICAS

- Indagación de los preconceptos.
- Números Fraccionarios- Definición
- Términos de la fracción.

- Fracción de un conjunto.
- Fracción de una unidad.
- Fracciones mayores que la unidad.
- Fracciones equivalentes.
- Comparación de fracciones.
- Fracción de un número.

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICAS GRADO 3º

- Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas; (Utilizado en razones y fracciones).
- Evidencias de aprendizaje
- Realiza mediciones de un mismo objeto con otros de diferente tamaño y establece equivalencias entre ellas.
- Utiliza las razones y fracciones como una manera de establecer comparaciones entre dos cantidades.
- Propone ejemplos de cantidades que se relacionan entre sí según correspondan a una fracción dada.
- Utiliza fracciones para expresar la relación de “el todo” con algunas de sus “partes”, asimismo diferencia este tipo de relación de otras como las relaciones de equivalencia (igualdad) y de orden (mayor que y menor que).

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Fomentar en los estudiantes hábitos de trabajo individual y de grupo que lo motiven a ser persistentes y perseverantes en la consecución de los objetivos propuestos.
- Comprobar que las situaciones que se propongan a través de la resolución de ejercicios y problemas propicien en los niños la construcción de los significados elementales de la fracción.

DIAGNOSTICO DE AULA

La Unidad Didáctica se realizará en dos grupos de los grados terceros en el año 2018 En la Institución Educativa El Triunfo Santa Teresa Sede Anexa Barrio El Picacho. Los dos grupos cuentan con 30 Estudiantes cada uno, los alumnos oscilan entre los 7 a 9 años de edad, Es una población muy diversas en todos los sentidos económica, social y culturalmente; además en la parte académica también ya que son niños y niñas muy solos en su compromiso familiar, por lo que se ha optado porque la sede les brinde mucho acompañamiento desde Entorno Protector con la psicóloga y el grupo interdisciplinario de la UAI y cambiar mucho las diversas metodologías para que se vea un buen proceso en los estudiantes.

Los dos grupos son muy heterogéneos en su interior, hay alumnos con NEE con déficit de atención, memoria a corto plazo, hiperactividad medicada y déficit cognitivo; con estos alumnos se han creado estrategias de aprendizajes diferentes, con el apoyo de las docentes de la UAI y la parte de psicología, ya que se deben incluir dentro del aula, pero con un proceso de enseñanza aprendizaje muy diferente y sobre todo con otra clase de ritmo al que se lleva normalmente con todo el grupo.

También se tienen estudiantes con madres o padres cabezas de hogar, que viven con sus abuelos en avanzada edad, los cuales son estos los que hacen o tratan el acompañamiento de los jóvenes, también encontramos estudiantes con una familia nuclear muy comprometidas; estos estudiantes han estado en la Institución en su gran mayoría desde transición y vienen desde grado 1º con la misma docente en el área de matemáticas, por lo que se han creado muchas estrategias de enseñanza para lograr un buen proceso y resultados en las pruebas saber de la Institución; se cree que estos dos grupos pueden lograr una diferencia marcada ya que se les ha notado un poco más el interés por aprender cada día; cabe aclarar que en el área se trabaja mucho en las clases y se evita mucho enviar tareas para la casa, ya que es una población que no responde muy bien con esos compromisos en el hogar, por lo que se está en continua construcción y deconstrucción de cada conocimiento desde el aula y dentro de ella.

Se espera que para la elaboración de la unidad didáctica los alumnos puedan desarrollarla lo mejor posible y que al finalizar se obtengan los resultados esperados.

PRE-REQUISITO

Para llegar al objeto propuesto en el anteproyecto como lo es la “Construcción y mecanismos mentales de la enseñanza aprendizaje en el concepto de noción de fracciones” se debe tener en cuenta las diferentes acciones, objetos, procesos, esquemas y construcciones mentales que el alumno debe adquirir antes de llegar a este objeto pedagógico propuesto.

Uno de los temas con más dificultad en la enseñanza de las matemáticas es el de los números racionales, los que comúnmente llamamos fracciones, primero que nada, para que los estudiantes comprendan qué es una fracción deben conocer:

- Reconocer que un número puede escribirse de varias maneras equivalentes.
- Reconocer y establecer relaciones entre expresiones numéricas y gráficas.

- Construcción de representaciones de conjuntos y establecer relaciones entre las cantidades involucradas en diferentes fenómenos o situaciones.

LUGAR.

Las clases propuestas se realizarán en diferentes espacios de la Institución estos son: Aula de Clase, Patio Central y Sala de Sistemas.

TIEMPO.

