UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

MEDIDAS DE RIESGO FINANCIERO EN LA OPTIMIZACIÓN DE INVENTARIOS:

Un caso de estudio en las empresas prestadoras de servicios de telecomunicaciones

Carlos Enrique Londoño Estrada

Carlos.Londono@epm.com.co

María Andrea Arias Serna
marias@udem.edu.co

Juan Guillermo Murillo Gómez

jgmurillo@udem.edu.co

FACULTAD DE INGENIERÍAS
MAESTRÍA EN FINANZAS

Medellín-Colombia
20 de noviembre de 2015

Tabla de contenido

RESUMEN

En el presente trabajo se aborda el modelo de inventario estocástico de revisión continua (Q, r) para un artículo con demanda Poisson en el cual se hace un pedido de Q unidades cada vez que la posición del inventario alcanza el punto de pedido r, el cual es recibido después de un tiempo de reposición L. La estructura de la función de costo está representada como una integral de los costos esperados sobre las diferentes posiciones del inventario y la política de optimización es hallar la solución de $min_{(Q,r)} c(Q, r)$, bajo esta formulación, el modelo busca obtener el mínimo costo esperado tanto como sea posible, sin embargo como se afirma en Zipkin [1] tal criterio puede resultar insuficiente al momento de capturar información respecto a grandes pérdidas sin control. Con base en lo anterior, y con el fin de contar con un modelo que permita la consideración de pérdidas extremas, el presente trabajo se enfoca en minimizar el $CVaR$ (Valor en Riesgo Condicional) de la función de costo como una forma de reflejar el impacto económico y financiero que se puede generar cuando uno o varios de los costos sean mucho más altos que el promedio.

El desarrollo de la propuesta permitió hallar y caracterizar la solución óptima en el modelo (Q, r) incorporando en la función de costo la medida de riesgo $CVaR$, y en consecuencia se definió un modelo de administración de inventarios, aplicable a las empresas nacionales dedicadas a la prestación de servicios de telecomunicaciones, con el cual es posible minimizar los recursos financieros relacionados con la administración de los inventarios, a la vez que se mitiga la ocurrencia de resultados financieros adversos por grandes pérdidas sin control. Se realizaron comparaciones en relación con el modelo actualmente utilizado en la empresa -modelo (EOQ)- y con base en ellas se generaron conclusiones relevantes sobre el ámbito de aplicación en los artículos de inventario objeto de este trabajo.

Buscando mostrar una aplicación real en las empresas nacionales que prestan servicios de telecomunicaciones se proponen modificaciones al algoritmo expuesto en Federgruen [2], incorporando el $CVaR$ del costo, para

obtener resultados computacionales que permitan generar soluciones óptimas y verificar las relaciones existentes entre los valores óptimos de las variables de decisión obtenidas del modelo EOQ -el modelo actualmente implementado en las empresas objeto de estudio-, el modelo (Q,r) bajo la consideración del costo promedio y del modelo (Q,r) en consideración del $CVaR$ de la función del costo. Finalmente, se estudia analítica y computacionalmente el comportamiento de los costos en los diferentes modelos.

Palabras clave: modelo (Q,r), medidas de riesgo, $CVaR$, servicios de telecomunicaciones, demanda aleatoria.

INTRODUCCIÓN

Los inventarios constituyen uno de los aspectos logísticos y financieros más complejos en cualquier sector de la economía; complejidad que resulta mayor al considerar, por ejemplo, los efectos generados por la distribución, la apertura de mercados, la diversificación de productos, la globalización, etc. Según Axsäter [3] las inversiones en los inventarios son cuantiosas y el control del capital asociado a éstos constituye una oportunidad de mejora. Vidal [4] menciona “Uno de los problemas típicos en los inventarios es la existencia de excesos y faltantes: siempre tenemos demasiado de lo que no se vende o se consume y muchos agotados de lo que sí se vende o se consume”. Por su parte, resulta también que algunos métodos, prácticas, herramientas y modelos de administración de inventarios implementados en las empresas de Colombia que prestan servicios de telecomunicaciones conllevan a mantener elevados niveles de inventario en sus etapas de la cadena de suministro, y el centro de análisis y optimización de recursos lo acapara los niveles del inventario, adicionalmente, estos no están reflejando de una manera realista el impacto del comportamiento en los costos y por consiguiente no están apoyando la optimización de los recursos financieros y pueden ser fuente de destrucción del $EBITDA$ (Earnings Before Interest, Tax, Depreciation and Amortization). La situación anterior no es exclusiva de los últimos tiempos, ni en las citadas empresas, pues históricamente los directivos han estado ocupados en buscar y gestionar modelos de administración de inventarios apropiados para los procesos; modelos que a fin de evitar resultados adversos y fatales en materia económica, financiera y hasta reputacional, deben estar ajustados en la mayor medida posible del tipo de industria, recoger la mayoría de las características claves y generar información confiable del impacto generado por la gestión de los inventarios tanto en el estado de la situación financiera de las empresas como en el estado del resultado integral. Teniendo en cuenta que hasta nuestros días este último punto ofrece altas oportunidades de desarrollo, para los fines de este trabajo se exploró la información disponible sobre el modelo (Q,r), pretendiendo además de optimizar sus variables de decisión, afinar técnicamente su formulación mediante definiciones y criterios financieros altamente validados, como nuestra propuesta del “Valor en Riesgo Condicional, $CVaR$, (llamada también $CVaR$ de costos)”.

El objetivo principal de la propuesta es caracterizar la solución óptima en el modelo de inventarios (Q,r) incorporando en la función de costos la medida de riesgo $CVaR$ (Valor en Riesgo Condicional) como una medida de riesgo coherente con respecto a la distribución de probabilidad de la demanda D de los costos de las posiciones del inventario para un determinado nivel de confianza $\alpha \in [0,1)$. La incorporación del $CVaR$ en el cálculo de los costos será la forma de reflejar el impacto financiero que se puede generar cuando uno o varios de los costos exceden al promedio, además, presenta propiedad de convexidad deseable para la obtención de los valores óptimos de las variables de decisión y el costo mínimo con el cual el modelo se cubre de grandes pérdidas.

El orden de la tesis es como se presenta a continuación, en el capítulo I se dan a conocer algunos conceptos relacionados con las medidas de riesgo, centrando la atención, principalmente, en el Valor en Riesgo (VaR) y en el Valor en Riesgo Condicional ($CVaR$). En el capítulo II se expone brevemente la práctica de administración de inventarios en una empresa prestadora de servicios de telecomunicaciones, a la vez que se brindan algunos detalles del *software* que soporta la gestión de la información de los inventarios, y se obtienen las variables de decisión r_{filial} y Q_{filial}. Durante el capítulo III se dan a conocer la fundamentación teórica del modelo (Q,r), se establece la función de costos del inventario en términos de la posición del inventario y al hacer uso del algoritmo expuesto en Federgruen [2] se determinan las variables de decisión Q^*, r^*, y el costo total $C^*(Q,r)$. El capítulo IV parte de analizar las dificultades que se pueden presentar sobre las finanzas de la empresa al usar solamente la medida “costo promedio”, lo anterior debido a su incapacidad de captar de manera oportuna y realista el impacto en el estado de la situación financiera cuando uno o varios de los costos estén por encima del promedio durante el ciclo de vida de los inventarios, y buscando mitigar al máximo esta debilidad se incorpora la medida de riesgo $CVaR$ la cual permite tratar situaciones mucho más reales al considerar, por ejemplo, la aleatoriedad en la gestión de los costos del inventario, permitiendo finalmente obtener el mínimo costo posible que a su vez evite la ocurrencia de grandes pérdidas sin control. Durante este capítulo se proponen y realizan algunas modificaciones al algoritmo propuesto en Federgruen [2], para calcular por medio de éste tanto los valores óptimos de las variables de decisión ${r_\alpha}^*$ y ${Q_\alpha}^*$, como los costos totales ${C_\alpha}^*$, y a partir de la validación de un teorema se verifican relaciones existentes entre las cantidades de pedido y los costos; para esto se tabulan varios escenarios (resultados computacionales) en los que básicamente se ponen a fluctuar con unos valores específicos los parámetros del modelo: nivel de confianza, costos de pedidos pendientes, costo del inventario y costos de preparación. Finalmente, en el último capítulo se generan las conclusiones.

Con el fin de brindar mayores detalles de los aspectos que soportan el trabajo de investigación, se construyeron los siguientes anexos; el Anexo 1 amplia la información del modelo EOQ y al final de éste se desarrollan las aplicaciones correspondientes. En el Anexo 2 se abordan normas aplicables a los inventarios y activos, y en general a las empresas nacionales que prestan servicios de telecomunicaciones; finalmente, en el Anexo 3, se documentan las adaptaciones propuestas al algoritmo de Federgruen [2].

ESTADO DEL ARTE

La literatura citada a continuación proporciona una revisión del modelo (Q,r).

La administración de inventarios es un campo del conocimiento que se viene analizando desde hace varias décadas; al respecto de acuerdo con Hopp [5], se reseñan principalmente los aportes que brindó en 1913 el ingeniero Ford Whitman Harris, -quien entonces trabajaba con la firma *Westinghouse Corporation*- y cuyo principal aporte consistió en definir un modelo de administración de inventarios denominado EOQ, *Economic Order Quantity*. En cuanto a los resultados relacionados con encontrar la cantidad más óptima o la cantidad más económica de un producto de inventario, de acuerdo con Hopp [5], y Erlenkoter [6], la fórmula de la raíz cuadrada, -derivada por Harris-, ha llegado a ser uno de los resultados más citados y aplicados tanto en el ámbito de la producción como en la investigación de operaciones. Aunque por varios años algunos autores partieron de los estudios y el legado de Harris, ninguno logró citarlo y aplicarlo correctamente, hasta que en 1934 el consultor R.H. Wilson analizó profundamente el artículo de Harris y lo aplicó extensivamente, dando lugar a la publicación de un nuevo artículo con el cual precisamente se populariza el modelo EOQ de administración de inventarios; gracias a esta contribución, también se suele llamar modelo de Wilson. A partir de 1934 y hasta nuestros días, varios autores vienen generando estudios a fin de resolver múltiples problemas de inventarios y modelos que buscan determinar el punto en el cuál debe realizarse un nuevo pedido de compra (punto de pedido), así como la cantidad óptima que se deba solicitar en compra para con ello obtener el menor costo posible (cantidad de pedido). En relación con el modelo (Q,r) de administración de inventarios, se destacan los siguientes trabajos: en 1963 Handley and Whittin [7], obtienen de manera formal la derivada exacta de la función de costo para un modelo de inventarios en el cual el comportamiento de la demanda tiene una distribución de Poisson, el tiempo de reposición se considera fijo (o cuenta con una distribución normal) y entre las restricciones resalta una demanda durante el tiempo de reposición menor al punto de pedido. En 1979 Platt et al [8], desarrollan una solución analítica para un modelo en el cual se considera un sólo producto, el comportamiento de la demanda tiene una distribución Poisson y un tiempo de reposición aleatorio, y además se considera el evento relacionado con no poder cumplir completamente los pedidos (backorders). De lo anterior surgen dos soluciones heurísticas en las cuales se considera la ocurrencia de pedidos pendientes al momento en que llega un nuevo pedido de compra al inventario, y se basan en la extensión del límite cuando el tamaño de un nuevo pedido de compra tiende a infinito o cuando tiende a cero. En 1992 Federgruen and Zheng [9] en su artículo "*A Simple and Efficient Algorithm for Computig Optimal (r,Q) Policies in Continuos Review Stochastic Inventory Systems*": desarrollan un algoritmo para calcular los valores correspondientes a las variables de decisión cantidad de pedido (Q) y punto de pedido (r). En 1992 Zheng [10], en su artículo: "On properties of Stochastic Inventory System", minimiza de manera secuencial la función de costo sobre las variables de decisión "Cantidad de pedido (Q)" y "Punto de pedido (r)", obteniendo dos ecuaciones simultáneas por medio de las cuales se determinan los valores óptimos de éstas variables; adicionalmente comparan los resultados con el modelo determinístico EOQ en consideración de pedidos pendientes y realizan unos análisis de sensibilidad utilizando el costo esperado como la medición del riesgo relacionado con el modelo de inventarios. En el año 2000, Zipkin [1], define un modelo de inventarios considerando una distribución Poisson y un tiempo de reposición fijo. Desarrolla el primer algoritmo para calcular el valor óptimo de las variables de decisión "Cantidad de pedido (Q^{*})" y "Punto de pedido (r^{*})", y centra su atención en dos aspectos que resultan críticos para el desarrollo de un modelo de inventarios: la frecuencia en que se realizan las órdenes de reemplazamiento (o colocaciones de los pedidos de compra), y la cantidad que se debe mantener en el inventario. Sobre estos, conceptúa: "Ni es deseable realizar muchos pedidos de compra durante el año, ni mantener un sobre-stock (tener los inventarios por encima de los niveles óptimos)".

I. CONCEPTOS PRELIMINARES

Con el fin de brindar los elementos necesarios para la comprensión y articulación de los temas relacionados con el objeto de estudio del presente trabajo, se ha considerado importante dar inicio con algunos conceptos relacionados con las medidas de riesgo, los cuales al final del trabajo resultan siendo claves para el entendimiento de la aplicación del modelo de administración de inventarios resultante. El enfoque de este capítulo tiene como objetivo dar a conocer los conceptos que se consideran necesarios para un entendimiento básico y general respecto a las medidas de riesgo: Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional ($CVaR$), cubriendo entre otros los siguientes elementos: origen, precursores, definiciones, componentes, ámbito de aplicación, formas y métodos de cálculo, importancia, ventajas y desventajas. Adicionalmente, con el fin de apoyar al entendimiento se brindan algunos ejemplos. Actualmente, y de acuerdo con lo enunciado por Jara [11], se cuenta con una gran variedad de activos financieros que presentan una amplia gama de volatilidades por lo que se hace necesario adoptar métodos, procesos y procedimientos que permitan la administración y el control de los riesgos. Resulta así que la administración del riesgo, -la cual hasta hace algunos años era un concepto importante exclusivamente en las empresas del sector financiero, (quienes se ocupaban principalmente de realizar la medición del riesgo del mercado de sus portafolios de inversión)-, se ha convertido en una necesidad para todas las empresas, llevando incluso a que algunas la definan y estructuren como parte integral de la gestión de sus procesos; otras más ambiciosas sobre el tema han llegado a implementar en su estructura administrativa dependencias específicas que se encargan de la medición y la correspondiente administración o gerencia de riesgos.

1.1 Valor en Riesgo ($\mathbf{VaR}$)

De acuerdo con Jara [11], y como se puede ver más adelante, aunque el medio ofrece otros indicadores de riesgo de mercado, la medida de riesgo más popular en matemáticas financieras y gestión del riesgo financiero es el Valor en

Riesgo, -VaR-, por sus siglas en inglés *Value at Risk*, y permite resumir en un número la variabilidad de retornos de un portafolio. Puede entenderse de diversas maneras, entre ellas algunos autores la definen como la máxima cuantía de dinero objeto de pérdida en un período para un nivel específico de confianza.

VaR es una medida del riesgo de tipo estadístico utilizado para estimar el riesgo de mercado de una cartera (o de una inversión) para la cual no existe una serie histórica de precios, ya sea porque no se recogieron los datos o porque la composición de la cartera ha cambiado recientemente. El ámbito de su aplicación no está limitada ni a determinadas categorías de activos ni a ciertas fuentes de riesgo de mercado, sino que están incluidos todos los activos y fuentes de riesgo de mercado que contribuyen a la distribución de probabilidad de los resultados de una cartera.

La medida de riesgo VaR constituye el desarrollo natural de la teoría de carteras de Markowitz. El principal impulso, en cuanto a los procesos financieros se refiere, proviene de la empresa J.P. Morgan cuando uno de sus principales ejecutivos preguntó cuál era la máxima pérdida probable en las siguientes veinticuatro horas, dando como resultado el desarrollo de una metodología, y finalmente la presentación del informe “4:15”, con el cual hasta hoy en día se conoce a la aplicación de la metodología RiskMetricsTM. En términos generales la propuesta de RiskMetrics es un estudio sobre el riesgo de mercado y la correspondiente medición a través de la metodología VaR, dentro del cual aparecen las características técnicas de la propuesta de J.P. Morgan, así como la posibilidad de que la entidad suministre la base de datos con la información necesaria para el estudio. Consta de dos partes: una primera parte destinada completamente al análisis de la metodología VaR, y la segunda parte en la que se presenta el estudio de la propuesta concreta que se acompaña de un estudio estadístico que se hace extensivo en cuanto al análisis del comportamiento de la volatilidad y de las correlaciones entre los factores de riesgo. El ámbito de su aplicación se fundamenta en una contabilidad *mark-to-market* (marca en el mercado), en la cual el foco de las estimaciones son las rentabilidades y no los precios. El VaR en la década del 90 permitió cuantificar y gestionar el riesgo de mercado, y en los últimos años se ha extendido hacia otras formas de riesgo financiero, tales como: riesgo crediticio, de liquidez y operacional.

