

# RIESGOS FINANCIEROS Y ECONÓMICOS



UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN





*Riesgos financieros y económicos*



---

# Riesgos financieros y económicos

---

Horacio Fernández Castaño  
Editor Académico



**UNIVERSIDAD DE MEDELLIN**



## RIESGOS FINANCIEROS Y ECONÓMICOS

Primera edición: Agosto de 2008  
© Universidad de Medellín

ISBN: 978-958-8348-35-3

Editor académico:  
Horacio Fernández Castaño

Coordinación editorial:  
Leonardo David López Escobar  
Dirección electrónica: [ldlopez@udem.edu.co](mailto:ldlopez@udem.edu.co)  
Universidad de Medellín.  
Cra. 87 No. 30-65. Bloque 20, piso 2.  
Teléfonos: 340 52 42 - 340 53 35  
Medellín, Colombia

Distribución y ventas:  
Universidad de Medellín  
e-mail: [selloeditorial@udem.edu.co](mailto:selloeditorial@udem.edu.co)  
[www.udem.edu.co](http://www.udem.edu.co)  
Cra. 87 No. 30-65  
Teléfono: 340 52 42  
Medellín, Colombia

Diagramación:  
Hernán D. Durango T.

Diseño e impresión:  
Logoformas S.A..  
Calle 17A No. 69-62  
Teléfono: 405 11 00  
Bogotá, D.C., Colombia

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni registrada, ni en todo ni en parte, por ningún medio inventado o por inventarse, sin el permiso previo, por escrito, de la Universidad de Medellín.

Hecho el depósito legal

# CONTENIDO

PRÓLOGO.....	11
PRESENTACIÓN.....	13

## CAPÍTULO 1

### ALGUNOS PRINCIPIOS FINANCIEROS QUE SON CONSISTENTES CON EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA

*Francisco Venegas-Martínez*

1.1 INTRODUCCIÓN .....	15
1.2 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE BSM MEDIANTE CONDICIONES DE NO ARBITRAJE .....	18
1.2.1 Dinámica del precio del subyacente y riesgo de mercado.....	20
1.2.2 Dinámica del precio de la opción.....	21
1.2.3 Dinámica de un portafolio combinado del subyacente y su opción de compra .....	22
1.2.4 Administración del riesgo de mercado.....	23
1.2.5 Cuenta bancaria.....	23
1.2.6 Inversión alternativa del valor del portafolio .....	24
1.2.7 Condiciones de no arbitraje.....	24
1.2.8 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton .....	25
1.2.9 Mercados completos.....	26
1.3 DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE BSM MEDIANTE LA COBERTURA DE LA RIQUEZA .....	27
1.4 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE ARGUMENTOS DEL MODELO CAPM.....	28
1.5 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE PORTAFOLIOS REPLICANTES Y AUTO FINANCIABLES.....	30
1.5.1 Portafolios replicantes.....	31

1.5.2 Portafolios auto financiables .....	32
1.5.3 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes .....	32
1.6 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL VALOR PRESENTE NETO.....	33
1.6.1 Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente.....	34
1.6.2 Valuación neutral al riesgo .....	35
1.6.3 Función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo.....	36
1.6.4 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra .....	37
1.7 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL MODELO DE MARKOWITZ.....	39
1.8 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA .....	42
1.9 CONCLUSIONES .....	46

## CAPÍTULO 2

### **MODELACIÓN DE RIESGO OPERATIVO MEDIANTE EL USO DE SISTEMAS DE INFERENCIA DIFUSOS**

*Santiago Medina Hurtado PhD., Johanna Alexandra Jaramillo*

INTRODUCCIÓN .....	49
2.1 TIPOLOGÍA DE LOS RIESGOS OPERATIVOS.....	51
2.2 ENTIDADES DE CONTROL Y GESTIÓN DE RIESGOS OPERATIVOS .....	52
2.2.1 BASILEA II.....	52
2.2.2 Superintendencia Financiera de Colombia y el SARO .....	55
2.3 PROCESO DE MEDICIÓN DEL RIESGO OPERATIVO.....	58
2.3.1 RECOPIRAR INFORMACIÓN DE RIESGOS .....	58
2.3.2 Modelo de valoración de riesgos.....	59
2.4 MODELOS DE MEDICIÓN DE RIESGO OPERATIVO.....	69
2.4.1 Aproximaciones cuantitativas .....	69
2.4.2 Aproximaciones basadas en lógica difusa.....	69
2.4.3 Evaluación de riesgo operativos en sistemas complejos. Modelos causales .....	74
2.4.4 Conclusiones .....	76



ANEXO A. CONJUNTOS DIFUSOS Y SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA (FIS) .....	81
ANEXO B. SISTEMA EXPERTO DIFUSO - SED .....	91

### CAPÍTULO 3

## CONCEPTOS Y CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTO DE TES EN COLOMBIA CON LAS METODOLOGÍAS DE NELSON-SIEGEL Y SVENSSON

*Fabián Hernando Ramírez Atehortúa*

INTRODUCCIÓN .....	95
3.1 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS O DE SPLINES .....	100
3.2 PRINCIPALES CRITERIOS PARA EVALUAR LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN .....	102
3.3 FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS MODELOS .....	102
3.3.1 Método de McCulloch .....	103
3.3.2 B-Splines .....	103
3.3.3 Smoothing splines .....	105
3.3.4 Splines exponenciales .....	106
3.4 DIFERENTES MODELOS PARA CONSTRUIR LA CURVA DE RENDIMIENTOS .....	106
3.5 MODELOS TEÓRICOS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS .....	107
3.6 MODELOS DE CURVAS DE RENDIMIENTO DE UN SOLO FACTOR .....	110
3.6.1 El modelo de Vasicek (1977) .....	110
3.6.2 Modelo de Hull-White (1993) .....	112
3.6.3 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross, modelo –CIR- (1985) .....	113
3.6.4 El modelo de Nelson y Siegel .....	114
3.6.5 El modelo de Svensson .....	117
3.7 APLICACIONES DE LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN .....	119
3.8 CRÍTICAS A LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN .....	119
3.9 CONCLUSIONES .....	127



## PRÓLOGO

*La Universidad de Medellín, Vicerrectoría de Investigaciones en desarrollo de la política de Socialización y Divulgación y comprometida con el desarrollo de las agendas de los Grupos de Investigación, realizó del 27 al 31 de agosto de 2007, las VIII Jornadas de Investigación I Internacionales.*

*El propósito central del evento fue fortalecer la vida de los Grupos, promover su visibilidad, socializar logros y resultados de los procesos de investigación realizados por los profesores y generar la interlocución con la comunidad científica nacional e internacional.*

*En este marco, mediante 12 simposios en las líneas de los grupos de investigación reconocidos por COLCIENCIAS, se instauró una discusión bastante amplia en torno a: Vigencia y prospectiva de la comunicación, la comunicación escrita en la universidad, narrativas audiovisuales, derecho contemporáneo, derecho administrativo, justicias alternativas, procesos de formación, responsabilidad social, desarrollos teóricos de punta en contabilidad, riesgos económicos y financieros, diseño de infraestructura, sistemas computacionales e investigación en la ingeniería ambiental.*

*La presencia de 20 investigadores de 9 países, Francia, Italia, Suiza, Estados Unidos, España, México, Argentina, Brasil y Colombia, 142 ponentes del ámbito nacional y local y 26 representantes del sector productivo hicieron posible este debate que dejó grandes retos institucionales: incorporar la transferencia de conocimiento, la internacionalización y las alianzas estratégicas*

*como procesos prioritarios en la búsqueda de soluciones creativas a los problemas sociales.*

*En este sentido, el siguiente texto recoge algunos de los principales aportes realizados por los profesores investigadores que participaron en el evento. Esperamos que lo allí consignado contribuya a ahondar las reflexiones que desde diferentes Grupos se vienen suscitando sobre problemáticas coyunturales del país que precisan de la intervención y aportes desde la academia.*

Luz Doris Bolívar Yepes  
*Vicerrectora de Investigaciones*

## PRESENTACIÓN

El primer capítulo del presente libro muestra la consistencia de los principios financieros más importantes con la noción de racionalidad económica “perfecta”, lo cual sugiere que la existencia de consumidores racionales es un postulado “conveniente” (decir que es “correcto” sería muy pretencioso) para el desarrollo adecuado “de la teoría económica”. Para ello, la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes-Merton (BSM) que determina el precio de un producto derivado se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como: condiciones de no arbitraje, coberturas, el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), portafolios replicantes y autofinanciables, VPN (valor presente neto), el modelo de Markowitz, etc. Posteriormente, se obtiene exactamente la misma ecuación de BSM utilizando un consumidor-inversionista maximizador de utilidad sujeto a su restricción presupuestal, lo que confirma la consistencia de dichos principios financieros con la racionalidad económica.

En el segundo capítulo encontramos como las empresas e instituciones en el día a día de sus operaciones se enfrentan a diferentes riesgos ya sean estos propios de su actividad económica o del entorno en el que operan. La literatura en general clasifica los riesgos financieros en tres grandes grupos estos son, los riesgos de mercado, de crédito y operativos entre los cuales existen interdependencias. La mayor parte de las metodologías tienen un fundamento estadístico y se centran en la medición del riesgo de mercado y de crédito, sin embargo, para la medición del riesgo operativo las aproximaciones estadísticas pueden ser limitadas por varias razones y entre las más importantes esta la carencia de datos debido al carácter discreto de

los eventos. Lo anterior hace que la información disponible para valorar el riesgo operativo sea en muchos casos incompleta, vaga o subjetiva; lo cual dificulta la medición. Es por esto que en los últimos años se ha captado el interés de expertos e investigadores con el fin de desarrollar metodologías para su tratamiento lo cual ha llevado a la aplicación de metodologías novedosas como la lógica difusa o los sistemas expertos difusos; técnicas que apuntan a ser parte de la solución del problema de valoración de riesgos para las empresas. En este capítulo se hace una descripción de casos prácticos donde se ha utilizado estas tecnologías para medir algunos riesgos operativos de empresas tal como la medición de expectativas hidroclimáticas para el control de generación de energía o el derribamiento de torres de energía en Colombia, entre otras. Como podrá observarse, en muchas de estas operaciones las variables explicativas de estos eventos se combinan entre variables cualitativas y cuantitativas, situación que impide la utilización de modelos de riesgo tradicionales que no permiten contemplar valores lingüísticos como parte del planteamiento de un problema.

En el último capítulo se presenta el concepto curva de rendimiento y una revisión teórica de los modelos utilizados para construir la curva de rendimientos. Se describen en forma detallada las ecuaciones para la estimación de la curva de rendimientos mediante las metodologías de ajuste de datos de Nelson-Siegel (1987) y Svensson (1994). Los resultados de las estimaciones en Colombia para TES totales tasa fija, durante 2005 y 2006, muestran un mejor ajuste con la metodología de Svensson, capturando además como se invierte la curva de rendimiento en su tramo corto para vencimientos entre 2 y 3 años.

## CAPÍTULO 1

# ALGUNOS PRINCIPIOS FINANCIEROS QUE SON CONSISTENTES CON EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA

*Francisco Venegas-Martínez<sup>1</sup>*

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El postulado de racionalidad económica ha sido, desde hace varias décadas, un asunto de continuo debate sobre el comportamiento de los agentes. Cuando se dice que un consumidor plantea y resuelve problemas de optimización a través de un proceso “interno”, se entiende que lo hace desde el cerebro; sería difícil pensar que lo pudiera hacer cualquier otro órgano. En consecuencia, no ha sido fácil aceptar que los consumidores, cuando toman decisiones de consumo y portafolio, lo hacen de tal manera que maximizan su satisfacción sujetos a su restricción presupuestal, ya que esto involucra plantear y resolver problemas de optimización complejos de manera instantánea, que requieren de la estructura mental de un matemático. Peor aún, cuando el proceso de decisión se realiza en un ambiente de riesgo e incertidumbre, entonces el planteamiento y la resolución del problema de optimización requiere de técnicas muy sofisticadas y, en consecuencia, la estructura mental de la gente tendría que ser la de un doctor en matemáticas. Evidentemente, individuos con poca o sin escolaridad no podrían plantear, ni mucho menos resolver un problema de optimización desde su cerebro. De esta manera, para ser

---

<sup>1</sup> Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional

un consumidor racional se requiere de ciertas habilidades analíticas que pocos individuos tienen (pues se adquieren con estudios universitarios en matemáticas) y aun cuando las tuvieran coexiste evidencia de que las apliquen, de manera instantánea, en un proceso de toma de decisiones de consumo y portafolio.

Desde hace muchas décadas, varios intentos se han realizado para relajar el concepto de racionalidad económica perfecta (o hiper-racionalidad). Uno de los intentos más importantes se refiere al trabajo pionero de Herbert Simon (1957) quien ya planteaba la noción de racionalidad limitada (o acotada) en la que, primero, el individuo elige una función de utilidad entre un conjunto de funciones disponibles en su cerebro y, posteriormente, ordena, en términos de sus preferencias, las posibles alternativas siguiendo un proceso que no es tan “fino” como el que exigirían las condiciones de primer orden de un problema de optimización estocástico, siendo el ordenamiento de alternativas más bien un proceso “grueso” en el sentido que revisa grupos de alternativas y elige, casi instantáneamente, aquellas que pudieran estar cerca del óptimo. Por otro lado, la “economía experimental” ha logrado un avance impresionante, desde el trabajo seminal de Vernon Smith (1962), mostrando con experimentos conducidos la ausencia del comportamiento racional en los agentes. Por lo anterior, se podría decir que la racionalidad económica “perfecta” es un postulado falso, aun cuando existieran buenas aproximaciones.

El partir de postulados falsos para desarrollar una teoría no necesariamente es un problema. Por ejemplo, la mecánica clásica se basa en tres postulados (las tres leyes de Isaac Newton (1643-1727)). Sin embargo, el primer postulado conduce a la existencia de sistemas inerciales y tales sistemas no existen, aunque haya buenas aproximaciones (estrellas lejanas que sirvan como puntos de referencia). En este caso, aun cuando se parte de un postulado falso, los resultados que se desprenden del si describen y explican muchos fenómenos naturales. Evidentemente, la mecánica clásica es uno de los pilares de la ingeniería. En consecuencia, la primera ley de Newton, aunque falsa, es “conveniente” para el desarrollo “adecuado”



de gran parte de la física (la física clásica). Otro ejemplo similar es el postulado de la inexistencia de monopolios magnéticos, el cual sirve para establecer una de las ecuaciones de James Clerk Maxwell (1831-1879) del electromagnetismo. Este postulado no se sabe, hasta la fecha, si es falso o no, sin embargo, se sabe que es conveniente para el desarrollo adecuado de la teoría electrodinámica clásica, la cual constituye el otro pilar sobre el que descansa la ingeniería.

Este trabajo de investigación proporciona una prueba indirecta que muestra que postular la existencia de consumidores racionales, aunque es falso, es “conveniente” (“correcto” sería muy pretencioso) para el desarrollo “adecuado” de la teoría económica. Para ello, la ecuación diferencial parcial (EDP) lineal de segundo grado de Black-Scholes-Merton (BSM) cuya solución determina el precio de un producto derivado se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como: condiciones de no arbitraje, cobertura de la riqueza, argumentos tipo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, valor presente neto (VPN) y el modelo de Markowitz (1952) y Sharpe (1964). La ecuación Black-Scholes-Merton (BSM) es una de las contribuciones más importantes de las matemáticas financieras modernas. Posteriormente, se obtiene exactamente la misma ecuación utilizando el postulado de racionalidad económica: un consumidor- inversionista maximizador de utilidad, sujeto a una restricción presupuestal que considera la posibilidad de integrar un portafolio con un bono libre de riesgo (de incumplimiento), un activo riesgoso y un producto derivado sobre dicho activo. Lo anterior quiere decir que el postulado de racionalidad económica es consistente con muchos de los resultados que se obtienen de la aplicación de los principios fundamentales que se utilizan en la teoría y práctica financiera. Por lo tanto, la racionalidad económica, por lo menos en cuanto a consumidores se refiere, es “conveniente para el desarrollo de la teoría económica. Por último, es importante destacar que la mayor parte de esta investigación toma como punto de partida los trabajos de Blacky Acholes (1973); Markowitz (1952); Merton (1969), (1971) y (1973); Sharpe (1964); y Venegas-Martínez (2001), (2005), (2006a), (2006b), (2006c) y (2008).

El trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se obtiene la EDP de BSM utilizando condiciones de no arbitraje. En el transcurso de la sección 3 se deriva la EDP de BSM mediante la condición de cobertura de la riqueza. A través de la sección 4 se genera de la EDP de BSM mediante el uso modelo CAPM. En la sección 5 se obtiene la EDP de BSM mediante el uso de portafolios replicantes y autofinanciables. En la sección 6 se reproduce de la ecuación BSM mediante el método del valor presente neto. En el transcurso de la sección 7 obtiene la ecuación BSM con base en el modelo de Markowitz. En la sección 8, con el fin de mostrar la conveniencia del postulado de agentes racionales para el adecuado desarrollo de la teoría económica, se obtiene de la ecuación BSM bajo el supuesto de que existen consumidores-inversionistas que maximizan utilidad sujetos a su restricción presupuestal. Por último, en la sección 9 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

## **1.2 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE BSM MEDIANTE CONDICIONES DE NO ARBITRAJE**

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes, de manera independiente, Robert Merton desarrollaron, bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje (ley de un solo precio), un modelo para valuar una opción europea cuando el precio del activo subyacente es conducido por un movimiento geométrico browniano. Una situación anecdótica relacionada con el trabajo de investigación de Fischer Black y Myron Scholes que fue rechazado, primero, en 1970 por “The Journal of Political Economy” de la Universidad de Chicago y, posteriormente, en 1971, por “the Review of Economics and Statistics” de la Universidad de Harvard. No obstante, después de incorporar varias recomendaciones sugeridas por Merton Millar y Eugene Fama, incluyendo el cambio del título tres veces de “A theoretical Valuation Formula for Options, Warrants and Other Se-

curities” a “Capital Market Equilibrium and the Pricing of Corporate Liabilities” y, finalmente, a “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, el trabajo fue reconsiderado y, finalmente, aceptado por el “Journal of Political Economy (JPE)” para ser publicado en 1973. El trabajo de Robert Merton “Theory of Rational Option Pricing” fue aceptado casi inmediatamente y publicado, también en 1973, en el “Bell Journal of Economics and Management Science”. 24 años después, en 1997, Robert Merton y Myron Acholes son laureados con el premio Nobel de economía; lamentablemente, el reconocido matemático y economista Fischer Black había fallecido dos años antes.

El modelo BSM ha fomentado de manera importante que los participantes en los mercados financieros se cubran contra los diversos riesgos a que están expuestos. También ha desempeñado un papel central en el avance tan impresionante que han tenido, recientemente, la economía financiera y las matemáticas financieras modernas. Ante todo esto, es importante destacar que el modelo BSM puede ser empleado como herramienta para generar ganancias de millones de dólares en períodos cortos de tiempo (unas semanas), pero también si no reutiliza adecuadamente puede generar pérdidas astronómicas en periodos de tiempo aún más cortos (unos días). La importancia práctica del modelo BSM se refleja en que su aparición es casi simultánea con el arranque de la bolsa de opciones “Chicago Board of Options Exchange”, el cual ha operado, a la fecha, billones de dólares.

Antes de escribir cualquier ecuación es imprescindible establecer los supuestos básicos del modelo clásico de Black-Scholes-Merton, a saber:

- i)* El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
- ii)* El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano, es decir, el precio es log normal o los rendimientos son normales;
- iii)* La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;

- iv) Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
  - v) El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
  - vi) No hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
  - vii) El mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos;
  - viii) Existe un mercado de crédito o un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento;
- No existen oportunidades de arbitraje.

### 1.2.1 Dinámica del precio del subyacente y riesgo de mercado

Considere un movimiento browniano  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada  $\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{\mathcal{W}})_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}$ ). Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo  $t$ ,  $S_t$ , es conducido por el movimiento geométrico browniano

$$ds_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

En este caso, el parámetro de tendencia,  $\mu \in \mathbb{R}$  representa el rendimiento medio esperado y  $\sigma > 0$  es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso  $dW_t$  modela las fluctuaciones propias del precio del subyacente y, como se sabe, satisface:  $dW_t \sim N(0, dt)$ .

$E[dW_t] = 0$  y  $Var[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$ . El proceso  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . En efecto, una simple aplicación del lema de Ito conduce a

$$d \ln(S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

Lo que, a su vez, implica

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Es decir, la expresión anterior es invertible, en el sentido que se puede despejar  $W_t$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_t | s \leq t) = \sigma(S_t | s \leq t) = \mathcal{F}_t^S$$

Por último, es importante recordar que  $(I)$  es una notación simplificada para la expresión

$$F_t^W = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, t \in [0, T]$$

Ya que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica.

### 1.2.2 Dinámica del precio de la opción

El valor, o precio, de una opción europea de compra es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, tales como: el precio de ejercicio  $K$  y la vida del contrato  $T - t$ , donde  $T$  es la fecha de vencimiento y  $t$  es la fecha de inicio del contrato. Por supuesto, el valor de dicha opción también dependerá de las características del activo subyacente, tales como: su precio,  $s$  rendimiento esperado  $\mu$ , y volatilidad  $\sigma$ , así como de la tasa de interés,  $r$ , que prevalece en el mercado de crédito a fin de calcular el valor del dinero en el tiempo. Por lo anterior, se puede escribir el valor de una opción europea como:

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r) \quad (2)$$

Observe que  $S_t$  y  $t$  son las variables relevantes en el contrato. En lo que sigue, no se hará mención explícita de los parámetros,  $T; K; r; \sigma$  excepto cuando sea necesario. Es decir, el valor de la opción se denotara simplemente como  $c(S_t, t)$ .

Durante el intervalo de tiempo  $[t, t+dt]$  el activo subyacente cambia de  $S_t$  a  $(S_t+dS_t)$  en consecuencia, el precio de la opción cambia de  $c$  a  $(c+dc)$ . El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Ito, como:

$$dc = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \quad (3)$$

### 1.2.3 Dinámica de un portafolio combinado del subyacente y su opción de compra

Considere ahora un portafolio con  $\omega_1$  unidades del activo subyacente de precio  $S_t$  y  $\omega_2$  unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio  $c(S_t, t)$ . Si  $\Pi_t$  denota el valor actual, al tiempo  $t$ , del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t) \quad (4)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante  $dt$ , debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por:

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc \quad (5)$$

Después de sustituir (1) y (3) en (5), se obtiene la siguiente expresión para el cambio de valor en el portafolio:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left( \omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left( \omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ & + \omega_2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \end{aligned} \quad (6)$$

La ecuación (6) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia, multiplicados por  $dt$ , y el término aleatorio, multiplicado por  $dW_t$  este último modela el riesgo de mercado del portafolio, el

cual se puede eliminar si se eligen, adecuadamente las cantidades de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en la conformación del portafolio.

#### 1.2.4 Administración del riesgo de mercado

A fin de eliminar el riesgo mercado del portafolio se deben seleccionar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de tal manera que se anule el coeficiente de  $dW_t$  en el término estocástico de la ecuación (6), es decir,

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0$$

Claramente, existen infinitas posibilidades de seleccionar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para lograr tal objetivo. Si, por ejemplo, se toman  $\omega_2 = 1$  y  $\omega_1 = -\frac{\partial c}{\partial S_t} := -\Delta$  se tiene que:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\partial S_t^2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \quad (7)$$

Es usual referirse a esta elección particular de  $\omega_2 = 1$  y  $\omega_1 = -\Delta$  como cobertura Delta. Esta estrategia de cobertura perfecta es dinámica, ya que durante el período  $[t, t + dt]$ , la cantidad  $\delta c / \delta S_t$  cambia con  $S_t$  y  $t$ . Claramente, la cobertura Delta es aplicable solo durante el instante  $dt$ , de otra manera, al transcurrir el tiempo, la cobertura se deteriora paulatinamente perdiendo su efectividad. Por lo tanto, si se emplea esta cobertura en (4), se obtiene:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t$$

Lo cual significa que se está cubriendo una venta en corto de  $\Delta$  unidades del subyacente con una opción de compra sobre una acción.

#### 1.2.5 Cuenta bancaria

Se supone que existe un mercado de crédito libre de riesgo de incumplimiento, es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden

prestar o pedir prestado a una tasa constante,  $r$ , a todos los plazos  $y$ , en consecuencia, libre de riesgo de mercado, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Por ejemplo, si un agente deposita  $b_0$  unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo  $t$ , está dada por:

$$b_t = b_0 e^{rt}$$

De esta manera, el rendimiento en su cuenta satisface:

$$db_t = rb_t dt,$$

Junto con la condición inicial  $b_0$

### 1.2.6 Inversión alternativa del valor del portafolio

Bajo la elección  $\omega_2 = 1$  y  $\omega_1 = -\Delta$ , el valor del portafolio resultante es:  $d\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t$ . Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés  $r$ , entonces el cambio en el valor del portafolio, durante  $dt$ , es:

$$d\Pi_t^{(r)} = d\Pi_t^{(\Delta)} r dt = (C - \Delta S_t) r dt. \quad (8)$$

En este caso,  $dt$  es el tiempo en el que se aplica la tasa  $r$ .

### 1.2.7 Condiciones de no arbitraje

Bajo el supuesto de no arbitraje, se tiene que:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)} \quad (9)$$

En efecto, si la tasa de rendimiento del portafolio combinado fuera más grande que el interés que paga el banco, entonces se pediría prestado, en  $t$ , al banco la cantidad  $-\Delta S_t + c$  para invertir en el portafolio de acciones y opciones. Posteriormente, en  $t + dt$  se le pagan al banco los intereses más el capital, y el restante representa



una ganancia libre de riesgo. Por otro lado, si el rendimiento del portafolio fuera menor que el interés que paga el banco, entonces se debe invertir el dinero en el banco, pues la aplicación de una cobertura Delta carece de sentido.