Para el diseño de las actividades se proyecta un tiempo de un mes serian 4 semanas, durante la semana son 2 clases cada uno con 2 horas.

DESARROLLO

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA MANERA EN QUE SE APLICARA EL MARCO TEORICO

La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático. El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

Esta teoría podría ayudar ya que dice que el alumno inicia la construcción del objeto matemático cuando realiza la transformación de las acciones y procesos sobre los objetos construidos previamente, generando un nuevo objeto; asimismo el alumno logra repetir y reflexionar sobre las acciones propuestas, se da la interiorización en un proceso mental dando lugar a las estructuras mentales.

Cuando el alumno piensa en el proceso como un todo y construye transformaciones sobre su totalidad, decimos que posee una concepción objeto al aplicar el mecanismo de encapsulación, que se considera como el más importante para construir el conocimiento matemático, pero es el más difícil de lograr.

Tan importante como el mecanismo de encapsular es el de des-encapsular, que consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto; es decir, ‘desempacar’ el objeto y determinar el proceso que lo precede. Esto es indispensable para construir nuevas estructuras, ya que el proceso permite la coordinación con otros procesos y la generación de nuevos procesos para la encapsulación en nuevos objetos.

Finalmente, el objetivo principal de la unidad didáctica para el grado 3º con la ayuda de la teoría APOE; consiste en diseñar una descomposición genética del concepto que determine un camino viable en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Cabe mencionar que no hay una única descomposición genética del concepto, ya que dependen de los caminos deconstrucción y las estructuras mentales previas del individuo.

<u>ACTIVIDADES</u>

ACTIVIDAD 1. ACCIONES INICIADORAS DE REPARTIR.

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 1

Tiempo: 2 horas

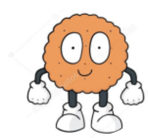
Recursos: Cartulina, tijeras, imágenes representando cada situación dada.

Objetivo: Utilizar fracciones para expresar resultados de algunos repartos.

Descripción:

Pedir a los estudiantes que resuelvan las siguientes situaciones de reparto procurando que a todos les toque lo mismo y que no sobre nada.

Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cuánto le tocará a cada uno?



Una galleta en forma de rectángulo se repartirá entre dos niños. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Una barra de chocolate se repartirá entre cuatro niños. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Se repartió una goma de mascar (chicle) entre cuatro niños y a cada uno le tocó un pedazo de este tamaño (entregar a cada equipo una tira de cartulina de 5 cm). Piensen de qué tamaño era la goma de mascar y dibújenlo completo.

Finalmente, los estudiantes hacen la relación de repartir y comparar con el material dado mostrando una de las primeras acciones iniciadoras de reparto equitativo en la noción de número racional.

ACTIVIDAD 2. ACCIONES INICIADORAS. LA FRACCIÓN COMO REPARTO EQUITATIVO

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana:1

Tiempo: 2 horas

Recursos: Cartulina arte de colores, elementos de medida, tijeras.

Objetivo: Utilizar fracciones para expresar resultados de algunos repartos equitativos.

Descripción:

Se cortan tiras de papel de la misma medida para todos los estudiantes, teniendo cuidado de que cada uno manejara diferentes colores, luego cada unidad recibe un tratamiento especial así:

La primera unidad se deja sin cortar, la segunda unidad se divide en dos partes iguales, la tercera en tres partes iguales, la cuarta unidad en cuatro partes iguales y así sucesivamente hasta llegar a quince partes iguales (en éste caso), teniendo especial cuidado de intercalar colores.

Mientras se hace el corte de material, se procede al análisis de las partes y luego a marcar cada una de ellas con el símbolo numérico que representan, es decir: ,7,4,1,3,2 entre otros.

a. Escriba las semejanzas y diferencias entre cada una de las partes que se obtienen regletas

b. Al hacer las divisiones de las regletas, ¿Cuantas partes de la misma longitud de medida resultaron?

c. ¿Es posible formar unidades con diferentes partes de las resultantes? Si es así, construya mínimo cinco unidades diferentes y explique la forma como se constituyen.

d. Represente numéricamente estas construcciones.