Definición VaR : Dada una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad, y sea Fx su función de distribución, la medida del Valor en Riesgo para cualquier nivel de confianza α dado en el intervalo $[0,1)$, está definido como:

$$VaR\alpha\,[X] := \; inf\,\{\, x / \; Fx\;(X)\;\; \geq \alpha\,\}$$

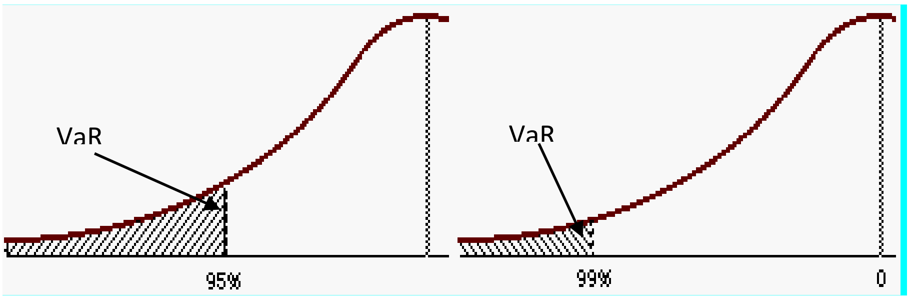
Según Melo [12], en términos estadísticos el VaR corresponde al $\alpha - ésimo$ cuantil de la función de distribución de pérdidas y ganancias del activo; es el menos malo de los $(1 - \alpha)\;100\%$ peores casos (pérdidas más grandes) de la distribución de pérdidas y ganancias. Así el administrador de riesgos tiene la idea de que la pérdida en su inversión no debe exceder el VaR con probabilidadα. De acuerdo con Mascareñas [13], tradicionalmente los usuarios suelen medir el riesgo por medio de la volatilidad, práctica que se ha objetado debido a que la volatilidad no permite precisar si el rendimiento se mueve hacia arriba del valor esperado (que es lo que comúnmente se espera que suceda) o hacia abajo del valor esperado (situación no deseable).

Teniendo en cuenta que los funcionarios en las empresas están expuestos a la probabilidad de que se alcancen o no los rendimientos esperados, éstos deben trabajar sobre una adecuada noción de riesgo a fin de poder analizar y enfrentar situaciones de decisión respecto a los diversos rendimientos que se esperarían tener sobre una inversión determinada. Debe tenerse en cuenta que cuando a lo largo de una línea de tiempo, por ejemplo: 90 días, se evalúa el comportamiento financiero de una cartera (u otro activo), y para tal fin se calcula la volatilidad histórica del valor de mercado, con esto sólo se llega a realizarle seguimiento al riesgo de la cartera (o del activo), pero realmente no se alcanza a conocer cuál es el valor del riesgo que la cartera (o el activo) está soportando actualmente y es por ello que para una debida gestión del riesgo necesariamente se deben conocer los riesgos al mismo tiempo que se toman.

Si se define el riesgo como la probabilidad de obtener (por ejemplo en una cartera) un resultado diferente al resultado esperado, éste seguramente depende de varios factores entre los cuales se pueden citar la posición de la entidad frente a las condiciones del mercado, el período de tiempo de cálculo y el mismo factor de riesgo (probabilidad). De lo anterior, al tener en cuenta las condiciones del mercado en donde se negocia el factor de riesgo, -y bajo los supuestos de operar en mercados normales y que no se produce negociación alguna en la cartera-, con el VaR se busca establecer la pérdida máxima probable que a precios de mercado se puede generar en una cartera (o en una posición de una cartera), durante un intervalo concreto de tiempo y con un nivel de confianza estadístico determinado. El VaR se puede definir como un valor límite tal que la probabilidad de que una pérdida a precios de mercados en la cartera sobre el horizonte temporal dado, exceda ese valor. Por ejemplo, si una cartera de acciones tiene un VaR a un día del 5% sobre $1 millón, existe una probabilidad del 0.05 de que la cartera caiga en valor por más de $1 millón en un período de un día.

Según Mascareñas [13], teniendo en cuenta la composición actual de una cartera y el comportamiento reciente del mercado, a la cantidad máxima de dinero diario que la cartera perdería en 99 de cada 100 días, se le puede definir con un VaR diario del 99%; lo cual quiere decir que con un nivel de confianza del 99%, de cada cien días en sólo uno es posible superar la cantidad y por tanto: en los otros 99 días es probable que las pérdidas sean menores (ver Figura 1). Para las carteras activamente menos negociadas, se suele utilizar un VaR diferente al diario, por ejemplo un VaR mensual; para exponer un caso, supóngase una cartera con un VaR mensual del 95%, lo cual puede interpretarse que en la cartera objeto de análisis, con un nivel de confianza del 95% de cada cien días en sólo cinco es posible superar la cantidad y por tanto: en los otros 95 días es probable que las pérdidas sean menores a la cantidad (ver Figura 1). Para los ejemplos anteriores, teniendo en cuenta niveles de confianza del 95% y del 99%, en la siguiente figura se muestra el aspecto de la cola izquierda de la distribución de probabilidad de los resultados que la cartera objeto de análisis puede obtener. Se aclara que aunque para estos ejemplos la figura corresponde a una distribución normal, ésta no necesariamente aplique en todos los casos, pues en carteras que contienen opciones u otros productos derivados se deben tener en cuenta otras distribuciones.

Figura 1. Distribución de valores VaR para los niveles de confianza del 95% y 99%.



Fuente: Mascareñas [13]

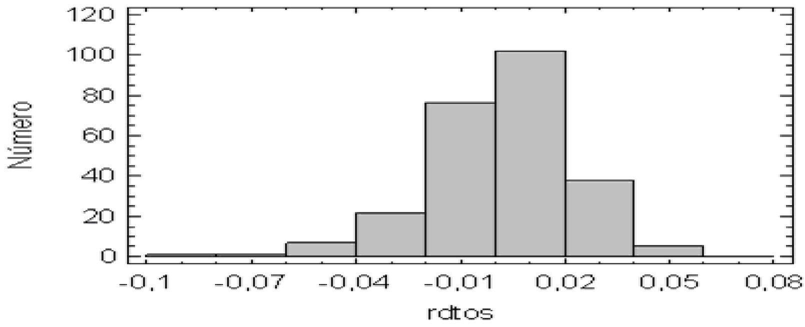
De acuerdo con Jara [11], Melo [12], Mascareñas [13] El VaR tiene dos componentes: Periodo de tiempo (horizonte temporal, considerado normalmente como el periodo de tenencia del portafolio) y el nivel de confianza.

- Periodo de tiempo *(por ejemplo: día, mes, año)*. Dado un nivel de confianza determinado, y además teniendo en cuenta el tiempo de liquidación de los activos y el tiempo en el cual se espera mantener constante la composición de la cartera, esta componente corresponde al horizonte de tiempo en el cual se quiere analizar y evaluar el comportamiento de los resultados para determinar la máxima pérdida que se esperaría generar en una cartera. Como se pudo observar en los ejemplos citados para explicar al VaR, el periodo de tiempo puede ser un día (para posiciones con alta liquidez) y un mes (para posiciones con liquidez baja como los casos de los fondos de inversión), sin embargo en algunos grupos de interés también se utilizan horizontes de tiempo más largos que el mes (por ejemplo: horizontes trimestrales y anuales). Implícitamente el uso del horizonte temporal supone que se conoce qué tan estable es la composición del portafolio de inversión que se está analizando, y por otro lado su decisión tiene impactos sobre el comportamiento de los costos e incluso puede dar como resultado la ejecución de ciertas prácticas que pueden conllevar a que el VaR deje de ser un buen indicador del riesgo de mercado toda vez que puede estar influenciado o contaminado por algunas operaciones financieras (por ejemplo: en los casos en que el horizonte es demasiado largo es común que los gestores de cartera realicen una o varias recomposiciones de ésta, incluyendo así gastos transaccionales que afectan la determinación del VaR).

- Nivel de confianza. El nivel de confianza está en capacidad de reflejar el grado de aversión al riesgo y el costo o valor de las pérdidas mayores al VaR, ello porque una gran aversión al riesgo o grandes costos, posiblemente exijan de un elevado capital para cubrir grandes pérdidas. Con el objetivo de operar con el menor riesgo posible se suelen utilizar niveles de confianza elevados; lo anterior respaldado además en que los entes reguladores desean gestionar un sistema financiero sano y es por ello que la cantidad de fondos determinados como necesarios para cubrir el riesgo de mercado deberá ser la que brinde menos probabilidad de default. Por otro lado, cuando se incluye el efecto adverso del requerimiento de capital en el comportamiento de las utilidades se incentiva a realizar una gestión prudente de los activos. Si bien la elección del porcentaje del nivel de confianza (o nivel de confianza) depende del grado de aversión al riesgo, en últimas su establecimiento también depende de la funcionalidad del modelo y de la correspondiente distribución de probabilidades. Dependiendo del uso y la utilidad que se dé a la estimación VaR, existen diferentes niveles de confianza válidos, es decir: no existe un único nivel apropiado y por el contrario lo recomendable es usar distintos niveles de confianza que permitan brindar información suficiente y detallada de los riesgos contraídos por las inversiones asumidas. Teniendo en consideración las recomendaciones del segundo acuerdo de Basilea, Basilea II, para fines de determinar el monto necesario con el cual se cubre el riesgo de mercado que puede afrontar un portafolio de inversión, el VaR se debe estimar con un nivel de confianza del 99%, para horizontes de negociación de 10 días hábiles y con una base de datos mayor o igual que el año; para cubrir el riesgo de mercado los reguladores requieren un capital no menor a tres veces el valor del VaR. Como se deduce de Muñoz [14]: Teniendo en cuenta el comportamiento del mercado y los resultados de las entidades en los últimos años, -así como sus tendencias-, los mercados financieros han empezado a realizar movimientos apoyados con fondos de reestructuración (Caso español: Fondo de Reestructuración Ordenada Bancaria ($FROB$)), de las nuevas normativas que se introducen a partir de la llegada de Basilea III, con la cual se obliga a las entidades financieras a incrementar las reservas para afrontar situaciones de crisis hasta alcanzar un 7% de las mismas. En el caso Colombiano, -de acuerdo con Melo [12] y Muñoz [14]-, la Superintendencia Financiera exige información histórica de por lo menos cuatro años, un periodo de tenencia de 10 días y un nivel de confianza mayor o igual al 99%. El método RiskMetrics J.P. Morgan asume un periodo de tenencia de 1 día con un nivel de confianza del 95%. De acuerdo con Mascareñas [13], esta medida se encuentra muy extendida entre las instituciones que necesitan medir el riesgo en carteras negociadas activamente, aunque también se tiene una alta usabilidad en aplicaciones no financieras. Por su fácil interpretación, sencillo cálculo y porque brinda la ventaja de poder incorporar los efectos de la diversificación de los activos y portafolios, muchas entidades basan su estimación en la gestión de riesgos en la metodología VaR. De acuerdo Jara [11] existen varias formas de calcularlo, como por ejemplo: el método histórico, el método de la varianza - covarianza (delta – normal), y la simulación Montecarlo. A continuación, se describen algunos de los métodos.

Método histórico: En este método es de suma importancia la elección del periodo histórico a considerar; por regla general la organización de los datos de los rendimientos históricos se suelen ordenar de menor a mayor y la estimación del VaR supone que la historia se vuelve a repetir desde una perspectiva de riesgo. Este método determina el cambio potencial o la máxima variación prevista (cambio potencial) y tiene como premisa mantener las posiciones actuales de la cartera y con ello obtener una serie de distintos valores finales en función de los rendimientos observados en el pasado (es decir: a lo largo de un periodo histórico determinado) para el mismo periodo de tiempo u horizonte temporal. Por medio de los distintos posibles valores de los rendimientos se halla el VaR a un nivel de confianza determinado, generando entonces una distribución que comprende tanto los beneficios como las pérdidas de la cartera. En cuanto a la metodología, tal como se visualiza en la Figura 2, a partir de n - valores se genera una gráfica con el histograma de frecuencias de los rendimientos que se obtuvieron durante un año específico. Según Mascareñas [13] se tomaron los datos de los rendimientos históricos de una empresa, ordenándolos de menor a mayor y mostrando los resultados en las Figuras 2 y 3. La Figura 2 corresponde al histograma de frecuencias.

Figura 2. Histograma de frecuencias de los rendimientos diarios de una empresa.

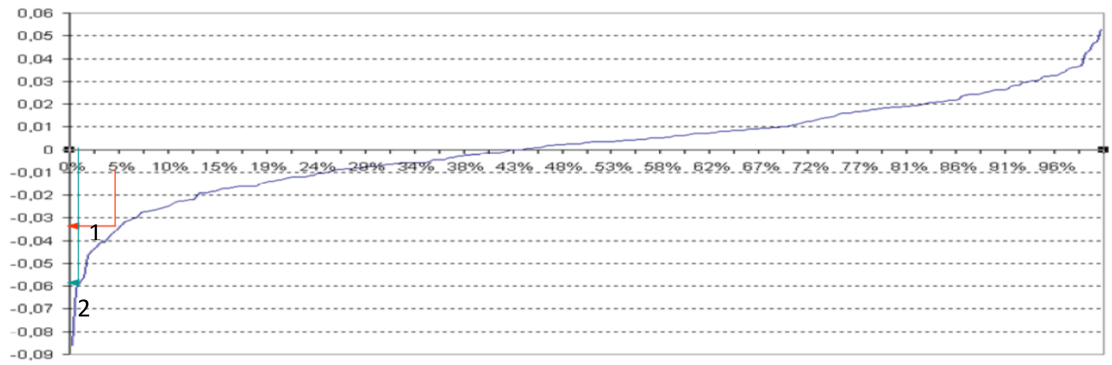


Fuente: Mascareñas [13]

En la Figura 3 se muestran los correspondientes percentiles de los rendimientos de una empresa (por ejemplo 100 percentiles), para un horizonte de tiempo de 100 días y con niveles de confianza del 95% (ver 1) y del 99% (ver 2), así:

- Con un nivel de confianza del 95% el peor rendimiento diario de la empresa sería (-3.31%), lo cual significa que de cada cien días en sólo cinco de ellos se pueden alcanzar peores rendimientos a (-3.31%), es decir: hay un 5% de probabilidad que el rendimiento diario de la empresa sea peor que (-3.31%).
- Con un nivel de confianza mayor al 95%, es decir si se aumenta específicamente el nivel de confianza hasta alcanzar el 99%, el peor rendimiento diario de la empresa sería (-5.9%). Lo cual significa que de cada cien días, en el 99 de ellos, la empresa obtiene un rendimiento superior al menos tanto por ciento (-5.9%) o que en sólo uno de ellos se pueden alcanzar rendimientos inferiores a (-5.9%), es decir: hay un 1% de probabilidad que el rendimiento diario de la empresa sea aún peor que (-5.9%).

Figura 3. Percentiles de los rendimientos diarios de una empresa.



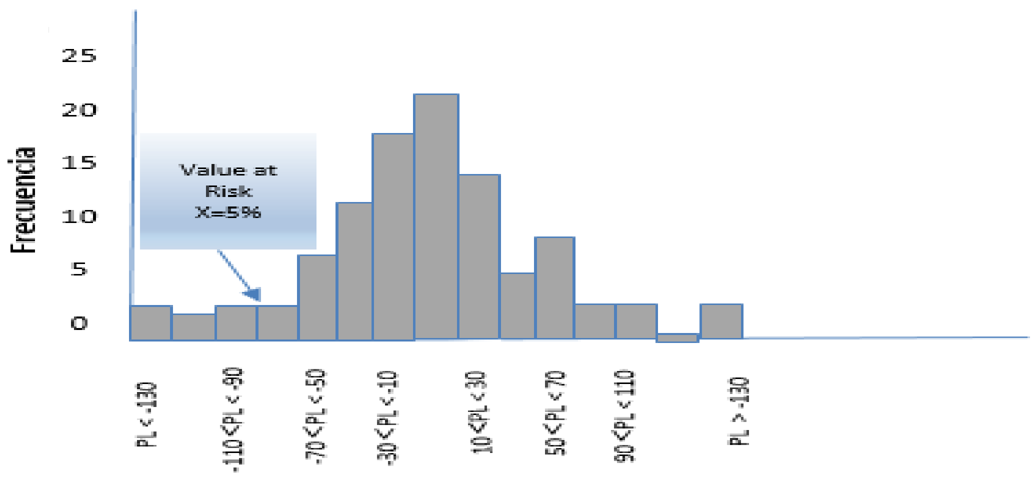
Fuente: Mascareñas [13]

Con base en lo anterior, se puede concluir que el VaR brinda una estimación probabilística de los resultados financieros.

Como se mencionó anteriormente, para usar la metodología, es importante definir el período histórico y adicionalmente seguir los siguientes pasos:

1. Disponibilidad de los datos del mercado para cada uno de los activos (cartera).
2. Realizar (por cada día) la correspondiente medición de los cambios porcentuales en el factor de riesgo de interés.
3. Bajo el supuesto que se repite la historia y con base en el paso anterior, calcular los valores de la cartera correspondientes a las variaciones en los factores de riesgo de interés.
4. Para obtener el valor de las pérdidas, restar del valor actual de la cartera el valor correspondiente según el cálculo realizado en la el numeral anterior.
5. Crear una distribución de posibles resultados de la cartera. Una vez esté completa la distribución se deben jerarquizar de menor a mayor los resultados y elegir un nivel de confianza determinado; precisamente el valor en ese percentil representa el VaR de la cartera (Ver Figura 4).

Figura 4. Beneficios y pérdidas diarios hipotéticos (contrato a plazo).