### 1.2.8 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton

Una forma alternativa de escribir (9) es:

$$\left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt = \left( -\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt \quad (10)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0 \quad (11)$$

La cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única están dadas, respectivamente, por:

$$c(0, t) = 0 \text{ y } c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$$

La ecuación (11) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho, casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en Matemáticas financieras tienen una forma similar. La linealidad significa que si se tienen dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. En otras palabras, si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación (11), entonces el portafolio también la satisface. Por último, el hecho de que la ecuación diferencial parcial sea parabólica<sup>1</sup> significa que está

<sup>1</sup> Considere una ecuación diferencial parcial de la forma:  $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Fu_y + E = 0$ ,  $u = u(x, y)$

Se dice que esta ecuación es parabólica si:  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = 0$

relacionada con la ecuación de difusión de calor, esto es, con una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, \tau) - \infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

Junto con la condición:

$$u(\infty, 0) = u_0(\infty)$$

La ecuación de Black-Scholes-Merton contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el precio de contado del activo subyacente, el tiempo y la volatilidad, pero no se hace mención al rendimiento medio esperado  $\mu$ . Cualquier dependencia sobre  $\mu$  se ha eliminado al anular el coeficiente de  $dW_t$  en el cambio de valor del portafolio. Observe que en su lugar aparece, en la ecuación (11), la tasa de interés libre de riesgo. Esto significa que si todos los participantes en el mercado de opciones están de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo, entonces están igualmente de acuerdo con el valor de la opción aunque tengan diferentes preferencias al riesgo expresadas a través de  $\mu$ . En otras palabras, todos los agentes están dispuestos a omitir sus preferencias al riesgo,  $\mu$ , y aceptar un rendimiento libre de riesgo,  $r$ , después de ponerse de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo subyacente.

### 1.2.9 Mercados completos

En esta sección se presenta, de manera intuitiva, el concepto de mercados completos, el cual consiste en la posibilidad de replicar el precio de una opción a través del valor de un portafolio de acciones y efectivo. Observe primero que a partir de la ecuación (8), se cumple que:

$$\Delta S_t + \frac{1}{r dt} d\Pi_t^{(r)} = c \quad (12)$$

Si se escribe  $b_t = \Pi_t^{(r)}$  entonces  $d\Pi_t^{(r)} = db_t = rb_t dt$ , lo cual implica que

$$\frac{1}{rdt} d\Pi_t^{(r)} = b_t$$

Por lo tanto, (12) se transforma en:

$$\Delta S_t + b_t = c$$

Es decir, si se diseña un portafolio que tiene acciones, en una cantidad  $\Delta$ , y efectivo  $b_t$ , entonces se puede replicar el precio de la opción.

### 1.3 DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE BSM MEDIANTE LA COBERTURA DE LA RIQUEZA

Suponga que un inversionista comienza con un cierto nivel de riqueza,  $A_0$ , e invierte en un activo con riesgo,  $S_t$ , y en otro activo que paga una tasa de interés constante,  $r$ , a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento, de tal manera que la dinámica de acumulación de su riqueza queda representada por:

$$dA_t = \Delta_t dS_t + r[A_t - \Delta_t S_t] dt$$

Es decir,

$$\begin{aligned} dA_t &= \Delta_t (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + r[A_t - \Delta_t S_t] dt \\ &= [rA_t + \Delta_t S_t (\mu - r)] dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

Sea  $c(S_t, t)$  el precio de una opción europea de compra que paga  $\max(S_t - K, 0)$ , entonces el lema de Ito conduce a

$$dc = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \sigma dW_t$$

Si se desea cubrir el portafolio con una opción, de tal manera que  $c(S_t, t) = A_t$  para toda  $t$ , entonces  $dc = dA_t$  son iguales. Después de igualar términos estocásticos y deterministas se encuentra que:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = r A_t + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r)$$

Es decir,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - r c = 0$$

Junto con la condición

$$c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0)$$

#### 1.4 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE ARGUMENTOS DEL MODELO CAPM

A continuación se obtiene la ecuación Black-Scholes-Merton utilizando el modelo CAPM. El modelo CAPM describe la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo bajo condiciones de equilibrio de mercado.

Suponga, como antes, que la dinámica del precio del activo subyacente es conducida por el movimiento geométrico browniano. De esta manera, el rendimiento del activo es:

$$dR_s = \frac{dS_t}{S_t} \mu dt + \sigma dW_t$$

Para calcular el cambio en el precio de la opción por cambios en  $S_t$ , se utiliza la expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left( \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW \end{aligned} \quad (14)$$

El rendimiento de la opción está dado por:

$$dR_c = \frac{dc}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{dS_t}{S_t} \frac{S_t}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t} dR_s \frac{S_t}{c} \quad (15)$$

De acuerdo con el modelo CAPM los rendimientos de la opción y del activo subyacente satisfacen, respectivamente, las siguientes relaciones lineales con respecto del rendimiento del mercado  $dR_M$ .

$$E[dR_c] - rdt = \beta_c [E[dR_M] - rdt] \quad (16)$$

y

$$E[dR_s] - rdt = \beta_s [E[dR_M] - rdt] \quad (17)$$

Donde

$$\beta_s = \frac{Cov(dR_s, dR_M)}{Var(dR_M)} \quad (18)$$

y

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{Cov(dR_c, dR_M)}{Var(dR_M)} = \frac{Cov\left(\frac{\partial c}{\partial S_t} dR_s \frac{S_t}{c}, dR_M\right)}{Var(dR_M)} \\ &= \frac{\frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} Cov(dR_s, dR_M)}{Var(dR_M)} = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_s \end{aligned} \quad (19)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (15), (17), (18) y (19) en (16), se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{dc}{c}\right] - rdt &= \beta_c (E[dR_M] - rdt) = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_s (E[dR_M] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_s \left( \frac{1}{\beta_s} (E[dR_s] - rdt) \right) = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} (E[dR_s] - rdt) \end{aligned} \quad (20)$$

Lo cual implica que:

$$E[dc] - rcdt = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (R[dR_S] - rdt) \quad (21)$$

Si se sustituye la ecuación (13) en (21), se sigue que:

$$\begin{aligned} E[dc] - rcdt &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (E[dR_S] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \left( E \left[ \frac{dS_t}{S_t} \right] - rdt \right) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (E[\mu dt + \sigma dW] - rdt) = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r) dt \quad (22) \end{aligned}$$

Donde se ha considerado que  $E[dW_t] = 0$ . Por último, si se sustituye (14) en la ecuación (22) se tiene

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \sigma dW \right] - rcdt \\ = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r) dt \quad (23) \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial c}{\partial t} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

## 1.5 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE PORTAFOLIOS REPLICANTES Y AUTO FINANCIABLES

Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que, en cada instante,

repliquen el valor de una opción europea de compra. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian en forma continua de tal manera que el riesgo se elimine en todo momento, es decir, la cobertura es dinámica. Se supone, como siempre, que el precio del activo subyacente  $S_t$ , sigue un movimiento geométrico browniano. Así mismo, se supone que en la economía existe un sistema bancario que paga por depósitos una tasa constante y libre de riesgo  $r$ . De esta manera, si se hace un depósito de  $b_t$  unidades monetarias, el rendimiento de dicha inversión, en el instante  $dt$ , es:

$$db_t = rb_t dt \quad (24)$$

### 1.5.1 Portafolios replicantes

Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que replique, en todo momento, el valor de una opción europea de compra. Suponga que se desean encontrar procesos estocásticos  $v_t = v(S_t, t)$  y  $w_t = w(S_t, t)$ , tales que:

$$v_t S_t + w_t b_t = c(S_t, t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (25)$$
$$\text{con } \mathbb{P} \left\{ \int_0^t v_s^2 ds \right\} = \mathbb{P} \left\{ \int_0^t w_s^2 ds \right\} = 1$$

La condición (25) indica que no existen posibilidades de arbitraje. Por ejemplo, si, antes del vencimiento, el lado izquierdo de (25) fuera menor que el lado derecho, se toma una posición corta en la opción de compra, y la prima se invierte inmediatamente en el portafolio combinado a fin de generar una ganancia libre de riesgo. Así mismo, se supone que en la fecha de vencimiento

$$v_T S_T + w_T b_T = \max(S_T - K, 0)$$

sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente.

### 1.5.2 Portafolios auto financiables

Se supone que una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio, de tal forma que los cambios requeridos en  $v_t$  se compensen con cambios, consigno opuesto, en  $w_t$ . Así,

$$S_t dv_t + b_t dw_t = 0 \quad (26)$$

Esto significa que:

$$v_t dS_t + w_t db_t = dc(S_t, t) \quad (27)$$

Después de sustituir (24) en (27), se obtiene:

$$\begin{aligned} v_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + w_t r b_t dt = \\ \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \sigma dW_t \end{aligned} \quad (28)$$

Si se igualan los coeficientes de (28) en  $dW_t$ , se obtiene:

$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t} \quad (29)$$

De la misma manera, de (25) se sigue que:

$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{b_t} \quad (30)$$

Las cantidades  $v_t$  y  $w_t$  determinan el portafolio replicante del valor del derivado, el cual, para su mantenimiento, es autofinanciable.

### 1.5.3 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Si ahora se igualan los términos en  $dt$ , se sigue que:

$$v_t \mu S_t + w_t r b_t = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \quad (31)$$



Después de sustituir (29) y (30) en (31), se obtiene:

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + r \left( c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) =$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}$$

Equivalentemente,

$$r \left( c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}$$

Es importante destacar que el rendimiento medio,  $\mu$  del activo subyacente no aparece en la ecuación anterior. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio del activo subyacente, ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión con tal de que la volatilidad se mantenga constante. Por lo tanto:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c(S_t, t) = 0 \quad (32)$$

Lo que coincide plenamente con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

## 1.6 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL VALOR PRESENTE NETO

En esta sección se obtiene la fórmula de Black-Scholes-Merton para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el cálculo del valor presente de las ganancias esperadas. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato, y que su precio es conducido por un movimiento geométrico browniano neutral al riesgo. El precio o la prima de

la opción se calculan como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión.

### 1.6.1 Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente

Considere un proceso de Wiener  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ . Se supone que el precio de una acción al tiempo  $t$ ,  $S_t$ , es conducido por el movimiento geométrico browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (33)$$

En este caso, el parámetro de tendencia,  $\mu \in \mathbb{R}$  es el rendimiento medio esperado del activo subyacente, y  $\sigma > 0$  es su volatilidad instantánea, por unidad de tiempo. Una simple aplicación del lema de Ito conduce a:

$$d(\ln S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (34)$$

Si se discretiza la ecuación anterior con  $\Delta t = T - t$  entonces se obtiene:

$$\ln S_T - \ln S_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \varepsilon$$

De donde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$  por lo tanto:

$$\ln \left( \frac{S_T}{S_t} \right) \sim N \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \quad (35)$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de  $S_T$ , pero

con parámetro de tendencia,  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  menor al rendimiento medio esperado  $\mu$ .

### 1.6.2 Valuación neutral al riesgo

Debido a la consideración de un rendimiento esperado  $\mu$ , la ecuación (33) no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado  $\mu$ , a fin de que el premio  $v = \mu - r$  le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces  $v = 0$ , así  $\mu = r$  y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo,  $r$ . Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar  $v$  por unidad de varianza (más precisamente por unidad de desviación estándar), es decir  $\lambda = v/\sigma$ . En este caso, si  $\sigma$  aumenta, entonces  $\lambda$  disminuye, y el agente pediría más  $v$  para compensar el aumento en  $\sigma$  hasta conseguir que  $\lambda$  aumente y alcance su nivel inicial. De igual forma, el agente podría aceptar una disminución  $v$  a cambio de una disminución en  $\sigma$ . Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces  $\lambda = 0$ . Ahora bien, si se escribe:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t) \end{aligned}$$

Entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo,  $\lambda = 0$  se tiene que la ecuación (33) se transforma en:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (36)$$

En cuyo caso, se dice que el movimiento browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. Una

posible interpretación de (36) es que los agentes estarían dispuestos a omitir su parámetro de preferencias,  $\mu$  y recibir  $r$  con tal de que la volatilidad,  $\sigma$ , se mantenga constante. El concepto de valuación neutral al riesgo es, sin duda, uno de los más importantes en el estudio de productos derivados. Vale la pena resaltar que el teorema de Girsanov proporciona una justificación teórica alternativa a la ecuación (36).

### 1.6.3 Función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. En vista del resultado (35), y en un mundo neutral al riesgo donde se cumple (36), se tiene que  $\ln(S_T/S_t)$  tiene una distribución normal con media  $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$  y varianza  $\sigma^2(T-t)$ . Considere  $\varepsilon \sim N(0,1)$  y su función de densidad:

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (37)$$

Si se define ahora:

$$g(\varepsilon) := S_T = S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \varepsilon \right\} \quad (38)$$

Se tiene que:

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln \left( \frac{S_T}{S_t} \right) - \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (39)$$

De esta manera, la función de densidad de  $S_T$  dado  $S_t$ , está dada por la expresión:

$$f_{S_T|S_t}(s | S_t) = \Phi(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| \quad (40)$$

Observe, primero, que el Jacobiano de la transformación satisface:

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}$$

En consecuencia:

$$f_{S_T|S_t}(s | S_t) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \quad (41)$$

Esta función de densidad se utilizará para calcular el valor esperado del valor intrínseco de una opción europea.

#### 1.6.4 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

El precio de una opción de compra europea en  $t$  con precio de ejercicio  $K$  y vencimiento en  $T$ ,  $c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ , está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco:

$$c = e^{-r(T-t)} E \{ \max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t \}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \int_0^T \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>k} s f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>k} f_{S_T|S_t}(s | S_t) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds - \\
&Ke^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \quad (42)
\end{aligned}$$

En lo que sigue, las dos integrales de (42) se denotarán, respectivamente, mediante  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ . Si ahora se utiliza un cambio de variable, la primera integral se calcula como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &:= e^{-r(T-t)} S_t \int_{\left\{ \varepsilon > \frac{\ln(S_t/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\varepsilon \\
&= S_t \int_{\left\{ \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(S_t/S) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\varepsilon \\
&= S_t \int_{\left\{ -\infty < u < \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad (43)
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado el hecho de que  $\varepsilon \sim N(0,1)$  y el cambio de variable  $u = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t}$ . Asimismo, a partir del cambio de variable, la segunda integral satisface:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &:= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{ \varepsilon > \frac{\ln(S_t/S) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{ -\infty < \varepsilon < \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (44)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (43) y (44), se sigue que:

$$c = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (45)$$

Donde la función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de  $\varepsilon \sim N(0,1)$  es decir:

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_\varepsilon \{\varepsilon \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 - \Phi(-d) \quad (46)$$

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (48)$$

### 1.7 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL MODELO DE MARKOWITZ

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio  $S_t$ , una opción sobre la acción de precio  $c = c(S_t; t)$  y un bono de precio  $b_t$  libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija  $r$ . Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es:

$$dR_s = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (49)$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = r dt \quad (50)$$

En vista de (49), la aplicación del lema de Ito a  $c = c(S_t; t)$  conduce a que el rendimiento de la opción satisface:

$$dR_s = \frac{dc}{c} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t \quad (51)$$

Donde:

$$\mu_c \equiv \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \frac{1}{c}$$

$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \sigma \frac{1}{c}$$

Se supone que  $c(S_t; t) = \max(S_t - K, 0)$  donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción. Sea  $\alpha_{1t} = S_t/A_t$  la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones,  $\alpha_{2t} = c/A_t$  la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y  $1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t}$  la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento  $r$  constante a cualquier plazo. En este caso, la riqueza  $A_t$  satisface:

$$dA_t = A_t(1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t})dR_b + A_t \alpha_{1t} dR_s + A_t \alpha_{2t} dR_c \quad (52)$$

Después de sustituir (92.5)-(92.6) en la riqueza, ésta se puede reescribir como:

$$dA_t = A_t(r + (\mu - r)\alpha_{1t} + (\mu_c - r)\alpha_{2t}) dt \\ + A_t(\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c) dW_t$$

En este caso, se sigue que

$$\mu_A := E \left[ \frac{dA_t}{A_t} \right] \frac{1}{dt} = r + (\mu - r)\alpha_{1t} + (\mu_c - r)\alpha_{2t}$$

$$\sigma_A^2 := Var \left[ \frac{dA_t}{A_t} \right] \frac{1}{dt} = (\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c)^2$$

Como antes, considere ahora el problema de decisión sobre las proporciones de la riqueza,  $A_p$ , que se asignan a los diferentes activos (véase Markowitz(1952)):



$$\text{Minimizar } \alpha_{1t}, \alpha_{2t} \quad \frac{1}{2} \sigma_A^2 = \frac{1}{2} (\alpha_{1t}, \alpha_{2t}) \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma \sigma_c \\ \sigma \sigma_c & \sigma_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\text{sujeto } a : \mu_A = r + (\alpha_{1t}, \alpha_{2t}) \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} = \mu_0$$

El lagrangeano asociado al problema anterior de programación no lineal es:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} (\alpha_{1t} \sigma + \alpha_{2t} \sigma_c)^2 + v [\mu_0 - r - \alpha_{1t} (\mu_1 - r) - \alpha_{2t} (\mu_2 - r)]$$

Donde  $v$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción. Las condiciones de primer orden  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{it}}, i = 1, 2$  conducen a:

$$\begin{cases} \alpha_{1t} \sigma + \alpha_{2t} \sigma_c = v \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) \\ \alpha_{1t} \sigma + \alpha_{2t} \sigma_c = v \left( \frac{\mu_c - r}{\sigma} \right) \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_c - r}{\sigma}$$

Después de sustituir  $\mu_c$  y  $\sigma_c$  en la ecuación anterior se tiene que:

$$\left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) - rc = (\mu - r) \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t$$

Lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

Junto con la condición de frontera  $c = (S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$ .

## 1.8 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN BSM MEDIANTE EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA

Esta sección muestra la consistencia de la existencia de consumidores racionales con los resultados derivados de principios financieros fundamentales como son: condiciones de no arbitraje, argumentos del modelo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables y valor presente de las ganancias esperadas.

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio  $S_t$ , una opción sobre la acción de precio  $c = (S_t, T)$  y un bono de precio  $b_t$  libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija  $r$ . Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es:

$$dR_s = \mu dt + \sigma dW_t \quad (54)$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = r dt \quad (55)$$

En vista de (54), la aplicación del lema de Ito a  $c = (S_t, T)$  conduce a que el rendimiento de la opción satisface

$$dR_c = \frac{dc}{c} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t \quad (56)$$

Donde

$$\mu_c \equiv \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \frac{1}{c} \quad \text{y} \quad \sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t \frac{1}{c}$$

Se supone  $c = (S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$  donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción. Sea  $w_{1t} = S_t/a_t$  la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la técnica de acciones,  $w_{2t} = v_t/a_t$  la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y  $1 - w_{1t} - w_{2t}$  la fracción

complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento  $r$  constante a cualquier plazo. En este caso, el agente desea resolver el siguiente problema (cf. Merton (1969) y (1971):

$$\max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \int_0^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (57)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} da_t = & a_t w_{1t} dT_s + a_t w_{2t} dR_c + \\ & a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) dR_b - C_t dt \end{aligned} \quad (58)$$

Donde  $C_t$  es consumo y:

$$b(a_T, T) = \frac{a_T^\gamma}{\gamma} e^{-\theta T}$$

denota una herencia, después de sustituir (54)-(56) en la restricción presupuestal, esta se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} da_t = & a_t (r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}) dt + \\ & a_t (w_{1t} \sigma + w_{2t} \sigma_c) dW_t \end{aligned}$$

Si se define

$$J(a_t, t) = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \int_t^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^T \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + J(a_t + da_t + dt \mid \mathcal{F}) \right] \\ &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(a_t, t) + dJ(a_t, t) \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Observe también que  $J(a_T, T) = b(a_T, T)$  en virtud del lema de Ito  $J = J(a_t, t)$

Se tiene que:

$$0 = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \left[ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + \left[ J_t + J_a a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (u_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \right. \right. \quad (59)$$

$$\left. \left. \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t} \sigma + w_{2t} \sigma_c)^2 \right] dt + J_a a_t (w_{1t} \sigma + w_{2t} \sigma_c) dW_t \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Si se toman esperanzas en los términos dentro del paréntesis, y posteriormente, se divide entre  $dt$  y se toma el límite cuando  $dt \rightarrow 0$  se sigue que:

$$0 = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + J_t J_a a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (u_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \right. \quad (60)$$

$$\left. \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t} \sigma + w_{2t} \sigma_c)^2 \right\}$$

Considere un candidato de la forma:

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t}$$

Entonces:

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t} \quad J_{aa} = V''(a_t) e^{-\delta t} \quad J_t = -\partial V(a_t) e^{-\delta t}$$

Ahora bien, si  $C_t, w_{1t}, w_{2t}$  son óptimos, se tiene que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) \quad (61)$$

$$+ \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 (w_{1t} \sigma + w_{2t} \sigma_c)^2$$

Suponga que:

$$V(a_t) = \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma}, \text{ entonces}$$

$$V'(a_t) = \beta a_t^{(\gamma-1)} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = \beta(\gamma-1) a_t^{(\gamma-2)}$$

De esta manera, la ecuación (61) se transforma en:

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \beta (\gamma - 1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma)^2 \quad (62)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de  $C_t$ ,  $w_{1t}$ ,  $w_{2t}$  se obtienen, respectivamente:

$$C_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} = 0 \quad (63)$$

$$\beta a_t^\gamma (\mu - r) + \beta (\gamma - 1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma = 0$$

$$\beta a_t^\gamma (\mu_c - r) + \beta (\gamma - 1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma_c = 0$$

Estas tres ecuaciones se pueden reescribir como:

$$C_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t$$

$$\mu - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma \quad (64)$$

$$(\mu_c - r) = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma_c \quad (65)$$

Las dos últimas ecuaciones implican que los premios al riesgo de  $S_t$  y  $c(S_t, T)$  y  $c$  son iguales, es decir:

$$\frac{(\mu_c - r)}{\sigma_c} = \frac{(\mu - r)}{\sigma} \quad (66)$$

Después de sustituir  $\mu_c$  y  $\sigma_c$  la ecuación anterior se tiene que:

$$\left( \frac{\partial c}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) - r c = (\mu - r) \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t$$

Lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial c}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - r c = 0$$

Junto con la condición de frontera  $c(S, T) = \max(S_t - k, 0)$  Este resultado es acorde con los obtenidos en las secciones anteriores.

## 1.9 CONCLUSIONES

Este trabajo ha proporcionado diversas pruebas indirectas que muestran que postular la existencia de consumidores hiper-rationales, aunque es falso, es “conveniente” para el desarrollo “adecuado” de la teoría económica. La EDP de segundo grado de BSM cuya solución determina el precio de un producto derivado se obtuvo bajo diferentes principios financieros, tales como: condiciones de no arbitraje, CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, VPN y el modelo de Markowitz. Posteriormente, se obtuvo exactamente la misma ecuación (de BSM) utilizando el postulado de racionalidad económica. Esto significa que dicho postulado es, plenamente, consistente con los conceptos centrales que se utilizan en la teoría y práctica financiera.

Por último, es importante destacar que aunque el problema del consumidor-inversionista racional se resolvió utilizando una forma funcional específica del índice de satisfacción, la obtención de ecuación diferencial parcial de BSM es independiente de la función de utilidad.

## 1.10 BIBLIOGRAFÍA

- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. En *Journal of political*
- MARKOWITZ, Harry M. Portfolio selection. En *Economy*. Vol.81, No.3. 1952. Páginas 637-654
- MERTON, Robert C. Life time portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. En *Journal of finance*. Vol.7, No.1. 1969. Páginas 77-91
- Review of economics and statistics*. Vol.51, No.3. Páginas 247-257.
- MERTON, Robert C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model”. En *Journal of economic theory*. Vol.3, No.4. 1971. Páginas 373-413.
- MERTON, Robert C. Theory of rational option pricing. En *Bell journal of economics*. Vol.4, No.1. 1973. Páginas 141-183.

- SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. En *Journal of Finance*. Vol.19, No.3. 1964. Páginas 425-42.
- SIMON, Herbert. A behavioral model of rational choice. En *Models of man, social and rational: mathematical essays on rational human behavior in a social setting*. New York, 1957.
- WILEY y SMITH, Vernon L. An experimental study of competitive market behavior. En *Journal of political economy*. Vol.70. 1962. Páginas 111-137.
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. Temporary stabilization: a stochastic analysis. En *Journal of economic dynamics and control*. Vol.25, No.9. 2001. Páginas 1429-1449.
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. Bayesian inference, prior information on volatility, and option pricing: a maximum entropy approach. En *International journal of theoretical and applied finance*. Vol.8, No.1. 2005. Páginas 1-12.
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. Stochastic temporary stabilization: undiversifiable devaluation and income risks. En *Economic modelling*. Vol.23, No.1. 2006. Páginas 157-173.
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. Fiscal policy in a stochastic temporary stabilization model: undiversifiable devaluation risk. En *Journal of world economics review*. Vol.1, No.1. 2006, Páginas 13-38.
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. *Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Internacional Thomson Editors, 2006
- VENEGAS-MARTÍNEZ, Francisco. Temporary stabilization in developing countries and the real option of waiting when consumption can be delayed. En *International journal of economic research*. Vol.7, forthcoming. 2008





## CAPÍTULO 2

# MODELACIÓN DE RIESGO OPERATIVO MEDIANTE EL USO DE SISTEMAS DE INFERENCIA DIFUSOS

*Santiago Medina Hurtado PhD.<sup>1</sup>  
Johanna Alexandra Jaramillo<sup>2</sup>*

### INTRODUCCIÓN

El término “riesgo operativo” fue probablemente mencionado por primera vez después la quiebra del banco inglés Baring PLC, en 1995, debido a que un operador ocultó posiciones en derivados en Asia lo cual aniquiló todo el capital social de la empresa. Este evento puso en conocimiento al mercado financiero que hay riesgos que no son directamente clasificados ni como riesgos de mercado ni de crédito, y que pueden tener efectos considerables en los resultados. En el contexto de las negociaciones y de las instituciones financieras, el riesgo operativo se refiere al rango de posibles fallas que no se deben directamente a los riesgos del mercado o a los riesgos de crédito, sin embargo, puede confundirse con ellos.

En este sentido el riesgo operativo es un *concepto vago*, ya que es difícil hacer una distinción clara entre el riesgo operativo y el riesgo normal que enfrentan las instituciones en sus operaciones diarias. Por ejemplo, si un cliente falla en un pago de un préstamo, puede uno preguntarse si la falla se debió al riesgo de crédito normal que enfrenta la institución o debido a un error humano cuando se realizó el análisis de la solvencia del cliente. El programa de administración

<sup>1</sup> Profesor Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Minas. Medellín.

<sup>2</sup> Especialista en Ingeniería Financiera. Auxiliar de Investigación. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Minas. Medellín.

de riesgo operativo debe definir claramente qué se debe incluir como riesgo operativo para disminuir el grado de ambigüedad que se presenta con otros tipos de riesgo.

Muchos gerentes de instituciones financieras piensan que las pérdidas debidas al riesgo operativo podrían ser más significativas que los riesgos del mercado o los riesgos de crédito inclusive, y aunque esto no está claramente demostrado, se estima que actualmente los bancos en Norteamérica dividen sus riesgos en un 50% en riesgos de crédito, un 15% para los riesgos de mercado y liquidez, y un 35% para los riesgos operativos (Cruz, 2002); de aquí la importancia de medir y controlar dichos riesgos.

Otro problema importante en el análisis de los riesgos operativos es la cuantificación de la pérdida potencial esperada. Por ejemplo: ¿cómo puede cuantificarse la pérdida esperada de una caída del sistema de información? En términos generales la pérdida potencial es el producto de la probabilidad de que el evento ocurra y el costo asociado al evento “severidad”; sin embargo, ambas cantidades son difíciles de cuantificar. Por su naturaleza, los riesgos operativos más grandes son del tipo de eventos que ocurren no tan frecuentemente, es decir, forman una serie de eventos discretos cuya recopilación es difícil y sobre la cual es difícil aplicar un proceso de valoración objetiva del riesgo. Sin embargo, la dificultad en la valoración no implica que el riesgo deba ser ignorado.

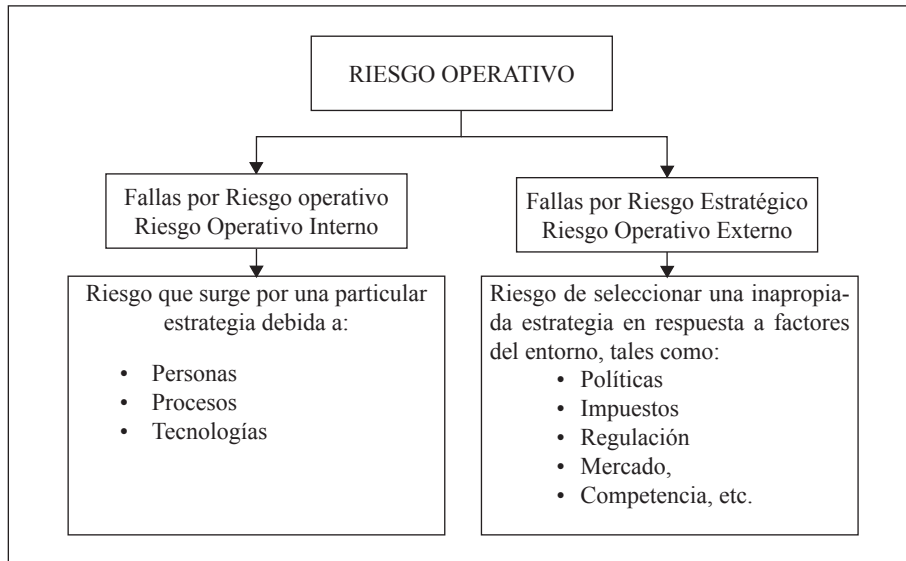
En algunos casos, el riesgo operativo puede ser cubierto con seguros u otras metodologías de cubrimiento; sin embargo, surge la cuestión de la racionalidad del costo económico para cubrir estos riesgos. Inevitablemente surge la necesidad de valorar las pérdidas potenciales, y compararlas con los costos de realizar la cobertura de cada riesgo operativo potencial. Las dificultades para identificar un riesgo operativo y cubrir este de una manera oportuna pueden ocasionar pérdidas altísimas para la institución.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. El numeral 2, define formalmente el riesgo operativo. El numeral 3 expone las políticas de las entidades regulatorias para la gestión de riesgos ope-

rativos. En el numeral 4 se expone el proceso para la identificación y valoración de riesgos operativos basado en el desarrollo de la matriz de riesgos. El numeral 5 expone los modelos de medición de riesgos basados en la aplicación de la lógica difusa mediante la presentación de aplicaciones desarrolladas en proyectos de investigación. En los anexos se presentan formalmente los sistemas de inferencia difusos y los sistemas expertos difusos.

## 2.1 TIPOLOGÍA DE LOS RIESGOS OPERATIVOS

El riesgo operativo, por lo general, se subdivide en dos componentes principales, estos son: el riesgo operativo propiamente dicho y el riesgo operacional estratégico, tal como se indica en la figura 1.



**Figura 1.** Categorías de riesgo operativo

El riesgo operativo propio surge de potenciales fallas en el curso normal del negocio, es decir, una firma utiliza personas, procesos y tecnología para realizar sus planes de negocios y cualquiera de estos factores puede experimentar algún tipo de falla. Una proporción de estas fallas puede anticiparse y debe ser cubierta dentro de los planes del ne-

gocio; otras, sin embargo, no pueden anticiparse. En ambos casos, predecir tanto su impacto como su frecuencia es una tarea difícil de lograr.

Los riesgos operativos estratégicos surgen de factores del entorno, tales como nuevos competidores, entornos políticos y regulatorios, factores climáticos, etc., que están fuera del control de la empresa. También surgen de nuevas iniciativas estratégicas como la definición de nuevas líneas de negocios.

Por otra parte, el riesgo operativo puede presentarse antes, durante y después de completadas las operaciones del negocio, es decir, si tomamos el ejemplo de una nueva línea de crédito, el riesgo puede surgir en la fase de diseño del producto, se presenta durante la negociación con el clientes (una mala evaluación del analista de crédito o la aplicación de un mal modelo) y continúa después que la operación se ha completado (problemas en la información de los clientes morosos, una falla en el sistema de grabación de los clientes, etc.). En el análisis de riesgo operativo debe realizarse una completa descripción de lo que puede fallar antes, durante y después de la operación o línea de negocio.

Por otra parte, el impacto o “severidad” de una pérdida financiera puede ser dividido en dos categorías: por una parte, una cantidad que puede ser estimada o esperada, mientras que otro impacto puede ser no esperado. Este último puede, a su vez, ser clasificado como una pérdida que puede ser “severa”, y otra pérdida que puede ser “catastrófica”. Las pérdidas esperadas deben ser cubiertas con una proporción de los ingresos esperados, mientras que las pérdidas severas o catastróficas deberán ser cubiertas con una proporción del capital económico de la empresa o mediante seguros.

## **2.2 ENTIDADES DE CONTROL Y GESTIÓN DE RIESGOS OPERATIVOS**

### **2.2.1 BASILEA II**

De acuerdo con el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea en el marco revisado “Convergencia internacional de medidas y normas

de capital” de junio de 2004, *el riesgo operativo se define como “el riesgo de pérdidas debido a la inadecuación o a fallos de los procesos, el personal y los sistemas internos o bien a causa de acontecimientos externos. Esta definición incluye el riesgo legal, pero excluye el riesgo estratégico y el de reputación”*.

En el acuerdo logrado por el Comité se plantean tres metodologías de estimación de riesgo operativo. La primera de ellas es el “*Método del indicador básico*”, el cual busca que los bancos cubran el riesgo operativo con un capital equivalente al promedio de los tres últimos años de un porcentaje fijo de ingresos brutos anuales. Esto es  $K_{BIA} = [\sum (GI_{1...n} \times \alpha)] / n$  donde  $K_{BIA}$  es la exigencia de capital en el Método del Indicador Básico;  $GI$  es el ingreso anual medio cuando estos sean positivos de los tres últimos años;  $n$  es el número de años (entre los tres últimos) en los que los ingresos fueron positivos y  $\alpha$  (15%) es el parámetro establecido por el Comité que relaciona el capital exigido al conjunto del sector, con el nivel de indicador en el conjunto del sector.

La segunda metodología se conoce como el “*Método Estándar*” el cual divide las actividades de los bancos en ocho líneas de negocio, a los cuales se les asocia un porcentaje fijo Beta. El requerimiento de capital de cada línea de negocio se calcula multiplicando el ingreso bruto por el factor Beta de cada línea. Este método permite calcular el ingreso bruto de cada línea de negocio y no el obtenido por la institución en su conjunto. La exigencia total de capital se calcula como la media de tres años de la suma simple de las exigencias de capital regulador en cada una de las líneas de negocio de cada año. Este requerimiento puede expresarse como  $K_{TSA} = \left\{ \sum_{\text{años } 1-3} \max[\sum (GI_{1-8} \times \beta_{1-8}), 0] \right\} / 3$  donde  $K_{TSA}$  es la exigencia de capital en el Método Estándar,  $GI_{1-8}$  son los ingresos brutos anuales de una línea dado como se define en el Método del Indicador Básico para cada una de las ocho líneas del negocio y  $\beta_{1-8}$  es el porcentaje fijo establecido por el Comité que relaciona la cantidad de capital requerido con el ingreso bruto de cada una de las ocho líneas de negocio. Estos valores  $\beta$  se muestran en la tabla 1.

**Tabla 1.** Factores Beta de las líneas de negocio

<i>Líneas de Negocio</i>	<i>Factores Beta</i>
Finanzas Corporativas ( $\beta_1$ )	18%
Negociación y Ventas ( $\beta_2$ )	18%
Banca Minorista ( $\beta_3$ )	12%
Banca Comercial ( $\beta_4$ )	15%
Pagos y Liquidaciones ( $\beta_5$ )	18%
Servicios y agencias ( $\beta_6$ )	15%
Administración de activos ( $\beta_7$ )	12%
Intermediación minorista ( $\beta_8$ )	12%

La tercera metodología propuesta por el Comité se conoce como “*Métodos de medición avanzada (AMA)*”, en los cuales el capital regulador será igual a la medida de riesgo generada por el sistema interno del banco para el cálculo del riesgo operativo utilizando criterios cuantitativos y cualitativos propuestos por el Comité. Algunos de estos son:

#### *Criterios cualitativos*

- El banco deberá contar con una unidad de gestión del riesgo operativo encargada del diseño y aplicación del marco de gestión del riesgo operativo de la entidad.
- El sistema de medición interna deberá estar perfectamente integrado dentro de los procesos habituales de gestión del riesgo del banco.
- Deberá informarse periódicamente a la dirección de las unidades de negocio, a la alta dirección y al consejo de administración acerca de la exposición al riesgo operativo y del historial de pérdidas debidas a este riesgo.
- El sistema de gestión de riesgo del banco debe estar bien documentado.

- Los auditores externos y/o internos deberán llevar a cabo exámenes periódicos de los procesos de gestión y sistemas de medición de riesgos operativos.
- La validación de los auditores debe contemplar la comprobación del buen funcionamiento de los procesos de validación interna y de la transparencia y accesibilidad del flujo de datos asociados al sistema de medición de riesgos y de su procesamiento.

#### *Criterios cuantitativos*

- Todo sistema interno para el cálculo del riesgo operativo deberá ser acorde con la definición del riesgo operativo previamente mencionado.
- El banco calculará su requerimiento de capital regulador como la suma de la pérdida esperada y de la pérdida inesperada.
- El sistema de medición deberá estar suficientemente “atomizado” para identificar los principales factores de riesgo operativo que influyen en la forma de las colas de las distribuciones de estimaciones de pérdida.
- Deberán añadirse las distintas estimaciones de riesgo operativo a efectos de calcular la exigencia de capital mínimo regulador.
- Todo sistema de cálculo de riesgo deberá incluir la utilización de datos internos, datos externos relevantes, análisis de escenarios y factores que reflejen el entorno del negocio y los sistemas de control interno.
- El banco deberá contar con un proceso creíble, transparente, bien documentado y comprobable para ponderar estos elementos fundamentales dentro de su sistema general de medición del riesgo corporativo.

### **2.2.2 Superintendencia Financiera de Colombia y el SARO**

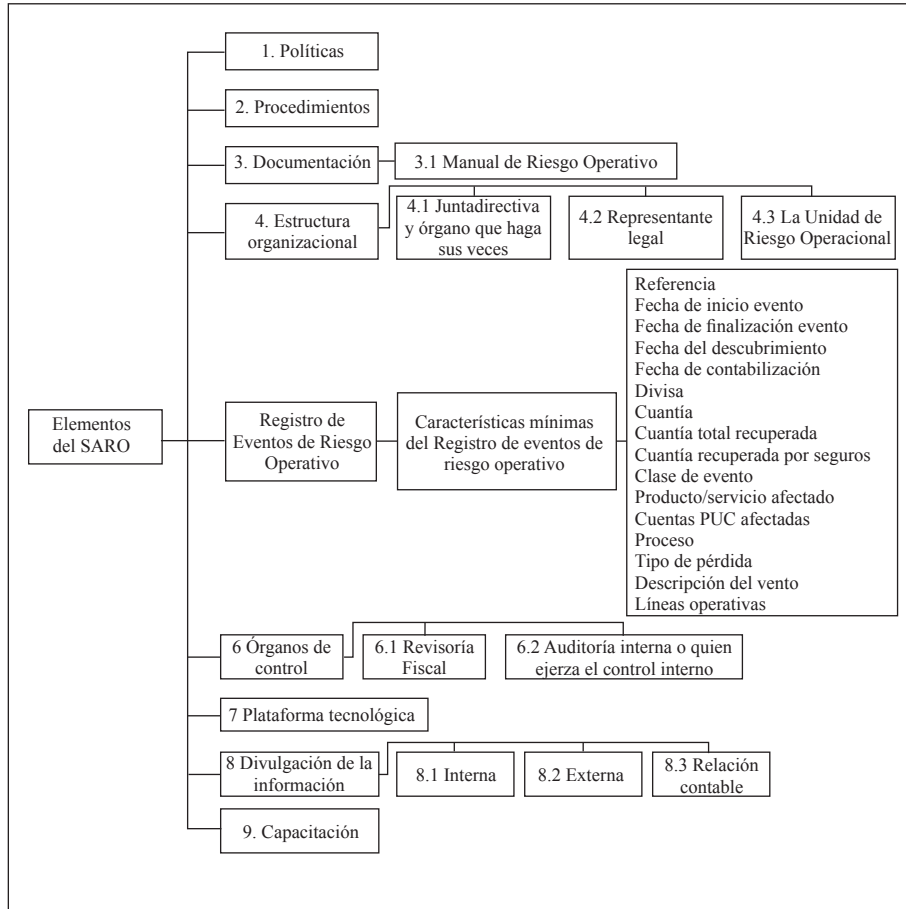
En Colombia el ente regulador de la administración del riesgo operacional de las instituciones es la Superintendencia Financiera

de Colombia (SFC), la cual plantea una metodología de gestión y medición de riesgo en el capítulo XXIII de la Circular Básica y Contable Financiera de 2006 (circular externa 100 de 1995 [www.superfinanciera.gov.co](http://www.superfinanciera.gov.co)). Se plantean en general unas “Reglas relativas a la administración del riesgo operativo” para las entidades sometidas a la inspección y vigilancia de la SFC conocidas como SARO (Sistema de Administración de Riesgos Operativos); éste es el conjunto de elementos tales como políticas, procedimientos, documentación, estructura organizacional, registro de eventos de riesgo operativo, órganos de control, plataforma tecnológica, divulgación de información y capacitación planteado por la SFC, mediante los cuales las entidades vigiladas identifican, miden, controlan y monitorean el riesgo operativo, como se muestra en la figura 2. La definición de riesgo operativo planteada por la SFC difiere de la definición dada por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea en que ésta incluye el riesgo reputacional y no menciona el riesgo estratégico.

El SARO contempla cuatro etapas principales a desarrollar que son: identificación, medición, control y monitoreo del riesgo operativo. La cuantificación del riesgo consiste en medir la probabilidad de ocurrencia de un evento de riesgo operativo y su impacto en caso de materializarse. Para la determinación de la probabilidad se debe considerar un horizonte de tiempo de un año, y aplicar, como mínimo, los siguientes pasos:

- Establecer la metodología de medición susceptible de ser aplicada a los eventos de riesgo operativo identificados.
- Aplicar la metodología establecida en desarrollo del paso anterior para lograr una medición individual y consolidada de la probabilidad de ocurrencia y del impacto, en caso de materializarse en la totalidad de los procesos de la entidad.
- Determinar el perfil de riesgo inherente individual y consolidado.





**Figura 2.** Elementos del SARO

Según Crouhy y Galay 2001, los elementos que debe incluir una administración de riesgos operativos para la empresa o para unidades de negocio son:

- Definir una política para la administración del riesgo operativo.
- Establecer un lenguaje común para la identificación de riesgos operativos.
- Elaborar el mapa de riesgos del negocio.

- Desarrollar un conjunto de metodologías para la medición del riesgo operativo que permitan valorar la probabilidad y la severidad de los eventos.
- Desarrollar un conjunto de metodologías para el cubrimiento de los riesgos identificados.
- Desarrollar los sistemas de información y reportes asociados a los riesgos.
- Desarrollar un conjunto de metodologías para el análisis de riesgo y procedimientos de cuando estas herramientas deben ser empleadas.
- Desarrollar técnicas para trasladar la valoración del riesgo operativo a los requerimientos de capital económico empleado.

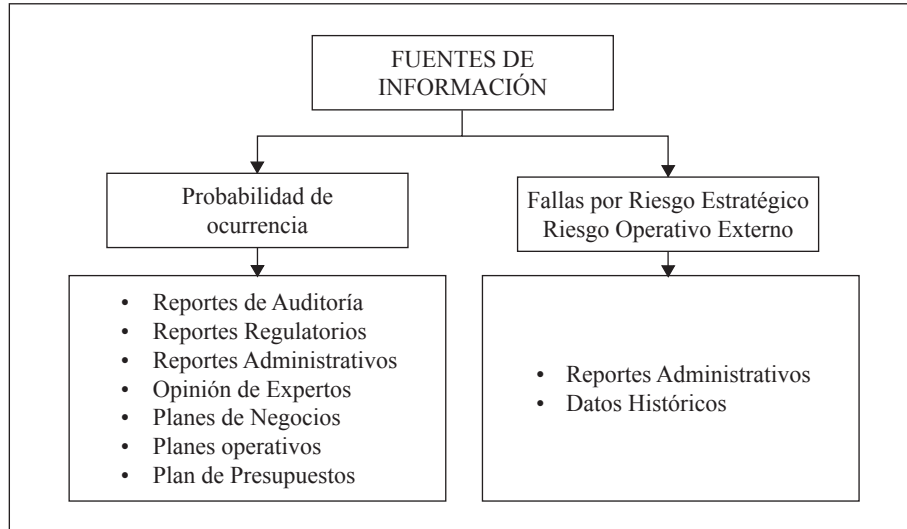
### **2.3 PROCESO DE MEDICIÓN DEL RIESGO OPERATIVO**

Este punto se refiere a la medición objetiva de las probabilidades y la severidad de falla con el fin de predecir las pérdidas potenciales si una falla ocurre. La medición puede ser realizada siguiendo el siguiente procedimiento:

#### **2.3.1 Recopilar Información de riesgos**

El primer paso en la medición del riesgo operativo es recopilar la información necesaria para realizar una completa valoración de los riesgos operativos. En general esta información puede provenir de varias fuentes, tal como se indica en la figura 3, de tal forma que ésta represente un buen punto de inicio para la valoración del riesgo operativo.

Por lo general es frecuente que falte información acerca de un riesgo en particular y este problema debe ser resuelto realizando entrevistas al personal que administra el proceso. Por otra parte, la información de fuentes primarias debe ser validada y actualizada según el caso, es decir, debe considerarse si el entorno operativo



**Figura 3.** Fuentes de información para el proceso de medición de riesgos operativos

(cuando la información fue producida) sigue teniendo las mismas características que las actuales.

En general, al contrario de lo que pasa con el riesgo de mercado, para el riesgo operativo no hay suficientes datos históricos que permitan tratar estadísticamente la probabilidad y la severidad de las pérdidas operacionales. En estos casos es necesario desarrollar informes de las actividades y de los eventos que producen las pérdidas hasta que datos relevantes sean compilados, de tal manera que esta información permita valorar la severidad de las pérdidas operativas para cada uno de los riesgos identificados. Mientras esto ocurre es necesario confiar en la información derivada de la experiencia de los administradores del negocio, la cual, no obstante, deberá ser validada de manera objetiva (consistencia y razonabilidad de la información suministrada).

### 2.3.2 Modelo de valoración de riesgos

Una vez la información es levantada es necesario analizarla y procesarla mediante una modelo que permita discriminar los riesgos,

la suficiencia del proceso administrativo y los controles existentes, de tal manera que esta valoración permita medir el riesgo operativo puro en términos de probabilidad y severidad. Esta etapa es una de las más importantes del proceso, ya que permite tener una idea de la importancia relativa de cada uno de los riesgos operativos identificados. Esta etapa puede dividirse en los siguientes procesos:

#### • **Categorías de riesgos**

Ya se mencionó que el riesgo operativo puede dividirse en cuatro categorías principales; estas son: pérdidas causadas por fallas operacionales en las personas, procesos o tecnología (riesgos operativos internos) y riesgos operativos relacionados con el entorno (riesgos operativos externos).

Las categorías de riesgo debidas a personas, procesos o tecnología deben ser revisadas en función de unos factores de evaluación comunes los cuales, a su vez, pueden ser divididos en escalas o niveles; por ejemplo, podemos evaluar dichas categorías de acuerdo con los siguientes tres factores: *capacidad*, *competencia* y *disponibilidad* del recurso, a su vez cada factor tiene niveles definidos como Alta, media y baja.

Por ejemplo si examinamos el riesgo operativo derivado de las personas podemos preguntarnos:

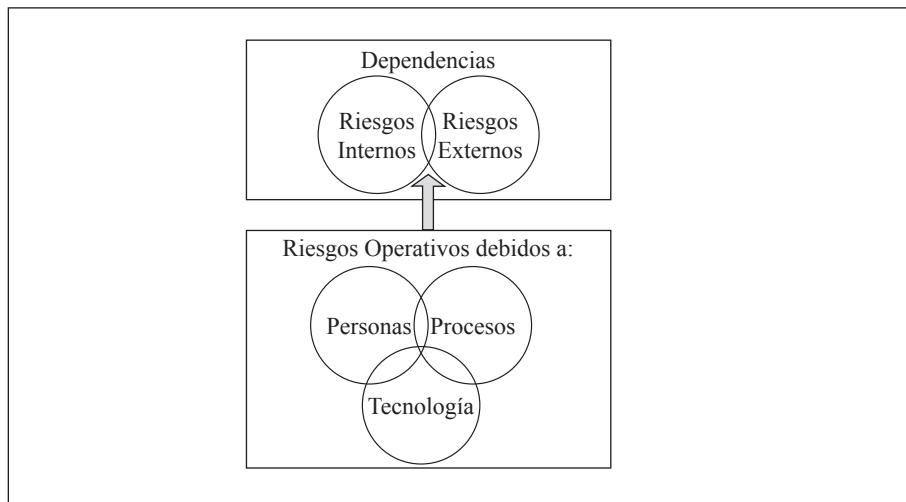
- ¿La actividad evaluada tiene el personal suficientes para cumplir los planes de negocio? (capacidad)
- ¿Las personas tienen la suficiente competencia para desarrollar las actividades? (competencia)
- ¿Las personas están en el sitio cuando se necesitan? (disponibilidad)

La categoría de riesgos operativos externos también deben ser analizados en términos del tipo específico de interacción externa, por ejemplo, el comportamiento de los clientes de la empresa puede ser

una función de la regulación existente, de los proveedores (internos y externos), de la inversión, de las afiliaciones y la competencia, etc.

### • Relaciones e interdependencias

Las categorías de riesgo no pueden ser vistas de manera aislada ya que comprender las relaciones e interdependencias entre los riesgos permite comprender de una manera completa cualquier riesgo. La figura 4 muestra la forma en que se necesita examinar los riesgos operativos identificados.



**Figura 4.** Relaciones de los riesgos operativos

Lo anterior sugiere que la valoración de la probabilidad del riesgo, considerando las relaciones, puede ser mayor que la valoración de la probabilidad del riesgo considerado aisladamente. Similarmente, la severidad o impactos financieros pueden ser mayores (o menores) que la suma de las valoraciones individuales y esto debido a las relaciones e interdependencias existentes.

Deben estudiarse, además, las causas y los efectos en cada una de las categorías de los riesgos identificados. Para ello, es adecuado elaborar cuadros o diagramas sinópticos que permitan comprender

sus causas, los efectos y las consecuencias posibles para cada riesgo específico. En este sentido, muchas veces se encuentra la dificultad de que una pérdida dada tiene asociada varias causas. La relación entre estas causas y la importancia relativa de cada una de ellas puede ser difícil de valorar de una manera objetiva, por lo tanto, los analistas de riesgo necesitarán desarrollar modelos empíricos para probar las relaciones entre las causas y los efectos.

#### • Definición de escalas de valoración para la probabilidad y la severidad

Una vez que se posee la seguridad de tener suficiente información acerca de los riesgos identificados en los pasos anteriores, se debe determinar la probabilidad y el impacto asociados a cada uno de los riesgos. *La probabilidad* hace referencia a la eventualidad de que el riesgo ocurriese; por su parte, *la Severidad* describe las pérdidas potenciales de la empresa, dado que una falla operacional ocurre; típicamente estas pérdidas se expresan en rangos de unidades monetarias debido a que valores exactos de pérdida son difíciles de obtener. La severidad y la probabilidad deben ser valoradas para cada uno de los riesgos identificados. Estos dos factores son estimados de forma subjetiva en la mayoría de los casos, sin embargo, la existencia de datos históricos de pérdidas permite realizar un tratamiento estadístico.

Las escalas de medición para la probabilidad y la severidad deben estar estandarizadas en la organización, y en caso de que esto no sea así, se debe decidir cuáles escalas se utilizarán en el análisis, por ejemplo, la probabilidad puede ser expresada como una escala a lo largo de cinco puntos de probabilidad continua desde Muy Bajo (MB) hasta Muy Alto (MA). Otra manera puede ser el esquema mostrado a continuación donde los rangos de calificación tienen asociadas categorías de riesgo:

Escala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Razonamiento	Bajo			Medio			Alto			

Tanto la probabilidad como la severidad, se expresan mediante escalas de medición establecidas previamente por el equipo de riesgos. Las escalas dependen de la naturaleza del riesgo, el nivel de conocimientos del experto, la severidad y variabilidad del riesgo, de la información disponible, etc. Las posibles escalas que pueden utilizarse son:

- *Nominal*: asigna términos lingüísticos a las categorías, por ejemplo patrones culturales, de uso de la tierra, clasificaciones.
- *Ordinal*: escala comparativa. Puede juzgarse como más o menos que, por ejemplo Clasificación como muy alta, media, baja, muy baja ó 1,2,3,4,5 donde el valor numérico no se relaciona con ningún patrón o cantidad sino con una calificación dada por el analista.
- *Intervalo*: Intervalos cuantitativos entre unidades de medición de la variable, por ejemplo utilidad 5', 10', 15'.....
- *Relacional*: similar a la de intervalos pero la medición se hace en relación con un punto de referencia, por ejemplo pérdidas 5', 10', 15'..... (el cero es el punto de referencia).

El número de divisiones en cada componente depende del nivel de detalle, los resultados, los recursos, el alcance y la naturaleza de las medidas de cobertura.

Por otra parte, debe valorarse la probabilidad y severidad con y sin estrategias de cobertura, es decir, debe valorarse la probabilidad y severidad de que una falla operativa ocurra en el próximo año (riesgo puro) y la probabilidad y severidad de que una falla ocurra después de que se han implementado estrategias de cobertura (riesgo neto) para cada uno de los riesgos operativos identificados en cada categoría de riesgo.

#### • **Combinación de la probabilidad y la severidad**

La valoración del riesgo operativo como una medida única cuantificada para la empresa o unidad de negocio está restringida a que

hay limitaciones desde el punto de vista de los modelos disponibles para combinar la probabilidad de pérdida ( $P$ ) y la severidad ( $S$ ) en una medida única. Por lo general, el riesgo se expresa a partir de la combinación de sus componentes, es decir, de la probabilidad y la severidad. En general, el riesgo es proporcional a sus componentes, por lo tanto, una medida de riesgo puede ser expresada esencialmente como el siguiente producto:

$$Riesgo = P \times S$$

Puede requerirse el uso de ponderadores o el uso de exponentes para un componente o ambos con el fin de capturar relaciones no lineales entre las variables probabilidad y severidad. Por ejemplo, relaciones del tipo:

$$Riesgo = P \cdot \alpha \times S \cdot \beta$$

$$Riesgo = EXP (P \cdot \alpha \times S \cdot \beta)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los ponderadores para probabilidad y severidad respectivamente. Para llegar a determinar estas relaciones es necesario a partir de la información estadística con el fin de validar el modelo.

Si la probabilidad de pérdida fue expresada como una escala ordinal con conceptos o etiquetas como bajo, alto, muy alto, etc., otro enfoque del análisis consiste en asignar para cada etiqueta un nivel de probabilidad entre 0 y 1; de esta manera se expresará la probabilidad en términos numéricos; por ejemplo, la etiqueta riesgo medio representa de un 5 al 10% de probabilidad de ocurrencia. Para realizar esto, óptimo es hacer pruebas estadísticas a los datos históricos de pérdidas ocurridas.

Por otra parte se debería también calcular las correlaciones entre los riesgos identificados e incorporar estas en el análisis de riesgos completo de la firma. Dada la dificultad de llevar cabo este análisis, los analistas de riesgo simplemente agregan de manera individual la severidad de cada uno de los riesgos operacionales valorados.



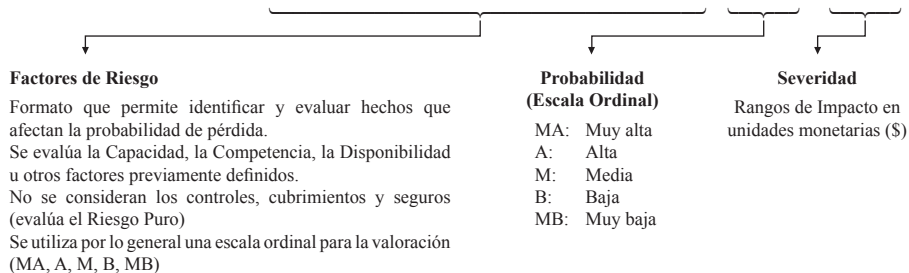
Para el estado actual de desarrollo en la medición del riesgo operativo, en muchas empresas se utiliza una combinación de puntos de vista cuantitativos y cualitativos. En general, se realizan esfuerzos para llegar a una aproximación cuantitativa basada en el análisis estadístico de datos. No obstante, cuando los datos no están disponibles, son vagos, son subjetivos, etc., una aproximación cualitativa puede ser utilizada para generar calificaciones de riesgo.

Podemos decir que la aproximación cuantitativa es rígida mientras que la cualitativa es vaga. El análisis cualitativo no necesita comprender la verdadera relación entre severidad y probabilidad. Una aproximación híbrida requiere, no obstante, una asignación numérica para llegar a una cuantificación del riesgo operativo como medida única. Por otra parte, la aplicación de tecnologías basadas en *lógica difusa* ha permitido tratar la información cualitativa de una manera más rigurosa, perfilándose como una de las aproximaciones importantes para la medición los riesgos operativos y la cual complementa las aproximaciones cuantitativas.

#### • Valoración de riesgos

Después que han sido identificadas las fuentes de riesgo operativo, estos deben ser valorados de manera individual y de manera conjunta para la empresa o unidad de negocio. La valoración realizada puede ser presentada en un formato similar al mostrado en la figura 5, el cual recoge y valora los elementos definidos en los numerales anteriores. Los últimos campos del formato registran la *valoración conjunta* o agregada de todos los riesgos operativos para la empresa. Como se indica en la figura, la escala de valoración utilizada es ordinal con términos lingüísticos; sin embargo, puede utilizarse una escala numérica por ejemplo en el intervalo 1 – 10, tanto para probabilidad como para severidad. Por último, la valoración obtenida de los riesgos debe ser validada con las personas clave o responsables del proceso. En el ejemplo, la valoración de la probabilidad es B para un rango de pérdidas entre 150 y 300 millones.

<i>Fuentes de Riesgo Operativo</i>	<i>Categorías de Riesgo Operativo (prox. año)</i>					
	<i>Dependencias internas</i>			<i>Dependencias externas</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Severidad millones \$</i>
	<i>Personas</i>	<i>Procesos</i>	<i>Tecnologías</i>			
Análisis de clientes	B	B	B	M	M	50.500
Fraude	B	B	B	B	B	50-100
Fuga de información	B	MA	B	MB	B	35.70
Caída del sistema	B	MA	B	MB	B	5-10
Entorno político	MB	B	B	B	B	5-10
Cambios en la regulación	B	B	B	MB	B	5-10
.....						
Valoración conjunta	B	M	B	B	B	150-300



**Figura 5.** Formato de evaluación conjunta de riesgos identificados

La relación entre el riesgo y sus componentes puede mostrarse en forma sencilla por medio de una matriz de riesgos, la cual permite clasificar los riesgos identificados en función de la valoración de la probabilidad y severidad fácilmente. La clasificación se realiza por medio del cálculo del “puntaje de riesgo” el cual consiste en el producto de la probabilidad por la severidad ( $P \times S$ ), para hacer esto es necesario utilizar una escala numérica, por ejemplo, en el intervalo 1 – 10 tanto para probabilidad como para severidad. Luego se realiza la clasificación ordenando de mayor a menor puntaje.

A continuación se presenta un ejemplo donde la escala tanto para probabilidad como para la severidad de los riesgos identificados va de uno a diez (1-10). La probabilidad se tomó hasta 8, ya que es un nivel más alto de probabilidad e indica que ocurrirá el hecho como tal y no como un riesgo. Cada celda de la matriz es el producto de la probabilidad y la severidad. A través de este procedimiento, es posible

clasificar los riesgos A, B, C, D,... identificados de una manera ágil; además, es aplicable a la identificación de oportunidades realizando el mismo procedimiento.

Dentro de la matriz se consideran varias zonas tal como se indica en la figura 6:

- Calificaciones menores de 20. Se considera riesgo *bajo* y, por lo tanto, se documentan y no se tratan. Estas calificaciones se encuentran bajo la diagonal.
- Calificaciones entre 21 y 36. Se considera riesgo *medio* y, por lo tanto, se documentan y se tratan. Estas calificaciones se encuentran en la diagonal.
- Calificaciones entre 40 y 80. Se considera riesgo *alto* y, por lo tanto, se documentan y se tratan. Estas calificaciones se encuentran sobre la diagonal.

PROBABILIDAD	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	IMPACTO									

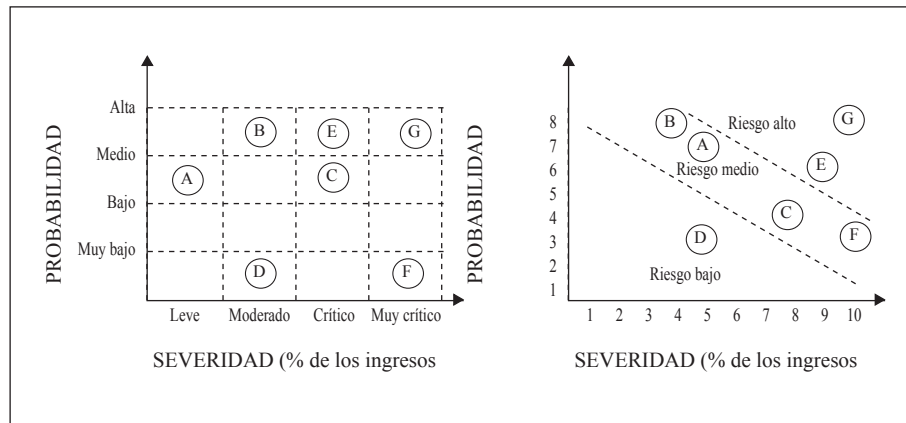
**Figura 6.** Matriz de calificación de riesgos

El cálculo del “riesgo total”, se realiza sumando el resultado de todos los riesgos a considerar ( $P \times S$ ), y dividiendo por el número final de riesgos. La figura 7 muestra el procedimiento general, donde el nivel para la consideración del riesgo se asume en 35 puntos.

Cálculo del Riesgo Total: Proyecto XYZ					
Riesgos & Oportunidades	Probabilidad	Impacto	Puntaje de Riesgo (P×I)	Ranking	Cálculo, Riesgo del Proyecto
A	8	7	56	3	56
B	6	5	30	No considerar	
C	5	7	35	6	35
D	3	4	12	No considerar	
E	5	1	5	No considerar	
F	6	7	42	4	42
G	4	8	32	No considerar	
H	7	8	56	3	56
I	8	8	64	2	64
J	3	3	9	No considerar	
K	5	3	15	No considerar	
L	8	9	72	1	72
M - Oportunidad	6	6	36	5	-36
N	3	8	24	No considerar	
Riesgo total de proyecto (289/7)					41,3

**Figura 7.** Valoración del riesgo total

En la figura 8 se muestran dos tipos de matrices de riesgo que permiten representar los riesgos según su puntaje. En la figura puede observarse que si el riesgo se ubica en los cuadrantes superiores derechos, tiene una alta probabilidad de ocurrencia, y una alta pérdida asociada, si el riesgo ocurre.



**Figura 8.** Matriz de riesgos

A partir de la clasificación de riesgos los administradores pueden direccionar las medidas para mitigar los riesgos tales como realizar inversiones o desinversiones, contratar seguros, transferir el riesgo mediante contratos de outsourcing o asumir el riesgo definiendo controles y monitoreo permanente.

## **2.4 MODELOS DE MEDICIÓN DE RIESGO OPERATIVO**

### **2.4.1 Aproximaciones cuantitativas**

Existen, además de las metodologías ya presentadas en páginas anteriores, otras metodologías que también permiten medir y cuantificar la exposición de las empresas o instituciones al riesgo operativo. En primer lugar, están los modelos causales cuyo fundamento se centra en desarrollar relaciones que permitan explicar una variable en función del comportamiento de una serie de variables explicativas, entre las cuales se encuentran aplicaciones econométricas y series de tiempo, modelos no lineales (redes neuronales, lógica difusa) y técnicas bayesianas. En segundo lugar se encuentran los modelos estocásticos, cuyo fundamento se centra en la aplicación de la teoría de la probabilidad, entre los cuales se encuentran las funciones de probabilidad, teoría del valor extremo, modelos de frecuencia y los procesos estocásticos

### **2.4.2 Aproximaciones basadas en lógica difusa**

Actualmente se está aplicando la aproximación basada en lógica difusa debido a que permite realizar análisis del riesgo operativo con un menor costo de montaje y una visión más estructurada del riesgo operacional cuando la información disponible es incierta. Esto no significa que la lógica difusa pueda reemplazar los métodos estadísticos robustos para la medición del riesgo operacional, sin embargo, ésta puede proporcionar un marco teórico más riguroso para el tratamiento de la información vaga, incompleta y subjetiva o el tratamiento de la información cualitativa, lo cual es una cons-

tante en el análisis de riesgos operativos y de muchos problemas del mundo real.

La lógica difusa es una rama de la matemática, propuesta por Lofti Zadeh (1965) que proporciona una visión diferente a la teoría de conjuntos clásica propuesta por Aristóteles (500 A.C), la cual se fundamenta en la lógica binaria. La lógica difusa permite grados intermedios de pertenencia a los conjuntos, y en este sentido se rompe con la ley de la no contradicción y del tercero excluido ya que un elemento puede pertenecer a la vez a varios conjuntos en cierto grado. La lógica difusa también se considera una aproximación matemática para tratar el lenguaje natural, el cual está cargado de afirmaciones vagas, ambiguas y subjetivas. Por lo tanto la lógica difusa no compite con la teoría de la probabilidad como una medida de evaluación de eventos aleatorios sino que da una aproximación diferente para el tratamiento de la vaguedad y lo que define la teoría de la posibilidad.

La característica más importante de la lógica difusa estriba en que facilita los procesos de decisión donde las entradas al sistema son vagas o juicios subjetivos característica principal de las ciencias sociales. La lógica difusa ha sido aplicada extensivamente en problemas de ingeniería, sistemas de control y manufactura pero está siendo aplicada actualmente a problemas relacionados con la medicina, la psicología, la economía y las finanzas, donde muchas decisiones se toman con base en juicio de expertos, los cuales evalúan de manera implícita a través de su proceso de pensamiento todo tipo de información que incorpora diferentes grados de incertidumbre.

En el tratamiento del riesgo operativo, el problema tiene la característica de que parte de la información es vaga y multidimensional, por lo que la lógica difusa podría ser aplicada en los siguientes contextos:

- **Evaluación de riesgos operativos en procesos simples**

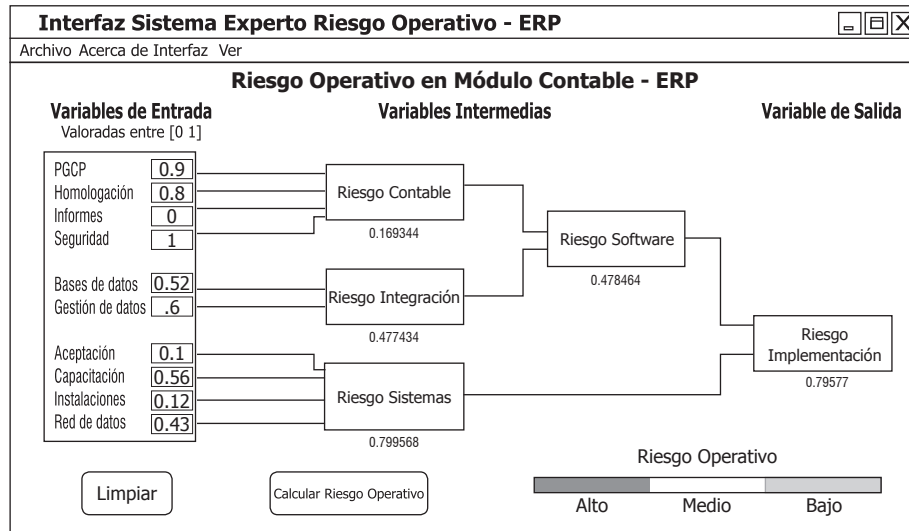
Muchas instituciones valoran el riesgo operativo en sus negocios aplicando indicadores subjetivos (de opinión) o usando indicadores técnicos disponibles; sin embargo, no está definida la relaciones

causal entre estas variables y los diferentes niveles de riesgo operativo. Para valorar el perfil de riesgo operativo, muchos analistas pueden necesitar datos recopilados en formularios, percepciones o escenarios de valoración a lo cual asignan de un grado de “severidad” que es utilizado para tomar una decisión. Este proceso puede ser intensivo en recursos y no proporciona una salida en el sentido, por ejemplo, del cálculo de una prima por riesgo, una localización óptima de capital, un valor presente neto, etc., tal como la salida obtenida de muchos modelos de la economía financiera. En estas situaciones, los sistemas de lógica difusa pueden ser capaces de ejecutar algunas tareas con el mínimo de interferencia humana, realizando cálculos con la información, analizando ésta y haciendo reportes; por ejemplo, en el análisis de la solvencia de un cliente que solicita crédito a una institución financiera su evaluación es una función de indicadores técnico-financieros, calificaciones de las centrales de riesgo, estrato socioeconómico, nivel educativo, antigüedad, etc. Algunos de estos factores son cualitativos o subjetivos, por lo tanto, la lógica difusa se convierte en una herramienta para combinar toda la información de entrada de una manera objetiva, establecer de manera clara las relaciones entre las variables y estimar un resultado.

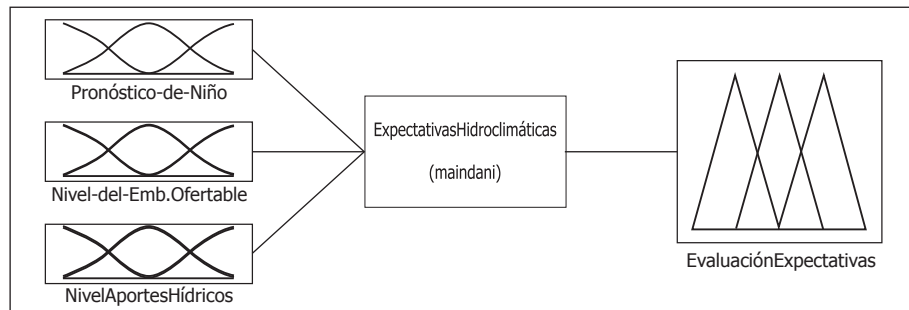
#### • **Aplicaciones**

Ejemplos de la aplicación de los sistemas de lógica difusa para la evaluación de riesgos pueden verse a continuación. La figura 9 muestra un sistema difuso que permite evaluar el riesgo operativo del montaje de plataformas contables considerando como variables de entrada conceptos cuantitativos y cualitativos en la evaluación.

La figura 10 muestra un sistema de inferencia difuso que permite estimar las expectativas hidroclimáticas para la generación de energía eléctrica en función de los pronósticos del fenómeno Niño, el nivel actual del embalse ofertable y del nivel actual de los aportes hídricos a los ríos del sistema interconectado nacional.



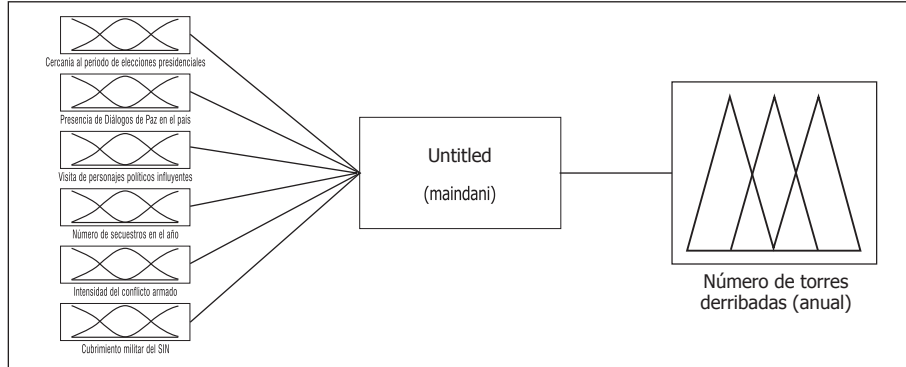
**Figura 9.** Modelo de medición de riesgo operativo en la implementación de plataformas contable



**Figura 10.** Modelo de medición de riesgo operativo en la expectativa Hidroclimática para la generación de energía

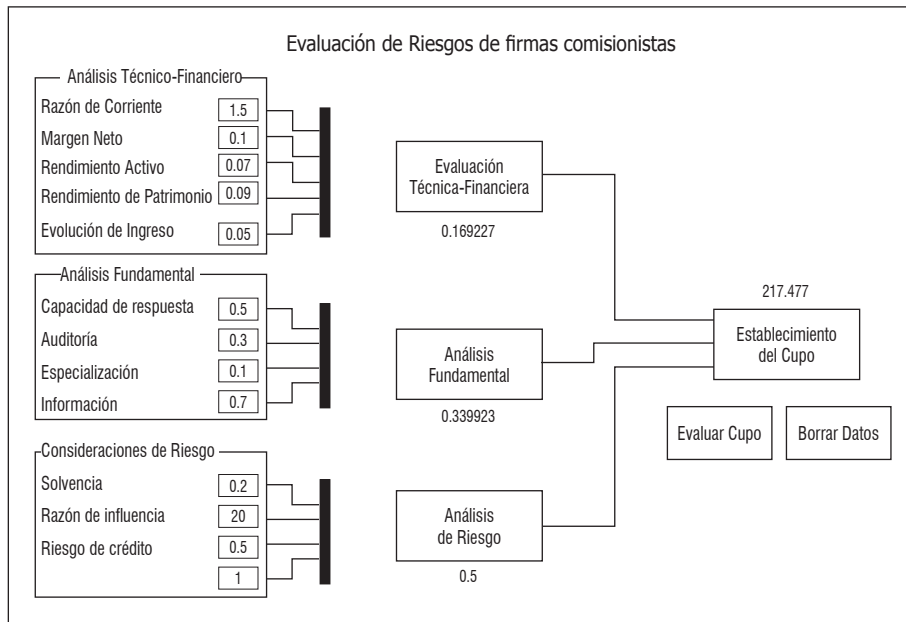
La figura 11 muestra seis variables identificadas que permiten pronosticar el número de torres derribadas por parte de los grupos armados ilegales en Colombia para un año. Entre las variables que explican el evento del derribo de torres están las elecciones presidenciales, el desarrollo de diálogos de paz en el país, la visita de personajes políticos influyentes al país, el número de secuestrados y la intensidad del conflicto armado en Colombia.





**Figura 11.** Modelo de medición del número de torres derribadas en Colombia para un año

La figura 12 estima el cupo que se otorgará a firmas comisionistas de bolsa en función de la evaluación de variables macro técnico-financieras, fundamentales y de riesgo.



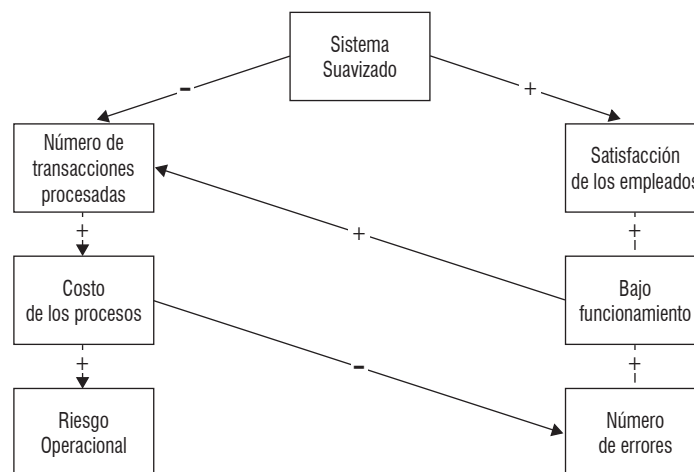
**Figura 12.** Modelo de evaluación de solvencia y asignación de cupo a firmas comisionistas de bolsa

### 2.4.3 Evaluación de riesgo operativos en sistemas complejos - Modelos causales

Uno de los desafíos en la valoración del nivel de riesgo operativo es que en muchos casos es necesario:

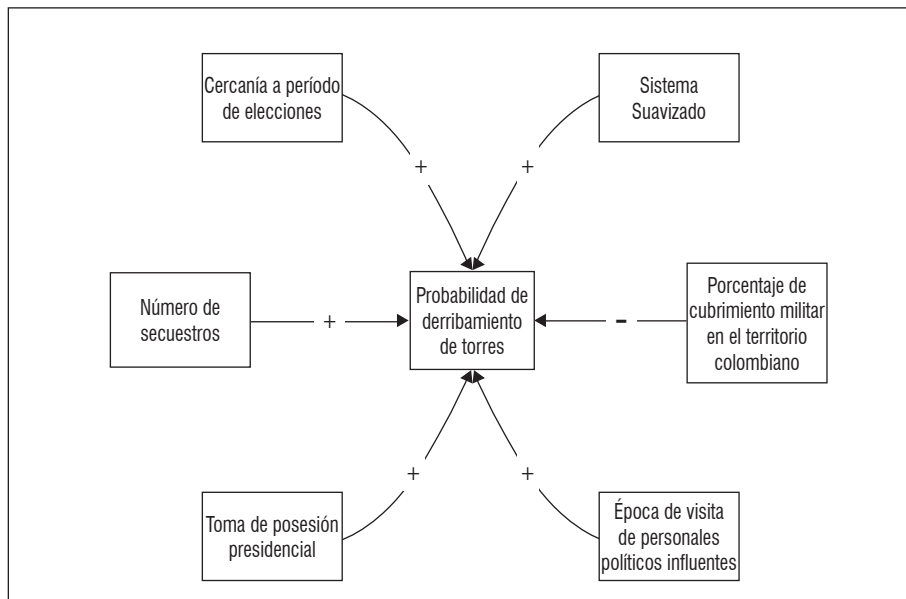
- Conectar información cuantitativa y cualitativa de tal manera que permita obtener resultados cuantitativos.
- Comprender cómo interactúan eventos complejos.

La lógica difusa permite hacer una agregación apropiada de los conductores de las fallas operativas. El primer paso es realizar un mapa cognoscitivo borroso que nos da una representación causal de la situación (Kosko 1994). Por ejemplo, suponga que un analista intenta medir el efecto de la lentitud del sistema en el nivel de riesgo operativo. Como un primer paso algunas causas y efectos son identificados y ligados al evento “lentitud del sistema”. Un sistema lento es causado por la reducción de la satisfacción de los empleados, el cual redundará en una reducción de las transacciones procesadas; esta satisfacción se liga a otros eventos que incrementan el riesgo operativo del negocio tal como se muestra en la figura 13 (Cruz 2002).



**Figura 13.** Mapa causal para medir el rendimiento del sistema.

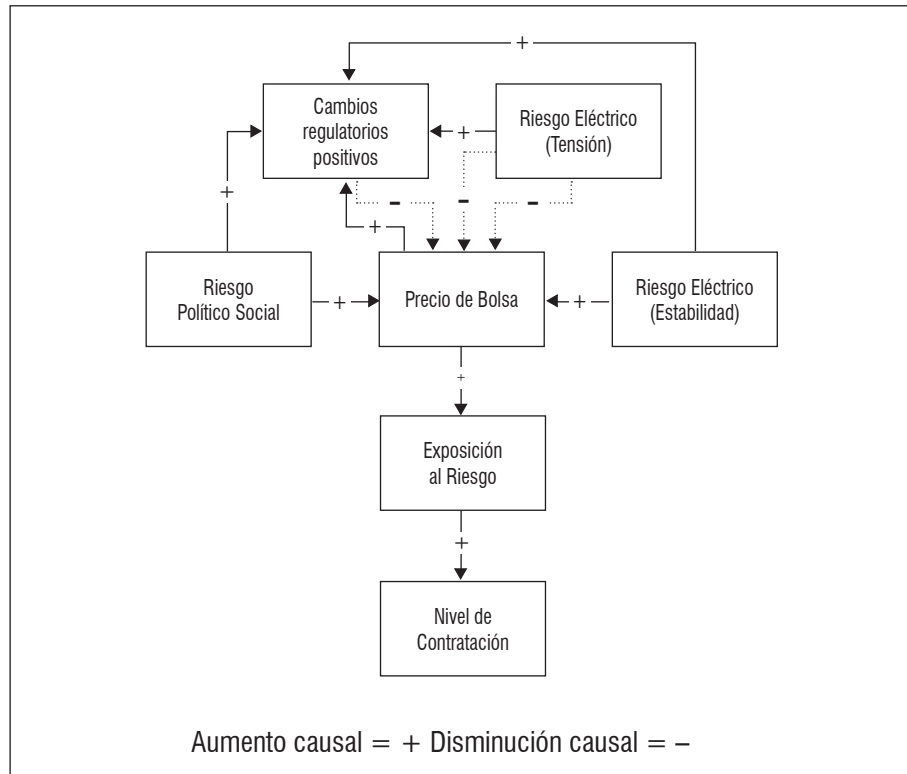
Otro ejemplo de un modelo causal es el análisis del efecto de factores como condiciones sociopolíticas, de seguridad, de proximidad a período de elecciones o de cubrimiento militar sobre el derribamiento de torres de energía, eléctrica lo cual representa un riesgo de la operación del sistema eléctrico, como se indica en la figura 14.



**Figura 14.** Modelos causales para estimar el número de torres de transmisión de energía eléctrica derribadas

En la figura 15 se muestra un diagrama causal para comprender las relaciones entre el nivel de contratación respecto a la demanda de un comercializador como una función de los cambios regulatorios previstos, de la situación socio política de la región donde opera y del estado de la red de transmisión de energía.

En la figura 16 se muestra un sistema experto difuso para estimar el nivel de contratación del comercializador como una función de una serie de variables previamente identificadas (Medina 2007).

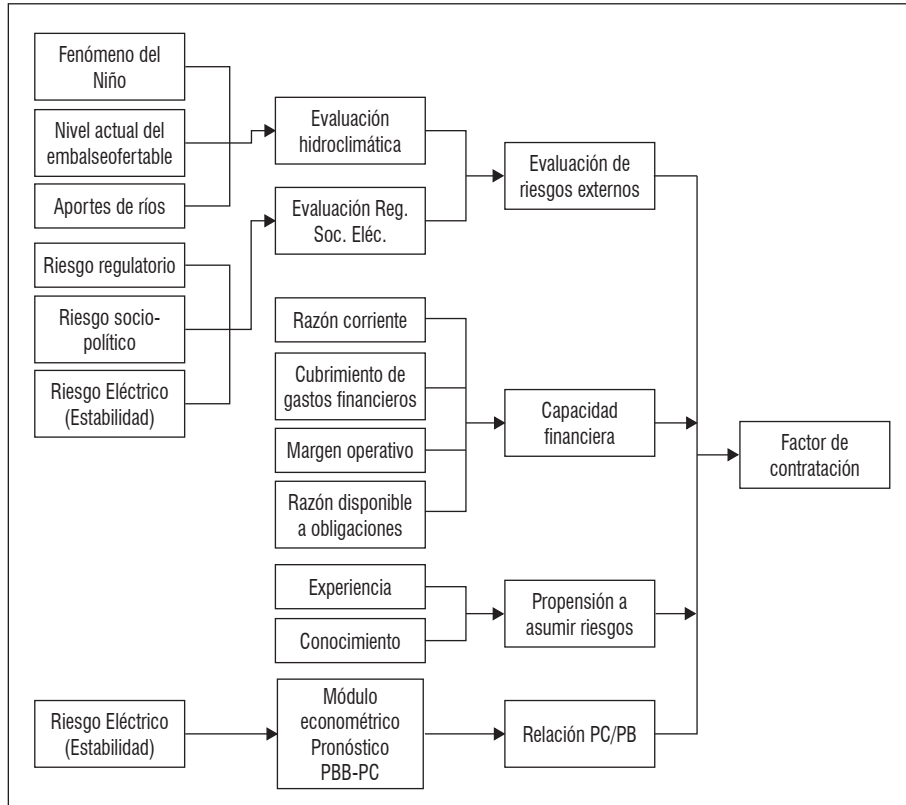


**Figura 15.** Modelo Causal para estimar el nivel de contratación de electricidad

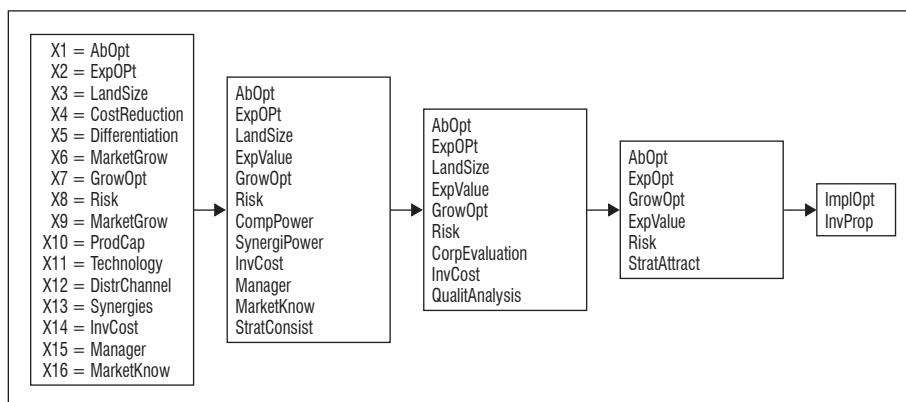
La figura 17 muestra el sistema experto para evaluar inversiones estratégicas mediante opciones reales considerando variables cualitativas definidas a partir de los expertos (Magni 2001).

#### 2.4.4 Conclusiones

La lógica difusa abre un nuevo campo de exploración en muchos campos del conocimiento. La importancia y uso creciente de los nuevos modelos basados en la lógica multivalente (de la cual la lógica borrosa es la mayor exponente) por parte de la comunidad científica, representa la inmersión en un nuevo mundo en el cual la incertidumbre y la vaguedad no constituyen ya un impedimento para un eficaz tratamiento en la toma de decisiones y evaluación de procesos. Los



**Figura 16.** Sistema experto difuso para estimar el factor de contratación de energía eléctrica de un comercializador



**Figura 17.** Sistema experto difuso para evaluación de inversiones

nuevos paradigmas en el modelamiento del conocimiento (lógica difusa, redes neuronales, algoritmos genéticos, etc.) permiten recoger los fenómenos económicos y de gestión con toda su incertidumbre para realizar los pertinentes desarrollos, conservando la imprecisión y, posteriormente, “reducirla”.

El ámbito de formalización sustentado en las hipótesis, basadas en la certeza y en la aleatoriedad comunes hasta no hace mucho en los modelos económicos y financieros se ha ido completando a partir de las investigaciones sobre el tratamiento de la vaguedad, inicialmente, a través de la matemática difusa que emplea, entre otros elementos, los conjuntos difusos y los sistemas de inferencia difusos. Además, la combinación de un adecuado sistema de inferencia difusa con el conocimiento adquirido a lo largo del tiempo por los expertos constituye una gran fortaleza para cualquier análisis, puesto que existen factores externos al sistema que proporcionan información adicional para la evaluación y que son de conocimiento experto. De esta manera, la lógica difusa se perfila como una alternativa importante para el desarrollo de sistemas expertos para el tratamiento del riesgo corporativo y que permite complementar los modelos basados en la teoría estadística.

Las aplicaciones mostradas en el campo del riesgo muestran sólo una pequeña parte de las aplicaciones que pueden ser desarrolladas. En general, las matemáticas de la incertidumbre podrían cubrir todo el abanico de riesgos (de mercado y de crédito, jurídico, etc.) que enfrentan las empresas en el día a día. Dicha tendencia ya ha sido experimentada en otras áreas del conocimiento que han aplicado la lógica difusa para incorporar la incertidumbre como la extensión de los modelos de la matemática clásica como el cálculo integral, las probabilidades, la trigonometría, la geometría, la topología, la econometría, la programación lineal, etc.

Por otro lado, queda por fuera de este artículo un importante campo de investigación de la lógica difusa la cual se combina con otras técnicas de la inteligencia artificial como las redes neuronales artificiales, los algoritmos genéticos, el caos, los fractales, etc.,

que pueden ser aplicados para resolver problemas financieros o de cualquier otra índole. En términos generales, la combinación de estas técnicas permite crear sistemas robustos conocidos como sistemas conexionistas o sistemas híbridos, aplicados con éxito en muchos campos del conocimiento. Es a partir de este momento que una gran cantidad de problemas parecen encontrar una salida mucho más acorde con las necesidades actuales y futuras.

## **2.5 BIBLIOGRAFÍA**

- BUCKLEY, J. y ESLAMI, E. An introduction to fuzzy logic and fuzzy set. Physica verlag. 2002
- COMITÉ DE SUPERVISIÓN BANCARIA DE BASILEA. Convergencia internacional de medidas y normas de capital. 2004.
- CROUHY, Michel, GALAY, D, y MARK R. Risk management. McGraw-Hill, 2001.
- CRUZ G, Marcelo. Modeling, measuring and heading operational risk. Estados Unidos: John Wiley & Sons, Ltd. 2002.
- CRUZ G, Marcelo. Operational risk modelling and analys: Theory and practice. London: Incisive Media Investments Limited –Book Risk-. 2004. Página 360
- JANG, J, MIZUTANI, E y SUN, C. (1997). Neuro-Fuzzy and soft computing: a computational approach to learning and machine intelligence. Estados Unidos: Prentice Hall, 1997.
- JORION P. Valor en riesgo. Ed. Limusa 1999.
- Kasabov, N. (1998). Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems and Knowledge Engineering. Estados Unidos: The MIT Press. 1998
- KAUFMAN, Alan y GIL ALUJA, Jaime. Las matemáticas del azar y la incertidumbre. Elementos básicos para su aplicación en economía. Madrid: Editorial Ramón Areces, 1990.

- KAUFMAN, Alan. Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos. Elementos teóricos de base. CECSA, 1982
- KOSKO, Bart. Pensamiento borroso. La nueva ciencia de la lógica borrosa. Barcelona: Ed. Critica, 1994.
- KULKARNI, Arun. Computer vision and fuzzy-neuronal systems. Prentice Hall, 2001.
- MAGNI, Carlo Alberto, MASTROLEO, Giovanni, VIGNOLA, M y FACCHINETTI, Gisella. Strategic options and expert systems: A fruitful marriage. En <http://citeseer.ist.psu.edu>, 2001.
- MAMDANI, E y GAINES, B. Fuzzy reasoning and its applications. Publ. Academic Press, 1981
- MANDANI, E.H. Application on fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. En IEEE Transactions on computers C26. Dic. 1977 Páginas 1182-1191.
- MEDINA, S. Diseño de un sistema de soporte para la negociación de contratos de energía eléctrica. Tesis de doctorado. Universidad Complutense de Madrid. Madrid enero 2007.
- SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA. [www.superfinanciera.gov.co](http://www.superfinanciera.gov.co)
- TRILLAS, Enric. Conjuntos borrosos. Ed. Vicens Vives, 1980
- VOSE, David. Quantitative risk analysis: a guide to Montecarlo simulation modelling. Estados Unidos: John Wiley & Sons, Ltd. 1996.
- WANG, L. (1992). "Fuzzy systems are universal approximators. En Proc. of int. conf. on fuzzy engineering. 1992. Páginas 471-496.
- ZADEH Lotfi A. Probability measures of fuzzy events. En J. Math. Anal. Appl. 23. 1968. Páginas 421-427.



## ANEXO A

### **CONJUNTOS DIFUSOS Y SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA (FIS)**

La creciente necesidad de dar solución apropiada a problemas de índole política, económica, social, administrativa y financiera, que parten de percepciones estrictamente humanas y que como tal no cuentan con la suficiente información para aplicar modelos matemáticos convencionales, ha obligado a la búsqueda de modelos alternativos que permitan llegar a valores numéricos a partir de variables expresadas en términos lingüísticos. La lógica difusa aparece como una de las herramientas que permite hacer esta transformación y que proporciona una visión diferente a la que se da en la lógica formal o clásica.

La lógica clásica, o lógica bivaluada, no resulta adecuada cuando se trata de describir hechos que no son totalmente verdaderos o totalmente falsos ya que excluye por completo posibilidades entre estos dos valores. La lógica difusa, en cambio, permite utilizar conceptos relativos de la realidad, definiendo grados variables de pertenencia y siguiendo patrones de razonamiento similares a los del pensamiento humano (Kosko, 1995).

El concepto de conjunto difuso fue originalmente propuesto por Lofti Zadeh en 1965, y luego Mandani (Mandani 1977) extendió el concepto a sistemas de lógica difusa que actualmente son un importante tópico de investigación y desarrollo de aplicaciones en muchas áreas del conocimiento y la técnica.

La lógica difusa está relacionada y fundamentada en la teoría de los conjuntos difusos, según la cual, el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto está determinado por una función de pertenencia que puede tomar todos los valores reales comprendidos en el intervalo  $(0, 1)$  (Jang, 1997, Kulkarni, 2001, Kasabov, 1998 y

Kosko, 1995). De esta manera, mientras que en el marco rígido de la lógica formal la utilidad de una empresa, por ejemplo, es baja, dándole un valor de cero (0) o es alta dándole un valor de uno (1), para la lógica difusa son posibles también todas las condiciones intermedias de utilidad como “muy baja”, “relativamente alta”, “media”, “ligeramente baja”, etc.

Las condiciones extremas o absolutas asumidas por la lógica formal son sólo un caso particular dentro del universo de la lógica difusa. Esta última permite ser relativamente imprecisa en la representación de un problema y aún así llegar a la solución correcta (Kosko, 1995).

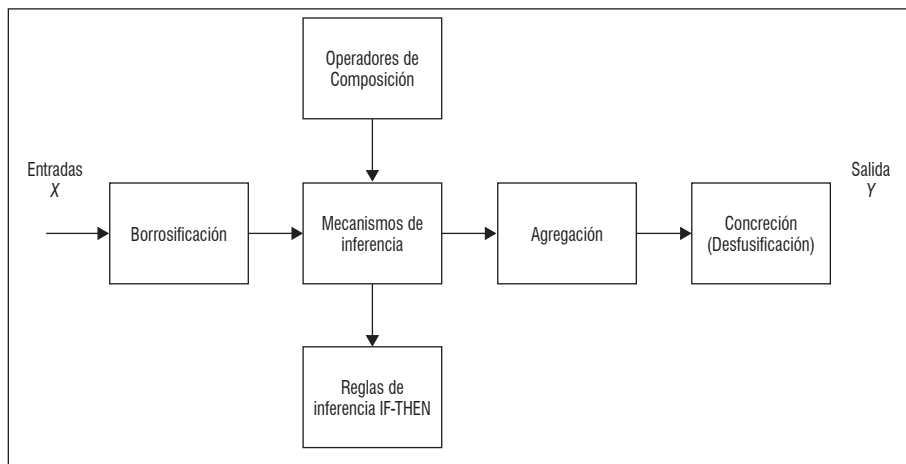
Con la lógica difusa se abre la posibilidad de dar solución a problemas expresados desde la perspectiva humana y que, por esta simple condición, no pueden tener una solución única desde lo “falso” o “verdadero”, sino que pueden tomar condiciones intermedias para dar soluciones satisfactorias a los problemas presentados.

Actualmente existe una amplia literatura sobre la teoría de los conjuntos difusos aplicada a todos los campos de la matemática como la aritmética, el álgebra, el cálculo diferencial e integral, sistemas de ecuaciones, la topología, la econometría, la programación lineal, la programación multiobjetivo, la programación dinámica, las desigualdades, funciones, la geometría plana, la trigonometría, la teoría probabilística (Zadeh, 1968), etc. Para una introducción a la matemática difusa consúltese Buckley 2002. Para un tratado completo de la fundamentación matemática de los conjuntos difusos, puede consultarse a Kaufman 1990, Trillas 1980, Kaufman 1982 o Jang 1997.

Los sistemas de inferencia difuso tipo Mandani (Mandani, 1977, 1981) fueron los primeros sistemas en ser probados de manera práctica como aproximador universal de funciones. Posteriormente (Kosko, 1992 y Wang, 1992), se estableció formalmente que cualquier relación entre variables de entrada y salida puede ser aproximada mediante un sistema difuso construido en términos lingüísticos con alto grado de exactitud (aproximador universal).

Un Sistema de Inferencia Difuso – FIS - es una forma de representar conocimientos y datos inexactos en forma similar a como lo hace el pensamiento humano (Jang, 1997). Un FIS define una correspondencia no lineal entre una o varias variables de entrada y una variable de salida; esto proporciona una base desde la cual pueden tomarse decisiones o definir patrones.

Las etapas que constituyen el desarrollo de un sistema de inferencia difuso se muestran en la figura 1 y se explican a continuación.



**Figura 1.** Sistema de inferencia difuso.

Los pasos esenciales para el diseño de un sistema difuso son (Jang, 1997, Kasavov, 1998 y Kosko, 1992):

- Identificar el tipo de problema y el tipo de sistema difuso que mejor se ajusta a los datos.
- Definición de variables de entrada y salida, sus valores difusos y sus funciones de pertenencia (parametrización de variables de entrada y salida).
- Definición de la base de conocimiento o reglas difusas.

- Obtención de salidas del sistema mediante la información de las variables de entrada utilizando el sistema de inferencia difuso.
- Traslado de la salida difusa del sistema a un valor nítido o concreto mediante un sistema de “defusificación”.
- Ajustar el sistema validando los resultados.

La aplicación de modelos basados en lógica difusa permite abordar de manera efectiva la creación de sistemas soporte para la toma de decisiones, ya que brinda la capacidad de extraer datos de forma práctica, y, a través de las capacidades analíticas y la experiencia de los evaluadores, descubrir relaciones significativas entre ellos. Los modelos de lógica difusa son altamente flexibles, más tolerantes a la imprecisión de los datos y pueden trabajar con funciones no lineales de diversa complejidad; asimismo, no están obligados por presunciones estadísticas acerca de las características de los datos y sus distribuciones de probabilidad y se les puede modificar fácilmente, dependiendo de la solución requerida del problema.

Cuando se cuenta con información imprecisa e insuficiente, usar instrumentos estadísticos no es suficiente para obtener resultados significativos. La lógica difusa surge precisamente para tratar con este tipo de problemas y lograr darles una solución óptima. De ésta forma, una combinación entre un sistema de Lógica Difusa y la experiencia o conocimiento que tienen los encargados de tomar las decisiones es una excelente manera de obtener buenos resultados (Kosco, 1995).

• **A continuación se explican los pasos que integran un FIS**

*Proceso de borrosificación o fusificación. En esta primera etapa se definen las variables tanto de entrada como de salida del sistema (variables lingüísticas), sus valores lingüísticos y sus funciones de pertenencia. Este proceso también es llamado parametrización.*

El término “variables lingüísticas” se refiere a variables que pueden tomar valores ambiguos, inexactos o poco claros, por ejemplo, la variable lingüística “Rentabilidad” puede tomar los

valores lingüísticos “bajo, medio y alto”, que tienen un significado semántico y que se pueden expresar numéricamente por funciones de pertenencia.

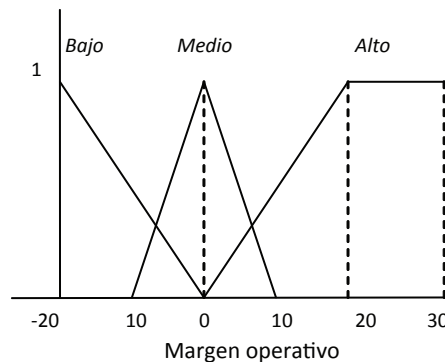
De esta manera, se puede hablar formalmente de conjunto difuso como:

Sea:  $X$  el universo de valores que puede tomar la variable  
 $x$  un elemento cualquiera de  $X$   
 $A \subset X$  colección de elementos  $x$  pertenecientes a  $X$

Si  $X$  es una colección de objetos denotados genéricamente por  $x$ , entonces el conjunto difuso  $A$  en  $X$  es definido como el conjunto de pares ordenados:

$$A = \left[ (x, \mu_A(x)) / x \in X \right]$$

Donde  $\mu_A(x)$  se denomina función de pertenencia del conjunto difuso  $A$ . La función de pertenencia otorga a cada elemento de  $X$  un grado de membrecía entre 0 y 1. Los tipos de funciones de pertenencia comúnmente utilizados son: la función Triangular, Trapezoidal, Gausiana, Sigmoidal y Generalizada de Bell. Éstas se escogen de forma tal que se consiga una adecuada correspondencia entre los espacios de entrada y salida de un sistema. La Figura 2 presenta tres conjuntos difusos con valores lingüísticos bajo, medio, alto para la variable margen Operativo.



**Figura 2.** Conjuntos difusos y funciones de pertenencia

El proceso de parametrización consiste en definir funciones de pertenencia para cada uno de los valores lingüísticos definidos para las variables de entrada y salida del sistema. En general, los valores lingüísticos son definidos con base en opiniones de expertos los cuales se distribuyen a lo largo del universo del discurso (rango posible de valores que puede tomar la variable).

Cuando hay información previa de la variable de interés, la distribución de los conjuntos difusos en el universo del discurso puede basarse en un análisis estadístico previo de la serie histórica conjugada con la opinión de los expertos, mientras que para aquellas variables que caracterizan posiciones subjetivas (por ejemplo propensión a tomar riesgos) puede definirse una escala de calificación donde los expertos ubican los niveles de la variable y a los que se le asocian los conjuntos difusos.

*Reglas difusas SI-Entonces.* Estas reglas especifican la relación entre las variables de entrada y salida del sistema. Las relaciones difusas determinan el grado de presencia o ausencia de asociación o interacción entre los elementos de 2 ó más conjuntos.

La regla SI-ENTONCES tipo Mandani, asume la forma:

“Si  $X_1$  es  $A_1$  y  $X_2$  es  $A_2$  y.....y  $X_k$  es  $A_k$  Entonces  $Y$  es  $B$ ”

Donde  $A_1, A_2, \dots, A_k, B$  son valores lingüísticos definidos mediante conjuntos difusos para las variables lingüísticas en el universo del discurso  $X_1, X_2, \dots, X_k$  y  $Y$  respectivamente. La parte de la regla “ $X_i$  es  $A_i$ ” es llamada el antecedente o premisa y la parte “ $Y$  es  $B$ ” es llamada el consecuente o conclusión.

La regla anterior define una relación borrosa en el espacio  $k + 1$  dimensional, caracterizada por una función de pertenencia  $\mu_{A_k \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y) \in [0; 1]$ .

La base de las reglas borrosas en general se obtiene del conocimiento de expertos mediante entrevistas, cuestionarios o técnicas de panel, sin embargo, en muchas ocasiones no se tiene acceso a dichos expertos pero se cuenta con una base de datos de

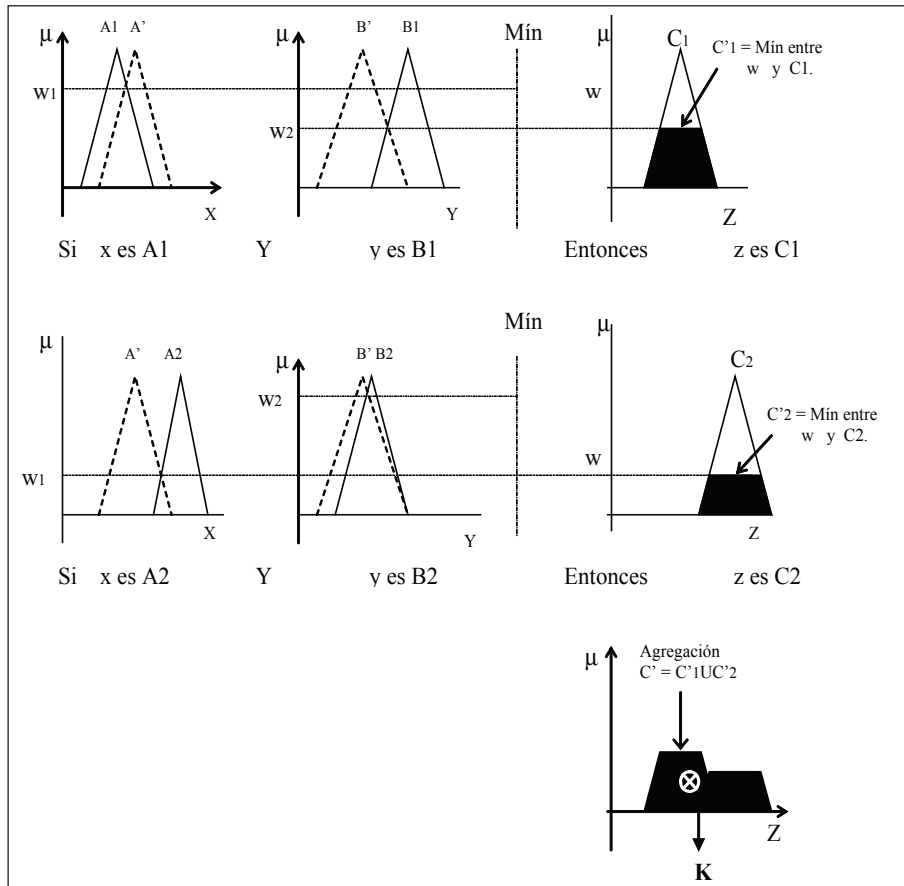
las variables de entrada-salida. En situaciones como ésta, es posible generar reglas borrosas que definan una adecuada correspondencia entre las variables de entrada y salida.

La interpretación de una regla SI-Entonces involucra dos pasos: el primero es evaluar el antecedente mediante la aplicación de cualquier operador difuso, y el segundo paso es la implicación o la aplicación del resultado del antecedente al consecuente. Esto se hace evaluando la función de pertenencia  $\mu_{A \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y)$ . Es decir, se trata de evaluar la activación de una regla (activación del consecuente) en función del grado de cumplimiento del antecedente. Para realizar dicha tarea, se hace uso de operadores de composición de conjuntos difusos y de la aplicación de un sistema de inferencia (también llamado Razonamiento Difuso o Razonamiento Aproximado) el cual puede verse en la figura 3.

Operaciones de composición. Las operaciones básicas que se realizan con conjuntos difusos son la unión, la intersección, la complementación, el producto cartesiano y el co-producto cartesiano. Dichas operaciones se realizan mediante la aplicación de algún operador binario clasificado como T-normas (para operaciones de intersección) o S-normas (para operaciones de unión). (Kaufman, 1990, Trillas, 1980, Jang, 1997, Kulkarni, 2001, Kasabov, 1998)

Debido a que las reglas difusas definen una relación difusa en el espacio  $k+1$ -dimensional caracterizado por una función de pertenencia  $\mu_{A_k \rightarrow B}(X_1, X_2, \dots, X_k, Y) \in [0; 1]$ , las operaciones básicas con conjuntos difusos son relaciones de implicación utilizadas para derivar las funciones de pertenencia de conjuntos difusos  $n$ -dimensionales. Por otra parte, también permiten definir operaciones de composición para derivar relaciones difusas entre diferentes espacios producto, es decir, si tenemos relaciones para los espacios producto  $X \times Y$  y  $Y \times Z$  podemos, a través de operaciones de composición, obtener la relación del espacio producto  $X \times Z$ .

Se han sugerido diferentes operaciones de composición para las relaciones difusas; las más conocidas son la composición Max-Min propuesta por Zadeh y la composición Max-producto.



**Figura 3.** Sistema de inferencia difuso.

*Mecanismos de inferencia (razonamiento aproximado):* el razonamiento aproximado es un procedimiento de inferencia usado para derivar conclusiones desde un conjunto de reglas difusas tipo SI-ENTONCES y los datos de entrada al sistema mediante la aplicación de relaciones de composición max-min o max-producto. Es decir, es un mecanismo que permite inferir un valor difuso  $B'$  cuando se tienen unas entradas difusas en el espacio  $k$ -dimensional  $A'_k$  y se ha definido una relación de implicación  $R: A_k \rightarrow B$ , esto es:

$$B' = A'_k \circ (A_k \rightarrow B)$$



Por ejemplo, considerando las dos reglas siguientes:

Regla 1: SI  $x$  es  $A_1$  y  $y$  es  $B_1$  Entonces  $z$  es  $C_1$  si no,

Regla 2: SI  $x$  es  $A_2$  y  $y$  es  $B_2$  Entonces  $z$  es  $C_2$ .

Se trata de inferir el resultado  $C'$  a partir de las entradas: " $x$ " es  $A'$  e " $y$ " es  $B'$  y el grupo de reglas anteriores. Se puede expresar cada regla en forma general como  $R_1 = (A_1 \times B_1) \rightarrow C_1$  y  $R_2 = (A_2 \times B_2) \rightarrow C_2$ . Si se usa la composición max-min para inferir  $\mu_{C'}(z)$ , el operador de composición "o" se distribuye sobre el operador unión ( $\cup$ ) como sigue:

$$C' = (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2)$$

$$C' \{ (A' \times B') \circ R_1 \} \cup \{ (A' \times B') \circ R_2 \}$$

$$C' = C_1' \cup C_2'$$

Donde  $C_1'$  y  $C_2'$  (ver figura 3) son conjuntos borrosos inferidos de la regla 1 y regla 2, respectivamente. Este resultado puede extenderse para el caso de  $n$ -reglas.

*Agregación.* En esta etapa del proceso las salidas de cada una de las reglas se combinan para obtener un único conjunto difuso. Las entradas del proceso de agregación son las funciones de pertenencia truncadas obtenidas de la etapa de inferencia para cada una de las  $n$ -reglas. En la figura 3 el conjunto  $C' = C_1' \cup C_2'$  agrega las funciones truncadas de cada regla.

El método de agregación es conmutativo, es decir, no importa el orden en el que la salida de cada regla es agregada. Este proceso define un método para hallar  $C' = (C_1' \cup C_2' \cup \dots \cup C_n')$ , donde  $C_1'$ ,  $C_2'$ , ...,  $C_n'$  son los conjuntos difusos inferidos de la regla 1, 2, ...,  $n$  y  $C'$  es un conjunto difuso de salida con función de pertenencia igual a  $\mu_{C'}(z)$ , dadas las condiciones de entrada del sistema y la base

de reglas. El operador de agregación más utilizado es máximo, por tanto:

$$C' = [(z, \mu_{C'}(z)) / z \in Z]$$

Donde  $Z =$  Universo del discurso de la variable de salida y

$$\mu_{C'}(z) = \text{Max}(C1', C2', \dots, Cn')$$

*Proceso de Desborrosificación o Concreción.* En esta última etapa se obtiene un valor nítido o concreto ( $K$ ) a partir del conjunto difuso de salida  $C'$  el cual proporciona la solución del sistema planteado (ver figura 3). Entre los métodos de concreción más utilizados se encuentran: centroide, bisectriz, media de los máximos, más pequeño de los máximos y más grande de los máximos.

## ANEXO B

### **SISTEMA EXPERTO DIFUSO - SED**

Un sistema experto difuso es un sistema experto que utiliza lógica difusa en vez de lógica booleana para deducir conclusiones a partir de las variables de entrada. Es decir, incorpora conjuntos difusos en el proceso de razonamiento o en el esquema de representación del conocimiento. Un sistema experto difuso es un conjunto de funciones de pertenencia (conjuntos difusos) que utiliza reglas para inferir conclusiones a partir de los datos. Es diferente de los sistemas expertos convencionales los cuales se aplican a dominios bien definidos, es decir, donde el conocimiento del fenómeno está bien delimitado; sin embargo, en problemas donde existe imprecisión, ambigüedad, mala definición, el desarrollo de un sistema experto convencional se hace más difícil, no obstante, la imprecisión es un aspecto importante en la evolución de los sistemas expertos.

Existen diferentes fuentes de imprecisión e incertidumbre en el dominio de un sistema experto y esto conlleva a que las soluciones también puedan ser imprecisas (es el caso por ejemplo de problemas de toma de decisiones administrativas, médicas, psicológicas, etc.). Por ejemplo, si la solución a un problema puede alcanzarse por varios caminos, el sistema experto debe ser capaz de reconocer las posibles vías de solución, cuyas respuestas deben estar solapadas, por lo tanto, la solución es también imprecisa e incierta. El sistema experto debe ser capaz de aceptar preguntas que incorporen vaguedad y proporcionar una interpretación, un razonamiento acerca de la información incierta con que es alimentado.

Las características de los problemas de decisión que son inherentes al proceso de razonamiento humano son:

- El proceso de adquisición de conocimiento es altamente impreciso (aprendizaje).

- Los conocimientos que procesa un experto contienen incertidumbre.
- El proceso de razonamiento del experto es impreciso (mecanismos de inferencia o deducción).
- El conocimiento representado en el lenguaje introduce incertidumbre.

La información con que se cuenta no está completamente definida.

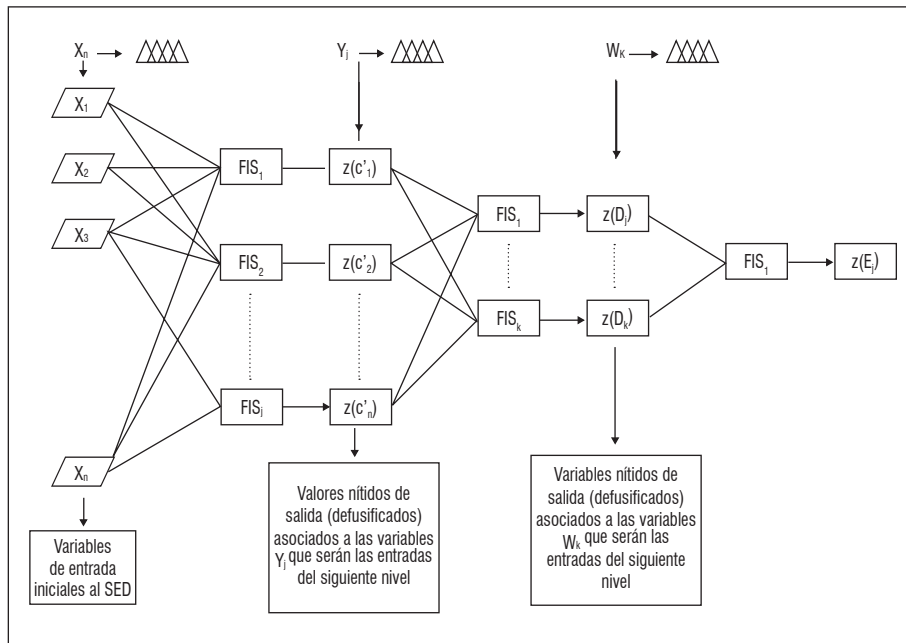
Las anteriores características limitaron el uso de los sistemas expertos convencionales. Con la incorporación de la lógica difusa se introduce en los sistemas expertos las características inherentes a los procesos de aprendizaje y razonamiento humano lo que permite potencializar su uso en muchas áreas del conocimiento.

Las reglas en un sistema experto difuso están generalmente expresadas de forma similar a:

Si  $X_1$  es Bajo y  $X_2$  es Alto Entonces  $Y$  es Medio

Donde  $X_1$  y  $X_2$  son variables de entrada e  $Y$  es la variable de salida, Bajo es un conjunto difuso que tiene asociada una función de pertenencia y definido para un rango de valores de  $X_1$ , Alto es un conjunto difuso que tiene asociada una función de pertenencia y definido para un rango de valores de  $X_2$ , y Medio es un conjunto difuso que tiene asociada una función de pertenencia y definido para un rango de valores de  $Y$ . La parte de la regla entre “Si” y “Entonces” es la premisa de la regla o el antecedente. Esta es una expresión lógica difusa del grado de pertenencia de la regla aplicable. La parte de la regla después del “Entonces” es la conclusión de la regla o el consecuente. Esta parte de la regla asigna la función de pertenencia a cada una de las variables de salida. La mayoría de herramientas para trabajar con los sistemas expertos difusos permite más de un consecuente por regla además, contiene más de una regla. El grupo entero de reglas se conoce como base de conocimiento.

Sean  $x_i = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  las variables de entrada de un SED, estas variables alimentan  $j$ -Sistemas de Inferencia Difusos ( $FIS_j$ ), es decir, cada  $FIS_j$  esta conformado por la  $n + 1$ -upla  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_j)$ . La variable de salida de cada sistema de inferencia difuso  $Y_j$  tiene asociados conjuntos difusos y, además, después del proceso concreción o defusificación, cada  $FIS_j$  tiene asociado un valor nítido  $Z(C_j')$ . Tal como se muestra en la figura 7.



**Figura 7. Estructura** de un Sistema Experto Difuso- SED (Medina 2007)

Las variables  $Y_j$  serán las variables de entrada para el siguiente nivel del SED y los valores  $Z(C_j')$  serán los valores específicos que tomará cada variable, es decir, las variables  $Y_j$  alimentarán de nuevo  $k$ -sistemas de inferencia difusos, cada  $FIS_k$  está conformado por la  $j + 1$ -upla  $[Z(C_1'), Z(C_2'), \dots, Z(C_j'), W_k]$ . De manera similar, la variable de salida de cada sistema de inferencia difuso  $W_k$  tiene asociados conjuntos difusos y, además, después del procesos concreción o defusificación, cada  $FIS_k$  tiene asociado un valor nítido  $Z(D_k')$ . Las

variables  $W_k$  serán las variables de entrada para el siguiente nivel del SED y los valores  $Z(D_k')$  serán los valores específicos que tomará cada variable, tal como se muestra en la figura 7.

El proceso se repite hasta llegar al último  $FIS_t$  el cual tiene asociado el valor nítido  $Z(E_t')$  que corresponde a la salida del Sistema Experto Difuso. En términos formales el proceso puede ser representado como:

$$Z(E_t') = f_t(Z(D_1'), Z(D_2'), \dots, Z(D_k'))$$

$$Z(E_t') = f_t(\dots(f_k(Z(C_1'), Z(C_2'), \dots, Z(C_j'))))$$

.....

.....

$$Z(E_t') = f_t(\dots(f_k(f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n))))$$

Donde las funciones  $f(\cdot)$  que transforman las variables de entrada iniciales  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  son sistemas de inferencia difusos.

## CAPÍTULO 3

# CONCEPTOS Y CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTO DE TES EN COLOMBIA CON LAS METODOLOGÍAS DE NELSON-SIEGEL Y SVENSSON

*Fabián Hernando Ramírez Atehortúa<sup>1</sup>*

### INTRODUCCIÓN

La curva de rendimiento o también conocida como estructura a plazos y estructura temporal de las tasas de interés ETTI está relacionada con un conjunto de conceptos de las finanzas. En términos prácticos, esta es la relación o representación gráfica de la relación entre el rendimiento en bonos de la misma calidad crediticia pero con diferentes vencimientos.

La forma, pendiente o inclinación de la curva de rendimientos está determinada por diferentes características y factores estructurales, funcionales e institucionales de los mercados de deuda. La teoría de las expectativas y la teoría de la segmentación del mercado constituyen las principales explicaciones a la forma de la curva de rendimientos. A su vez, dependiendo de los supuestos subyacentes, la teoría de las expectativas puede dividirse en teoría pura de las expectativas, teoría de la liquidez y teoría del hábitat preferido.

---

<sup>1</sup> Economista de la Universidad de Antioquia, Especialista en Ingeniería de la Administración con énfasis en Finanzas de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín. Estudiante del MBA (Máster en Administración de Negocios) en la línea de Gestión Financiera Corporativa Universidad de Medellín. Actualmente se desempeña como docente de tiempo completo y Jefe del Programa de Ingeniería Financiera de la Universidad de Medellín. Contacto: [framirez@udem.edu.co](mailto:framirez@udem.edu.co). Grupo de Investigación en Ingeniería Financiera. Universidad de Medellín. Agosto de 2007

La teoría pura de las expectativas propone que la forma de la curva de rendimientos se determina por las expectativas de los agentes acerca de la trayectoria futura de las tasas de interés. De esta manera se considera que la actividad financiera se desarrolla en un ambiente de absoluta certeza, y que los títulos de renta fija con diferentes vencimientos son perfectamente sustitutivos, de modo que, en el caso de invertir en un bono cupón cero con vencimientos a dos años es equivalente a invertir en un bono sin cupón con vencimiento a un año y volver a renovar dicha inversión. Bajo esta hipótesis y en ausencia de oportunidades de arbitraje, se llega a la conclusión de que los tipos de interés forward (futuros) son un estimador insesgado perfecto de los tipos al contado futuro. Los orígenes de esta explicación son clásicos en la literatura y se encuentran en Fisher (1896) y Hicks (1939), posteriormente fueron desarrollados por Malkiel (1966) y Roll (1970, 1971).

En consecuencia, según la teoría pura de las expectativas, en el futuro próximo todos los títulos de deuda de la misma calidad crediticia, sin importar sus fechas de vencimiento, deberían ofrecer la misma rentabilidad, debido a que los inversionistas, buscando oportunidades para hacer ganancias, eliminan todos los diferenciales de rentabilidad entre títulos lo cual hace que la curva de rendimientos sea más plana.

De esta manera, si los agentes esperan una mayor inflación y con ello unas mayores tasas de interés futuras, los inversionistas se concentrarán en instrumentos de corto plazo, los cuales les permitirán reinvertir posteriormente sus recursos a tasas de interés mayores, mientras que los prestamistas contratarán préstamos a largo plazo para asegurar la menor tasa de interés vigente.

Esta interacción de los agentes generará un exceso de demanda de fondos de largo plazo y un exceso de oferta de fondos de corto plazo, desequilibrio éste que será corregido por cambios en la tasa de interés: la tasa de corto plazo caerá mientras que la de largo plazo aumentará, generando un empinamiento en la curva de rendimientos.



Existen técnicas elaboradas para realizar la estimación de la curva spot como la Bootstrapping, a través de la cual se puede construir una curva cero cupón, libre de arbitraje. El procedimiento consiste en hallar secuencialmente, a lo largo de las fechas de vencimiento, las tasas cero cupón para títulos con distintos vencimientos. De manera implícita, se considera que un bono puede ser descompuesto en un conjunto de bonos cero cupón, de forma tal que el precio del bono es la suma de los bonos cero cupón. Si existen cotizaciones en el mercado a todos los plazos de la curva de rendimientos, la curva spot puede estimarse a partir de estas, utilizando una interpolación para lograr una descripción de la curva.

La metodología de Nelson y Siegel fue adoptada en 2002 por la Bolsa de Valores de Colombia como referencia para la medición de la estructura TES o Curva Cero Cupón para Títulos TES tasa fija en pesos (CEC en pesos). Actualmente, esta curva es calculada diariamente por la Bolsa de Valores de Colombia, y sus estimadores se publican en el sistema de información Infoval.

La metodología desarrollada por Nelson y Siegel (1987) presenta ventajas importantes como su buen ajuste, la reducida fluctuación, parsimonia, bajos requerimientos de información.

Desde el punto de vista histórico, el primer intento empírico de obtener curvas de tipos de interés lo llevó a cabo H. Guthmann en 1929. Sin embargo, el trabajo posterior de Durand (1942) es más conocido por su extensión. Recoge tipos de interés para un período de 40 años y utiliza métodos gráficos para obtener curvas de títulos de empresa. En estos trabajos previos no se incorporan los cupones, sólo se tienen en cuenta los vencimientos. A partir de la década de los 60 se encuentran trabajos relevantes relacionados con el tema. Cohen, Kramer y Waugh (1966) y Fisher (1966) son los primeros en utilizar mínimos cuadrados ordinarios para ajustar tipos de interés. En estos trabajos se ajusta la curva mediante una regresión entre los rendimientos de los bonos y sus vencimientos. Cohen, Kramer y Waugh (1996) especifican el tipo de interés al contado como una función del tiempo y el cuadrado del logaritmo del mismo  $z_m(t) = a + bt + c(\log t)^2$ . Meiselman (1962) y Nelson (1972) utilizan tipos

de interés implícitos, sin embargo no tienen en cuenta los cupones. Hay que esperar hasta Fisher y Weil (1971) para incorporar la temporalidad de los cupones en los tipos a plazo o forward. El trabajo de McCulloch (1971, 1975), inició una nueva etapa y se considera el trabajo básico dentro de este campo. Desde entonces han aparecido métodos que se pueden dividir en dos grupos: los que buscan caracterizar la curva de tasas de interés con un conjunto de parámetros reducido, generando curvas parsimoniosas, llamados métodos paramétricos; y los métodos que buscan un mayor ajuste utilizando polinomios por intervalos, llamados métodos no paramétricos o de splines. Ambos tipos de métodos se centran en el objetivo de obtener una función continua de descuento, de tasas al contado o de tasas a plazo para un conjunto de datos específicos.

En Colombia, entre 2001 y 2002 se desarrollaron trabajos relacionados con el estudio de metodologías que permitieran estimar la curva de rendimientos. La Dirección de Investigación y Desarrollo de la Bolsa de Valores de Colombia desarrolló un trabajo sobre una metodología con funciones polinomiales que pretendía mejorar la estimación de la curva CETES vigente en el momento<sup>1</sup>; no obstante, el mercado de TES clase B se encontraba apenas en su profundización, y se trabajó con información para el período comprendido entre 1995 y 2002, la cual era aún limitada.

La construcción de las curvas de rendimiento se realiza a partir de tasas específicas (Spot) para cada período. Un bono podrían ser varios bonos que pagan un solo cupón al final de cada período, es decir, bonos cero cupón. De esta forma, el precio de un bono está dado por la sumatoria de los valores presentes de cada bono descontados a una tasa spot específica, así:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + S(t_i))^{t_i}} + \frac{K}{(1 + S(t_i))^{t_i}}$$

---

<sup>1</sup> En esta época se desarrollan también los trabajos de Arango, Melo y Vásquez (2001), que encuentran para el momento mejores resultados con la metodología de Nelson-Siegel en contraste con la de McCulloch, además del trabajo de Julio, Mera y Revéz (2002), Estiman la curva Cero Cupón mediante splines cúbicos suavizados.

Donde;

P = Precio del bono

K = Valor nominal

$S(t_i)$  = Tasa spot en el momento  $i$ .

El factor de descuento está relacionado inversamente con las tasas spot de la siguiente forma:

$$Fd = \frac{1}{(1 + S(t))^t} \quad \text{En el caso donde se utilizan tasa compuestas anuales.}$$

Y  $Fd = e^{-t \cdot S(t)}$  En el caso de tasa compuestas continuas.

Dadas las tasas spot, se pueden encontrar las tasas futuras o tasas forward implícitas, que se asemejan a contratos futuros entre dos fechas pero con condiciones establecidas en el presente. Las tasa de este contrato a futuro se pueden relacionar directamente con las tasas spot. En forma matemática tendríamos la siguiente expresión:

$$(1 + S(t_2))^{t_2} = (1 + S(t_1))^{t_1} (1 + f_{t_1, t_2})^{t_2 - t_1}$$

Esta muestra la relación entre dos tasas utilizando dos tasas spot compuestas anuales.

De otro lado, los métodos econométricos especifican una función para la tasa spot, la tasa forward o la función de descuento de acuerdo con unos parámetros establecidos.

#### • ¿En qué consisten los modelos de estimación de las curvas de rendimiento?

En esta sección se exponen los métodos más utilizados para la estimación estática de la estructura a plazo de tasas de interés, a partir de precios observados en los mercados.