ACTIVIDAD 3. ACCIONES INICIADORAS LA FRACCIÓN COMO REPARTO PROPORCIONAL

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 2

Tiempo: 2 horas

Recursos: Recortes de periódico, Regletas

Objetivo: Utilizar fracciones para expresar resultados de algunos repartos proporcionales

Descripción:

Recortar libremente párrafos pequeños de periódico para leerlos y responder a preguntas:

Tome como unidad el número de palabras del párrafo ¿Cuántas palabras tiene el párrafo?

b. ¿Cuántas palabras del párrafo llevan tilde? ¿Qué fracción representan las palabras que llevan tilde con relación al total de palabras? Escríbela.

c. Establece la misma relación con palabras que empiezan por la letra a. Con palabras que son nombres propios. Con palabras que terminan en o.

d. Inventa nuevas relaciones entre palabras con alguna característica y el total de palabras del trozo de enunciado.

e. Escribe para cada caso la fracción que representan las palabras especiales y el total de palabras del párrafo.

f. Indica cómo se altera la fracción si se añaden más palabras al párrafo, otro párrafo, por ejemplo. Discute esta circunstancia con tu profesor.

g. Establece la diferencia entre las fracciones obtenidas con las regletas y las fracciones obtenidas por este medio. Por ejemplo ¿qué significado tienen 3221y en el contexto de las regletas y en el contexto de las palabras?

h. Describa cómo son las unidades en cada caso y como son las partes. Concluya al respecto.

ACTIVIDAD 4. ACCIONES INICIADORAS PARTES DE UN TODO: CONTINUO Y DISCRETO

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 2

Tiempo: 2 horas

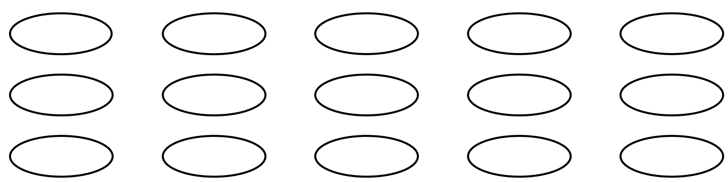
Recursos: Ficha con imágenes y graficas propuestas.

Objetivo: Interpretación de las fracciones en distintos contextos continuos y discretos.

Descripción:

1. Desarrolla según el enunciado.

a) 6 alfajores verdes que serán para los niños y 7 alfajores rojos para las niñas

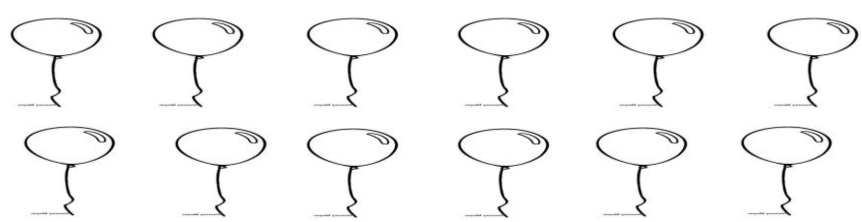


Hay ______ alfajores verdes de un total de ________.

Hay _______ alfajores rojos de un total de______.

Hay _______ sin pintar de un total de _______.

b) 5 globos serán para los niños y 4 para las niñas

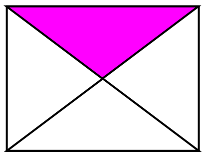


Hay ______ globos verdes de un total de _______.

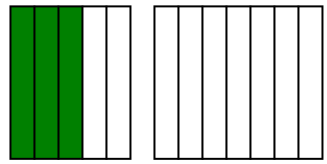
Hay ______globos rojos de un total de _______

Hay _______ globos sin pintar de un total de _______

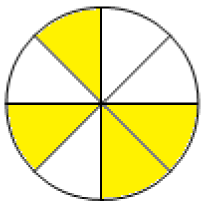
2) Indica las partes de un todo que han sido coloreadas.

a) 

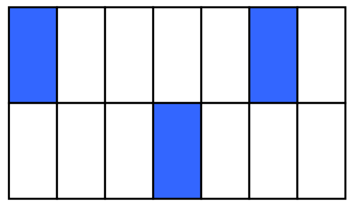
____

b) 

____

c) 

____

d) 

____

ACTIVIDAD 5. EL PROCESO DE FRACCIONES EQUIVALENTES

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 3

Tiempo: 2 horas

Recursos: Regletas, reglas y cuaderno.