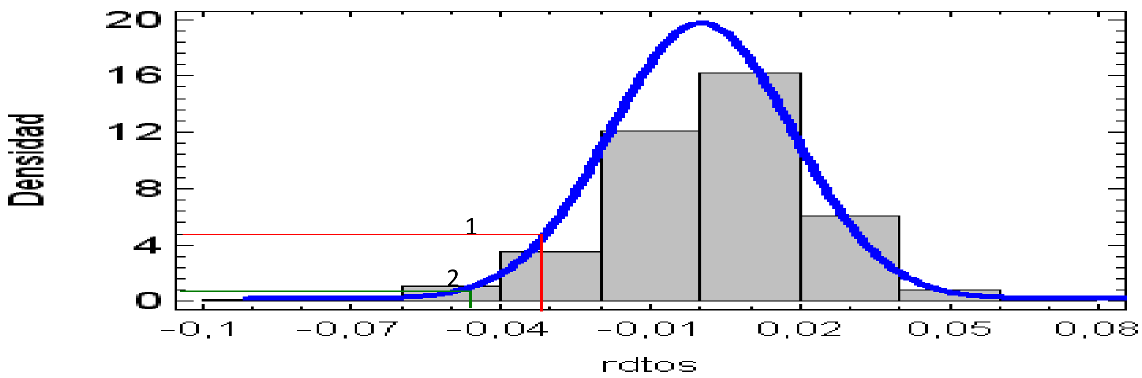
Fuente: Linsmeier and Pearson [15]

La ventaja principal de este método es que utiliza datos históricos actuales para predecir los rendimientos de los factores de riesgo en lugar de suponer que los rendimientos de dichos factores tienen una distribución específica (como por ejemplo suponer que los rendimientos tienen una distribución normal), lo cual permite una mejor estimación del VaR en presencia de distribuciones de colas anchas y lo hace menos restrictivo comparado con los modelos paramétricos. Debido a que este método no cuenta con ninguna naturaleza paramétrica elimina la necesidad de realizar estimaciones de otras variables (como la matriz de varianzas-covarianzas), dado que ya está incluida implícitamente en el procedimiento. Pese a lo anterior el VaR presenta algunas dificultades por sólo considerar como posibles variaciones futuras a escenarios ocurridos en el pasado, limitando al modelo de incorporar situaciones no reflejadas en los rendimientos históricos. Es decir: no se consideran en el cálculo de los rendimientos los factores de riesgo ocurridos en el pasado y que no se alcanzaron a cuantificar en las observaciones históricas. La forma más simple de calcular el VaR es a través de modelos paramétricos, los cuales asumen de antemano una distribución de rendimientos conocida. En este caso el VaR puede derivarse de la desviación estándar del portafolio, utilizando un factor multiplicativo que depende del nivel de confianza elegido. Esta metodología es simple y produce estimaciones muy precisas; tiene como problema determinar si la distribución asumida es realista.

Método varianza-covarianza (Modelo Delta Normal): Este método desarrolla un procedimiento similar al método anterior, pero debido a que en él se supone que los rendimientos se distribuyen normalmente, ver Figura 5, los peores resultados los identifica por medio de la curva de campana de la distribución normal (en vez de usar exclusivamente datos), lo anterior implica que se conoce el rendimiento medio esperado y la correspondiente desviación típica.

En general la distribución de los rendimientos históricos permite calcular las volatilidades y la correlación de los activos (o cartera de activos). Por este método, la pérdida máxima resultante se debe calcular al sustraer el producto de la desviación típica y el número de desviaciones típicas (σ) del rendimiento medio esperado.

Figura 5. Distribución normal e histograma de frecuencias de rendimientos



Fuente: Mascareñas [13]

Como en los ejemplos de los métodos anteriores se genera una figura (Ver figura anterior), para representar los rendimientos diarios de una empresa durante un año específico y con niveles de confianza del 95% y 99% (ver 1 y 2 respectivamente). En este caso la gráfica corresponde a la distribución normal e histograma de frecuencias y la curva se basa en el rendimiento medio esperado (es decir en el valor medio de los rendimientos diarios en un año específico) y su desviación típica correspondiente, que de acuerdo con Mascareñas [13], y para fines del ejemplo corresponden a un rendimiento medio esperado de 0,16% y una desviación típica de 2,04%. De acuerdo con lo anterior, la siguiente tabla resume las pérdidas resultantes.

Tabla 1. Determinación de la pérdida de un activo en la empresa.

Nivel de confianza	**Nº de desviaciones típicas (σ)**	**Determinación de la Pérdida**
95% (alto)	*-1,65 (σ)*	*0,16% - (1,65) (2,04%) = -3,21%*
99% (muy alto)	*- 2,33 (σ)*	*0,16% - (2,33) (2,04%) = -4,59%*

Fuente: Mascareñas [13]

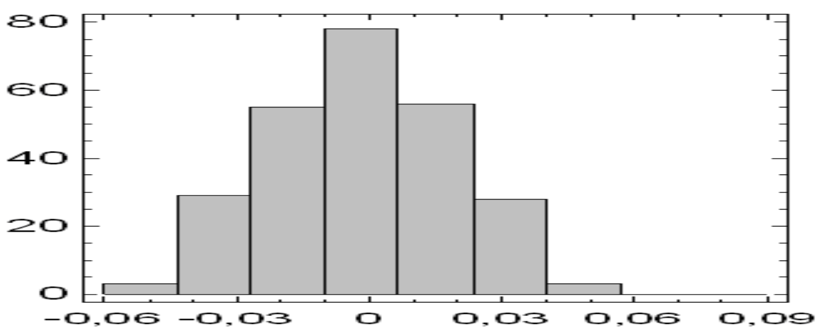
Teniendo en cuenta que el VaR suele ser expresado en términos de múltiplo(s) de la desviación estándar de la cartera, su valor se halla después de determinar la matriz de varianza-covarianza de aquellos factores de mercado que puedan brindar explicación del valor de la cartera. La matriz varianza - covarianza se halla a partir de los rendimientos históricos de los factores de mercado, y la desviación estándar de la cartera se halla por medio de las distintas posiciones de la matriz de varianza-covarianza ponderada. Según Jara [11], para fines de simplificar el modelo se supone no correlación intertemporal entre los rendimientos históricos de la cartera (aunque se sabe que realmente pueden relacionarse). Se aclara que mientras usualmente se utiliza una estimación equiponderada de la matriz varianza - covarianza, el método Riskmetrics de JP Morgan asume una ponderación exponencial donde las observaciones recientes tienen mayor peso que las más alejadas en el tiempo para determinar la volatilidad de la variable. El supuesto de normalidad del portafolio se justifica a través del teorema del límite central con el cual se demuestra que el promedio de variables aleatorias independientes converge a una distribución normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Este método tiene problemas ante la existencia de colas anchas de la distribución de retornos de la mayoría de los activos financieros: la estimación del VaR basada en una distribución normal puede resultar subestimada respecto al verdadero VaR; así mismo la metodología resulta inadecuada ante la presencia de instrumentos no lineales como opciones, dado que no captura la no normalidad de estos activos.

El método de Montecarlo: El enfoque VaR Montecarlo es una aproximación paramétrica que trata de solucionar los problemas presentados en el VaR por simulación histórica, aunque cuenta con una metodología de trabajo similar. Aplicar este método implica el desarrollo de un modelo que por ejemplo muestre el cambio en el valor de la cartera de activos de la empresa (o el comportamiento futuro del rendimiento diario de las acciones) a través de un gran número de simulaciones (pruebas) generadas aleatoriamente siguiendo una determinada distribución y sin tomar en consideración el valor pasado de la cartera de los activos (o de los rendimientos pasados) como se considera en el VaR por simulación histórica; precisamente a las simulaciones que se realizan mediante la generación de números aleatorios se le denomina método de Monte Carlo. Considerando que este método no dice nada de la metodología subyacente, muchos de los usuarios se refieren a ella como una “caja negra” que genera resultados “aleatorios”. Esta metodología puede resumirse en dos etapas.

- La primera consiste en la especificación del modelo estocástico para la determinación de los parámetros para todos los factores de riesgo.
- La segunda corresponde a la simulación ficticia de los factores de riesgo según el patrón especificado en la primera etapa.

La serie de rendimientos producidos por el VaR Montecarlo permite determinar una distribución de beneficios y pérdidas que será utilizado para inferir el VaR según el nivel de confianza seleccionado. Retomando el caso hipotético que se ha considerado en éste capítulo, con base en el comportamiento de los rendimientos diarios históricos de la empresa, se puede suponer que se procedió a realizar 1,000 simulaciones de la posible evolución anual de los rendimientos, para lo cual se utiliza el valor medio y la desviación típica de dichos rendimientos diarios (0,16% y 2,04% respectivamente). De cada simulación se extrajo el valor del percentil del 5% (nivel de confianza del 95%) y el del 1% (nivel de confianza del 99%) y se obtuvo el valor medio de cada percentil después de las 1,000 simulaciones; el resultado ha sido de un rendimiento diario medio mínimo del -3,22% con un nivel de confianza del 95% y de un valor medio mínimo del -4,5% con un nivel de confianza del 99%. De acuerdo con Mascareñas [13], la Figura 6 es un ejemplo del histograma de frecuencias para una de las simulaciones realizadas.

Figura 6. Histograma de frecuencia de una de las simulaciones realizadas



Fuente: Mascareñas [13]

En términos generales, con este método se da importancia a los posibles shocks del mercado, utilizando modelos matemáticos para predecirlos. Los pasos para implementarlo son:

1º. Utilizar las variaciones pasadas de los factores de riesgo (por ejemplo: los tipos de interés) con el fin de generar una ecuación que las modele. El modelo se suele generar mediante un análisis de regresión; con ello y por medio de la generación de números aleatorios es posible generar un rango de valores futuros.
2º. Simular el comportamiento de los factores de riesgo en el período próximo. Dados los valores actuales y una distribución de números aleatorios capaz de predecir los valores futuros, el modelo está en condiciones de calcular un posible valor futuro para cada factor de riesgo. Esta operación será repetida varios miles de veces con lo cual se puede confeccionar una distribución de probabilidad.
3° Cada uno de los valores (jerarquizados de mayor a menor) tiene una probabilidad de ocurrencia asignada, basada en la distribución aleatoria utilizada para realizar la simulación. Al elegir un nivel de confianza del 95%, cuando la probabilidad acumulada de la distribución alcance el 5% se determina el valor del VaR.

La simulación Montecarlo es útil por las siguientes razones:

a) El número de factores de riesgo es mucho más pequeño que el número de activos que se desearían modelizar.

b) Su flexibilidad, debido a que permite alterar la distribución de probabilidad cuando sea necesario.

Esta metodología al no tomar en consideración sólo los rendimientos pasados, no cuenta con limitaciones a la hora de estimar posibles escenarios futuros que sean atípicos, por lo que sus estimaciones serán más robustas y tendrán un mejor ajuste. El principal problema reside en lo costoso de su implementación en términos del requerimiento de un potente sistema computacional y en la especial inversión en desarrollo del capital humano. Por otro lado: al no basarse en datos reales, la estimación VaR puede sub estimarse si el modelo estocástico está errado.

Comentarios al ámbito de aplicación e importancia de los métodos

En definitiva, dependiendo de cuáles sean los parámetros iniciales, y con base al modelo empleado, existen varias posibilidades de realizar la estimación del riesgo según la metodología VaR, lo que dificulta elegir una aplicación práctica concreta, de manera que cada entidad deberá buscarla para cubrir sus necesidades y objetivos. De todo lo anterior, se deduce que el VaR no es un único valor, sino que fluctuará en función de las decisiones iniciales que se adopten; por tanto el análisis del riesgo a través de esta metodología quedaría incompleto si no se acompaña de otros análisis complementarios con la intención de facilitar la toma de decisiones.

Desventajas del Valor en Riesgo $(\mathbf{VaR})$

Las autoridades internacionales en supervisión bancaria (Comité de Basilea y la Unión Europea), históricamente vienen impulsando la consolidación de la herramienta de riesgos, metodología Valor en Riesgo (VaR), toda vez que por medio de modelos internos basados en la metodología VaR se permite a las entidades determinar la cantidad de fondos propios que necesitan para cubrir el riesgo de mercado de sus carteras. Para determinar qué tan eficiente es una media de riesgo de mercado y por ende su nivel de coherencia, los expertos en el tema en apoyo de las matemáticas y las estadísticas han identificado cuáles propiedades deben cumplir las medidas de riesgo. En Jara [11], por ejemplo, se expone que una medida de riesgo se considera “coherente” si cumple con cada una de las siguientes cuatro propiedades.

- ***Homogeneidad positiva.*** Si se incrementa el valor del portafolio en λ, el riesgo también debe aumentar en λ. Entonces: $\rho(\lambda x) = \lambda\, \rho(x)$.
- ***Monotonicidad:*** Si el portafolio “x” tiene sistemáticamente menor retorno que el portafolio “y”, su riesgo deberá ser mayor. Entonces: $x \leq y$, implica que $\rho(x) \geq \rho(y)$.

- ***Subaditividad:*** *La fusión de portafolios no debe incrementar el riesgo, o sea el VaR conjunto de dos carteras de activos debe ser menor a la suma del VaR individual de ambas carteras. Así, entonces:* $\rho(x + y) = \rho(x) + \rho(y)$.
- ***Invarianza Transicional:*** Añadir efectivo por un monto α, debe reducir su riesgo en α. Entonces: $\rho(x + \alpha) = \rho(x) - \alpha$. Es importante agregar que la propiedad de invarianza implica en particular que si el monto de efectivo que se agrega a la posición, es precisamente el riesgo de la posición, entonces el riesgo se neutraliza. Esta observación se formaliza en el siguiente resultado. Sea X una posición financiera y ρ una medida de riesgo, de acuerdo con la definición anterior, entonces, si se agrega una cantidad de efectivo igual al riesgo de la posición $\rho(X)$, el riesgo de la nueva posición, $X + \rho(X)$, se neutraliza.

Demostración: Por la propiedad de invarianza bajo traslaciones, se cumple que:

$$\rho(X + x) = \rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$$

Por tanto, el riesgo de la nueva posición es cero. Según cita Jara [11]: Pese al uso generalizado, el VaR es criticado cuando las distribuciones de los rendimientos no distribuyen normal, teniendo problemas de subaditividad (existencia de colas largas o falta de continuidad en las distribuciones). En términos generales el VaR no es una medida de riesgo coherente debido a que no cumple con la propiedad de subaditividad (por la existencia de colas largas o falta de continuidad en las distribuciones) que es la declaración matemática de la respuesta de concentración del riesgo, “una básica realidad en la gestión de riesgos”; únicamente resulta coherente cuando se basa en distribuciones continuas normalizadas (lo anterior si se considera que para una distribución normal el VaR es proporcional a la desviación estándar). A su vez, en Artzner [16] se demuestra que el VaR tiene características matemáticas indeseables como la falta de convexidad. Con respecto a la evolución de las medidas de riesgo -tal como se expone en Rockafeller [17]-, surgen herramientas de medición alternativas, tales como el Valor en Riesgo Condicional $(CVaR)$, que demuestra tener ventajas en optimización de carteras.

1.2 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

Según Artzner [16] el valor en riesgo condicional, $CVaR$, a diferencia del VaR se considera una medida de riesgo de mayor consistencia, es decir se trata de "una medida de riesgo coherente" debido a que satisface todas las propiedades que debe cumplir una medida de riesgo para ser clasificada en esta categoría: homogeneidad positiva, monotonicidad, subaditividad e invarianza transicional.

El proceso de minimización del $CVaR$ considera una metodología de mayor consistencia, pues según Rockafeller [18]: el $CVaR$ es un estimador coherente en el sentido de Artzner [16], es decir: el $CVaR$ cuenta con mejores propiedades respecto al VaR. $CVaR$ también se deriva de la distribución de rendimientos de la cartera de activos y se define como la pérdida esperada en aquellos casos donde la pérdida de valor de la cartera excede el valor del VaR, por lo tanto siempre el $CVaR$ debe ser mayor o igual que el VaR. Con base en lo anterior: con $CVaR$ se identifican y cuantifican las pérdidas que se pueden encontrar en las colas de las distribuciones y, de acuerdo con Rockafeller [17], mide la pérdida esperada promedio de una cartera en un horizonte de tiempo determinado.

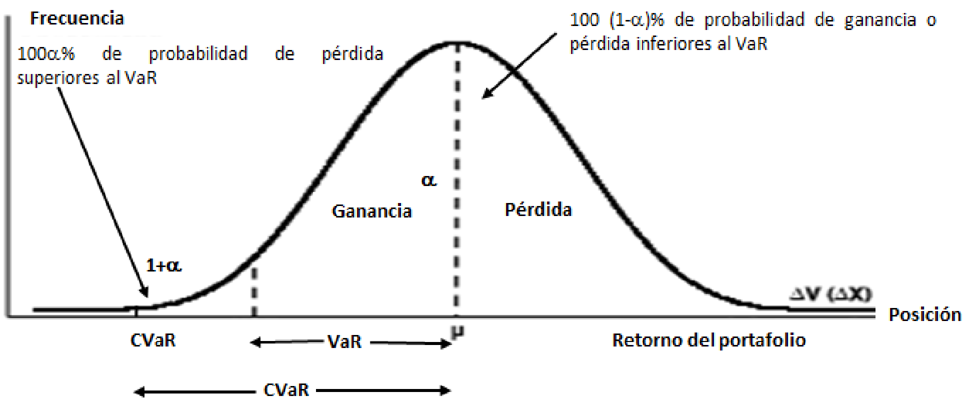
En la siguiente gráfica α corresponde al nivel de confianza y μ representa la media de la distribución. Se visualizan dos zonas en torno a μ.

- La zona derecha que representa las ganancias y representa $100(1 - \alpha)\%$ de probabilidad de ganancias o pérdidas inferiores al VaR, y

- La zona izquierda comprende los valores VaR y $CVaR$ corresponde a las pérdidas y representa $100\alpha\%$ de probabilidad de pérdidas superiores al VaR.

Como menciona Jara [11] al considerar la distribución de las pérdidas, se puede definir de una manera gráfica el $CVaR$ (Ver Figura 7).

Figura 7. Representación del $CVaR$ - Distribución de las pérdidas y ganancias.



Fuente: Jara Padilla [11]

Definición formal: De acuerdo con la definición de la medida de Valor en Riesgo, aunque el VaR es capaz de reflejar la aversión al riesgo, carece de algunas propiedades deseables como la subaditividad.