### 3.1 MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS O DE SPLINES

Los métodos no paramétricos o de splines corresponden a un conjunto de polinomios de algún orden unidos para conformar una curva que cumple cierta condición de suavidad. Los polinomios son definidos para ciertos intervalos separados por nodos, puntos en los cuales se cambia de una función a otra. En términos generales, un spline cumple con propiedades de continuidad y derivación de primer y segundo orden en los nodos.

#### • Método de McCulloch

McCulloch (1971) fue el primero en utilizar splines para modelar la estructura de tasas de interés. En su trabajo inicial, las funciones formuladas son cuadráticas, lo que produce una curva de descuento con poca flexibilidad además de generar curvas a plazo no muy suaves. McCulloch (1975) utiliza funciones cúbicas para mejorar tanto la flexibilidad de la curva como la forma de las curvas a plazo. Los splines cúbicos sirven como base para todos los métodos de splines encontrados en la literatura para la estimación de la estructura de tasas de interés.

#### • B-splines

Los B-splines son funciones a partir de las cuales se genera una base del espacio de splines, con lo que cualquier curva cúbica a trazos puede ser representada como combinación lineal de ellas Steeley (1991).

#### • Smoothing Splines

Los smoothing splines son splines cúbicos que incorporan, además, una función de penalización por variabilidad de la curva. Estos nacieron ante la necesidad de algunos bancos centrales de contar con métodos que se ajustaran mejor a los datos que los métodos parsimoniosos, pero que, a su vez, mantuvieran estabilidad en el largo plazo.

Los estudios realizados con este método se atribuyen a bancos centrales en EEUU e Inglaterra, como se ve en Fisher, Nychka y Zervos (1994), Waggoner (1997) y Anderson y Sleath (2001).

• **Splines exponenciales**

Los splines exponenciales son una variante de los splines. Vasicek y Fong (1982) argumentaron que una spline polinomial no podía ser forzada a producir curvas con tendencia exponencial, y propusieron una función de descuento, la cual es estimada utilizando un spline cúbico.

La estructura de tipos de interés puede expresarse mediante tres funciones distintas: función de descuento, función a plazo o forward o función al contado o spot. A continuación se indican las tres posibles funciones mediante las cuales se pueden presentar los tipos de interés, los modelos más utilizados y su autor:

**Tabla 1.** Posibles funciones para presentar los tipos de interés según las diferentes metodologías. FUENTE: Ruiz, E. Comparación de curvas de tipos de interés. Efectos de la integración financiera. Tesis doctoral inédita, Universidad de Barcelona, 2005.

<i>Función de descuento</i>	McCulloch (1971, 1975) <i>Splines</i> polinomicos
	Schaefer (1981) Polinomios de Bernstein
	Vasicek y Fong (1982) <i>Splines</i> exponenciales
	Steeley (1991) B- <i>Splines</i>
<i>Tipos de interés a plazo</i>	Coleman, Fisher y Ibbotson (1992) <i>Splines</i>
	Nelson y Siegel (1987) Función parsimoniosa
	Svensson (1994) Función parsimoniosa
	Wiseman (1994) Modelo exponencial
<i>Tipos de interés al contado</i>	Langtief y Smoot (1989) <i>Splines</i> cúbicos
	Mastronicola (1991) <i>Splines</i> cúbicos
	Fisher, Nychka y Zervos (1995) <i>Smoothing splines</i>
	Gourieroux y Scalliet (1994) <i>Smoothing splines</i>

### **3.2 PRINCIPALES CRITERIOS PARA EVALUAR LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN**

Los principales criterios que se deberán evaluar en cada método de modelación, siguiendo a Anderson y Sleath (2001), son:

- **Estabilidad**

Una estructura de tasas real no tendrá variaciones importantes al eliminar datos y tampoco mayor variabilidad en el largo plazo.

- **Suavidad**

Un factor importante es la consistencia de las curvas con las teorías tradicionales de la estructura de tasas de interés. Curvas más parsimoniosas tendrán mayor credibilidad en el largo plazo.

- **Ajuste**

Dependiendo del uso que se le dé a la curva generada, se deberá decidir qué nivel de ajuste es el que se requiere. Para el caso de valorar instrumentos, se necesitan curvas que generen errores bajos, mientras que si se estiman curvas como indicadores de política monetaria se le da mayor importancia a la forma de la curva.

- **Interpretabilidad económica**

Es decir, que se pueda explicar a partir de las teorías existentes, y las tasas de interés no tomen valores negativos.

### **3.3 FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS MODELOS**

Estimar estructuras de tasas de interés mediante procedimientos estáticos consiste en ajustar una curva a observaciones contemporáneas de tasas de interés. Se les denomina estáticos, pues no consideran la evolución de los tipos de interés en el tiempo, y su objetivo primor-

dial es proporcionar una adecuada valorización de los instrumentos observados en el mercado, que no contengan opciones incorporadas. Esta línea de investigación surgió en los países desarrollados, donde las tasas de interés a distintos plazos se encuentran disponibles, provenientes de fuentes confiables. Así, el problema se reduce a encontrar un método que complete la curva de tasas para aquellos plazos en que no existan precios de mercado.

### 3.3.1 Método de McCulloch

El autor modela la función de descuento mediante una combinación lineal de  $k$  funciones diferenciables  $f_j(t)$ :

$$d(t) = 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(t)$$

Donde  $k$  representa el grado de la spline, los  $f_j(t)$  son funciones de los nodos y los  $a_j$  son parámetros a estimar. Mediante esta formulación se pueden estimar los parámetros  $a_j$  de la función, usando regresión lineal lo que facilita la estimación. Se ajusta la curva utilizando los datos de los bonos con cupones mediante mínimos cuadrados ordinarios. El número de funciones a incorporar,  $k$ , se define arbitrariamente, aunque se obtiene un mejor ajuste si el número de funciones definidas es elevado. Sin embargo, este número ha de tener relación con el número de títulos disponibles en el mercado. McCulloch propone utilizar:

$$k = \left\| \sqrt{n} \right\|$$

Siendo  $\left\| \right\|$  la parte entera más próxima al resultado y  $n$  el número de título utilizados en el ajuste.

### 3.3.2 B-Splines

La estimación por este método se realiza suponiendo que la función de descuento  $d(t)$  es una combinación lineal de B-splines cúbicos.

$$d(t) = \sum_{i=1}^k a_i B_p^k(t)$$

En general, una función a plazo  $B$ -spline de  $k$ -ésimo grado se puede definir de la siguiente forma:

$$B_p^k(t) = \sum_{l=p}^{p+k+1} \left[ \prod_{h=p, p \neq l}^{p+k+1} \frac{1}{(t_h - t_l)} \right] (t - t_l)_+^k, \quad -\infty < t < \infty$$

Donde  $t$ , definido en los números reales, corresponde a cada periodo  $t_{ij}$  en que el bono recibe su respectivo cupón,  $k$  es el grado de  $a$  función  $B$ -Spline,  $p$  indica que la función  $B_p^k(t) \neq 0$  cuando  $t \in [t_p, t_{p+k+1}]$  con  $p = -k, \dots, n^* - 1$  que corresponde al  $p$ -ésimo componente de la base, siendo  $n^*$  el número de segmento en que se divide el espacio de aproximación, comprendido entre 0 y la fecha de maduración máxima observada entre todos los bonos. Los extremos comprendidos entre cada subsegmento comprendido entre 0 y  $n^* - 1$  se denominan nodos internos, denotados por  $t_p$  con,  $p = 0, 1, \dots, n^* - 1$ , en tanto que los nodos  $t_p$  con  $p \in [-k, -k + 1, \dots, 0)$  se denominan nodos extras. El subíndice  $+$  indica que una función de potencia truncada  $(t - t_l)_+^k$  es igual a  $\text{Max}[0, (t - t_l)^k]$ . A partir de lo anterior se puede definir el número de funciones de aproximación  $B$ -spline que se utilizan en el proceso de estimación de los parámetros de la función de descuento como  $L = n^* + k$ .

Steeley señala que el cálculo de la función presentada es bastante complejo e inconveniente. Como alternativa se plantea el uso de la fórmula recursiva propuesta por Powell (1981) que conduce a los mismos resultados y facilita los cálculos. La redefinición de la función  $B$ -Spline de  $k$ -ésimo grado para todo número real  $t \in [t_p, t_{p+1}]$  esta dada por:

$$B_p^k(t) = \frac{(t - t_p)B_p^{k-1}(t) + (t_{p+k+1} - t)B_{p+1}^{k-1}(t)}{(t_{p+k+1} - t_p)}$$



### 3.3.3 Smoothing splines

La estimación de la curva cero cupón por este método se realiza suponiendo que la tasa a plazo instantánea  $f(t)$  es una combinación lineal de  $B$ -Splines cúbicos.

$$f(t) = \sum_{i=1}^k a_i B_p^k(t)$$

Al igual que en McCulloch (1971) el número de parámetros está definido por el número de nodos. Un mayor número de nodos entregará un ajuste más perfecto pero con el problema del aumento de la variabilidad en la forma de la curva. Un número reducido de nodos entrega un ajuste precario. Fisher, Nychka y Zervos (1995) proponen penalizar el exceso de variabilidad en la función estimada mediante la siguiente función:

$$\lambda \int_0^T f''(t)^2 dt$$

La cual corresponde a la integral sobre el dominio de plazos de la segunda derivada al cuadrado de la función por el parámetro de penalización  $\lambda$ .

El parámetro de penalización es estimado mediante un método general de validación cruzada que considera los errores de bonos dejados fuera de la estimación con respecto a los errores de los bonos usados en la estimación. Un error mayor fuera de muestra implica mayor variabilidad mientras que errores grandes en los bonos dentro de la muestra implican un peor ajuste a los datos.

Waggoner (1997) propone utilizar  $\lambda$  variable por intervalos mejorando el ajuste para el corto plazo en el cual existe mayor variabilidad y aumentando la penalización en el largo plazo en donde existe mayor estabilidad.

Anderson y Sleath (2001) propone una forma funcional continua  $\lambda(t)$  también estimada mediante un método general de validación cruzada.

### 3.3.4 Splines exponenciales

Vasicek y Fong (1982) utilizan un spline cúbico para estimar la transformada de la función de descuento.

$$d(t) = a_0 + a_1e^{-\alpha t} + a_2e^{-2\alpha t} + a_3e^{-3\alpha t}$$

Donde los  $a_j$  y  $\alpha$  son parámetros a estimar. Lamentablemente los autores no reportan ningún resultado que permita confirmar sus hipótesis.

## 3.4 DIFERENTES MODELOS PARA CONSTRUIR LA CURVA DE RENDIMIENTOS

Existen distintas maneras de caracterizar los modelos que pretenden representar la estructura a plazos de tasas de interés. Tal vez, la más general pueda ser catalogarlos entre modelos que utilizan métodos teóricos y aquellos que usan métodos empíricos. Los modelos teóricos pretenden hacer una construcción rigurosa de acuerdo con algunas teorías particulares sobre la evolución, el comportamiento de las tasas de interés, formas explícitas sobre la estructura de los bonos con cupones y procesos de reversión a la media y comportamiento de la volatilidad de las tasas de interés. Estos modelos se basan en la identificación de elementos o factores que explican la dinámica de las tasas de interés. Estos factores son aleatorios o estocásticos, por tanto, sus niveles futuros son inciertos.

Los métodos teóricos se basan en el uso de la estadística para describir las propiedades de los factores estocásticos analizados. También se conocen como modelos de tasas de interés de corto plazo. Ejemplos de estos son los modelos de Vasicek (1977), Hull-White (1993), Cox-Ingersoll-Ross-CIR- (1985) y CIR extendido de Chen y Scott (1992), Brennan-Schwartz (1979), Heath-Jarrow-Morton –HJM- (1992) y HJM multifactor. Los modelos empíricos, son independientes de cualquier modelo o teoría sobre la estructura a plazos de tasas de interés. Los modelos teóricos tratan de explicar características típicas de la estructura a plazos tal como la forma en

qué esta evoluciona a través del tiempo. En contraste, los modelos empíricos sólo tratan de encontrar una representación cercana de la estructura a plazos de tasas de interés, tal como esta se presenta según datos reales.

Entre los principales métodos empíricos se encuentran: Bootstrapping propuesto por Fama y Bliss (1987), aplicación de splines propuestos por McCulloch (1971), Shea (1985), Fisher et al. (1994), Wegman (1985) y Buse (1977); métodos polinomiales como en Nelson y Siegel (1987), Svensson (1994) y Buono et al (1992) y el método de aproximación por máximo suavizamiento de Adams y Van Deventer (1994). Los primeros trabajos sobre la construcción de los modelos teóricos trataron de explicar el comportamiento de la tasa de interés en el corto plazo. Esto es, para un período infinitesimalmente pequeño. Se asume que las tasas de corto plazo siguen un proceso estadístico y las demás tasas de interés son funciones de aquellas. Estos modelos se conocen como modelos de un factor, aunque existen de dos y más factores. A continuación se presentan los principales modelos teóricos y empíricos que se han utilizado para construir la estructura a plazos de tasas de interés.

### **3.5 MODELOS TEÓRICOS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS**

La modelación de la estructura a plazos de tasas de interés es uno de los campos de mayor actividad investigativa en la teoría financiera. El propósito de esta sección es sentar las bases teóricas que soportan la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés. Para esto se exponen a continuación los modelos de Vasicek (1977), Hull-White (1993), Cox-Ingersoll-Ross-CIR- (1985) y CIR extendido de Chen y Scott (1992), Brennan-Schwartz (1979), Heath-Jarrow-Morton-HJM (1992) y HJM multifactor. No obstante, antes de avanzar en esta línea se plantean los elementos básicos para entender dichos modelos.

Los modelos que intentan obtener una representación cercana de la estructura y comportamiento de las curvas de rendimiento utilizan

procesos estadísticos para describir las propiedades estocásticas y llegar a una representación ajustada y razonable del comportamiento de las tasas de interés. Los primeros trabajos intentaron modelar el comportamiento de las tasas spot de corto plazo. Los trabajos más recientes en este sentido se fundamentan en la modelación de las tasas forward, por ejemplo, el modelo HJM (1992) modela las tasas forward en vez de las tasas spot. En los modelos de un solo factor se asume que las tasas de interés de corto plazo son variables aleatorias, es decir, su nivel futuro no se puede determinar con certeza. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas. Las variables discretas se mueven en intervalos discontinuos o con saltos. Las variables continuas se mueven sin saltos. Las tasas de interés se han tratado como variables continuas en la literatura, aunque en la práctica resultan ser discretas. Esto obedece a la facilidad en el tratamiento matemático de este tipo de variables.

Se asume que las tasas de interés de corto plazo siguen un proceso estocástico. En este sentido, a lo sumo, es posible la estimación de un intervalo en el cual se encontrarán sus posibles estados futuros, más que en valores puntuales del mismo. Sin embargo, el proceso mediante el cual las tasas de interés evolucionan en el tiempo es posible de modelarse. Esto es precisamente lo que intentan hacer los modelos de un solo factor para tratar de capturar el comportamiento de dichas tasas de interés de corto plazo. En el siguiente apartado se sigue de cerca a Choudhry (2005).

El análisis de los procesos estocásticos usa herramientas utilizadas inicialmente en la física. El cambio instantáneo de un valor en un intervalo pequeño de tiempo se denota por  $dx$ . Generalmente se asume que los cambios en dichas variables son gaussianos. Las innovaciones o choques al proceso son aleatorios y se asume que provienen de un proceso generalizado de Wiener o Movimiento Browniano Geométrico<sup>1</sup>. Una variable que siga un proceso de Wiener es una variable aleatoria que denotaremos por  $x$  o  $z$ . Esta variable se distribuye normal estándar. Consideremos, por ejemplo,

<sup>1</sup> Para una mejor comprensión de estos procesos ver Ross (1996).

la tasa de interés  $r$  de un bono cero cupón. El cambio en  $r$  denotado por  $dr$ , sigue un proceso generalizado de Wiener, formalmente:

$$dr = dz$$

Los cambios instantáneos de la tasa de interés son escalados por la volatilidad del proceso que denotaremos por  $\sigma$ , así:

$$dr = \sigma dz$$

El valor que asume  $\sigma$  debe ser estimado, pues la volatilidad es una variable no observable.

Se ha supuesto que la tasa de interés puede describirse mediante un proceso estocástico que sigue un movimiento browniano que varía sin una tendencia determinística. Sin embargo, esta definición es incompleta, pues asume que las tasas de interés crecen o caen indefinidamente. No obstante, la teoría económica aboga por la existencia de un equilibrio de las tasas de interés en el largo plazo (estado estacionario). Por lo tanto, se debe especificar un mejor modelo que tenga en cuenta esta característica de las tasas de interés. Es decir, que las tasas de interés se mueven en un ciclo, algunas veces al alza, otras a la baja. En este modelo se debe incluir un segundo término que capture el hecho de que las tasas de interés siguen un comportamiento en una dirección dada en el corto plazo. Formalmente tenemos:

$$dr = a dt + \sigma dz$$

donde:

$dr$  = Cambio en la tasa de interés de corto plazo

$a$  = Expectativa de cambio o drift

$dt$  = El cambio incremental en un intervalo infinitesimal de tiempo

$\sigma$  = Desviación estándar de los movimientos de los precios

$dz$  = Proceso aleatorio, movimiento browniano o proceso de Wiener.

Esta ecuación es similar a la descrita en Vasicek (1977), Ho y Lee (1986), Hull y White (1991). En pocas palabras, la ecuación establece que el cambio en las tasas de interés tiene un componente determinista dado por  $adt$  y otro estocástico o aleatorio capturado por  $\sigma dz$ . Dado que este proceso sigue un movimiento browniano, goza de dos propiedades importantes: 1. La tasas de cambio o drift es igual al cambio esperado en la tasa de interés de corto plazo, si el drift es cero, el cambio también será cero. 2. La varianza del cambio de las tasas de interés en el corto plazo es igual a  $T$ , y su desviación estándar igual a  $\sqrt{T}$ .

El modelo anteriormente expuesto puede mejorarse si, además, se involucra un factor que haga que la tendencia en el cambio de las tasas de interés vuelva a su valor de equilibrio en el largo plazo. Esto generalmente se conoce en la literatura como procesos de reversión a la media. La especificación del modelo es la siguiente:

$$dr = a(b - r) dt + \sigma dz$$

donde:

$b$  = El nivel de equilibrio de la tasas de largo plazo.

$a$  = La velocidad de reversión a la media, conocida también como el drift

La anterior ecuación se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Cuando  $r$  está por debajo o por encima de  $b$ , retornará a  $b$ , aunque choques aleatorios generados por  $dz$  perturbarán su evolución.

### **3.6 MODELOS DE CURVAS DE RENDIMIENTO DE UN SOLO FACTOR**

#### **3.6.1 El modelo de Vasicek (1977)**

Este modelo fue el primer modelo de estructura a plazos de tasas de interés descrito en la literatura. Es un proceso de un solo factor basado en el equilibrio de las tasas de interés que asume que las tasas de

interés de corto plazo siguen un proceso gaussiano, e incorpora la dinámica de reversión a la media. Este modelo goza de gran aceptación entre profesionales y académicos por su fácil tratamiento matemático y estadístico. Además, es fácilmente aplicable a la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés. No obstante, el modelo no logra captar adecuadamente el no arbitraje de precios de los bonos que actualmente se negocian en el mercado. El modelo de Vasicek se expresa de la siguiente manera<sup>1</sup>:

$$dr = a(b - r) dt + \sigma dz$$

donde:

$a$  = Es la velocidad de reversión a la media

$b$  = El nivel de reversión a la media de  $r$

$z$  = Proceso estándar de Wiener con media cero y desviación estándar 1.

Según este modelo el precio en el momento  $T$  está dado por la siguiente ecuación:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

donde:

$r(t)$  = Es la tasa de interés de corto plazo vigente en  $t$ .

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

Además,

$$A(t, T) = \exp \left[ \frac{(B(t, T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2 / 2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right]$$

En el modelo de Vasicek, la tasa de interés  $r$  es normalmente distribuida, lo que hace que exista una probabilidad positiva de que

<sup>1</sup> Se pueden encontrar en la literatura, notaciones diferentes para el modelo de Vasicek, por ejemplo:  $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dz$  o  $dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dZ$

la tasa de interés sea negativa; esto no tiene sentido económico. No obstante, esta situación se presenta dependiendo de los valores iniciales de  $r$  y los demás parámetros. Cuando estos son bajos, la probabilidad de que esto ocurra es alta. Esta posibilidad es incompatible con la teoría de no arbitraje, sin embargo, el modelo es ampliamente utilizado dadas sus robustas estimaciones.

### 3.6.2 Modelo de Hull-White (1993)

Este modelo utiliza el modelo de Vasicek como punto de partida para ajustarlo a una curva de rendimientos observada en el mercado. Se conoce, en ocasiones, como una extensión del modelo de Vasicek con una tendencia en función del tiempo. El modelo es popular entre los profesionales debido a que con éste es posible estimar una curva teórica de rendimientos idéntica a la observada en el mercado que puede ser utilizada para valorar títulos, derivados y realizar coberturas.

El modelo se expresa de la siguiente manera:

$$dr = a \left( \frac{b(t)}{a} - r \right) dt + \sigma dz$$

donde:

$a$  = Es la velocidad de reversión a la media

$b(t)/a$  = Es la reversión a la media en función del tiempo

Dado el modelo anterior el precio de un bono viene dado por:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

Donde:

$r(t)$  = Tasa a corto plazo en el tiempo  $t$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$



$$\ln A(t, T) = \ln \left[ \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right] - B(t, T) \frac{\partial P(0, t)}{\partial t} - \frac{v(t, T)^2}{2}$$

y

$$v(t, T)^2 = \frac{1}{2a^3} \sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1)$$

### 3.6.3 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross, modelo –CIR- (1985)

Este modelo data de 1977, aunque fue publicado sólo hasta 1985. Es un modelo de un solo factor. Al igual que el modelo de Vasicek define los movimientos en las tasas de interés en función de la dinámica de las tasas de interés de corto plazo. Difiere de éste, en cuanto incorpora una característica adicional, que vincula la variación de las tasas de interés en función del nivel de las mismas. Esta característica hace que el modelo no genere tasas de interés negativas. Así mismo, es capaz de capturar el comportamiento de las tasas de interés en términos de la volatilidad de las mismas. Cuando las tasas de interés son altas (bajas), su volatilidad también lo es. El modelo CIR se expresa de la siguiente forma:

$$dr = k(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

donde:

$k$  = Velocidad de reversión de la media

El precio de un bono cero cupón de acuerdo con el modelo viene dado por:

$$P(r, \tau) = A(\tau) e^{-B(\tau)r}$$

donde:

$\tau$  = Plazo de maduración del bono, es decir:  $(T - t)$

$$A(\tau) = \left[ \frac{2\gamma e^{(\gamma + \lambda + k)\frac{\tau}{2}}}{g(\tau)} \right]^{\frac{2kb}{\sigma^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{-2(1 - e^{-\gamma\tau})}{g(\tau)}$$

$$g(\tau) = 2\gamma + (k + \lambda + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1)$$

$$\gamma = \sqrt{(k + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

El parámetro  $\lambda$  debe ser preespecificado con el objetivo de ajustar el nivel de las tasas y vincular la prima de riesgo asociada con los bonos de más largo plazo. Sin embargo, esta determinación es una de las principales debilidades del modelo, pues no son fáciles de establecer. Van Deventer (1997) y Fleseker (1993) citados por Choudhry (2005) realizan una buena caracterización de este aspecto.

### 3.6.4 El modelo de Nelson y Siegel

En particular, en Colombia se ha usado el método de Nelson y Siegel que se incluye dentro de las metodologías econométricas de tipo paramétrico y busca minimizar el número de parámetros suponiendo que la tasa forward implícita es solución a una ecuación diferencial de segundo orden con raíces iguales y repetidas. La función se expresa de la siguiente forma:

$$F(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \beta_2 \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Donde  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$  son los parámetros para estimar el modelo.

En tiempo discreto y desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$P(t, T = m) = \frac{C_1}{(1 + r(t, 1))} + \frac{C_2}{(1 + r(t, 2))^2} + \dots + \frac{C_m + M}{(1 + r(t, m))^m}$$

El objetivo de la metodología es:

$$\min \sum_{j=1}^J [\hat{P}_j(t, m) - P_j(t, m)]^2 = \sum_{j=1}^J \varepsilon_j^2$$

donde:

$$\hat{P}_j(t, m) = \sum_m C_j \partial(r_{t,j}(m, \Theta)) + M \partial(r_{t,j}(m, \Theta))$$

$$\partial(r_{t,j}(m, \Theta)) = \exp(-r_{t,j}(m, \Theta)m)$$

y

$$r_{t,j}(m, \Theta) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)} \right) + \varepsilon_{t,j}$$

$$\text{con } \varepsilon_{t,j} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2)$$

$$\text{Si } (\tau_1 = \tau_2)$$

$$r_{t,j}(m, \Theta) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) - \beta_2 e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)} + \varepsilon_{t,j}$$

El método de Nelson y Siegel (1987) intenta representar la estructura a plazos de tasas de interés a partir de la utilización de la siguiente función de tasas forward:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} - \beta_2 \left(\frac{m}{\tau}\right) e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}$$

donde:

$f(m)$  es la tasa forward para el plazo en años  $m$

$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$  es un conjunto de cuatro parámetros a estimar.

Además, dado que las tasas spot son un promedio de las tasas forward futuras esperadas, podemos utilizar la expresión siguiente para encontrar las tasas spot:

$$S(m) = \frac{1}{(m)} \int_0^m f(s) \partial(s)$$

Integrando la función de tasas forward respecto a  $m$ , en la anterior expresión resulta:

$$S(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}}{\frac{m}{\tau}} \right) - \beta_2 e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)}$$

Cuando  $m$  tiende a infinito, las tasas spot y las tasas forward tienden a  $\beta_0$ , el cual debe ser positivo.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \beta_0$$

Asimismo, cuando  $m$  tiende a cero, la tasa spot será igual a  $(\beta_0 + \beta_1)$ .

$$\lim_{m \rightarrow 0} S(m) = \beta_0 + \beta_1$$

Claramente,  $\beta_1$  representa la desviación de las tasas de interés de su valor de equilibrio asintótico  $\beta_0$ . Adicionalmente,  $(\beta_0 + \beta_1)$  debe ser un valor positivo, además puede interpretarse como el nivel de la estructura a plazos de tasas de interés. El parámetro  $\beta_2$  es responsable

de la pendiente de la curva. Valores negativos de  $\beta_2$  llevan a que la curva tenga forma de U. Valores positivos indican curvas con forma de joroba. Finalmente, el parámetro  $\tau$  muestra qué tan pronunciada es la curvatura de la curva. Cuando  $\tau$  es alto, la curva es bastante cóncava. Cuando es bajo, la curva se aproxima a una línea recta, es decir, se aplanan.

El objetivo de la metodología de Nelson y Siegel es minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado de los precios de los títulos que se utilizan para hacer el cálculo de los parámetros de la función propuesta. La optimización se hace a partir de un proceso iterativo en donde se utilizan las tasas spot dadas por la función en la determinación de los precios estimados, y luego se procede a realizar la minimización de la suma de los errores al cuadrado entre los precios estimados y los precios observados en el mercado.

Esto se representa formalmente de la siguiente forma:

$$\min \left( \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i)^2 \right)$$

$$\varepsilon_i = \hat{P}_i - P_i$$

### 3.6.5 El modelo de Svensson

Para mejorar la eficiencia de la función propuesta por Nelson y Siegel en cuanto a flexibilidad y ajuste, Svensson(1994) realiza una extensión de este modelo, adicionando un término que permite estimar una segunda causa de curvas en forma de joroba. Esta precisión se logra perdiendo un poco de parsimonia en el modelo, pues es necesario estimar dos parámetros adicionales  $\beta_3$  y  $\tau_2$ . La función de las tasas forward se convierte en:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} - \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) e^{\left(\frac{-m}{\tau}\right)} + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau_2}\right) e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}$$

Donde  $\beta_3$  y  $\tau_2$  cumplen las mismas funciones que  $\beta_2$  y  $\tau_1$  explicadas anteriormente. Así, para estimar las tasas spot se debe integrar respecto a  $m$ .

$$S(m) = \frac{1}{(m)} \int_0^m f(s) \partial(s)$$

Se llega a la siguiente función:

$$S(m) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)} \right)$$

Se sigue el mismo procedimiento de optimización para llegar a la estimación de los seis parámetros. Formalmente:

$$\min \left( \sum_{i=1}^N (w_i \varepsilon_i)^2 \right)$$

$$w_i = \frac{1/D_i}{\sum_{j=1}^N 1/D_j}$$

$$\varepsilon_i = \hat{P}_i - P_i$$

Sujeto a:

$$0 \leq r(m_{\min})$$

$$0 \leq r(m = \infty)$$

$$\exp(-r(m_k)m_k) \geq \exp(-r(m_{k+1})m_{k+1})$$

$$r_j(m, \Theta) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)} \right)$$

Con  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$

$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2)$

### 3.7 APLICACIONES DE LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

Los métodos de estimación de la estructura de tasas de interés explicados anteriormente son usados por algunos bancos centrales de economías desarrolladas.

**Tabla 2.** Metodologías aplicadas para la estimación de curvas de rendimiento según distintos países

Alemania	SV	Francia	SV-NS
Bélgica	SV-NS	Italia	NS
Canadá	SV-SS	Japón SS	SS
Colombia	NS	Noruega SV	SV
Costa Rica	NS	Perú SV	SV
España	NS	Reino Unido SV	SV
Estados Unidos	SS-SV	Suecia SV	SV
Finlandia NS	NS	Suiza SV	SV

### 3.8 CRÍTICAS A LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

Pese a la extensa literatura dedicada a este tema, no existe consenso en los ámbitos académico ni profesional, sobre cuál es el modelo válido para establecer la curva de tipos de interés, si bien algunos modelos tienen más aceptación que otros.

Las funciones  $f_j(t)$  son cuadráticas en la formulación de McCulloch (1971), lo que produce una curva de descuento con poca flexibilidad además de generar curvas forward no muy suaves. McCulloch (1975) utiliza funciones cúbicas para  $f_j(t)$  mejorando tanto la flexibilidad de la curva como la forma de las curvas a plazo.

Una de las desventajas de los splines cúbicos estimados mediante regresión es que tienden a ser muy inestables lo que se traduce en estructuras de tasas de interés oscilantes las cuales son poco creíbles en la práctica.

Respecto de las B-splines, se puede decir, que para obtener una curva de tipos a plazo suficientemente suave, es necesario utilizar un spline de grado tres, como mínimo. Esta formulación también genera splines cúbicos, idénticos a los generados por el método de McCulloch (1975), pero, a su vez, permite resumir en menos parámetros la función en una formulación numéricamente estable. La ventaja de los B-splines es que están contruidos para incorporar condiciones de suavidad en los nodos, de forma fácil, y presentan una forma funcional que se traduce en sistemas lineales.

La estimación con funciones splines tiene la desventaja de producir curvas con demasiada fluctuación. Para solucionar este problema, se propone utilizar smoothing splines, los cuales penalizan la función objetivo de la suma de la minimización de los errores cuadrados, por medio de una medida de fluctuación, calculada como la integral de la segunda derivada al cuadrado de la función de la tasa a plazo por un parámetro de penalización  $\lambda$ .

Los precursores de los splines exponenciales defienden que el uso de la función exponencial permite obtener una función de descuento acorde con su propia estructura y, por lo tanto, los tipos a plazo resultantes no presentan la dispersión que se obtiene en el modelo de McCulloch (1971, 1975).

Resultados de las estimaciones de la curva de rendimiento de TES Totales en Colombia durante 2005 y 2006 con las metodologías de Nelson-Siegel y Svensson.



Las estimaciones fueron realizadas a partir de las operaciones realizadas en el mercado y reportadas en el sistema SEN del Banco de la República. En dicho sistema se registran las operaciones por montos superiores a 500 millones de pesos, excluyendo operaciones Repo; de otro lado, fue seleccionado el día jueves por sus altos volúmenes de negociación de los títulos y basados en consideraciones teóricas y funcionales del mercado escoger los días de subasta, el inicio o fin de semana, días en los cuales podría existir información que distorsiona el mercado. Hechas estas consideraciones, encontramos para ambas metodologías convergencia y pudimos estimar los parámetros correspondientes.

Para las estimaciones se realizó un único filtro basado en el volumen transado durante el día de la estimación. Éste consistía hacer una sumatoria del volumen de cada título, iniciando por el de mayor volumen, y continuar de manera descendente hasta que la suma de los valores completara el 95% del volumen total negociado durante el día; los títulos faltantes no fueron tenidos en cuenta<sup>1</sup>.

La decisión de comparar estos modelos parte la importancia que tiene el modelo de Nelson & Siegel como referente que la Bolsa de Valores de Colombia utiliza actualmente para el cálculo de la curva CEC, y lo que se propone es sugerir un mejor modelo para realizar este tipo de estimaciones. La razón por la cual se utiliza Svensson se debe a que bajo este modelo se agregan dos parámetros más lo que le da mayor flexibilidad al permitir una segunda curva dentro de la función de tasas forward.

En las estimaciones realizadas se calcularon los parámetros inicialmente en Excel, los cuales se optimizaban por medio de la minimización de los errores al cuadrado, siendo el error la diferencia entre los precios observados y los estimados de los títulos negociados en el SEN en un día; obtenidos estos se utilizaron como punto de partida para el cálculo de los parámetros del resto del año que se realizaron en Matlab.

---

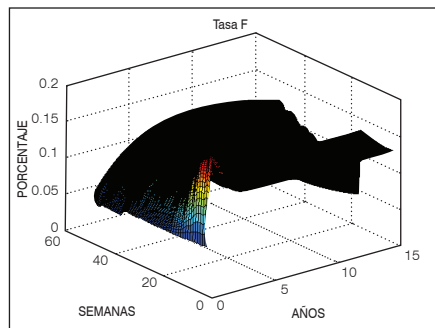
<sup>1</sup> Se seleccionaron los días jueves para las estimaciones dado que es un día de transacciones menos afectadas por la colocación de TES y por el cierre o apertura de la semana, como lo sugieren Arango, Melo y Vásquez, (2001)

Los parámetros calculados fueron sometidos a unas pruebas de estadística descriptiva con el fin analizar su comportamiento y, por lo tanto, su estabilidad, condición con la tiene que cumplir el modelo para que las curvas que éste arroje tengan interpretación económica. Concluimos que son satisfactorios y cumplen con el objetivo de estabilidad.

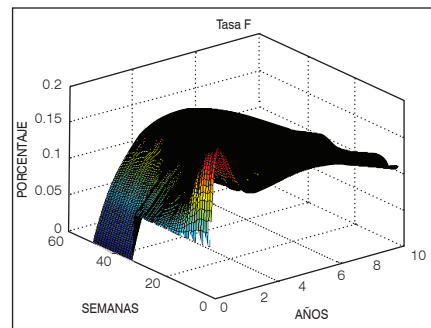
Las gráficas fueron desarrolladas en Matlab en 3D a manera de superficie donde se muestra todo el año y tienen como variables las semanas, el plazo al vencimiento, y las tasas arrojadas por el modelo.

**Tabla 3.** Estadísticos de comparación de los estimadores para la construcción de curvas de TES Totales en el mercado colombiano en 2005 y 2006 mediante las metodologías de Nelson-Siegel y Svensson. (Cálculos propios)

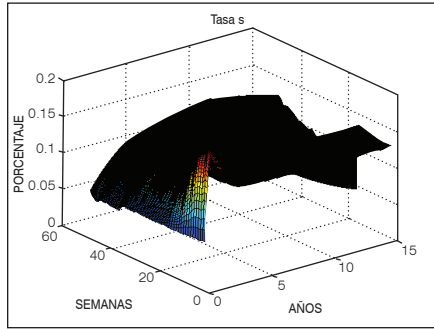
Nelson-Siegel						
	2005			2006		
	Media	Error típico	desvest	Media	Error típico	desvest
B0	0,038286	0,009182215	0,064928064	0,088333333	0,000489343	0,003495
B1	0,020724	0,008336131	0,05912338	0,02326275	0,00070385	0,005026
B2	0,254444	0,01454459	0,10284581	-0,0352549	0,00092974	0,00664
Tau	4,734714	0,461694863	3,2646758687	0,89062157	0,02212757	0,158022
Svensson						
B0	0,001886	0,001886	0,013333603	0,088212	0,00050557	0,003575
B1	0,059712	0,00187595	0,01326499	-0,023344	0,00067197	0,004752
B2	0,09006	0,01911334	0,1351517	-0,461556	0,01137221	0,080414
B3	0,384066	0,00613586	0,04338712	0,426936	0,01160104	0,082032
Tau1	0,564414	0,06834219	0,48325223	0,603724	0,011470008	0,081106
Tau2	4,657034	0,08359895	0,59113387	0,545222	0,00967307	0,68399



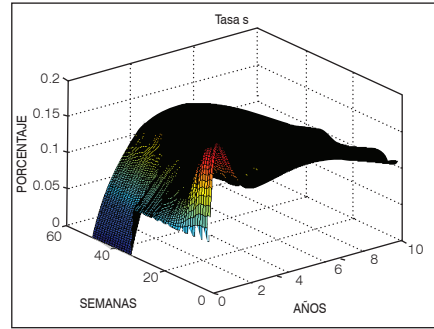
**Gráfico 1.** Curvas tasa forward para el año 2005 con Nelson-Siegel



**Gráfico 2.** Curvas tasa forward para el año 2005 con Svensson



**Gráfico 3.** Curvas tasa spot para el año 2005 con Nelson-Siegel



**Gráfico 4.** Curvas tasa spot para el año 2005 con Nelson-Siegel

La prueba de ajuste calculada para cada año fue el RMSE<sup>1</sup> el cual utilizamos como criterio de comparación entre ambos modelos. Este es uno de los criterios más importantes, ya que mide que tan bien el modelo, y su procedimiento de estimación asociado describe los datos de la muestra. La medida de ajuste que se calculará será la raíz cuadrada del promedio de los errores al cuadrado (RMSE). Esta medida se puede interpretar como la desviación estándar de los errores.

Se observa que los parámetros estimados mediante la metodología de Svensson son menos volátiles respecto a los estimados con Nelson-Siegel.

<sup>1</sup> El objetivo de ambas metodologías de Nelson-Siegel y Svensson es minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado de los precios de los títulos que se utilizan para hacer el cálculo de los parámetros de la función propuesta. No obstante, la optimización se hace a partir de un proceso iterativo en donde se utilizan las tasas spot dadas por la función en la determinación de los precios estimados y luego se procede a realizar la minimización de la suma de los errores al cuadrado entre los precios estimados y los precios observados en el mercado, lo cual viene dado por:

$$\min \sum_{j=1}^J [\hat{P}_j(t, m) - P_j(t, m)]^2 = \sum_{j=1}^J \epsilon_j^2$$

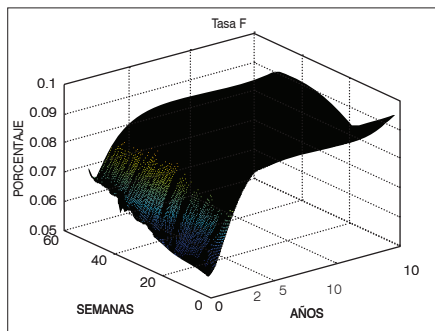
No obstante, también es posible realizar las estimaciones por tasa, lo cual es probable que mejore aún más el ajuste con la metodología de Svensson principalmente. Cuando se estima mediante precios se debe ser conciente que los precios son altamente sensibles a los cambios en las tasas de interés de largo plazo y menos sensibles a los cambios en las tasas de interés de corto plazo, fenómeno que no sucede con la estimación por tasas de interés, donde los datos observados podrían ser mejor ajustados a los estimados.

Con la metodología de Svensson se observa mayor suavidad y estabilidad en las curvas en las diferentes estimaciones semanales realizadas durante 2005. En las primeras semanas, Svensson captura varios niveles y cambios de curvatura en la estructura de plazos de los TES Totales; en las semanas finales se refleja una mayor concavidad y caída de las tasas en los mayores vencimientos, característica más acorde con el mercado de TES en dicho momento, debido entre otros elementos a las expectativas de control y reducción de la inflación en nuestro país para el cierre del año 2005 en su momento.

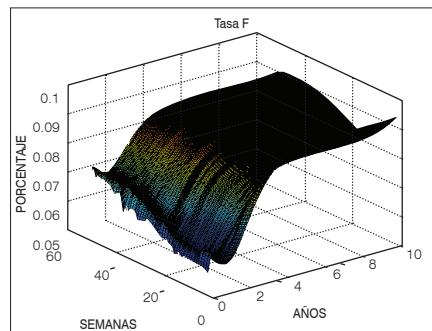
Las gráficas anteriores muestran la curva de rendimiento de la tasa spot o del tipo de interés vigente en el mercado colombiano en una semana determinada del año 2005 para un plazo  $m$  establecido, lo cual corresponde a la Curva de TES tasa fija, CEC pesos o curva cero cupón estimada por la Bolsa de Valores de Colombia, la cual se estima mediante Nelson-Siegel. Se muestran también las curvas semana a semana con la metodología de Svensson.

**Tabla 4.** RMSE (Root Mean Squared Error). Minimización del cuadrado de los errores de los precios 2006.

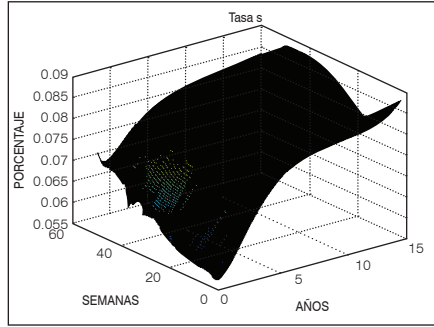
	Nelson & Siegel	Svensson
Año 2006	0.0451426	0.009741



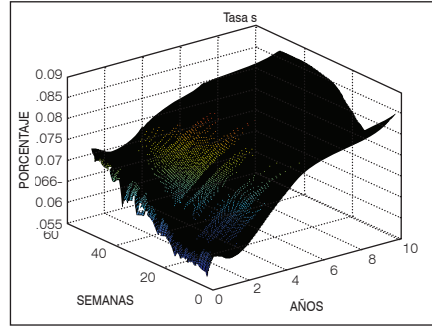
**Gráfico 5.** Curvas tasa forward para el año 2006 con Nelson-Siegel



**Gráfico 6.** Curvas tasa forward para el año 2006 con Svensson



**Gráfico 7.** Curvas tasa forward para el año 2006 con Nelson-Siegel



**Gráfico 8.** Curvas tasa forward para el año 2006 con Nelson-Siegel

Se puede observar que el RMSE es mucho menor con la metodología de Svensson, lo cual significa que esta metodología proporciona un mejor ajuste de datos entre los precios estimados y los precios observados en el mercado.

Para explicar el argumento anterior observemos los resultados aplicando el modelo de Nelson-Siegel para un día cualquiera de 2006.

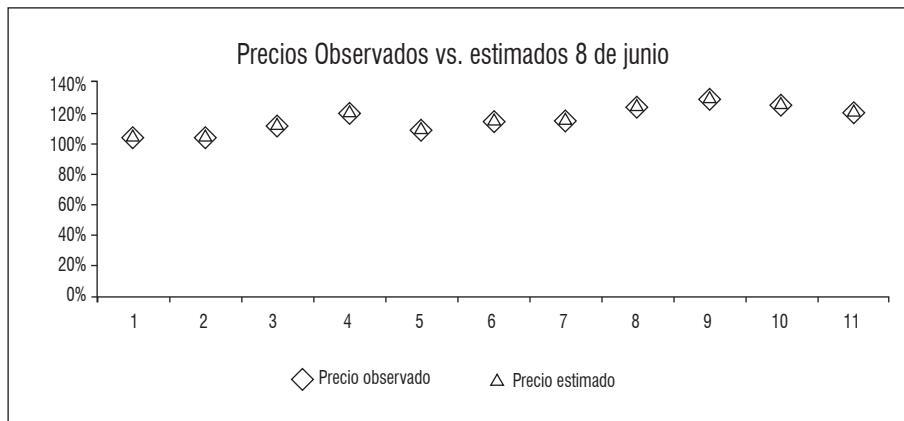
**Tabla 5.** Observación de resultados para un día de 2006 aplicando el modelo de Nelson-Siegel

<i>Resultados aplicando el modelo de Nelson y Siegel (1987) para el 8 de junio de 2006</i>							
<i>Nemotécnico</i>	<i>Cupón</i>	<i>Maduración</i>	<i>Precio limpio</i>	<i>Precio Sucio (observado)</i>	<i>Precio Sucio (Estimado con Nelson y Siegel)</i>	<i>Error de estimación (puntos básicos)</i>	<i>Duración</i>
TFIT01270906	6,000%	27/09/2006	99,449%	10,690%	103,805%	-12	0,292
TFIT03110408	10,000%	11/04/2008	101,759%	103,430%	103,753%	-32	1,694
TFIT04091107	12,000%	09/11/2007	104,402%	111,471%	111,579%	-11	1,327
TFIT05100709	12,500%	10/07/2009	108,063%	119,570%	119,665%	-10	2,544
TFIT05140307	15,000%	14/03/2007	104,704%	108,402%	108,630%	-23	0,722
TFIT05250706	15,000%	25/07/2006	100,778%	114,011%	114,061%	-5	0,119
TFIT06120210	13,000%	12/02/2010	110,267%	114,505%	114,498%	1	2,953
TFIT07220808	15,000%	22/08/2008	111,270%	123,311%	123,684%	-37	1,890
TFIT10120914	13,500%	12/09/2014	118,113%	128,136%	128,718%	-58	5,324
TFIT10260412	15,000%	26/04/2012	122,541%	124,390%	123,530%	86	4,224
TFIT15240720	11,000%	24/07/2020	109,708%	119,321%	119,246%	8	7,486

**Tabla 6.** Resumen de la observación de resultados para un día de 2006 aplicando el modelo de Nelson-Siegel

<i>Junio 8 de 2006</i>		
<i>Precio estimado Excel</i>	<i>Precio estimado Infoval</i>	<i>Diferencia en puntos básicos</i>
103,805%	103,802%	0,36
103,753%	103,682%	7,15
111,579%	111,526%	5,25
119,665%	119,552%	11,29
108,630%	108,609%	2,07
114,061%	114,060%	0,07
114,498%	114,379%	11,84
123,684%	123,592%	9,18
128,718%	128,721%	-0,30
123,530%	123,450%	7,97
119,246%	119,169%	7,74

En la tabla anterior se muestra como ejemplo la diferencia en puntos básicos entre el precio de Infoval y las estimaciones propias en Excel Visual-Basic con Solver.



**Gráfico 9.** Precios observados vs. precios estimados para un día de 2006 con Nelson-Siegel

Se desprende del ejercicio anterior que con la metodología de Nelson-Siegel hay un ajuste aceptable, no obstante existen diferencias importantes en puntos básicos con los precios observados en Bolsa; Svensson mejora de manera significativa esta diferencia entre precios observados y precios estimados.

### **3.9 CONCLUSIONES**

Los estadísticos de ajuste muestran una volatilidad menor en los parámetros  $B_0$  y  $B_1$  con la metodología de Svensson en los años 2001, 2005 y 2006.

El RMSE (Root Mean Squared Error) o minimización del cuadrado de los errores de los precios es menor bajo la metodología de Svensson, lo cual implica un mejor ajuste. Este mejor ajuste y la menor volatilidad de los parámetros por la metodología de Svensson principalmente en años más líquidos del mercado como 2005 y 2006 presenta ventajas debido a la parsimonia de la curva y logra capturar cómo se invierte la curvatura en el tramo corto de las tasas forward en entre 2 y 3 años.

La baja liquidez del mercado de bonos corporativos en Colombia y la falta de homogeneidad en las calificaciones de dichos títulos con diferentes tiempos de vencimiento imposibilitan la construcción de curvas de rendimiento por métodos paramétricos, encontrándose recientemente diferencias importantes en puntos básicos entre las valoraciones de títulos y los precios observados en el mercado.

En posteriores trabajos, en la medida que el mercado de TES Totales siga teniendo liquidez importante y dado que el riesgo de incumplimiento es homogéneo, se podría explorar el método de splines cúbicos, para el mercado de deuda pública en Colombia. Podría esperarse de este método un ajuste mucho mejor incluso al ya buen ajuste que se da mediante la metodología de Svensson; esta forma de estimación fue realizada para Colombia por Reveiz (2002) con información entre 1995-2002; hoy el mercado de TES es mucho más líquido y existen títulos con nuevos y mayores vencimientos.

Para posteriores utilizaciones de modelos dinámicos de tasa de interés es indispensable contar previamente con estimaciones que produzcan un buen ajuste de datos, como Svensson, para el caso colombiano, del mercado de deuda pública de TES tasa fija.

La valoración de bonos y portafolios cambia de manera importante, si se usan los resultados de una u otra metodología; con la metodología de Svensson los portafolios reflejarían mejor su valor a precios de mercado.

### 3.10 BIBLIOGRAFÍA

- Nelson, Charles R y SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. En *Journal of business*. Vol.60, Nro.3. 1987. Páginas 473-489.
- ARANGO, Luis Eduardo, MELO, Luis Fernando y VÁSQUEZ, Diego Mauricio. Estimación de la Estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia”. Borradores de Economía No 196. Banco de la República.
- JULIO, Juan Manuel, MERA, Silvia Juliana y REVÉIZ, Alejandro. La curva spot (Cero Cupón): estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos. En Borradores de Economía. No 213. Banco de la República.
- MALKIEL, Burton G. The term structure of interest rates: expectations and behavior patterns. Princeton: Princeton University Press. Diciembre, 1966.
- MALKIEL, Burton G. The efficient market hypothesis and its critics. En *Journal of economic perspectives*. Vol.17, No.1. Octubre 2003. Páginas 59-82.
- Reflections on the efficient markets hypothesis: 30 years later. *The financial review*. Vol. 40, No. 1. Febrero 2005.
- ARANGO, Luis Eduardo, MELO, Luis Fernando y VÁSQUEZ, Diego Mauricio. Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones b-spline cúbicas.
- NELSON y SIEGEL. Parsimonious modeling of yield curves. En *Journal of bussines*, Vol.70, Issue 4. Páginas 473-489.
- NOVALES, Cinca, FERREIRA, Alfonso y GARCÍA, Eva. Beyond single-factor affine term structure models. En *Journal of financial econometrics*. Vol.2, N° 4. Páginas 565-589.



- BOLDER, David y STRELISKI, David. Yield curve modelling at the bank of Canada. En Technical Report No. 84, Rapport technique No 84, Bank of Canada. 1999
- MONETARY AND ECONOMIC DEPARTMENT. En BIS papers No 25, Zero-coupon yield curves: technical documentation, Switzerland.
- STEELEY, J.M. Estimating the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals. En Journal of Business & Accounting. Vol.18, Nro.4. Páginas 513-528.
- SVENSSON, L.E.O. Estimating and interpreting forward interest rates. En NBER Working Paper N° 4871. Sweden: 1992-1994.



Riesgos Financieros y Económicos  
Se terminó de imprimir en agosto de 2008  
en Logofomas S.A.  
Para su elaboración se utilizó papel Propal-libros 75 gr  
en páginas interiores y en carátula Propalcote 250 BD  
la fuente usada es Times New Roman a 12.5 puntos