Objetivo:

Medir: Todo continúo: Determina el largo de una regleta con regla

Medir: Todo discreto: Elegir objetos o pares de objetos a partir de una colección de los mismos

Descripción:

a. Organice las regletas y observe las partes que coinciden en longitud. Por ejemplo, la regleta de longitud un medio, tiene la misma longitud que dos regletas de un cuarto. Escribe todas las coincidencias que encuentres y escríbelas.

b. Las fracciones que tiene esta característica se denominan fracciones equivalentes, puesto que representan la misma parte de la unidad, en este caso la misma cantidad de longitud.

c. Encuentra por lo menos dos casos de fracciones equivalentes para el caso de las relaciones de las palabras de los párrafos de periódico.

d. Utilizando las regletas para hallar como mínimo tres fracciones equivalentes a:

$\frac{2}{3}=$	$\frac{6}{12}=$	$\frac{5}{2}=$
$\frac{2}{4}=$	$\frac{2}{5}=$	$\frac{3}{7}=$

ACTIVIDAD 6 EL PROCESO DE MEDIR DESDE LO CONTINUO Y LO DISCRETO

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 3

Tiempo: 2 Horas

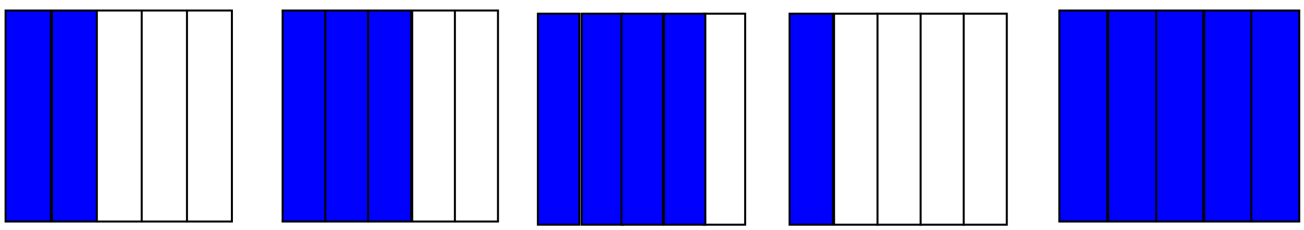
Recursos: Ficha de trabajo, hojas de papel, marcadores, reglas, lápiz, marcadores.

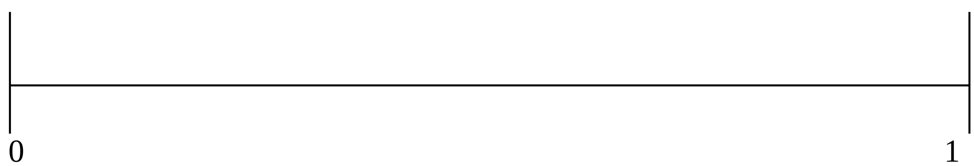
Objetivo: Indica la relación entre una cantidad de partes y la cantidad total de partes.

Descripción:

Situación 1.

Escribe las fracciones de estas gráficas, compáralas y ordénalas en la recta numérica.

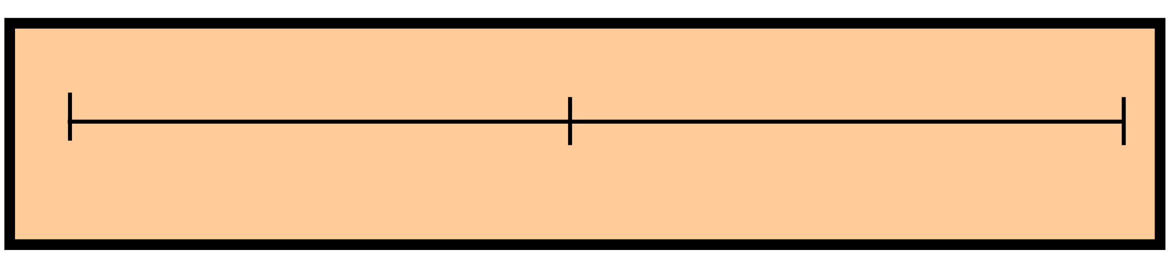




Situación 2

Sobre un cartel blanco de grandes dimensiones, dibujamos una recta numérica, este cartel se pondrá en el suelo de la clase. Además, se repartirá a cada estudiante una fracción, todas las fracciones serán de igual denominador. Cada uno representará una fracción, el juego consiste en ordenarse en la gran recta numérica.

Habrá 20 fracciones, porque hay 20 alumnos.



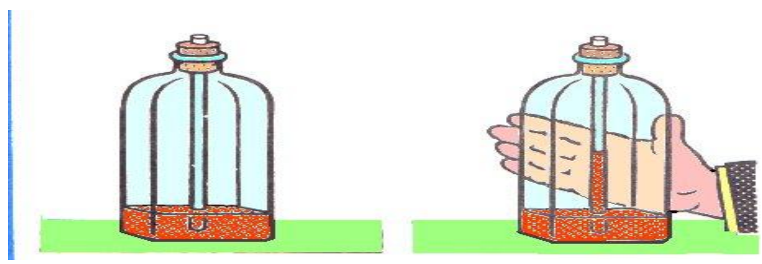
Situación 3

El docente ha pedido con anticipación para la sesión de hoy que cada estudiante trajera una botella. Durante 10 minutos, los alumnos han dividido cada botella en 14 partes, señalándola con un marcador. Esta actividad se realizará por parejas, cada uno llevará su botella.