Una medida de riesgo estrechamente relacionada con VaR es el Valor Condicional al Riesgo, $CVaR$, definido como la condición del valor esperado en el $(1 - \alpha)$, es decir: la cola.

$$CVaR_{\alpha}[X] = E\{X/X \geq VaR_{\alpha}[X]\}$$

$CVaR$ ha sido definido de varias maneras, dependiendo de las condiciones que se encuentran en la función de distribución como la continuidad y ser estrictamente monótona. Un detalle más completo en esta materia se puede obtener en Rockafeller [17]. Se define la siguiente la función:

$$F_{\alpha}(x,\zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\infty} E[\, F(x,y) - \zeta]^{+}$$

Donde $[t]^{+} = max\,\{0,t\}$ y $f(x,y)$ es la pérdida asociada con el vector de decisión x, que será elegido por un determinado subconjunto S de R^{n} y un vector aleatorio y en R^{m}.

De acuerdo con el teorema 10 “Fundamental minimization formula”, enunciado en Rockafellar [17] se confirma que la fórmula de minimización desarrollada originalmente en Rockafellar y Uryasev (2000) bajo supuestos especiales sobre la distribución de pérdidas (como la exclusión de carácter discreto), persiste cuando el concepto $CVaR$ es articulado para distribuciones generales, y el $CVaR_{\alpha}$, se puede expresar como:

$$CVaR_{\alpha}[X] = F_{\alpha}(x, VaR_{\alpha}[X]) \quad (1)$$

Lo anterior, debido a que $VaR_{\alpha}\,[X]\;\varepsilon\;argmin_{\zeta}F_{\alpha}(x,\zeta)$.

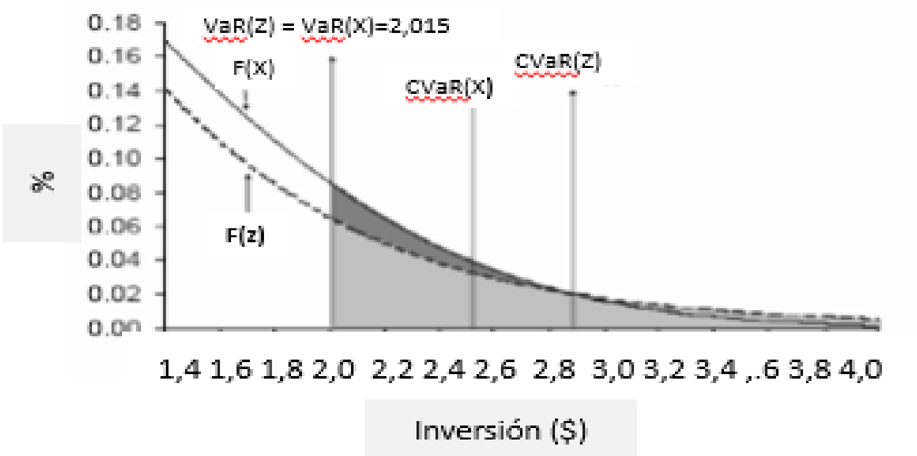
Ventajas del Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

En general por medio del $CVaR$ se identifican y analizan los rendimientos inferiores al VaR, y se brinda información sobre el valor de la pérdida esperada. En la Figura 8 se presentan las colas derechas para las funciones de densidad de dos activos diferentes (un primer activo cuyo comportamiento se identifica mediante la línea punteada y un segundo que corresponde a la línea continua), junto con el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicional ($CVaR$) respectivo a un nivel de confianza determinado. Como se observa en la figura, es probable que al analizar dos carteras de activos se concluya que tienen igual VaR (2,015) y aparentemente cuentan con el mismo nivel de riesgo, no obstante sólo cuando se analiza el $CVaR$ se podrá determinar cuál de ellas presenta el mayor riesgo; la cartera de mayor riesgo será aquella que tenga un mayor $CVaR$. Como se mencionó anteriormente la optimización de la cartera de los activos mediante la minimización del VaR cuenta con algunos problemas de inestabilidad: la subaditividad y la no convexidad para situaciones en las que no se cuenta con una distribución normal de los rendimientos.

Según Rockafeller [18] si se trata de una distribución de rendimientos normal, la metodología de minimización del $CVaR$ mantiene consistencia con la minimización del VaR debido a que se obtiene el mismo resultado límite tanto para el VaR como con la metodología de minimización de varianza, por lo que trabajar con cualquiera de los tres métodos es equivalente. Además, según

Martín [19], el $CVaR$ presenta mayor grado de estabilidad para optimizar una cartera de activos para diferentes intervalos de confianza. En el estudio se concluye que cuanto menor es el nivel de confianza, existe un mayor número de observaciones para calcular el valor promedio de las pérdidas, lo cual otorga una mayor consistencia produciendo cambios leves en la cartera óptima. Por otro lado, -de acuerdo con el estudio-, el VaR mostró resultados discordantes debido a que la cartera óptima para diferentes niveles de confianza difiere significativamente, concluyendo finalmente que el VaR puede presentar problemas cuando se requiere un rebalanceo o recomposición de las carteras.

Figura 8. Representación del VaR y $CVaR$ de dos carteras de activos.



Fuente: Jara Padilla [11]

II. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE INVENTARIOS EN LA EMPRESA

Economic Order Quantity, por sus siglas en inglés EOQ, resulta ser el modelo de administración de inventarios que han tenido implementado por mayor tiempo las empresas prestadoras de servicios de telecomunicaciones que conforman la unidad de análisis de este trabajo de investigación.

El modelo EOQ es uno de los modelos más antiguos, estudiados y conocidos en las empresas del sector real, ver Hopp [20], y en términos generales es la base de introducción de los libros de investigación de operaciones y abre la ventana a la optimización de la cantidad de pedido que reduce al mínimo el costo del inventario.

Según Hopp se representa el tiempo y los productos en forma de cantidades continuas, asumiendo constante la demanda y ordenando Q unidades cada vez que el inventario llega a cero.

Este modelo, aunque se caracteriza por su sencillez a la hora de calcular la cantidad del pedido, presenta algunos inconvenientes tales como considerar constante la demanda y un reabastecimiento instantáneo.

Para determinar los costos totales del modelo, se utilizará la formulación dada en Zheng [10], donde la función del modelo se puede expresar en términos de los costos de almacenamiento (h), los pedidos pendientes (b), la posición de inventario (y) y la demanda D, es decir:

$$G_d(\mathrm{y}) = [\mathrm{h}[\mathrm{y}-\mathrm{D}]^{+} + \mathrm{b}[\mathrm{y}-\mathrm{D}]^{-}]$$

El subíndice d distingue la notación de las variables de decisión y los costos totales del modelo EOQ. Los valores de las variables de decisión cantidad de pedido y punto de pedido se pueden determinar por medio de las siguientes ecuaciones:

$$Q_d{}^* = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h}\left(\frac{b+h}{b}\right)}$$

$$r_d{}^* = D - \frac{h}{h+b} Q_d$$

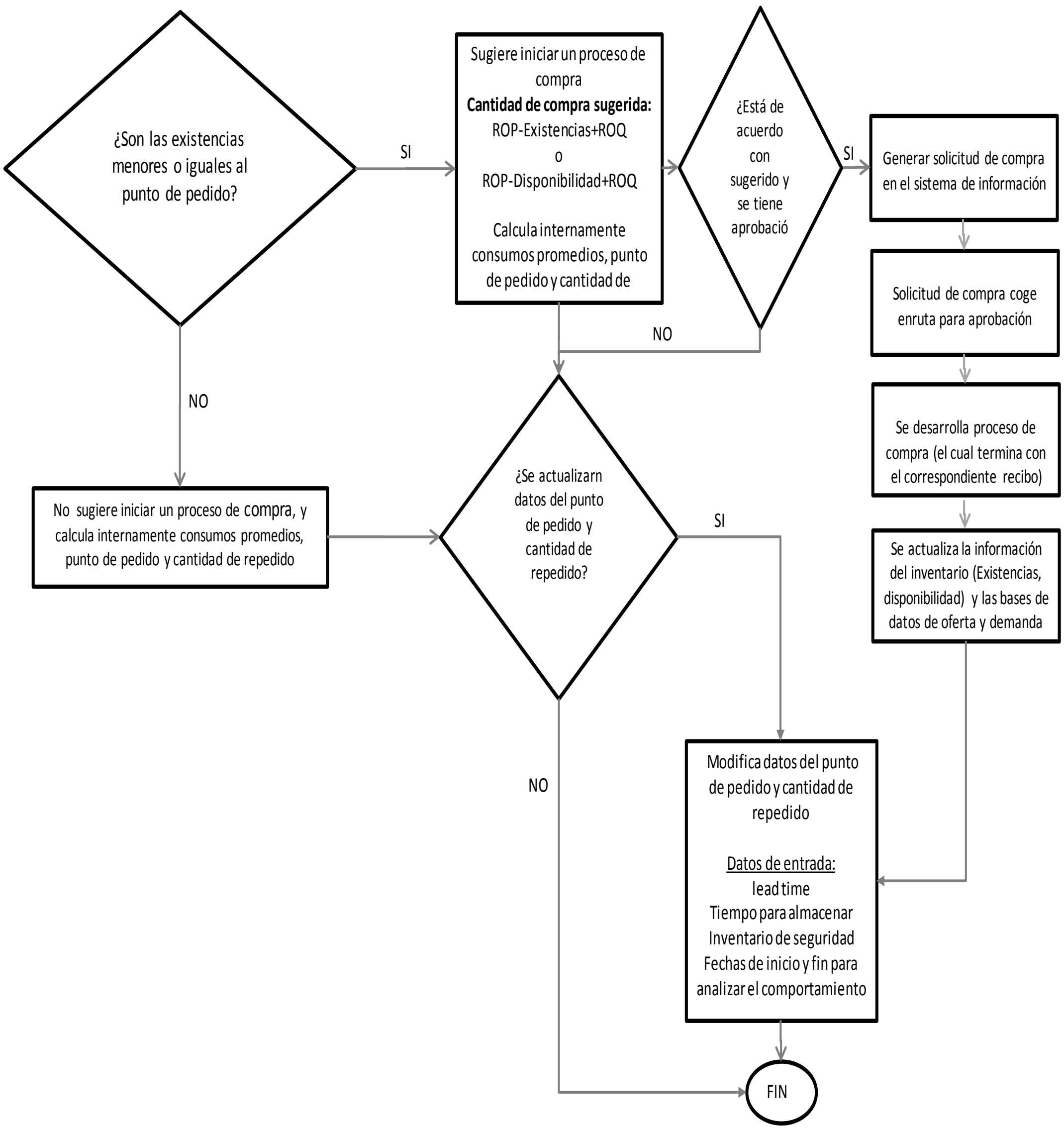
Para ampliar detalles conceptuales del desarrollo matemático que da origen a las expresiones anteriores puede consultarse el Anexo 1.

2.1 Contexto del proceso de administración de inventarios

Si bien nuestra propuesta parte del análisis del modelo clásico de revisión continua con demanda aleatoria (Q,r), a la par que se exploraba la usabilidad de las medidas de riesgo en la optimización y control de los costos (preparación, almacenamiento y el costo por unidad de pedido pendiente), se hace claridad que las empresas nacionales de telecomunicaciones tienen implementado el modelo EOQ, el cual aunque se reconoce por su sencillez en cuanto a determinar la cantidad de pedido, Q, presenta algunos inconvenientes en el sentido de que varios de sus supuestos están alejados de la realidad: considera una demanda constante y que el nivel de inventario se reabastece instantáneamente. A pesar que en las citadas empresas no se analizan y calculan los costos sobre los artículos del inventario, durante el desarrollo del modelo se incorpora ésta información a fin de posibilitar futuras comparaciones contra nuestra propuesta de la aplicación del $CVaR$ del costo en el modelo (Q,r). Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto y que el modelo (Q,r) refleja de una manera más realista las exigencias de un proceso aleatorio y que su política de control es óptima -incluso en presencia de condiciones muy generales- se exploraron algunas de las medidas de riesgo con el fin de identificar aquellas que incorporen al modelo la capacidad de reflejar el grado de aversión al riesgo y la cuantificación del costo de las mayores pérdidas. Ahora bien, para analizar en un instante específico o para una banda concreta de tiempo, cómo funcionan las formulaciones actuales de optimización y/o minimización de los costos versus el Valor en Riesgo Condicional, ver Zipkin [1], se expone que aunque resulta "natural" que el enfoque de análisis suela centrarse en el costo promedio durante el intervalo de tiempo $[0, \infty)$, surgen las siguientes preguntas: ¿el costo promedio realmente llega a reflejar el impacto económico de los distintos costos que se pueden presentar durante el ciclo de vida de los inventarios?, ¿el costo promedio es capaz de reflejar adecuadamente los impactos que se tienen sobre las finanzas cuando a lo largo de los periodos se incurre en uno o varios costos más altos al promedio? ¿es el costo promedio capaz de captar las verdaderas diferencias significativas de todo el modelo de costos?

En la empresa, cada uno de los bienes objeto de administración en el inventario pasa inicialmente por una actividad de catalogación en la cual se recogen los datos de los bienes (características): nombres científicos, nombre común o vulgar, familia o clasificación principal del bien en el inventario, subfamilias a las que pertenece el bien, unidades de medida (unidad de medida de compras, unidad de medida de inventarios, unidad de medida de operación (mantenimiento - venta), entre otras), funcionario responsable de analizar y/o autorizar la reposición, centro de responsabilidad y unidad de negocio al que el bien está adscrito, punto de pedido, cantidad de pedido, cantidad mínima de inventario, cantidad máxima de inventario, veces en las cuales se le hace inventario físico, número de pieza o planos, dibujos o fotos, artículos o bienes asociados, clasificación A, B, C que tiene el bien, etc. Una vez el bien pasa por el proceso de catalogación quedan los datos consignados en la base de datos del sistema de información, el cual es un Planeador de Recursos Empresariales, ERP (por sus siglas en inglés *Enterprise Resource Planning*), y a partir de esta actividad los funcionarios de un grupo de trabajo, -denominado reabastecimiento-, inician el análisis y recolección de otra información que resulta necesaria para administrar un primer pedido de compra y los pedidos de compra futuros; algunos de los datos son: consumos mensuales, inventario de seguridad deseable y los días o meses previstos para mantener el bien en el inventario. Recopilada la información y surtidos los análisis y aprobaciones pertinentes para el pedido de compra (requisición), en otro proceso y por parte de otra dependencia se inicia la correspondiente gestión de compra en la cual se consideran fijos los tiempos de reposición. Durante la gestión de las actividades de la compra, se coordina con el área de inventarios la entrega del bien por parte del proveedor, y al momento en que éste entrega las cantidades en el almacén, los almacenistas validan que las cantidades relacionadas en las órdenes de compra efectivamente coincidan con las unidades entregadas por el proveedor, y finalmente se hace el ingreso al inventario (es decir: se realiza la recepción), para de esta forma iniciar la dinámica del bien en el inventario y actualizar el costo del bien (el cual es administrado por promedios móviles). Una vez realizada la recepción a los bienes en el inventario, se actualizan las existencias y las cantidades disponibles en el inventario y los bienes de stock quedan a “disposición” para ser demandados por los usuarios, los cuales en general corresponde a las áreas técnicas (responsables del mantenimiento), las áreas comerciales, las áreas administradoras de los proyectos de inversión (los cuales pueden ser de infraestructura o proyectos administrativos), y las áreas administrativas en las cuales se incluyen las dependencias de soporte. En relación con la demanda y los correspondientes consumos, es posible concretar que los bienes de inventario son demandados por los usuarios mediante solicitudes denominadas órdenes de trabajo y cada solicitud actualiza la información de la demanda y la disponibilidad; así como en el recibo de los bienes, con los despachos de las órdenes de trabajo se actualiza el inventario. Por último: también es posible que a la llegada de las órdenes al almacén se tengan pedidos pendientes de atención. Los funcionarios de reabastecimiento previo a realizar las solicitudes de compra de los bienes de inventario deben analizar si procede o no iniciar un nuevo pedido de compra y para ello generan un reporte de reabastecimiento el cual está soportado por el programa de reabastecimiento del sistema de información. El citado programa (ver Figura 9), permite comparar si los inventarios en existencia o los disponibles están por debajo, iguales o por encima del punto de pedido, y sólo para el primero de los casos se sugiere iniciar un nuevo pedido de compra. Las cantidades de compra sugeridas para iniciar el nuevo proceso de compra provienen de sumar la cantidad de pedido a la diferencia resultante entre las existencias (existencias disponibles en el inventario) y el punto de pedido. Como puede concluirse de la información anterior, por medio del reporte es posible identificar tanto si el bien ha llegado al punto de pedido como cuál es la cantidad sugerida para iniciar el nuevo proceso de compra, y además evaluar la validez de la cantidad de pedido que hasta el momento reposa o está definido para el bien en ERP (Planeador de Recursos Empresariales). Para el éxito del ejercicio de reabastecimiento se aclara que previo a iniciar con la generación del reporte, el analista debe ingresar en el sistema de información algunos datos, entre ellos: *Lead time* o tiempo de reposición (por ejemplo: 30 días), los días para los cuales se almacena o surte el inventario (por ejemplo:120 días), el inventario de seguridad (en porcentaje) y el cual corresponde al stock de seguridad que cotidianamente se administra en el inventario de las empresas de telecomunicaciones (por ejemplo: 20%), y las fechas de inicio y fin requeridas para analizar los consumos e inventarios promedios: (2013/01/01) y (2014/09/02), respectivamente.

Figura 9. Ejercicio de reabastecimiento en las empresas de telecomunicaciones



Fuente: Elaboración propia

Durante el planteamiento del trabajo se consideró conveniente invocar algunos elementos y conceptos relacionados con aspectos normativos (ver mayores detalles en el Anexo 2), lo anterior teniendo en cuenta que en materia normativa, en Colombia, las empresas que prestan servicios de telecomunicaciones son regidas por la Ley 142 de 1994, “Por la cual se establece el régimen de los servicios públicos domiciliarios y se dictan otras disposiciones”, “La comisión de Regulación de Telecomunicaciones” y “La Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios ($SSPD$)” -ente gubernamental responsable de controlar y fiscalizar las empresas prestadoras de servicios públicos y de vigilar el cumplimiento de la normas-. Estas entidades se encargan tanto de generar y establecer las normas e instructivos relacionados con la operación y prestación de los servicios, como de regular y vigilar el cumplimiento de la normatividad asociada. Por lo anterior, los aspectos normativos (procesos, procedimientos, guías e instructivos internos), de regulación y gobierno son de vital importancia en este tipo de empresas (Incluyendo las Normas Internacionales de Información Financiera, $NIIF$), y en particular, teniendo en cuenta el objeto de estudio este trabajo: aquellas normas que se relacionen con los costos de los inventarios.

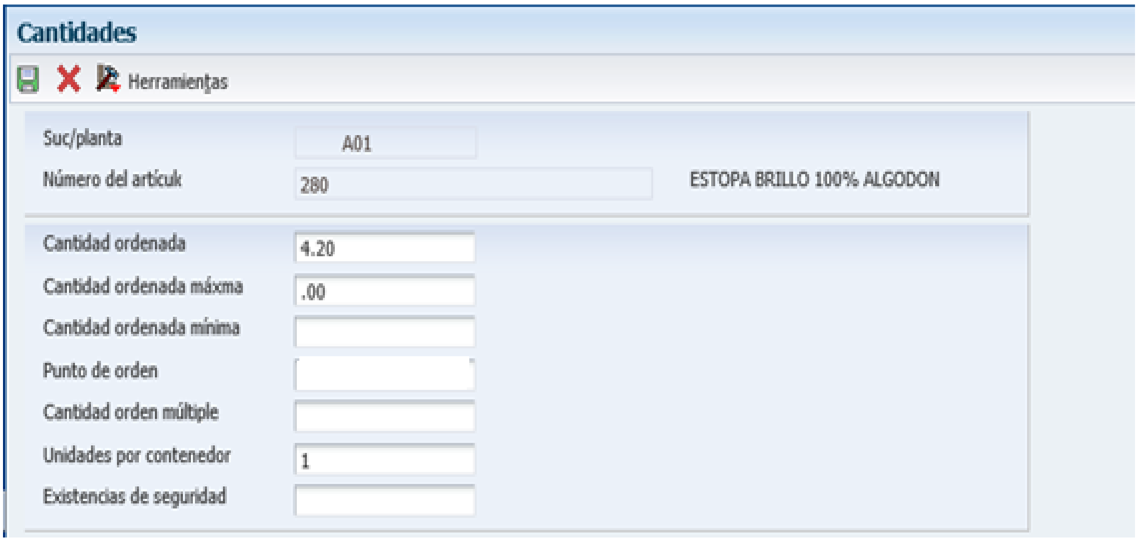
2.2 Implementación real en la empresa prestadora de servicios

En consideración a los criterios de administración del modelo básico EOQ de administración de inventarios, los artículos de inventario sólo se reponen cuando las existencias del inventario lleguen a cero; bajo este supuesto se puede concluir que en este tipo de modelos no se administra punto de pedido. Ahora bien, en la práctica de las empresas de telecomunicaciones hay varias consideraciones importantes que se deben tener en cuenta y se relacionan con el programa de reabastecimiento del software y la interacción con las variables de decisión cantidad de pedido y punto de pedido.

1. En cualquier momento específico de tiempo, es posible analizar la información de las variables del modelo de inventarios: punto de pedido y la cantidad de pedido (Ver Figuras 10 y 11).

En la siguiente figura se detallan los valores relacionados con los campos que tenía el artículo X en las variables: cantidad ordenada, punto de orden y existencias de seguridad antes de someter la información del bien a un proceso de actualización de las variables de decisión punto de pedido y cantidad de pedido

Figura 10. Datos para administrar el inventario del artículo "X" el almacén A01



Fuente: Elaboración propia

Cantidad Ordenada (Q_{filial})*:* Cantidad que se manda a solicitar en compra cuando el artículo de inventario alcanza el punto de orden en el almacén.

Punto de orden (o Punto de pedido - r_{filial} *-):* Cantidad que especifica el momento en que se debe realizar el reabastecimiento.

Existencias de seguridad: Cantidad de existencias para cubrir las variaciones resultantes de la demanda.

Aunque las variables de decisión se puede visualizar por medio de pantallas, el programa de reabastecimiento del software provee un reporte (ver Figura 11), que brinda detalles generales del bien y a su vez permite revisar las variables de decisión para el punto de pedido y cantidad de pedido.

Figura 11. Informe del ERP (Administración inventario: artículo “X”, almacén A01)

Reporte												2015/05/20		
Versión:						Consulta para Toma de Decisión en el Reabastecimiento.						13:00:36		
Usuario:												1		
.														
Opciones de Proceso:														
Modo Eje	Prueba	Fecha Ini	2013/01/01	2015/01/05	Tiempo Reposición (días):	Tiempo Surt	Tiempo Pror	30	% Cálculo IS:	0.2				
.														
Variables RESTAN de la CANTIDAD en Existen				Variables SUMAN de la CANTIDAD en Existencia										
	Cantidad Comprometido en Duro S			Cantidad en Transito S/N					S					
	Cantidad Comprometido Flexible S			Cantidad en Inspección S/N					S					
.														
Almacén	Tipo de Abastecimiento	Und Med. Almacén	Und Med. Compras	Costo Unitario Última Compra con IVA	Costo Unitario Promedio	Categoría Contable	ROQ Cantidad Repedido (actual)	Prom. Transac (Mensual)	Prom. Transac Diario	ROP (Actual.F4102)	ROP Punto de Pedido (actual)	ROQ Cantidad Repedido (Calculo)	ROP (cálculo)	ABC Ventas
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A
A01	S	KG	KG	0.29	0.25	IGMF	2626.8	591.78	20	680	410.75	4.2	622	A

Fuente: Elaboración propia

2. La información de las variables del modelo de inventarios en su cotidianidad se inicializa (o reinician como en nuestro caso), con unos datos de entrada específicos para el punto de pedido y la cantidad de pedido (Ver Figura 12), los cuales aunque provienen de resultados empíricos y criterio de expertos, tienen un sustento matemático soportado por una caracterización del modelo. A lo largo del tiempo, el programa sugiere modificar la cantidad de pedido, Q_{filial} así como el correspondiente punto de pedido r_{filial}.

Una vez los funcionarios de las empresas de telecomunicaciones realizan los correspondientes cálculos, ingresan los resultados de las variables de decisión en los respectivos campos del programa de reabastecimiento, dejando así actualizado el modelo de administración de inventarios para el artículo *x*.

En la práctica los expertos de las empresas de telecomunicaciones suelen hallar Q bajo el supuesto que el consumo es constante en el tiempo t. Parten del consumo promedio (anual o mensual) y a partir de este dato de entrada encuentran el consumo promedio diario correspondiente. De acuerdo con lo anterior:

Consumo promedio diario:

$$\frac{\text{Consumo promedio anual}}{365} = \frac{7.200\ KG}{365\ días} = 19{,}73 \cong 20\ KG/día$$

Cantidad de pedido: El valor del consumo diario hallado anteriormente, 20 KG, se multiplica por un factor que corresponde al ciclo del pedido, -el cual es un valor que suele estar entre 0 y 12 meses y para nuestro caso los expertos aplican un valor de 0,21-, llegando así a obtener la cantidad de pedido que ingresarían al programa de reabastecimiento del sistema de información.

$$Q_{filial} = (\text{Consumo promedio diario})(\text{ciclo de pedido}) = 20\ (0{,}21\ ) = 4{,}2\ K$$

Nota: se aclara que si bien el cálculo anterior de la cantidad de pedido, Q, no se obtuvo de la formulación y optimización del modelo básico, en el cual se determina la cantidad económica de la orden (EOQ) como:

$$\sqrt{\frac{2A\lambda}{h}}$$

De acuerdo con [21] es posible calcular Q en función de T y D (siendo, T , tiempo en el cual se presenta un ciclo de los pedidos en fracción de año y corresponde al tiempo que transcurre desde el momento en que se realiza el aprovisionamiento de inventario con una cantidad de pedido Q y hasta que esta se agota completamente, y D la tasa de la demanda).

Punto de pedido: El punto de pedido se halla como el producto resultante de una regla de tres entre el consumo promedio anual y el consumo promedio mensual; se tiene en cuenta el inventario se seguridad establecido para el bien.

Fecha	Consumo promedio
365	7.200
30	x(1+0,05)

Siendo 0,05 el correspondiente inventario de seguridad para el bien X.

$$r_{filial} = (7.200) * \left(\frac{30}{365}\right)(1{,}05) = 621{,}6 \cong 622$$

La Figura 12 contiene los datos de re inicialización del software, con los cuales se administra el modelo de inventarios del artículo X en el almacén A01 teniendo en cuenta una tasa de demanda, λ, de 20 y un ciclo de pedidos, T, que corresponde a 0,21.

Figura 12. Datos de reabastecimiento del artículo "X" en el almacén A01.

Fuente: Elaboración propia

Los funcionarios de las empresas, encargados de los análisis del reaprovisionamiento de los bienes de inventario, si bien contemplan realizar los cálculos necesarios para establecer el valor de cantidad de pedido, explícitamente no calculan los costos. Uno de los aportes para la empresa que desde este trabajo se espera brindar es precisamente contar con un modelo matemático sustentado que permita calcular en adelante el costo de la gestión del inventario (costo total).

Teniendo en cuenta que la administración de los inventarios de las empresas es soportada por un ERP y los usuarios interactúan con algunas pantallas y campos de éste, se consideró oportuno listar las siguientes pantallas y campos.

En la Figura 13 sólo se hará referencia a los siguientes campos, -los cuales resultan importantes en el manejo de la información de los inventarios-.

Tipo de abastecimiento y tipo de línea: Con base en este dato el sistema de información clasifica al artículo como inventariable; a su vez permite administrar el registro como inventariable cuando éste haga parte de una transacción.

Clasificación LM (Libro mayor): Información nemotécnica de la clasificación contable del artículo en el inventario del almacén; mediante esta información durante las transacciones se deduce la respectiva cuenta contable de inventario.

*Unidad de medida: U*nidad de medida del artículo para el manejo del inventario.

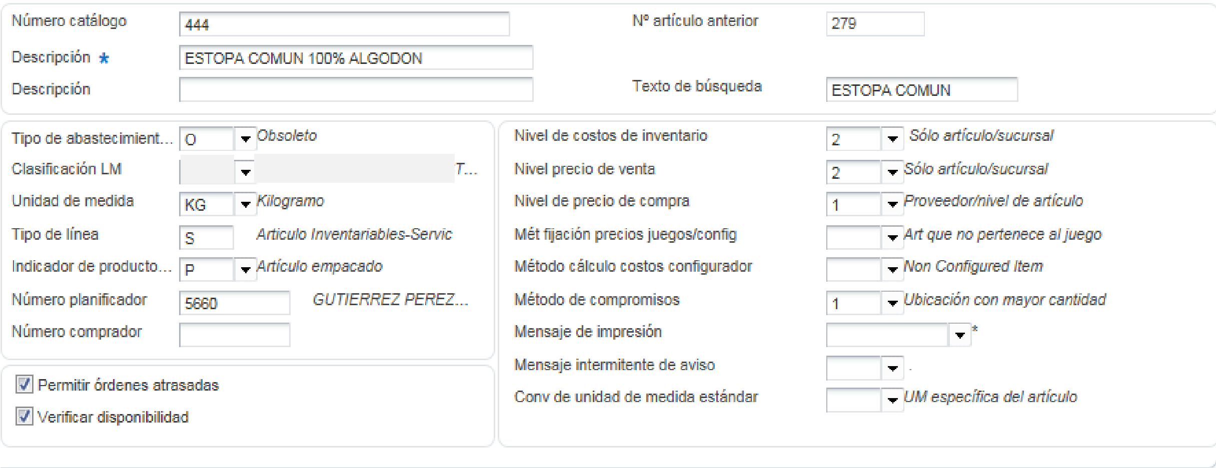
Indicador de producto: P, indica que el artículo es un bien terminado y embalado.

Permitir órdenes atrasadas y Verificar disponibilidad: Por medio de la configuración de estas opciones se podrán generar órdenes de trabajo (incluso si no se tiene disponibilidad suficiente) e interactuar con los datos de disponibilidad.

Nivel precio de venta y Nivel de costos de inventario: Estos datos hacen que las transacciones de inventario y ventas se realicen con base en los precios de venta y costos del inventario (promedios ponderados) propios del almacén.

Nivel precio de compra: Cuando este campo tiene el valor 1 los precios de compra se capturan de la última compra realizada a un proveedor específico.

Figura 13. *Datos del artículo X en el maestro de artículos.*



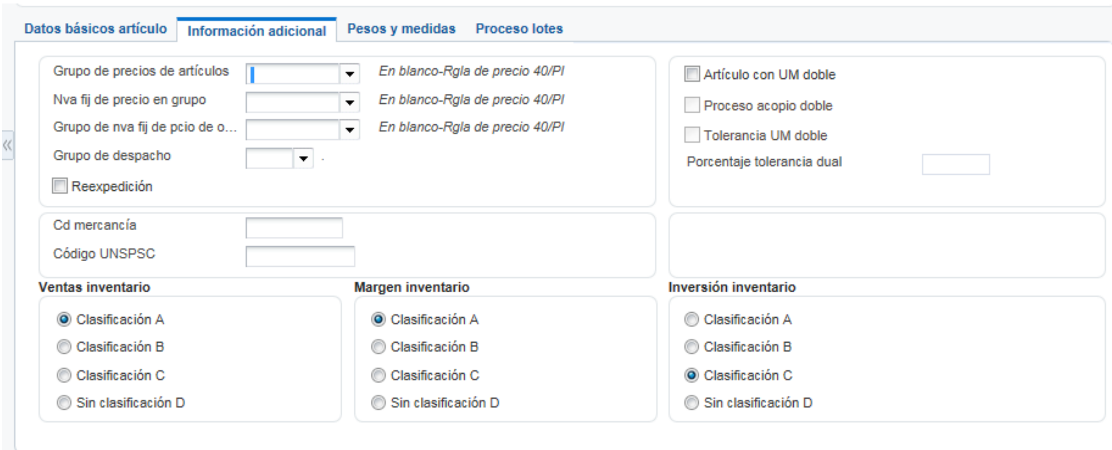
Fuente: Elaboración propia

De las siguientes pantallas (Figuras 14), se hace referencia sólo a los campos clasificación ABC y los correspondientes a pesos y medidas:

Clasificación ABC del artículo en cuanto a ventas de inventario, margen de inventario y la inversión en el inventario; campos con los que se indica la clasificación ABC que tiene el artículo en el inventario; el sistema de información actualiza esta clasificación de acuerdo con el comportamiento de las ventas, el margen en ventas y la inversión en el inventario.

Pesos y medidas: En esta sección del catálogo se determinan todas las unidades de medida del bien.

Figura 14. Información ABC y Pesos y medidas: Datos del maestro de artículos.



Fuente: Elaboración propia

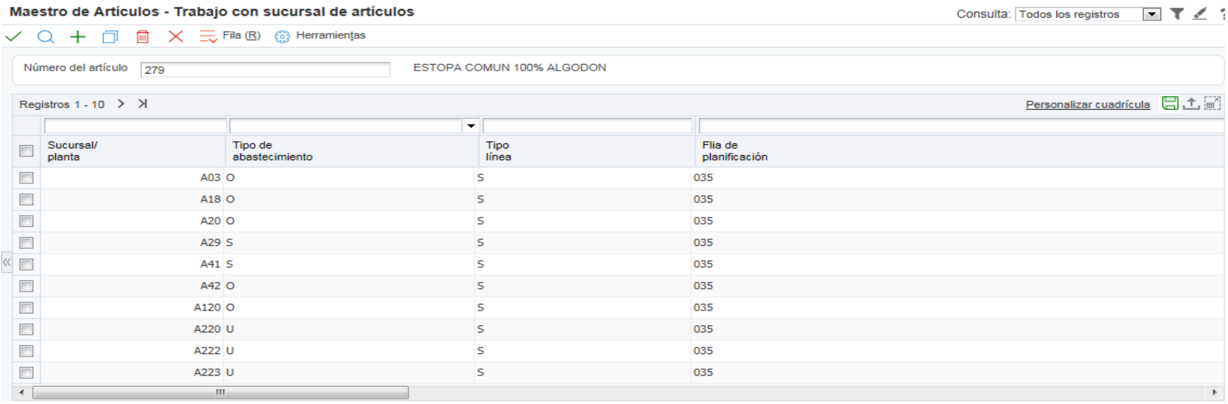
La siguiente figura contiene información de los almacenes:

Sucursal/planta. La identificación (alfanumérica) de cada uno de los almacenes en los cuales tiene inventario el bien (artículo).

Tipo de abastecimiento y tipo de línea: S. (Ver explicación en la Figura 13).

Flia de planificación (Familia de planificación): Con estos datos alfanuméricos se identifican las familias y grupos en los cuales se clasifica el bien en el inventario.