El docente ira pareja por pareja haciendo una señal en cada botella, por ejemplo: de la 1º botella señalará el 2, y de la segunda el 4 (recordar que cada botella previamente ha sido dividida en 14 partes que equivale al "todo"). De la primera pareja hasta la última, los niños deberán hallar las fracciones de sus dos botellas, compararlas y ordenarlas de menor a mayor sobre una recta numérica elaborada en un cartel de tamaño normal. Al final, cada miembro de la pareja, cogerá una botella, la fracción que resulte, será la parte que le toca de dicha botella, dicha parte, será ocupada por confeti.

14 partes hay en la botella y

$\frac{2}{14}$



$\frac{4}{14}$

ACTIVIDAD 7. CONTRUYENDO LA NOCIÓN DE FRACIÓN

Nombre: LAS FRACCIONES EN ACCIÓN

Semana: 4

Tiempo: 4 horas

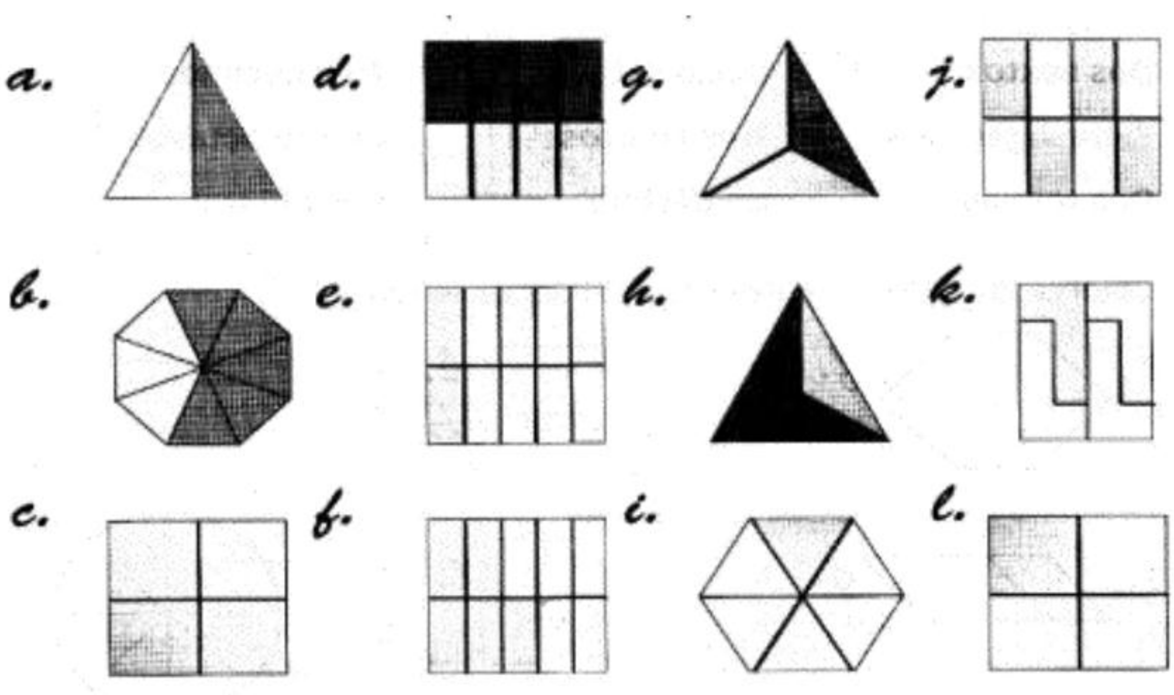
Recursos: Fichas de trabajo.

Objetivo: Relacionando significados de la fracción.

Descripción:

El trabajo es individual, cada estudiante deberá realizar la ficha con el fin de observar la abstracción que ha tenido del concepto de noción de número racional.

1. Escriba las fracciones para indicar las partes coloreadas.



2. Escriba como se lee cada una de las fracciones:

$a - \frac{6}{4}$

$b - \frac{15}{22}$

$c - \frac{9}{2}$

$d - \frac{8}{7}$

$e - \frac{5}{10}$

$f - \frac{17}{18}$

$g - \frac{9}{45}$

$h - \frac{4}{9}$

$i - \frac{25}{62}$

$j - \frac{36}{12}$

3. Coloree la parte que representa la fracción indicada.