Figura 15. Almacenes donde se tiene inventario del artículo "X"


Maestro de Artículos - Trabajo con sucursal de artículos

Número del artículo 279 ESTOPA COMUN 100% ALGODON

Sucursal/ planta	Tipo de abastecimiento	Tipo línea	Flia de planificación
A03	O	S	035
A18	O	S	035
A20	O	S	035
A29	S	S	035
A41	S	S	035
A42	O	S	035
A120	O	S	035
A220	U	S	035
A222	U	S	035
A223	U	S	035

Fuente: Elaboración propia

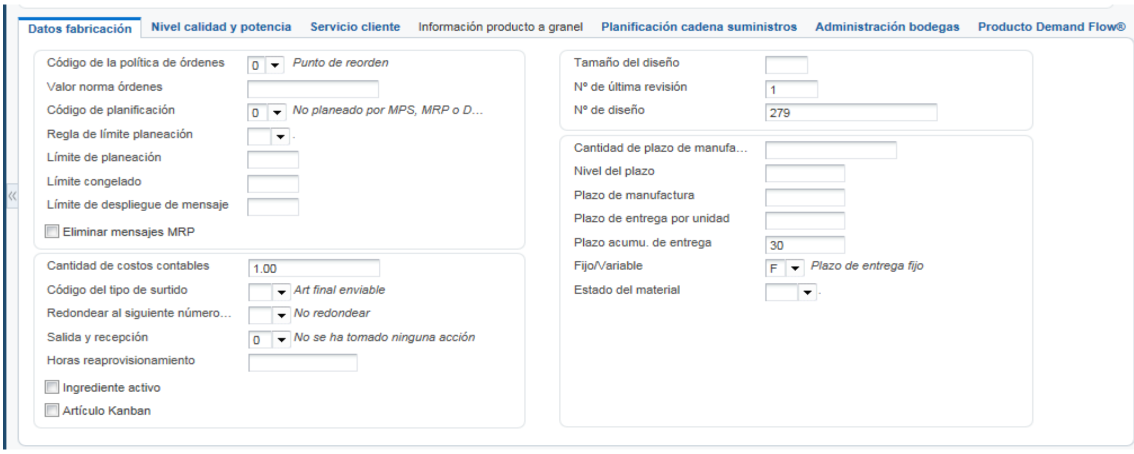
De la siguiente figura resaltamos el campo con el cual se establece el código del país donde se administra el inventario, País origen.

Figura 16. Campo: País Origen: Datos del artículo "X" en el almacén A01

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente figura solo se hace referencia al campo Código de la política de órdenes, con el cual se establece la política para generar órdenes del artículo.

Figura 17. Campos para administrar la política de inventarios



Fuente: Elaboración propia

En este numeral se calcularon los costos, así como el valor del parámetro para la cantidad de pedido conforme lo hacen los funcionarios en las empresas de telecomunicaciones. La siguiente tabla contiene los resultados anteriores, los cálculos relacionados con el modelo básico, el modelo considerando el ciclo de pedido y el modelo con costo del inventario (para mayores detalles ver Anexo 1).

Tabla 2 Información de los costos para el caso de estudio según modelos EOQ

VALORES / **VARIABLE O DATO DE ANÁLISIS**	**Valor Obtenido Modelo básico**	**Valor Obtenido Modelo considerando el ciclo de Pedido**	**Valor Obtenido Modelo con costo del inventario**	**Valor Real Práctica de la Empresa**	**Observaciones**
Cantidad del pedido que minimiza la función de costos (Q)	*4,17*	*4,20*	*5,60*	*4,20*	*La cantidad de pedido, de acuerdo con la práctica de la empresa, se calcula teniendo en cuenta un tiempo de ciclo, T, de 0,21 días.*
Costo total ($)	*95,92*	*95,92*	*71,63*	*74,56*	*Aunque los procedimientos de la empresa no contemplan calcular los costos a cada uno de los items de inventario, dadas las características del proceso en este trabajo se optó por calcularlos haciendo uso del modelo con costos del inventario.* *Los costos en consideración de pedidos pendientes son básicamente iguales a los costos del modelo básico debido a que en ellos se consideran los mismos valores de los componentes del costo y adicionalmente son casi idénticas las cantidades de pedido resultantes en cada uno de estos modelos.* *Para los costos del modelo real de la empresa se partió de una cantidad de pedido de 4,2 KG y se usó el modelo con costos del inventario. Se encontró que son mayores los costos en comparación con los resultados obtenidos al realizar todo el despliegue formal del modelo con costos del inventario.*

Fuente: Elaboración propia

III. MODELO BÁSICO (Q, r): FORMULACIÓN USUAL

En este capítulo se darán a conocer las características generales y la fundamentación teórica del modelo básico de administración de inventarios (Q, r). Con el fin de verificar su ámbito de aplicación en las empresas prestadoras de servicios de telecomunicaciones, se documentan algunas consideraciones y supuestos, y para ilustrar su aplicación se hará uso de herramientas informáticas disponibles en el medio.

Según Zheng [10] el modelo básico (Q, r) es a menudo denominado el “modelo estocástico” porque de manera realista especifica las exigencias de un proceso de ésta naturaleza y su política de control es óptima bajo condiciones muy generales; por su parte Hopp en [22] enfatiza que la demanda y/o el tiempo de reposición se considera aleatorio con una distribución conocida.

3.1 Funcionamiento del modelo

Para el desarrollo formal del modelo se asume lo siguiente:

1. Los productos son analizados individualmente.
2. La demanda ocurre una a la vez (no hay demanda por lotes).
3. Diariamente las demandas son independientes entre sí (es decir: una de otra).
4. La demanda es estacionaria sobre el tiempo; la demanda tiene la misma distribución para cada día t.
5. La demanda para los bienes es un proceso de Poisson con intensidad d unidades por dia.
6. Existe un costo fijo asociado al hacer el pedido.
7. Se hace un nuevo pedido sólo en el momento en el cual el nivel de inventario cae hasta cierto nivel r.
8. Se presentan pedidos pendientes.

Notación: En el presente trabajo se utiliza la notación utilizada en Hopp [20]:

λ: Tasa de demanda (unidades/tiempo)

X: Demanda durante el tiempo de reposición; variable aleatoria. En unidades.

σ_D: Desviación estándar de la demanda diaria. En unidades.

D: Demanda en el día t; variable aleatoria. En unidades.

d: $E[D]$: Demanda diaria esperada. En unidades.

L: Tiempo de reposición; variable aleatoria. En número de periodos.

l: $E[L]$: Es la esperanza del tiempo de reposición. En número de periodos.

σ_L: Desviación estándar del tiempo de reposición. En días.

$E(D) = \lambda l$: Demanda durante el tiempo de reposición. En unidades.

$p(x)$: $P(X = x)$: Es la probabilidad de que la demanda durante el tiempo de reposición sea igual a x (función de densidad de probabilidad).

σ: Es la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de reposición.

$g(x)$: $P[X = x]$: Es la probabilidad de que la demanda durante el tiempo de reposición sea igual a x (función de densidad de probabilidad).

$G(x)$: $P(X \leq x] = \sum_{i=0}^{x} p(i)$: Es la probabilidad de que la demanda durante el tiempo de reposición sea menor o igual a x (función de distribución acumulada).

$F(Q,r)$: Frecuencia de pedido (orden de reposición por año).

$B(Q,r)$: Número promedio de pedidos pendientes no despachados.

$I(Q,r)$: Número promedio de inventario a mano.

A: Costo fijo de preparación. En pesos.

b: Costo por unidad de pedido pendiente en un año.

c: Es el costo de producción por unidad. En pesos por unidad.

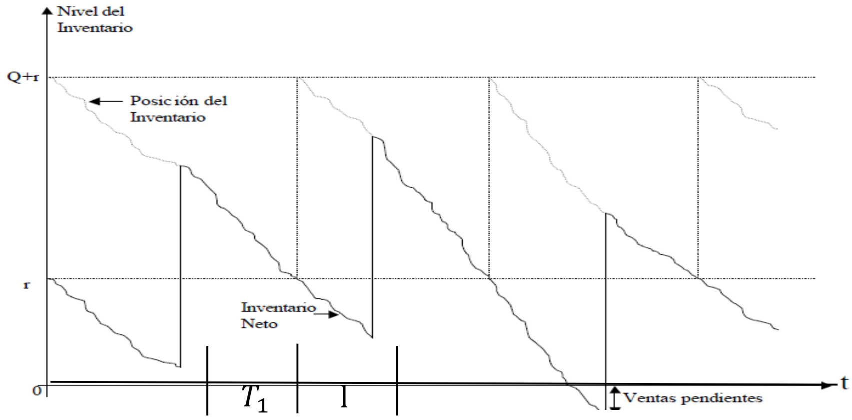
h: Costo por unidad de inventario en un año.

Variables de decisión:

- Q: Cantidad del pedido. En unidades.
- r: Punto de pedido (Punto de reorden) en unidades; representa el nivel de inventario en el cual se pide o hace el pedido. En unidades.

La siguiente figura corresponde a la política del modelo para un solo producto continuamente monitoreado, y muestra el nivel de inventario neto y la posición de inventario y. La demanda ocurre aleatoriamente y como se asume que el pedido llega completo se explica el por qué el inventario neto sale por unidad cada vez. Cuando la posición de inventario alcanza el punto de reorden r, se piden Q unidades (inmediatamente salta a $Q + r$, y por tanto nunca queda en r), que son recibidas después de un tiempo de reposición l, durante el cual puede ocurrir déficit o pedido pendiente.

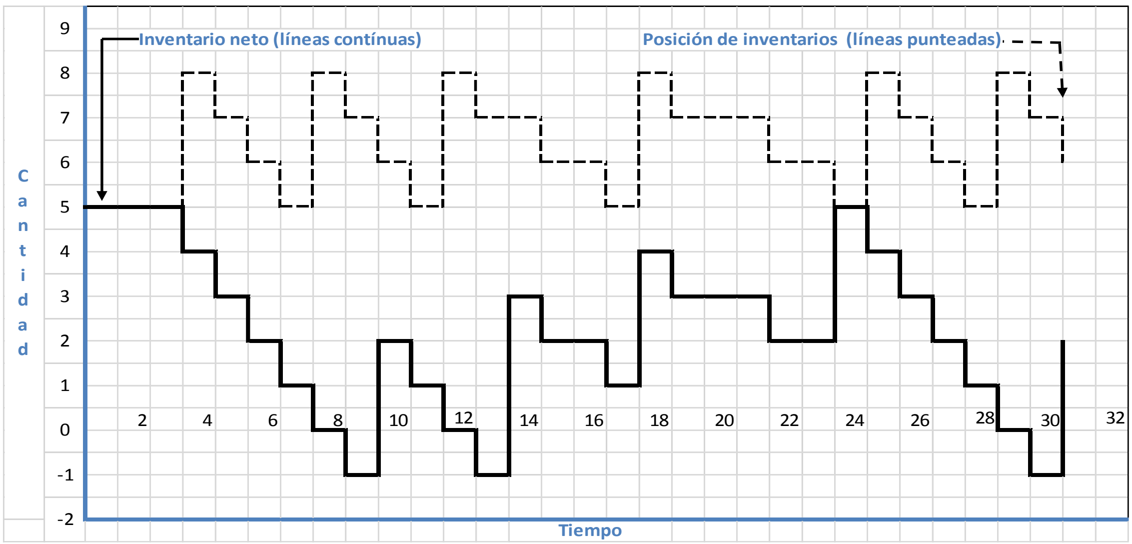
Figura 18. Dinámica de los niveles de inventario.



Fuente: Elaboración propia resultante de los supuestos indicados por Hadley & Whitin [7]

La Figura 19 representa un sistema de inventarios $(4{,}4)$ de las siguientes características: $Q = 4$, $r = 4$, $l = 2$, demanda (en unidades) durante el tiempo de reposición $\lambda l = 2$, demandas perfectamente regulares tal que cada vez que el inventario alcanza a r se hace un pedido que llega dos unidades de tiempo después. Como la orden llega después de la última demanda en el ciclo de reemplazamiento, entonces el nivel más bajo de inventario es $r - \lambda l + 1$ (para fines del este ejercicio el nivel más bajo de inventario es 3).

Figura 19. Sistema de inventarios.



Fuente: Puerta [21]

3.2 Formulación y optimización del modelo

Anteriormente se mencionó que el modelo (Q,r) hace referencia a un sistema de revisión continua de los niveles de inventario el cual comprende la posición del inventario (y) en el tiempo (t) y correspondiente a una tasa de demanda (λ), la cual se asume continua y estrictamente creciente durante el correspondiente tiempo de reposición (L). Ahora bien, los términos relevantes para la función de costo son: el costo fijo de preparación por cada orden generada (A), el costo de almacenamiento (h) y el costo de pedido pendiente (b), y para los fines del presente trabajo los últimos dos costos se considerarán en un solo término denominado "costo de inventario".

Sea $\mathrm{G}(y)$ la tasa en la cual el costo del inventario esperado se acumula en un intervalo de tiempo $t+L$ cuando la posición en el tiempo t es igual a y, como D denota la suma de las demandas que ocurren durante el intervalo $(t, t+L]$, entonces

$$\mathrm{G(y) = E[h[y-D]^{+} + b[y-D]^{-}]}$$

Luego la función de costo está dada por

$$C(\,Q,r) = AF(Q,r) + E[h[y-D]^{+} + b[y-D]^{-}] \qquad (2)$$

Como se observa en la ecuación anterior, la función de costo la componen el término fijo $AF(Q,r)$, -el cual no involucra la variable aleatoria y-, y el término variable [h$[y-D]^{+} + b[y-D]^{-}$] denominado en Zheng [10] costo de inventario, y el cual está determinado por la posición del inventario y y la demanda D durante el tiempo de reposición L. La posición de inventario y es continuamente revisada y se considera continuamente uniforme en el intervalo de los números reales $[r,\ r+Q]$. De lo anterior, la función de optimización de costos se puede expresar de la siguiente manera.

$$C(Q,r) = AF(Q,r) + \frac{1}{Q}\int_{r}^{r+Q} E[h[y-D]^{+} + b[y-D]^{-}dy] \qquad (3)$$

Teorema 1. $C(Q,r)$ Es una función conjuntamente convexa de Q y r.

Demostración: En virtud de la política de inventarios (Q,r), sean $I(Q,r)$ y $B(Q,r)$ el inventario promedio y el promedio de pedidos pendientes, respectivamente, es decir:

$$I(Q,r) = \left(\frac{I}{Q}\right)\int_{r}^{r+Q} E(y-D)^{+}dy$$

$$B(Q,r) = \left(\frac{I}{Q}\right)\int_{r}^{r+Q} E(D-Y)^{+}dy$$

Se puede demostrar que:

$$I(Q,r) = \frac{Q}{2} + r - \lambda L \ + \ B(Q,r) = \frac{Q}{2} + r - \lambda l + \ B(Q,r)$$

De esta manera es factible reescribir la función del costo total como:

$$C(Q,r) = \frac{A\lambda}{Q} + h\frac{Q}{2} + r - \lambda l + (h+b)B(Q,r) \qquad (4)$$

El primer término $\left(\frac{A\lambda}{Q}\right)$ es el costo anual de preparación y los demás términos corresponden a los costos anuales de inventario, los cuales comprenden tanto los costos anuales de almacenamiento como los costos anuales de penalización asociados con los pedidos pendientes. Adicionalmente, al revisar los términos de la Ecuación 4 se encuentra que los dos primeros son convexos, y como se puede consultar en Zipkin [1] $B(Q,r)$ es conjuntamente convexa, y como la suma de funciones convexas es convexa queda demostrado que $C(Q,r)$ es conjuntamente convexa.

El problema de optimización a abordar en este apartado es minimizar la función de costo:

$$min\, C(Q,r) = \frac{A\lambda + \int_{r}^{r+Q} G(y)dy}{Q} \qquad (5)$$

Teniendo en consideración lo difícil y/o dispendioso que resultaría resolver analíticamente este problema -lo cual precisamente corresponde a la impopularidad del modelo-, se hará uso del algoritmo expuesto en Federgruen [2] (Ver mayores detalles de éste en el Anexo 3) –el cual es uno de los algoritmos más consultados y validados-, y se ejecutará por medio del programa R (The R Project for Statistical Computing).

ALGORITMO I:

Sea $\Delta \mathrm{G}(\mathrm{y}) = \mathrm{G}(\mathrm{y}+1) - \mathrm{G}(\mathrm{y})$

Step 0. Calculate $G(0)$ and $\Delta G(0)$; $L = 0$;

While $\Delta G(L) < 0$ do

Begin $L := L + 1$, evaluate $\Delta G(L)$, $G(L+1) := G(L) + \Delta G(L)$

End

$S := AD + G(L), Q^* = 1, C^*(Q,r) := S, r^* := L - 1,$

$R := L + 1;$

Step 1. Repeat

Begin if $G(r) \leq G(R)$

Then if $C^*(Q,r) \leq G(R)$

Then stop

Else begin $S := S + G(r^*), r^* := r^* - 1,$

If $r^* < 0$, evaluate $\Delta G(r)$ and $G(r^*) := G(r^* + 1) - \Delta G(r^*)$

End

Else if $C^*(Q,r) \leq G(R)$

Then stop

Else begin $S := S + G(R)$, evaluate

$\Delta G(R), G(R+1) := G(R) + \Delta G(R), \qquad R = R + 1$

End

$Q^* := Q + 1, r^* = r, C^*(Q,r) = S/Q^*,$

End

3.3 Aplicación del modelo en la empresa

Al analizar los inventarios en las empresas prestadores de servicios de telecomunicaciones se encuentra que cumplen los supuestos del modelo (Q,r). En particular la demanda y el tiempo de reposición tienen un comportamiento aleatorio con una distribución conocida. Por lo anterior en esta sección se reportan algunos resultados computaciones del modelo (Q,r) para un caso real de estas empresas y bajo la consideración del costo esperado, buscando posteriormente llevar a cabo comparaciones bajo la consideración del riesgo en la formulación de la función de costo y además hacer algunos comentarios sobre las propiedades de los valores óptimos. La aplicación toma mucho sentido una vez que se espera que bajo la contribución del presente trabajo la empresa en consideración valide los resultados obtenidos y pueda migrar del modelo EOQ, que es el que en la actualidad implementa, a un modelo con consideración de aleatoriedad como el modelo (Q,r), y según su aversión al riesgo considerar la función de costo bajo el criterio de la esperanza matemática o bajo la consideración de medida de riesgo $CVaR$ que plantearemos en el siguiente capítulo y que es en esencia nuestra propuesta de implementación. Es importante hacer la salvedad que si bien la aplicación del trabajo está enmarcada al sector de telecomunicaciones, el ámbito de aplicación de los modelos de inventarios es suficientemente amplio para extenderlo a cualquier sector donde el control de inventarios sea una realidad y necesidad del día a día, entre ellos, los sectores de manufactura, transporte, metalurgia y otras tantas entidades que proveen servicios (por ejemplo: acueducto, alcantarillado, generación energía, distribución energía, residuos sólidos, etc.).

Los siguientes resultados corresponden a los valores óptimos de las variables de decisión Q^* y r^* y del respectivo costo, y fueron obtenidos del algoritmo I al considerar un artículo X (código 280) con una demanda Poisson, $\lambda = 20$, tiempo de reposición $L = 1$, costo fijo de preparación $A = 10$, costo de inventario anual $h = 23$ y costo de pedidos pendientes $b = 29$.

Cantidad óptima de pedido: $Q^* = 8\ \mathrm{KG}$

Punto óptimo de pedido: $r^* = 16 \text{ KG}$

Costo total: $C^*(Q, r) = \$\ 128$

Aunque es entendible que de una manera "natural" el enfoque del análisis respecto a la optimización de los costos suela centrarse en el costo promedio durante el intervalo de tiempo $[0, \infty)$, es necesario realizar las siguientes reflexiones, Zipkin [1]:

- ¿El costo promedio, realmente, llega a reflejar el impacto económico de los distintos costos que susceptiblemente pueden presentarse durante los ciclos de vida de los inventarios?
- ¿El costo promedio es capaz de reflejar adecuadamente los impactos que se tienen sobre las finanzas cuando a lo largo de los periodos se incurre en uno o varios costos más altos al promedio?
- ¿Es el costo promedio capaz de captar las verdaderas diferencias significativas de todo el modelo de costos?

El siguiente capítulo presenta la incorporación de la medida de riesgo $CVaR$ en el modelo de inventarios (Q, r) buscando considerar las preguntas anteriores.

IV $CVaR$ EN EL MODELO (Q,r): FORMULACIÓN PROPUESTA

En la presente sección se conservan los mismos supuestos del modelo básico (Q,r) al considerar un solo artículo con demanda Poisson y en el cual se hace un nuevo pedido de Q unidades cada vez que la posición del inventario alcanza el punto de pedido r, el cual es recibido después de un tiempo de reposición L. Como se puede observar la política de inventario consiste en hallar la solución de $min_{(Q,r)}c(Q,r)$, el cual busca obtener el mínimo costo esperado posible, sin embargo la consideración de la esperanza matemática es un criterio insuficiente al momento de capturar información respecto a grandes pérdidas sin control. Con el fin de disminuir dichas pérdidas, el presente trabajo propone minimizar el Valor en Riesgo Condicional de la función de costo como una forma de reflejar el impacto económico y financiero que se puede generar cuando uno o varios de los costos sean mucho más altos que el promedio.

4.1 Funcionamiento del modelo

De acuerdo con Zheng [23] se usa la siguiente formulación en términos de los costos de inventario: costos de almacenamiento (h) y pedidos pendientes (b); para esto definamos similar a como se hizo en la sección 3.2 el costo de inventario por:

$$\phi(y,D) = h(y-D)^{+} + b(D-y)^{+} \tag{6}$$

Y sea

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(y) = \mathrm{CVa}R_{\alpha}[\phi(\mathrm{y},\mathrm{D})],$$

El $CVaR$ del costo del inventario a un nivel de confianza α.

De lo anterior, el problema de optimización que se desea estudiar ahora es la minimización de la función de costo dada por:

$$C_{\alpha}(\mathrm{Q},\mathrm{r}) = \frac{1}{\mathrm{Q}}\left[\lambda K + \int_{r}^{r+Q} \mathfrak{C}_{\alpha}(y)dy\right]$$

Note que de acuerdo con la definición del $CVaR$ en Rockefeller [17]

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(y) = \mathrm{E}[\,\phi(\mathrm{y},\mathrm{D}) \mid \phi(\mathrm{y},\mathrm{D}) > \rho_{\alpha}(y)]$$

Con $\rho_{\alpha}(y) = \mathrm{Va}R_{\alpha}[\phi(\mathrm{y},\mathrm{D})]$

Se tiene que

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(y) = \rho_{\alpha}(y) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{0}^{\infty} \left[\mathrm{h}\,(\mathrm{y}-\xi\,)^{+} + \mathrm{b}(\xi - \mathrm{y})^{-} - \rho_{\alpha}(y)]^{+}\right]dF(\xi)$$

Denotando $\underline{y}_{\infty} = y - \frac{\rho_{\alpha}(y)}{\mathrm{h}}$ y $\overline{y_{\alpha}} = y + \frac{\rho_{\alpha}(y)}{\mathrm{b}}$

Se tiene que por medio de la siguiente expresión se refleja el nivel de aversión al riesgo en la función de costo del modelo de inventarios (Q, r).

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(y) = \rho_{\alpha}(y) + \frac{h}{1-\alpha}\int_{0}^{\underline{y}_{\infty}} (\underline{y}_{\infty} - \xi\,)dF(\xi) + \frac{b}{1-\alpha}\int_{\overline{y_{\alpha}}}^{\alpha} (\xi\; y_{\alpha} - \overline{y_{\alpha}})dF(\xi)$$

Es de observar que el modelo (Q, r) bajo la consideración del costo esperado es un caso particular $CVaR$ cuando $\alpha = 0$, Debido a que

$$VaR_{0}\,[X] := \,inf\,\{\,x/\,Fx\,(X)\; \geq 0\,\} = 0$$

Luego

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(y) = \frac{1}{1}\int_{0}^{\infty} [\mathrm{h}\,(\mathrm{y}-\xi\,)^{+} + \mathrm{b}(\xi - \mathrm{y})^{-}]dF(\xi) = G(y)$$

Por tanto

$$C_{0}(\mathrm{Q},\mathrm{r}) \; = \frac{1}{\mathrm{Q}}\,[\lambda K + \int_{r}^{r+Q} \mathfrak{C}_{\alpha}(y)dy] = C(Q, r)$$

4.2 Optimización del modelo de inventarios

Antes de calcular los valores óptimos del modelo que generen solución al problema de optimización:

$$min_{(Q,r)}\; C_{\alpha}(\mathrm{Q},\mathrm{r})$$

Veamos un teorema que permite garantizar la convexidad conjunta de la función de costo en las variables Q y r.

Teorema 2. $\mathbf{C_\alpha(Q, r)}$ es una función conjuntamente convexa de Q y r.

Demostración: De acuerdo con el Corolario de Convexidad del $CVaR$ (Ver Corollary 11 (Convexity of $CVaR$), Rockafeller [17]), se concluye que $\mathfrak{C}_\alpha(y)$ es convexa, y adicionalmente usando los recursos y funcionalidades documentadas en Zhang [24] se puede afirmar que para un nivel de confianza (α) la función de costo $\mathrm{C}_\alpha(Q, r)$ es conjuntamente convexa tanto para Q como para r. La conclusión es válida, según Zheng [10], si se parte del hecho que tanto $\mathrm{C}_\alpha(\mathrm{Q}, \mathrm{r})$ como $\mathfrak{C}_\alpha(y)$ tienen la misma condición que $C(\mathrm{Q}, \mathrm{r})$ y $G(y)$, respectivamente.

De forma similar al planteamiento que se brindó para resolver el modelo (Q, r) con costo esperado del inventario, para encontrar una solución al problema de minimización, es decir: para hallar los valores óptimos de Q^* y r^*, se realizan algunas modificaciones al algoritmo propuesto en Federgruen [2], el cual en este trabajo se ha adaptado para aplicar la medida de riesgo $CVaR$. El valor óptimo del modelo desarrollado a continuación contiene básicamente la versión adaptada del algoritmo de Federgruen, el cual en adelante se denominará algoritmo II. Al igual que el primer algoritmo, el algoritmo II se debe someter a procesamiento en un software especializado; en este trabajo se utiliza la versión libre 3.1.3 - Smooth Sidewalk del programa R (The R Project for Statistical Computing).

ALGORITMO II:

Sea $\Delta\, \mathcal{C}(\mathrm{y}) = \mathcal{C}(\mathrm{y}+1) - \mathcal{C}(\mathrm{y})$

Step 0. Calculate $\mathcal{C}(0)$ and $\Delta\mathcal{C}(0)$; $L = 0$;

While $\Delta\mathcal{C}(L) < 0$ do

Begin $L := L + 1$, evaluate $\Delta\mathcal{C}(L)$, $\mathcal{C}(L+1) := \mathcal{C}(L) + \Delta\mathcal{C}(L)$

End

$S := AD + \mathcal{C}(L), Q_\alpha = 1, C_\alpha(Q, r) := S, r_\alpha := L - 1,$

$R := L + 1;$

Step 1. Repeat

Begin if $\mathcal{C}(r_\alpha) \leq \mathcal{C}(R)$

Then if $C_\alpha(Q,r) \leq \mathcal{C}(R)$

Then stop

Else begin $S := S + \mathcal{C}(r^*), r_\alpha := r_\alpha - 1,$

If $r_\alpha < 0$, evaluate $\Delta\mathcal{C}(r_\alpha)$ and $\mathcal{C}(r_\alpha) := \mathcal{C}(r_\alpha + 1) - \Delta\mathcal{C}(r_\alpha)$

End

Else if $C_\alpha(Q,r) \leq \mathcal{C}(R)$

Then stop

Else begin $S := S + \mathcal{C}(R)$, evaluate

$$\Delta\mathcal{C}(R), \mathcal{C}(R+1) := \mathcal{C}(R) + \Delta\mathcal{C}(R), R = R + 1$$

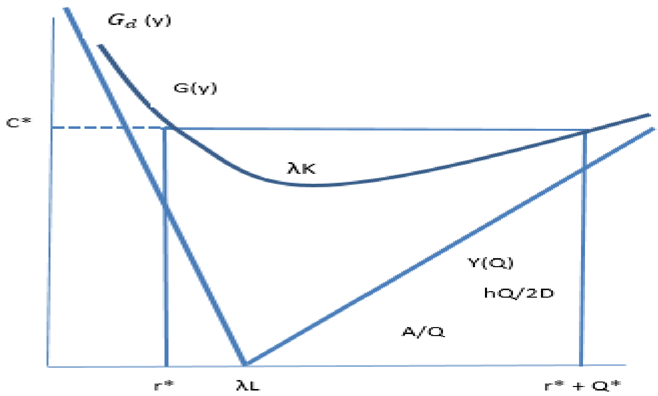
End

$Q_\alpha^* = Q_\alpha + 1, \quad r_\alpha^* = r_\alpha, \quad C_\alpha^*(Q,r) = S/Q_\alpha^*$

End

Dado que la función de los costos de inventario en el modelo estocástico crece más lentamente que su contraparte en el modelo EOQ, la cantidad óptima de pedido Q^* (la cual está determinada por el equilibrio entre costos de pedido y los costes de inventario), debe ser mayor que ${Q^*}_d$. Lo anterior se puede observar en la Figura 20 al buscar y comparar gráficamente Q^* con ${Q^*}_d$.

Figura 20. Condiciones de optimalidad.



Fuente: Zheng [10]

Teorema 3.

I. ${Q^*}_d \leq Q^*$ y ${Q^*}_d \leq {Q^*}_\alpha$

II ${C^*}_d \leq C^*$ y ${C^*}_d \leq {C^*}_\alpha$

El anterior teorema, (ver demostración en Zheng [10]), establece relaciones de las cantidades de pedido (${Q^*}_d$ con Q^* y ${Q^*}_\alpha$), y los costos (${C^*}_d$ con C^* y ${C^*}_\alpha$) entre los modelos EOQ y (Q,r) e implica que para una determinada cantidad Q los costos de inventario en el modelo (Q,r) son mayores que los correspondientes costos en el modelo EOQ y sobre el supuesto de una adecuada elección de Q la parte a controlar es realmente menor en el modelo (Q,r). Se puede parafrasear lo anterior suponiendo que cuando la demanda durante el leadtime es aleatoria, la desviación en una unidad más de la posición de inventario y generalmente no obliga adicionar una unidad al inventario o a los pedidos, como si ocurre cuando la demanda es determinista.

4.3 Aplicación del modelo

Aunque para activos que tienen distribuciones simples puede resultar equivalente trabajar con las medidas de riesgo varianza mínima, VaR y $CVaR$, (Rockafeller [18]), $CVaR$ tiene propiedades superiores en muchos aspectos; especialmente se reseñan la propiedad de convexidad, la posibilidad que ofrece para cuantificar las pérdidas sin control que se podrían encontrar en la cola de las distribuciones y adicionalmente que para las aplicaciones puede ser expresado mediante una fórmula especial de minimización, la cual se puede incorporar fácilmente a problemas de optimización con respecto a $x \in X$ diseñados para minimizar el riesgo o controlarlo dentro de determinados límites. $CVaR$ no solo es una medida de riesgo coherente, el utilizarlo mediante fórmulas de minimización ha abierto la puerta a técnicas computacionales que permiten medir la aversión al riesgo de una manera más eficaz que antes. Similar a como se procedió en la aplicación del modelo (Q,r) con costo del inventario, las variables de decisión "Cantidad de Pedido" y "Punto de pedido" y el costo mínimo con el cual el modelo de inventarios se cubre de grandes pérdidas, se han calculado al correr el algoritmo ajustado al $CVaR$ del costo del inventario, (algoritmo II), en la versión 3.1.3 del programa R (*The R Project for Statistical Computing*). Los datos de entrada se toman del enunciado del caso de estudio (capítulo anterior) y se incorpora el parámetro α, el cual es necesario para calcular la medida de riesgo $CVaR$: artículo X (código 280) con una demanda

Poisson, $\lambda = 20$, tiempo de reposición $L = 1$, costo fijo de preparación $A = 10$, costo de inventario anual $h = 23$, costo de pedidos pendientes $b = 29$ y un nivel de confianza $\alpha = 0{,}95$. Los siguientes fueron los resultados obtenidos:

Cantidad óptima de pedido: $Q_\alpha^* = 7$ KG
Punto óptimo de pedido: $r_\alpha^* = 18$ KG
Costo total del modelo: $C_\alpha^*(Q, r) = \$\ 316{,}98$

La siguiente tabla resume los valores óptimos Q^*, r^*, C^*, $Q_\alpha{}^*$, $r_\alpha{}^*$ y $C_\alpha{}^*$ obtenidos del algoritmo II, que como se puede observer es discrete y por lo tanto sus valores son enteros, en particular Q^***,** r^* son calculados por el algoritmo II tomando $\alpha = 0$, los valores Q_d y $r_d$son los del modelo EOQ.

Tabla 3. Resultados para el caso de estudio

($\lambda = 20$, $L = 1$, $h = 23$, $b = 29$, $A = 10$, $\alpha = 0{,}95$ $Q_{filial} = 4{,}2$, $C_{filial} = 74{,}56$)

Q_{filial}	Q_d^*	Q^*	Q_α^*	r_{filial}	r_d^*	r^*	r_α^*	C_{filial}	C_d^*	C^*	c_α^*
4,2	5,6	8,0	7,0	622	17,5	16,0	18,0	74,56	71,63	128,40	316,98

Fuente: Elaboración propia

Intuitivamente hablando, de acuerdo a los resultados de la Tabla 3, en el modelo determinístico EOQ se tienen menores costos que en el modelo (Q, r), lo anterior se debe a que el modelo (Q, r) trabaja situaciones más reales al considerar aleatoriedad; similarmente, si en el modelo (Q, r) se considera una medida que contemple las grandes pérdidas se tendrá un costo mayor que en otros modelos que en su formulación teórica o matemática no llegan a identificarlas. Aunque a primera vista el impacto en los costos pudiera descalificar el modelo, se debe tener presente que el $CVaR$ en el modelo (Q, r) evita focalizarse sólo en el costo promedio para mitigar así el impacto que se tendría en las finanzas de las empresas (pérdidas enormes) si de buenas a primeras se materializan costos mayores al promedio. La propuesta que hacemos a partir de ahora es considerar en la administración de los inventarios un modelo que recoja tanto las experiencias extremas en el comportamiento de los costos (donde no sólo importe el promedio debido a que es mucho más probable que costos mayores “al promedio” se presenten durante el ciclo de vida de los inventarios), como una medición en la que sea posible contemplar la ocurrencia de grandes pérdidas.

Observe que en la práctica actual de la filial, la cantidad de pedido, Q_{filial}, se deduce empíricamente, y de acuerdo con los resultados que se relacionan en la Tabla 3 su valor resulta siendo muy similar al calculado en el modelo básico EOQ, de la anterior observación la cantidad de la filial, Q_{filial}, resulta siendo menor a la calculada en el modelo EOQ con costos del inventario y se reconoce también el cumplimiento de la desigualdad: ${Q^*}_d < {Q_\alpha}^*$ con lo cual se verifica el teorema 3, y adicionalmente se observa que $Q^* > {Q_\alpha}^*$, por tanto se podría concluir que bajo la consideración del $CVaR$ se puede reducir de manera significativa la frecuencia de los pedidos, consecuencia de mantener en almacenes un “relativo mayor stock”, el cual a su vez es producto de la optimización que el modelo ofrece sobre las cantidades del pedido. Para un nivel de confianza (α) apropiado, el $CVaR$ genera capacidad de disminuir la probabilidad de tener pedidos pendientes y aunque en contraste esto implique definir mayores cantidades en la optimización de la cantidad de pedido, ello controla la ocurrencia de eventos de ruptura del inventario, sin embargo como se verá en los ejercicios siguientes la desigualdad $Q^* > {Q_\alpha}^*$ no siempre se cumple y ocasionalmente se puede presentar la desigualdad contraria, lo anterior justifica el hecho de no incorporar esta de desigualdad en el teorema 3. En cuanto a la revisión de los costos se debe recordar que aunque en las empresas objeto de estudio no se calculan los costos, para tener algún referente válido se propuso determinarlos a partir de la fórmula del costo total del modelo EOQ con costos del inventario, pero considerando la Q_{filial}; por este mecanismo logramos establecer los costos totales para el modelo de inventarios de la filial $\boldsymbol{C_{filial}}$. Se encuentra también que los costos en el modelo (Q, r) con costos del inventario son menores a los costos en el modelo del $CVaR$, lo anterior debido a que éste último se está valorando previendo la ocurrencia de pérdidas enormes durante el ciclo de vida de los inventarios. Las anteriores observaciones son consecuentes con lo establecido en el teorema 3 en cuanto a la comparación de los costos: ${C^*}_d \leq C^*$ y ${C^*}_d \leq {C^*}_\alpha$. Finalmente obsérvese que $r_d < {\mathrm{r}_\alpha}^*$ y $r^* < {r_\alpha}^*$, sin embargo, como se verá en la siguiente sección estas desigualdades no siempre se presentan en los mismos sentidos.

4.4 Resultados computacionales

En esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron a partir de la adaptación realizada al algoritmo de Federgruen, en consideración de un modelo de inventarios caracterizado por demanda de Poisson, la tasa en la cual se espera que los inventarios se acumulen en el tiempo $t + L$ cuando la posición del inventario en el tiempo t es igual a y, y un tiempo de reposición $L = 1$.

El propósito de este estudio numérico es validar los resultados obtenidos en la sección anterior, en particular estamos interesados en analizar la relación que existe entre Q_α^* , Q_d y entre C_α^*, C_d como se estableció en el teorema 3, para esto se realizaron cálculos computacionales para 200 casos, combinando diferentes valores de los parámetros h, b, A y α, los cuales se especifican en la siguiente tabla, y solo se consideraron combinaciones en las cuales $b \geq h$, dado que según Zhang [24] esta situación es la más común en el sector real.

Tabla 4. Valores de los parámetros.

Parámetro	λ	h	b	A	α
Valor	20	23 25 28 29	25 29 30 35	10 15 18 20	0,90 0,95 0,97 0,99

Fuente: Elaboración propia

Para analizar las variables de decisión y los costos del artículo objeto de análisis y demostrar la consistencia del uso de la medida de riesgo $CVaR$, se realizan los siguientes supuestos y planteamientos:

- Q_d^*, r_d^* y C_d^* corresponden a los valores de las variables Q, r y al costo C en el modelo EOQ con costos del inventario y el modelo con pedidos pendientes.
- Q^*, r^*, C^* corresponden a las variables Q, r y al costo C con $\alpha = 0$; se calculan al correr el algoritmo II en la versión 3.1.3 del programa R.

- Las variables Q_α^*, r_α^* y C_α^* corresponden a los valores de las variables Q y r, y al costo total en el $CVaR$; se calculan al correr el algoritmo II en la versión 3.1.3 del programa R.

En las Tablas 5 al 8 se puede verificar el cumplimiento de la desigualdad $Q_d^* \leq Q_\alpha{}^*$ (numeral I del teorema 3), de manera similar la desigualdad $C_d^* \leq C_\alpha{}^*$ (numeral II del teorema 3) también se puede verificar al revisar los datos de estos parámetros en las tablas y al igual que en la comparación de las cantidades de pedido, de acuerdo con los valores de los parámetros. Observe que no siempre se presentan desigualdades en el mismo sentido entre los resultados de r_d , r^* y $r_\alpha{}^*$ r_d , el sentido de la desigualdad varía dependiendo en gran parte de la relación existente entre los valores de h y b.

Tabla 5. Corrida 1

$(\lambda = 20,\ L = 1,\ h = 23,\ b = 29,\ A = 10)$

α	Q_d^*	Q^*	Q_α^*	r_d^*	r^*	r_α^*	C_d^*	C^*	c_α^*
090	5,6	8,0	6,0	17,5	16,0	18,0	71,63	128,40	286,05
0,95	5,6	8,0	7,0	17,5	16,0	18,0	71,63	128,40	316,98
0,97	5,6	8,0	6,0	17,5	16,0	19,0	71,63	128,40	340,57
0,99	5,6	8,0	6,0	17,5	16,0	19,0	71,63	128,40	433,77

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la Tabla 5 corresponden a ejecuciones realizadas con $\lambda = 20$, $L = 1$, $h = 23$, $b = 29$, $A = 10$ y $\alpha = 0{,}90,\ 0{,}95,\ 0{,}97$ y $0{,}99$; se toman varios niveles de confianza con el fin de ofrecer diferentes opciones para la toma de decisiones -según el nivel de aversión al riesgo-. Se puede observar:

- Cambian los valores asociados al $CVaR$; en este caso tiene influencia α.
- Se cumple $Q^*{}_d \leq Q^*$ y $Q^*{}_d \leq Q^*{}_\alpha$ y $C^*{}_d \leq C^*$ y $C^*{}_d \leq C^*{}_\alpha$.
- Los costos del $CVaR$ se incrementan en cuanto aumenta el nivel de confianza α, y se obtienen variaciones entre el 7,4% y 143,6%.

Tabla 6. Corrida 2

$(\lambda = 20, L = 1, h = 23, b = 29, \alpha = 0{,}95)$

$\mathbf{A}$	Q_d^*	Q^*	Q_α^*	r_d^*	r^*	r_α^*	C_d^*	C^*	c_α^*
10	5,6	8,0	7,0	17,5	16,0	18,0	71,63	128,40	316,98
15	6,8	10,0	7,0	17,0	15,0	18,0	87,73	139,66	331,27
18	7,5	10,0	8,0	16,7	15,0	18,0	96,1	145,66	339,38
20	7,9	11,0	9,0	16,5	15,0	17,0	101,3	149,63	344,03

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 6 contiene los resultados de los procesamientos ejecutados con $\lambda = 20$, $L = 1$, $h = 23$, $b = 29$ y $\alpha = 0{,}95$; cada ejecución se tabula en una fila y corresponde a un específico costo de preparación $A = 10,\ 15, 1\,8$ y 20. En la medida en que se tienen mayores asignaciones de costos de preparación (A), aumentan los costos C_d^*, C^* y C_α^*. En general los costos del $CVaR$ presentan menor variación.

Tabla 7. Corrida 3

$(\lambda = 20, L = 1, A = 10, h = 23, \alpha = 0.95)$

b	Q_d^*	Q^*	Q_α^*	r_d^*	r^*	r_α^*	C_d^*	C^*	c_α^*
25	5,8	9,0	7,0	17,2	15,0	17,0	69,22	121,13	299,12
29	5,6	8,0	7,0	17,5	16,0	18,0	71,63	128,40	316,98
30	5,5	8,0	6,0	17,6	16,0	19,0	72,17	130,17	323,00
35	5,4	8,0	7,0	17,9	17,0	19,0	74,51	138,11	343,04

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 7 se muestran los resultados para las ejecuciones realizadas al considerar $\lambda = 20$, $L = 1$, $h = 23$, $\alpha = 0{,}95$, $A = 10$ y $b = 25, 29, 30$ y 35; cada fila corresponde al procesamiento de información para un determinado costo de pedidos pendientes. En cuanto incrementamos b (25 a 29, 29 a 30 y 30 a 35), aumentan los costos C_d^*, C^* y C_α^*.

Tabla 8. Corrida 4

$(\lambda = 20, L = 1, A = 10, b = 29, \alpha = 0{,}95)$

h	Q_d^*	Q^*	Q_α^*	r_d^*	r^*	r_α^*	C_d^*	C^*	c_α^*
23	5,6	8,0	7,0	17,5	16,0	18,0	71,63	128,40	316,98
25	5,5	8,0	6,0	17,5	16,0	18,0	73,28	132,94	331,98
28	5,3	8,0	6,0	17,4	15,0	17,0	75,49	139,67	345,52
29	5,3	8,0	6,0	17,4	15,0	17,0	76,16	141,42	350,98

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 8 resume resultados de ejecuciones con $\lambda = 20$, $L = 1$, $\alpha = 0{,}95$, $b = 29$, $A = 10$ y $h = 23, 25, 28$ y 29; cada ejecución se tabula en una fila la cual corresponde a un determinado costo de inventario anual (h). En la medida en que se incrementa (h) (23 a 25, 25 a 28 y 28 a 29), varían los costos C_d^*, C^*y C_α^*.

Como se puede observar todos los resultados anteriores son consecuentes con los soportes teóricos y los resultados que se esperaban encontrar, pues más allá de focalizar el trabajo sólo a encontrar el valor óptimo de los parámetros y el respectivo costo mínimo, se parte de la implementación de un modelo con el que se busca generar la capacidad de mejorar la confiabilidad en el inventario, disminuyendo así la probabilidad de la ocurrencia de eventos de agotamientos, lo cual a su vez deriva en una disminución de la frecuencia de pedidos de reaprovisionamiento. Aunque a primera vista la consecuencia o el impacto en los costos pudiera parecer alto, se debe recordar que se está dejando de lado el enfoque de trabajo en función del costo promedio durante el intervalo de tiempo $[0, \infty)$; lo anterior para evitar que el modelo de administración de inventarios arroje pérdidas enormes, producto de la materialización de al menos un costo mayor al promedio. La propuesta entonces trae consigo experimentar con mayor detalle el comportamiento de los costos (es decir no sólo importa el promedio), considerando que en la línea de tiempo del ciclo de vida de los inventarios se puedan presentar costos más altos al promedio, lo que a su vez permite plasmar con mayor realidad los impactos económico – financieros relacionados con los inventarios.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El desarrollo de la propuesta permitió hallar y caracterizar la solución óptima en el modelo de inventarios (Q, r) incorporando en la función de costo la medida de riesgo $CVaR$ como la forma de reflejar el impacto económico y financiero que se puede generar cuando uno o varios de los costos sean mucho más altos que el promedio, disminuyendo así la probabilidad de agotamiento y minimizando el impacto en los costos por grandes pérdidas. Estos resultados cualitativos pueden ayudar a los usuarios a determinar cuál de los dos modelos es más adecuado, tanto para su sistema de inventarios como para el control financiero de los recursos asociados con estos.

Al demostrar la coherencia del $CVaR$ en el modelo (Q, r), los administradores cuentan con una herramienta altamente confiable para analizar y cuantificar los riesgos relacionados con la gestión de los inventarios, toda vez que proporciona un elevado nivel de confiabilidad para minimizar los impactos que se tendrían por grandes pérdidas sin control. De acuerdo con los resultados expuestos en la tabla 5 se puede comprobar que a menor intervalo de confianza menor es el $CVaR$.

El modelo (Q, r) bajo la consideración del costo esperado es un caso particular del $CVaR$ del costo cuando $\alpha = 0$. Por otra parte, bajo la consideración del $CVaR$ del costo se conserva la propiedad de convexidad, deseable para la obtención de los valores óptimos de las variables de decisión.

Es importante hacer la salvedad que si bien las aplicaciones del modelo (Q, r) y del $CVaR$, para fines de este trabajo, están enmarcada en los inventarios del sector de telecomunicaciones, su ámbito de aplicación es extensible a empresas de cualquier sector donde el control de inventarios sea una necesidad y un aspecto materialmente significativo a nivel económico - financiero, entre ellos, sector de energía, manufacturero, transporte.

A pesar de que en los últimos años se cuenta con una relativa “alta” exploración del concepto del $CVaR$, resulta importante seguir trabajando en la línea financiera con los modelos de administración de inventarios, buscando al máximo la incorporación de otros conceptos y técnicas, y el análisis de la adaptación de éstos a las necesidades específicas de las empresas del sector real. Lo anterior teniendo en cuenta que otras medidas de riesgo (como el VaR) y otros modelos de inventarios no han sido ampliamente explorados y validados tanto analítica como computacionalmente; incluso consideramos conveniente analizar el modelo (Q,r) para éstas empresas considerando múltiples productos o inventarios de múltiples escalones, los cuales no fueron abordados en el trabajo toda vez que la realidad de la empresa en consideración se ajusta más al modelo con uno solo producto y un solo escalón.

Se recomienda que al interior de las empresas de telecomunicaciones se realice un análisis *gap* de su modelo actual de administración de inventarios versus la aplicación del $CVaR$ en el modelo (Q,r), con el fin de conocer y analizar las oportunidades y herramientas que ofrece la implementación de éste último, especialmente por los criterios de confiabilidad y la capacidad de reflejar tanto el grado de aversión al riesgo como los impactos que se tendrían por eventos de grandes pérdidas sin control. También se recomienda revisar las salidas del proceso de administración de inventarios con el fin de incorporar actividades que permitan establecer con mayor realismo los costos de los inventarios y por consiguiente el impacto de éstos sobre los recursos financieros. Dado el elevado número de ítems, se recomienda también utilizar la clasificación A, B, C de los inventarios con el fin de focalizarse en aquellos que resulten ser más representativos o críticos para la prestación de sus servicios.

REFERENCIAS

[1] Zipkin,P., Foundations of Inventory Management, McGraw Hill, 2000.

[2] Federgruen,A. and Y.S Zheng, An Efficient Algorithm for Computig an Optimal (r,Q) Policy in Continuos Review stochastic Inventory Systems, New York: SE, 1991.

[3] Sven,Axsäter, «Inventory Control,» Springer Science+Business Media,LLC, New York, 2014.

[4] C. Vidal, «Introducción a la gestión de inventarios,» Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Cali, 2006.

[5] Hopp,W.J., Spearman,M.L., «Inventory Control: From EOQ to ROP,» de *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Managament*, Boston, Irwin/ McGraw-Hill, 2000, pp. 48-108.

[6] Erlenkoter,D., «Ford Whitman Harris's Economical Lot Size Model,» *The Anderson School,* pp. 1-7, 1989.

[7] Hadley G. and T.M.Whitin, Analysis of Inventory System, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1963.

[8] Platt,D.E., Robinson,L.W. and Freud, R.B, «Tractable (Q,R) heuristic models for constrained service levels,» *Management Science,* nº 43, 1997.

[9] Federgruen,A. and Y.S. Zheng, «A Simple and Efficient Algorithm for Computig Optimal (r,Q) Policies in Continuos Review stochastic Inventory Systems,» *Operations Research,* vol. 40, nº 4, pp. 808-813, Jul-Aug 1992.

[10] Zheng,Y-S., «On properties of Stochastic Inventory System,» *Management Science,* vol. 38, nº 1, Enero de 1992.

[11] Jara P., Melgar Ch., «VaR vs. CVaR. ¿Qué estimador se ajusta mejor al riesgo de mercado de renta variable en el Perú?. Un análisis interdiario de la IGBVL para el periodo octubre de 2003 al septiembre 2007,» IGBVL, Perú, Lima, 2007.

[12] Melo V.L., Becerro C.O., Medidas de riesgo, características y técnicas de medición. Una plicación del VaR y el E.S a la tasa interbancaria de Colombia, Bogotá, Colombia: Universidad del Rosario, 2006, pp. 16-28.

[13] Mascareñas,J., «Introducción al VaR, Monografias de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas,» 2008.

[14] Muñoz,L.F., Marketing Financiero, Granada, España: Copicentro Granada S.L, 2011, pp. 45-49.

[15] Linsmeier,T. and Pearson,N., «Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk,» Urbana-Champaign, Illinois, 1996.

[16] Artzner,P., Delbaen,F., Eber,J., and Heath,D., «Coherent Measures of Risk" in Mathematical Finance,» 1999.

[17] Rockafeller,R.T., and Uryasev,S.P., «Condicional Value-at-Risk for General Loss Distributions,» *Journal of Backing and Finance,* vol. 26, pp. 1443-1471, 2002.

[18] Rockafeller,R.T., and Uryasev,S.P., «Optimization of Condicional Value-at-Risk,» *The Journal of Risk,* vol. 2, nº 3, 2000.

[19] Martín,M.M., «El Condicional Value at Risk en la Gestión de Carteras Latinomamericanas,» SNC, Perú, Lima, 2005.

[20] Hopp Wallace,J y Spearman M.L, Factory Physics, 2da ed., New York: McGraw-Hill, 2001.

[21] Puerta,M.E., Arias,M.A., y Londoño,J.I., de *Matemáticas Aplicadas: Optimización de Inventarios Aleatorios*, Medellín, Sello Universidad de Medellín, 2011, pp. 13-62 y 29-59.

[22] Hopp Wallace,J y Spearman M.L, Factory Physics, New York: McGraw-Hill, 1997.

[23] Zheng,Y-S., «On properties of Stochastic Inventory System,» *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* vol. 40, nº 3, pp. 1061-1068, 1992.

[24] Zhang,X.M., and Chu,Y.M., «Convexity of the integral arithmetic mean of a convex function,» *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* vol. 40, nº 3, pp. 1061-1068, 2010.

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS