



**UNIVERSIDAD DE MEDELLIN**

---

## ANEXO 1

### MODELO *EOQ*

Carlos Enrique Londoño Estrada

[Carlos.Londono@epm.com.co](mailto:Carlos.Londono@epm.com.co)

María Andrea Arias Serna

[marias@udem.edu.co](mailto:marias@udem.edu.co)

Juan Guillermo Murillo Gómez

[jgmurillo@udem.edu.co](mailto:jgmurillo@udem.edu.co)

Universidad de Medellín  
Facultad de Ingenierías  
Medellín-Colombia

20 de noviembre de 2015

## MODELO EOQ

En este documento se presentan los detalles más relevantes del modelo *EOQ* y se aplicará en las empresas de telecomunicaciones bajo algunos supuestos y la información suministrada por los funcionarios de éstas.

Economic Order Quantity, por sus siglas en inglés *EOQ*, es un modelo de administración de inventarios que tiene en cuenta la demanda determinística de un producto, el costo de mantener el inventario y el costo de generar un pedido, y produce como salida la cantidad óptima de las unidades a pedir para reducir los costos asociados por ordenar y por almacenar el bien. El principio de este modelo es simple y se basa en encontrar la cantidad de pedido que reduzca al mínimo el costo del inventario de la empresa.

Según Hopp [1], el modelo *EOQ* fue desarrollado en 1913 por el ingeniero Ford Whitman Harris, quien trabajaba en *Westinghouse Corporation*, y aunque el artículo original en el cual se presentaba el modelo fue incorrectamente citado durante muchos años, su publicación fue analizada a profundidad y aplicada extensivamente por el consultor R.H. Wilson quien publicó un artículo en 1934 que precisamente popularizó el modelo y es por ello que este modelo también conocerse como modelo de Wilson.

Como modelo matemático, *EOQ* está en capacidad de determinar:

- El momento en el cual se debe colocar un pedido o iniciar una corrida de producción; generalmente dado en unidades del inventario.
- La cantidad de unidades o tamaño del pedido.
- El Costo anual por ordenar (el cual es igual al costo anual por mantener).
- El costo anual asociado al almacenamiento del producto.
- El costo anual total (el cual será la sumatoria de los dos costos anteriores).
- El número de órdenes o corridas que se deben colocar o generar al año.
- El tiempo entre cada orden o corrida de producción.
- El periodo de consumo en días.

Según se cita en Hopp [2], el modelo EOQ ha sido ampliamente estudiado; es la base de introducción de los libros de investigación de operaciones y es considerado el más antiguo y simple de los modelos de control de inventarios. Básicamente abre la ventana a la optimización de la cantidad por orden, minimizando los costos y forjando el camino para modelos más sofisticados como el modelo "Reorder Point, *ROP*" y el modelo  $(Q, r)$ , -siendo este último tema central del trabajo de investigación-. En general el modelo EOQ es utilizado a nivel mundial como una herramienta de gestión de inventarios en multitud de empresas y desde que se conoce el artículo de Ford Whitman Harris, -en el cual indaga: "How Many Parts to Make at Once"-, se le ha venido mostrando como un gestor para determinar el volumen o la cantidad de existencias que se deben tener en el inventario.

## **1. Funcionamiento del modelo**

Como se plasma en Hopp ([2] y [3]) para derivar la fórmula de la cantidad del pedido, hacen los siguientes supuestos sobre el modelo:

1. La producción es instantánea: No hay restricción de capacidad y todos los pedidos se producen simultáneamente.
2. La entrega es inmediata: No hay tiempos de espera entre la producción y el momento en el cual los bienes están disponibles para satisfacer la demanda.
3. La demanda es determinística y constante en el tiempo: No hay incertidumbre sobre la cantidad o el tiempo en que se presenta la demanda.
4. En la producción se incurren en costos fijos.
5. Los productos son analizados individualmente, lo cual puede significar que hay un único producto o no hay interacciones entre ellos.

Los supuestos que introduce este modelo facilitan su aplicación por asumir constante la demanda (tanto la demanda anual como la demanda durante el tiempo de reposición o "*lead time*"). Si bien el modelo *EOQ* se caracteriza por su sencillez a la hora de calcular la cantidad por orden o pedido, por otro lado presenta algunos inconvenientes, los más evidentes son los siguientes:

- El hecho de que la demanda sea constante se aleja de la realidad, donde es normal encontrar demandas estacionales, demandas irregulares, etc. En general la demanda es uno de los elementos más inestables que enfrentan las empresas a la hora de planificar su producción o la prestación de los servicios, y en algunos casos debido a la incertidumbre que se tiene a la hora de realizar la predicción se utilizan métodos probabilísticos que facilitan calcular la cantidad óptima del pedido.
- Se considera que el nivel de inventario se reabastece instantáneamente, fenómeno que en la práctica no ocurre en la mayoría de los casos.

## **2. Notación:**

$\lambda$ : Tasa de demanda. En unidades/tiempo.

$L$ : Tiempo de reposición.

$D = \lambda L$ : Demanda durante el tiempo de reposición. En unidades.

$c$ : Costo de producción; no se consideran en éstos los costos de preparación o los costos de inventario. En pesos por unidad.

$A$ : Costo fijo de preparación. En pesos.

$h$ : Costo de almacenamiento. En unidades/tiempo.

$B$ : Costo de penalización por cada unidad del pedido pendiente durante una unidad de tiempo  $t$ . En unidades/tiempo.

$F(Q)$ : Frecuencia de pedido.

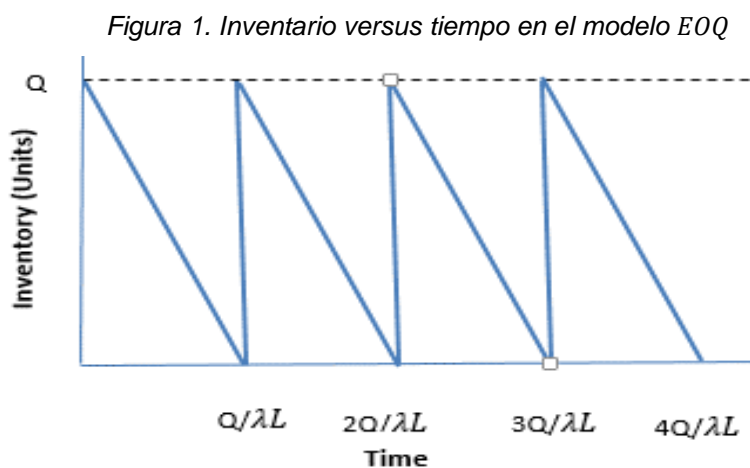
$I(Q)$ : Número promedio de inventario a mano. En unidades.

## **Variables de decisión:**

$Q$ : Cantidad del pedido. En unidades.

$r$ : Punto de pedido (Punto de reorden) en unidades; representa el nivel de inventario en el cual se pide o hace el pedido. En unidades.

Como se aprecia en la Figura 1, la altura de cada triángulo representa el tamaño óptimo de pedido que minimiza la función de costos totales. El vértice del ángulo recto del triángulo corresponde al punto en el cual se hace el nuevo pedido (punto cero), y la base del triángulo es el tiempo que pasa desde que se recibe la orden hasta que se termina el lote (este tiempo se conoce como el tiempo de ciclo). Dado que no existe un tiempo de espera desde el momento en que se emite la orden y hasta que se dispone del lote, una vez que se termina el inventario se dispone inmediatamente del nuevo lote y de esta forma no existe quiebre de stock. Para fines de modelamiento y bajo el supuesto que se tiene una operación continua del proceso de inventarios en la empresa, en Hopp [3], se representa el tiempo y los productos en forma de cantidades continuas, asumiendo como constante la demanda (demanda determinística), y ordenando  $Q$  unidades (la altura de cada triángulo), cada vez que el inventario llega a cero, y lo cual suele ocurrir cada instante de tiempo  $\frac{Q}{\lambda L}$ . El nivel de inventario promedio es siempre  $\frac{Q}{2}$ , la altura de cada triángulo, y el costo de almacenamiento por año asociado con el inventario está dado por  $\frac{hQ}{2}$ .



### 3. Formulación y optimización del modelo básico

Para formular el modelo de optimización de inventarios y calcular el número de las cantidades a pedir, a continuación se desarrollan cada una de los términos que componen la función objetivo.

**Nivel de inventario promedio:** Es el promedio resultante entre las  $Q$  unidades que se ingresan al inventario cada vez que se recibe un nuevo pedido (inventario final) y el inventario que se tiene al momento de hacer o montar el nuevo pedido, y el cual es cero. De lo anterior el inventario promedio es calculado por medio de la siguiente expresión:  $I(Q) = \frac{Q}{2}$

**Inventario neto e Inventario de Posición en el tiempo  $t$ :** De acuerdo con Zipkin [4], en cualquier momento de tiempo  $t$ , en el modelo  $EOQ$  de inventarios, se puede determinar la cantidad de inventario considerando en su cálculo la cantidad de pedidos pendientes (backorders) que se tienen en ese instante de tiempo  $t$ ; a este resultado se le denomina inventario neto y se calcula así:

$$IN(Q) = \text{Inventario (tiempo } t) - \text{Pedidos pendientes (tiempo } t)$$

Adicionalmente, cuando en el sistema de inventarios se considera en el tiempo  $t$  órdenes o pedidos de compra de inventarios, se habla entonces del inventario de posición en el tiempo  $t$ ,  $IP(t)$ , y éste se calcula partiendo del inventario neto en el tiempo  $t$  y sumando a éste los pedidos de compra de los bienes de inventario que se están administrando en ese mismo instante de tiempo.

$$IP(Q) = \text{Inventario neto (tiempo } t) + \text{Pedidos de compra (tiempo } t)$$

**Número de pedidos por año:** Es el número de pedidos que se realiza en un periodo de tiempo, con el fin de ingresar al inventario al año las cantidades suficientes para satisfacer la demanda.

$$F(Q) = \frac{\lambda}{Q}$$

**Costo de almacenamiento asociado al inventario  $hI(Q)$ :** Resulta del producto del costo unitario anual por el valor del inventario promedio:

$$hI(Q) = h \frac{Q}{2} \quad (1)$$

**Costo de preparación:** Resulta del producto del costo fijo del pedido A (que se carga a cada orden de reemplazamiento realizada), por el número de órdenes por año que satisfacen la demanda; se parte del hecho que se deben colocar  $\lambda/Q$  órdenes por año para satisfacer la demanda.

$$\text{Costo de preparación} = A \frac{\lambda}{Q} \quad (2)$$

**Costo total esperado  $C(Q)$ :** El costo total lo componen los costos anuales por ordenar y almacenar, y se puede expresar como:

$$C(Q): \text{Costo total promedio}$$

Es decir:

$$C(Q): \{\text{costo de preparación} + \text{costo de almacenamiento}\}$$

De acuerdo con la notación y las ecuaciones (1) y (2), es posible expresar el costo total como:

$$C(Q) = AF(Q) + hI(Q) = A \frac{\lambda}{Q} + h \frac{Q}{2}$$

Es decir:

$$C(Q) = \frac{A\lambda}{Q} + h \frac{Q}{2} \quad (3)$$

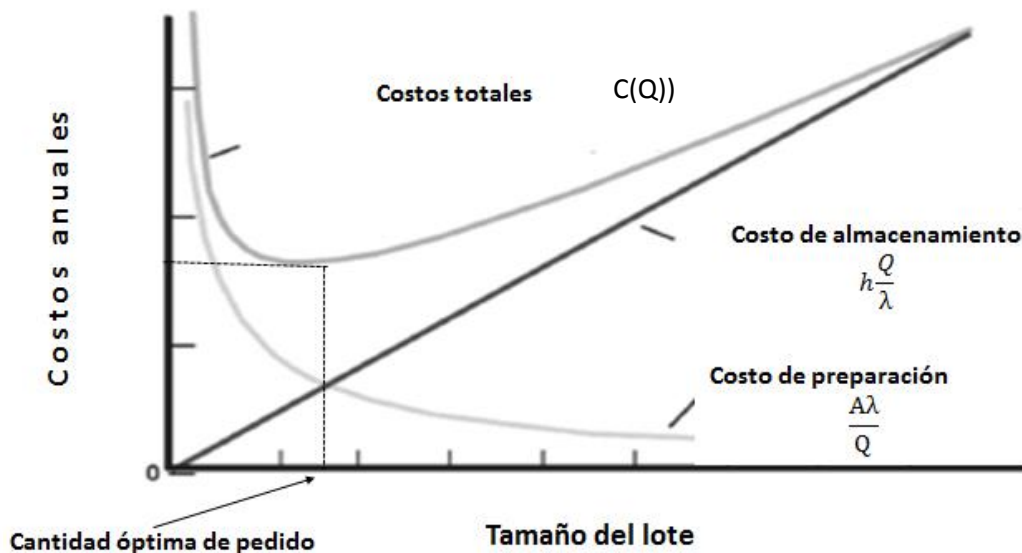
En relación con la función del costo total  $C(Q)$ , y conforme se ilustra en la Figura 2, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. El término de los costos de almacenamiento,  $h \frac{Q}{2}$ , se incrementa linealmente en relación con la cantidad del pedido  $Q$ , y eventualmente para grandes cantidades se convierte en la componente dominante del costo anual.

2. El término costo de preparación,  $A \frac{\lambda}{Q}$ , disminuye rápidamente en  $Q$ , indicando que mientras inicialmente se incrementa la cantidad del pedido se generan ahorros substanciales en los costos de preparación.

3. El costo total anual  $C(Q)$  es minimizado por algunos tamaños de pedidos  $Q$ . Curiosamente este mínimo resulta precisamente cuando se produce el valor de  $Q$ , en el cual se equilibran los costos de almacenamiento y preparación, es decir donde se cruzan las curvas  $h \frac{Q}{\lambda}$  y  $A \frac{\lambda}{Q}$ .

Figura 2. Cantidad de pedido ( $Q$ )



Fuente: Zipkin [4]

### Optimización del modelo de inventarios

El enfoque estándar para encontrar el mínimo de una función sin restricciones, tal como  $C(Q)$ , es partir de la ecuación de costos (3) y hacer su derivada respecto a  $Q$  igualando a cero los resultados de los rendimientos y finalmente resolver el resultado de la ecuación para  $Q$ . Esto permitirá encontrar un punto donde la pendiente es igual a cero (casos en los cuales la función es plana); si la función es convexa (como se expresa a continuación), entonces el punto pendiente cero será único y corresponde con el mínimo de la función  $C(Q)$ :



$$\frac{dC(Q)}{dQ} = \frac{h}{2} - \frac{A\lambda}{Q^2} = 0$$

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = \frac{h}{2} - \frac{A\lambda}{Q^2} = 0$$

La cantidad del pedido que minimiza la función de costos  $C(Q)$  es:

$$Q_d = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h}} \quad (4)$$

Esta fórmula es comúnmente conocida como cantidad económica de la orden (EOQ), y hace referencia a la cantidad del pedido. Del anterior resultado se puede concretar que la cantidad óptima de pedido se incrementa con la raíz cuadrada del costo de preparación o la tasa de la demanda y disminuye con la raíz cuadrada del costo de almacenamiento, es decir: la cantidad a pedir es directamente proporcional al costo de preparación e inversamente proporcional al costo de almacenamiento.

En la práctica, tal como se muestra en la próxima sección, existen otras formas de calcular la cantidad de pedido en función de la información de la tasa de la demanda ( $\lambda$ ) y del tiempo en el cual se presenta el ciclo del pedido ( $T$ ).

#### 4. Formulación del modelo considerando el ciclo del pedido

Si se parte del supuesto que en algunas empresas la cantidad de pedido que minimiza la función de costos, se administra teniendo en cuenta la información de la tasa de la demanda ( $\lambda$ ) y del tiempo en el cual se presenta el ciclo del pedido  $T$ , para hallar la variable de decisión  $Q$  se debe entonces hacer uso de un nuevo concepto, ciclo del pedido, el cual se explica a continuación.

**Ciclo de pedido:** Las características de la demanda para el modelo *EOQ* permiten deducir el tiempo,  $T$ , en el cual se presenta un ciclo de pedidos en fracción de año y corresponde al tiempo que transcurre desde el momento en

que se realiza el aprovisionamiento de inventario con una cantidad de pedido  $Q$  y hasta que esta se agota completamente, haciendo necesario volver a reaprovisionar en la misma cantidad. Esta variable está dada por la siguiente relación:

$$T = \frac{Q_d}{\lambda}$$

El inverso de esta relación permite obtener la frecuencia anual de los pedidos de la siguiente manera:

$$F = \frac{\lambda}{Q_d}$$

Donde  $F$  representa la frecuencia anual de pedidos (número de pedidos por año).

Según Hopp [2], el trabajo de Harris enuncia una compensación existente entre la cantidad del pedido y el inventario, toda vez que al incrementar la cantidad del pedido se incrementa la cantidad promedio del inventario en mano (existencias), y se reduce la frecuencia de las órdenes. De acuerdo con las relaciones anteriores, -y sin necesidad de recurrir a la fórmula de la raíz cuadrada de Harris -, se puede estimar la cantidad de pedido  $Q$  a partir de:

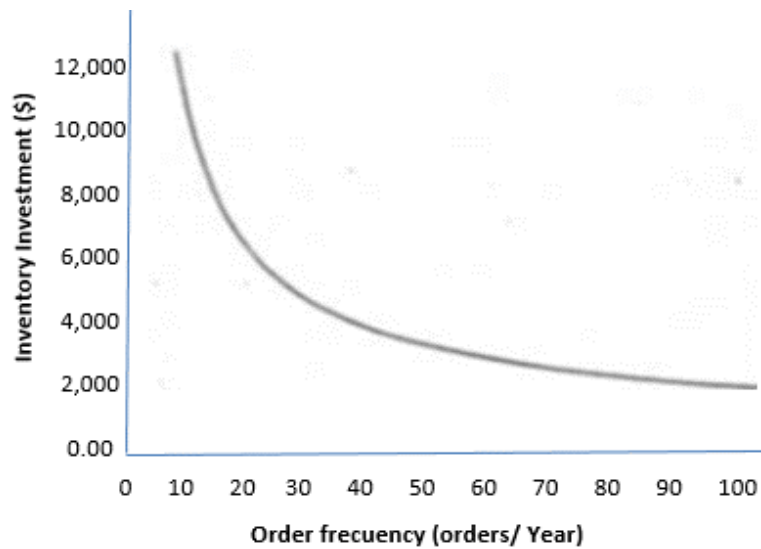
1. La demanda y la correspondiente frecuencia anual de pedidos:  $Q_d = \frac{\lambda}{F}$ .
2. El tiempo en el cual se presenta el ciclo del pedido y la correspondiente demanda:

$$Q_d = (T)(\lambda) \tag{5}$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, la inversión total asociada al inventario se puede calcular como  $\frac{cQ}{2}$ . También, es posible calcular la inversión asociada al inventario en función de la demanda y la correspondiente frecuencia anual de pedidos,  $\left(\frac{c\lambda}{2F}\right)$ .

La siguiente figura muestra como a mayor frecuencia de pedidos (órdenes) hay rendimientos decrecientes.

Figura 3. Inversión en el inventario versus cantidad de pedido anual (modelo  $EOQ$ )



Fuente: Hopp [2]

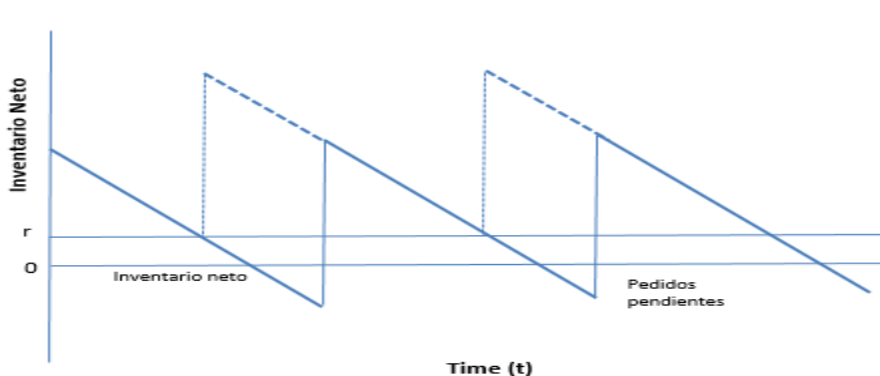
Se listan en Hopp [3], otras variaciones del  $EOQ$  básico que incluyen pedidos pendientes (órdenes o pedidos al inventario que no están del todo o en parte listas y en las cuales se tiene que esperar hasta que el stock esté disponible), mayor y menor preparación y cantidades discontinuas, consideraciones que con salvedad a los pedidos pendientes no serán objeto de profundización en el presente documento. Adicionalmente se indica que si se parte del hecho de que la demanda es determinística, el tiempo que pasa desde que se recibe la orden hasta que termina el lote está completamente determinado por la cantidad de la orden y se puede expresar a  $Q$  a partir del tiempo en el cual se presenta el ciclo del pedido (en fracción de año) y la correspondiente demanda (en unidades por año).

## 5. Formulación y optimización del modelo con costo del inventario

Hasta este punto en la conceptualización y el desarrollo del modelo (funcionalidad), no se han considerado pedidos pendientes. Sin embargo en Zipkin [4], se desarrolla el mismo modelo  $EOQ$  que se viene tratando en este anexo, pero considerando una demanda superior al inventario a mano (stock

disponible), es decir: cuando las demandas no se suplen inmediatamente y de manera completa con el inventario a mano generando en consecuencia un pedido pendiente al sistema de inventarios, y además sobre los supuestos que los clientes están dispuestos a esperar y que los administradores del sistema de inventarios se comprometen a satisfacer todas las demandas. Se enuncia además que muchas empresas de bienes de capital e industrias de servicios operan con retrasos considerables y existen casos extremos como las industrias de materiales en las cuales se han generalizado los pedidos pendientes. El inventario neto, (Ver figura 4), se comporta como cuando no se consideraban pedidos pendientes, pero la administración es más compleja debido a que además de establecer  $Q^*$ , se debe considerar un número de pedidos pendientes, conocer cuando ordenar y tener con un inventario de seguridad que permita cubrir la demanda de tal manera que el cliente no tenga que esperar por demasiado tiempo. Respecto a su funcionamiento se puede evidenciar que mientras se realiza la recepción de las órdenes, el inventario neto se disminuye en una tasa constante  $D$  independientemente a si el inventario es positivo o negativo, y cuando llega una nueva orden el inventario neto salta (se incrementa) precisamente en esa cantidad, posibilitando así que algunos de los lotes se puedan usar para cubrir los pedidos pendientes, mientras el resto se lleva al inventario. Para formular el problema de optimización de inventarios con pedidos pendientes y calcular las variables objeto de optimización,  $Q$  y  $r$  (ver Figura 4), además de conocer la variable  $Q$  es necesario contar con una segunda variable que dé cuenta del momento en el cuál se debe pedir; para esto a continuación se definen otros términos y las variables  $r$ .

Figura 4. Inventario neto en el modelo EOQ considerando pedidos pendientes



Fuente: Zipkin [4]

**Punto de pedido (Punto de reorden):** Variable de decisión en el modelo de optimización de Inventarios cuando se consideran pedidos pendientes. Corresponde a unas cantidades que se definen en la administración del inventario (cantidad en unidades), e indican el momento en el inventario en el cual se debe solicitar un nuevo requerimiento de inventarios (pedido de compra) a fin de evitar escenarios de desabastecimiento. Exactamente cuando el inventario alcanza el punto de pedido  $r$ , se genera una orden de reposición por  $Q$  unidades y al momento del recibo de las órdenes el inventario salta a  $r + Q$  y por tanto nunca se queda todo el tiempo en el nivel  $r$ . Durante el tiempo de reposición ( $L$ ), pueden presentarse falta de existencias (desabastecimientos), pero una vez se recibe la orden de compra (en general: órdenes de compra) el inventario se recupera permitiendo atender las demandas que se tienen hasta el momento  $t$  y cubriendo todo o parte de los pedidos pendientes. De lo anterior:

$$r = \text{Punto de reorden (cantidad en unidades)}$$

**Costo del nivel de inventario promedio con pedidos pendientes:** Según Zipkin [4], es posible establecer el inventario promedio de la siguiente forma:

$$I(Q, r) = \frac{1}{2} \frac{(Q + r - \lambda L)^2}{Q} \quad (6)$$

**Costo promedio de pedidos pendientes:** De manera similar a como se estableció el costo del nivel de inventario promedio con pedidos pendientes, el costo promedio de los pedidos pendientes está dado por:

$$B(Q, r) = \frac{1}{2} \frac{(r - \lambda L)^2}{Q} \quad (7)$$

**Costo total esperado considerando pedidos pendientes:** El costo total esperado con pedidos pendientes en el modelo  $EOQ$  comprende los costos anuales de ordenar, almacenamiento y pedidos pendientes, y está dado por:

$$C_d(Q, r): \text{Costo total promedio}$$

Es decir:

$C_d(Q, r)$ : {costo por ordenar + costo de almacenamiento  
+ costo de pedidos pendientes}

Donde:

$$C_d(Q, r) = AF(Q) + hI(Q, r) + bB(Q, r)$$

De las ecuaciones (2), (6) y (7):

$$C_d(Q, r) = A\frac{\lambda}{Q} + \frac{h}{2}\left(\frac{(Q+r-\lambda L)^2}{Q}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{(r-\lambda L)^2}{Q}\right) \quad (8)$$

De acuerdo con Zipkin [4], la ecuación anterior es equivalente a:

$$C_d(Q, r) = AF(Q) + [\hat{C}(y - D)]$$

Donde:  $\hat{C}(y) = h[y]^+ + b[y]^-$

Luego:  $C_d(Q, r) = AF(Q) + [h[y - D]^+ + b[y - D]^-]$

## 6. Optimización del modelo de inventarios

Como en la sección anterior, para hallar los valores óptimos del modelo se deriva con respecto a cada una de las variables de decisión y se iguala a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_d(Q, r)}{\partial r} &= A\frac{\lambda}{Q} + \frac{h}{2}\left(\frac{(Q+r-\lambda L)^2}{Q}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{(r-\lambda L)^2}{Q}\right) \\ \frac{\partial C_d(Q, r)}{\partial r} &= A\frac{\lambda}{Q} + \frac{h}{2}\left(\frac{Q^2 + 2rQ - 2Q\lambda L + r^2 - 2r\lambda L + (\lambda L)^2}{Q}\right) \\ &\quad + \frac{b}{2}\left(\frac{r^2 - 2r\lambda L + (\lambda L)^2}{Q}\right) \\ &= \frac{h}{2Q}(2Q + 2r - 2\lambda L) + \frac{b}{2Q}(2r - 2\lambda L) \end{aligned}$$

Luego igualando a cero se tiene:

$$r_d^* = \lambda L - \frac{h}{b+h} Q_d \quad (9)$$

Derivando con respecto a  $Q$ ,

$$\frac{\partial C_d(Q, r)}{\partial Q} = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h}{2} \left( \frac{Q^2 + 2(r - \lambda L)Q + (r - \lambda L)^2}{Q} \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{(r - \lambda L)^2}{Q} \right)$$

$$\frac{\partial C_d(Q, r)}{\partial r} = \frac{-A\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2Q^2} (Q^2 - (r - \lambda L)^2) - \frac{b}{2Q^2} (r - \lambda L)^2$$

Igualando a cero se tiene que:  $Q^2 = \frac{2A\lambda}{h} + \frac{h+b}{h} (r - \lambda L)^2$

Reemplazando (10) se tiene:

$$Q_d^* = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h} \left( \frac{b+h}{b} \right)} \quad (10)$$

De la ecuación (8) se tiene que:

$$C_d(Q, r) = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h}{2} \left( \frac{(Q + r - \lambda)^2}{Q} \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{(r - \lambda)^2}{Q} \right)$$

Reemplazando  $r_d$  se tiene que:

$$C_d^*(Q, r) = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h \left( Q_d - \frac{h}{b+h} Q_d \right)^2}{2Q_d} + \frac{b \left( \frac{h Q_d}{b+h} \right)^2}{2Q_d} \quad (11)$$

## 7. Aplicación del modelo EOQ

En esta sección se aplicará el modelo *EOQ* para uno de los bienes de inventario de las empresas de telecomunicaciones, con el fin de determinar la cantidad del pedido que minimiza la función de costos y posteriormente comparar los resultados de la estimación versus la práctica actual de la empresa. A fin de evitar conflictos de intereses, proteger la propiedad industrial y actuar en consecuencia con lo estipulado en las cláusulas de confidencialidad aplicables a

las empresas de telecomunicaciones, durante la estimación del modelo sólo se tendrán en cuenta algunos de los datos propios de estas empresas y otros serán supuestos. Así las cosas, durante el proceso no se diferenciarán cuáles datos son reales y cuáles corresponden a supuestos.

Se toma como ejemplo el bien de inventario  $X$ , cuyas características generales pueden resumirse de la siguiente manera: Un bien empacado (terminado), en el cual tanto los procesos de compra como las transacciones de consumo se realizan en la unidad de medida kilogramos ( $KG$ ), y cuyo costo unitario en el inventario ( $c$ ) es \$0,25. El bien a nivel contable pertenece a la cuenta de inventario de prestación de servicio, y tanto los costos como los precios del bien se establecen y administran a nivel de bodega, y pertenece al grupo "A" de acuerdo con la clasificación  $ABC$  que se tiene implementado en las empresas de telecomunicaciones. Aunque el bien es almacenado en varias bodegas, se considera solo una de ellas: bodega A01, la cual es una de las principales bodegas de acuerdo con la cantidad significativa del valor total anual del inventario en relación con las demás bodegas de las empresas de telecomunicaciones, porque provee de inventario a las áreas de operación y mantenimiento que trabajan en el área de influencia, y también debido a que surte periódicamente de cierta cantidad de bienes a otros almacenes. El costo fijo de preparación, en pesos, ( $A$ ), es \$10, la tasa de la demanda, ( $\lambda$ ), es 20  $KG$  y el costo de almacenamiento al mes es \$1,92 (\$23 al año). Al momento del análisis se tienen existencias de 2.193  $KG$  y una disponibilidad de 2.191  $KG$ . Las Tablas 1 y 2 resumen la información del bien en el almacén A01.

Tabla 1. Datos del sistema de información para el reabastecimiento de un bien.

<b>Artículo "X": Ítem código 280</b>	
Almacén analizado	A01
Unidad de medida de compra	KG
Unidad de medida de consumo (almacenamiento)	KG
Clasificación ABC	A
Existencias	2.193 KG

Fuente: Elaboración propia



Tabla 2. Datos para hallar la cantidad de pedido de acuerdo con el modelo EOQ.

Artículo "X": Ítem código 280	
A Costo fijo de preparación	10
$\lambda$ Tasa de demanda	20
h Costo de inventario anual	23

Fuente: Elaboración propia

### 7.1 Aplicación del modelo básico

**Cantidad de pedido:** Con base en la ecuación (4),  $Q_d = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h}}$ , y la información de la Tabla 2 es posible calcular la cantidad del pedido que minimiza la función de costos,  $Q_d$ , de la siguiente forma:  $Q_d = \sqrt{\frac{2(10)(20)}{23}} = 4,17 \text{ KG}$

**Costo total del modelo:** El costo total se calcula de acuerdo con la ecuación (3),  $C(Q) = \frac{hQ}{2} + \frac{A\lambda}{Q}$  y teniendo en cuenta el valor Q encontrado anteriormente.

$$C(Q) = \frac{(23)(4,17)}{2} + \frac{(10)(20)}{4,17} = \$ 95,916 \cong \$ 95,92$$

### 7.2 Aplicación del modelo considerando el ciclo del pedido

**Cantidad de pedido:** Para la aplicación del modelo en consideración del ciclo del pedido, se parte del supuesto que el tiempo de ciclo, T, del artículo está dado por: T = 0,21 días, dato obtenido del proceso real de la empresa. De acuerdo con la ecuación (5), es posible calcular Q en función de T y D, así:

$$Q_d = (T)(\lambda) = (0,21)(20) = 4,2 \text{ KG}$$

De esta forma, se halla un valor  $Q_d$ , el cual como se podrá validar más adelante al revisar la información del software, corresponde con la práctica utilizada en las empresas de telecomunicaciones.

**Costo total del modelo:** Al igual que en el modelo básico, el costo total se calcula de acuerdo con la ecuación (3),  $C(Q) = \frac{hQ}{2} + \frac{A\lambda}{Q}$ , pero teniendo en cuenta el valor  $Q_d$  calculado para este modelo, es decir:  $Q_d = 4,2 \text{ KG}$ .

$$C(Q) = \frac{(23)(4,2)}{2} + \frac{(10)(20)}{4,2} = \$ 95,919 \cong \$ 95,92$$

### 7.3 Aplicación del modelo con costo del inventario

Los valores de las variables de decisión se hallan de acuerdo con las ecuaciones (8), (9) y (10), respectivamente. Para los cálculos se asume los siguientes valores de la siguiente tabla:

Tabla 3. Valores de las variables de decisión para el modelo EOQ.

Artículo "X": Ítem código 280	
$A$ Costo fijo de preparación	10
$\lambda$ Tasa de demanda	20
$h$ Costo de inventario anual	23
$b$ Costo de pedidos pendientes	29
$L$ Tiempo de reposición	1

Fuente: Elaboración propia

**Cantidad de pedido:**  $Q_d^* = \sqrt{\frac{2A\lambda}{h} \left(\frac{b+h}{b}\right)}$

Reemplazando en la ecuación los valores de la Tabla 2, y teniendo en cuenta el costo de penalización citado en esta sección, se obtiene:

$$Q_d^* = \sqrt{\frac{2(10)(20)}{23}} \sqrt{\frac{(29+23)}{29}} = 5,6 \text{ KG}$$

**Punto de pedido:**  $r_d^* = \lambda L - \frac{h}{b+h} Q_d$

$$r_d^* = 20 - \left(\frac{23}{29+23}\right) (5,6) = 17,5 \text{ KG}$$

**Costo total del modelo:**  $C_d^*(Q, r) = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h(Q_d - \frac{h}{b+h} Q_d)^2}{2Q_d} + \frac{b(\frac{hQ_d}{b+h})^2}{2Q_d}$

$$C_d^*(Q, r) = 10 \frac{(20)}{5,6} + \frac{23 \left(5,6 - \frac{23}{29+23} 5,6\right)^2}{2(5,6)} + \frac{29 \left(\frac{23(5,6)}{29+23}\right)^2}{2(5,6)} = \$ 71,63$$

#### 7.4 Implementación real en la empresa prestadora de servicios

En consideración a los criterios de administración del modelo básico *EOQ* de administración de inventarios (Ver Figura 1), los artículos de inventario sólo se reponen cuando las existencias del inventario lleguen a cero; bajo este supuesto se puede concluir que en este tipo de modelos no se administra punto de pedido.

Ahora bien, en la práctica de las empresas de telecomunicaciones hay varias consideraciones importantes que se deben tener en cuenta y se relacionan con el programa de reabastecimiento del software y la interacción con las variables de decisión cantidad de pedido y punto de pedido.

1. En cualquier momento específico de tiempo, es posible analizar la información de las variables del modelo de inventarios: punto de pedido y la cantidad de pedido (Ver Figuras 5 y 6).

En la siguiente figura se detallan los valores relacionados con los campos que tenía el artículo *X* en las variables: Cantidad ordenada, Punto de orden y Existencias de seguridad antes de someter la información del bien a un proceso de actualización de las variables de decisión punto de pedido y cantidad de pedido

Figura 5. Datos para administrar el inventario del artículo "X" el almacén A01

Cantidades		
Suc/planta	A01	
Número del artículo	280	ESTOPA BRILLO 100% ALGODON
Cantidad ordenada	4.20	
Cantidad ordenada máxima	.00	
Cantidad ordenada mínima		
Punto de orden		
Cantidad orden múltiple		
Unidades por contenedor	1	
Existencias de seguridad		

Fuente: Elaboración propia

*Cantidad Ordenada*: Dato numérico; es la cantidad que se manda a solicitar en un nuevo proceso de compra cada vez que el artículo de inventario alcanza el punto de orden en el almacén. Corresponde a una variable de decisión clave en la administración del modelo *EOQ*.

*Punto de orden (o Punto de pedido de acuerdo a las definiciones previas)*: Dato numérico; es la cantidad de un artículo que especifica el momento en que se debe realizar el reabastecimiento. Generalmente sucede cuando la cantidad total en existencias (o la disponible), más la cantidad en proceso de compra alcanza o está por debajo de la cantidad especificada.

*Existencias de seguridad:* Dato numérico; es la cantidad de existencias para cubrir las variaciones resultantes de la demanda.

Aunque las variables de decisión se puede visualizar por medio de pantallas tal como se muestra en la figura anterior, adicionalmente el programa de reabastecimiento del software provee un reporte (ver Figura 6), que brinda detalles generales del bien y a su vez permite revisar las variables de decisión para el punto de pedido y cantidad de pedido a fin de decidir si se procede a realizar una actualización sobre éstos o si se mantienen los valores que se encuentran al momento de la generación del informe.



2. La información de las variables del modelo de inventarios en su cotidianidad se inicializa (o reinician como en nuestro caso), con unos datos de entrada específicos para el punto de pedido y la cantidad de pedido (Ver Figura 7), los cuales aunque provienen de resultados empíricos y criterio de expertos (como se pudo evidenciar anteriormente), tienen un sustento matemático soportado por una caracterización del modelo. A lo largo del tiempo, -es decir en la medida que hay nueva información diaria de los consumos -, el programa sugiere modificar la cantidad de pedido,  $Q^*$  así como el correspondiente punto de pedido  $r^*$ .

Una vez los funcionarios de las empresas de telecomunicaciones realizan los correspondientes cálculos, proceden a ingresar los resultados de las variables de decisión en los respectivos campos del programa de reabastecimiento del sistema de información, dejando así actualizado el modelo de administración de inventarios para el artículo  $x$ .

En la práctica los expertos de las empresas de telecomunicaciones suelen hallar  $Q$  bajo el supuesto que el consumo es constante en el tiempo  $t$ . Parten del consumo promedio (anual o mensual) y a partir de este dato de entrada encuentran el consumo promedio diario correspondiente. De acuerdo con lo anterior:

**Consumo promedio diario:**

$$\frac{\text{Consumo promedio anual}}{365} = \frac{7.200 \text{ KG}}{365 \text{ días}} = 19,73 \cong 20 \text{ KG/día}$$

**Cantidad de pedido:** El valor del consumo diario hallado anteriormente, 20 KG, se multiplica por un factor que corresponde al ciclo del pedido, -el cual es un valor que suele estar entre 0 y 12 meses y para nuestro caso los expertos aplican un valor de 0,21-, llegando así a obtener la cantidad de pedido que ingresarían al programa de reabastecimiento del sistema de información.

$$Q = (\text{Consumo promedio diario})(\text{ciclo de pedido}) = 20 (0,21) = 4,2 \text{ KG}$$

**Punto de pedido:** El punto de pedido se halla como el producto resultante de una regla de tres entre el consumo promedio anual y el consumo promedio mensual; se tiene en cuenta el inventario de seguridad establecido para el bien.

Fecha	Consumo promedio
365	7.200
30	$x(1+0,05)$

Siendo 0,05 el correspondiente inventario de seguridad para el bien X.

$$X = (7.200) * \left(\frac{30}{365}\right) (1,05) = 621,6 \cong 622$$

La Figura 7 contiene los datos de re inicialización del software, con los cuales se administra el modelo de inventarios del artículo X en el almacén A01 teniendo en cuenta una tasa de demanda,  $\lambda$ , de 20 y un ciclo de pedidos,  $T$ , que corresponde a 0,21.

Figura 7. Datos de reabastecimiento del artículo "X" en el almacén A01.

Fuente: Elaboración propia

Las instrucciones que tienen los funcionarios de las empresas de telecomunicaciones encargados de los análisis del reaprovisionamiento de los bienes de inventario, si bien contemplan realizar los cálculos necesarios para establecer el valor de la variable  $Q^*$ , explícitamente no consideran realizar los



cálculos y evaluaciones correspondientes sobre los costos del modelo de inventarios. Uno de los aportes para la empresa que desde este trabajo se espera brindar, es precisamente contar con un modelo matemático sustentado que permita calcular en adelante el costo de la gestión del inventario. Por lo anterior, y si se tiene en consideración que en la cotidianidad de la operación de los inventarios de la empresa se generan pedidos pendientes, se hará uso de la correspondiente ecuación,  $C(Q, r) = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h(Q_d - \frac{h}{b+h} Q_d)^2}{2Q_d} + \frac{b(\frac{hQ_d}{b+h})^2}{2Q_d}$ , para proceder a hallar el costo total esperado. Como los cálculos involucran el valor de  $Q^*$ , se tomarán para este ejercicio las cantidades de pedido calculadas por los expertos de las empresas de telecomunicaciones ( $Q = 4,2$ ).

**Costo total del modelo:** Al reemplazar los correspondientes valores de la Tabla 2 en la ecuación, se obtiene:

$$C_d^*(Q, r) = A \frac{\lambda}{Q} + \frac{h(Q_d - \frac{h}{b+h} Q_d)^2}{2Q_d} + \frac{b(\frac{hQ_d}{b+h})^2}{2Q_d} = \$ 74,56$$

Como se ha mencionado antes, la administración de los inventarios de las empresas de telecomunicaciones es soportado por un ERP y como los usuarios deben interactuar con algunas pantallas y campos de éste, se consideró oportuno listar algunas pantallas y campos (Figuras 8 al 13) del artículo X.

En la Figura 8 sólo se hará referencia a los siguientes campos, -los cuales resultan importantes en el manejo de la información de los inventarios-.

*Tipo de abastecimiento y tipo de línea:* Con base en este dato el sistema de información clasifica al artículo como inventariable; a su vez permite administrar el registro como inventariable cuando éste haga parte de una transacción.

*Clasificación LM (Libro mayor):* Información nemotécnica de la clasificación contable del artículo en el inventario del almacén; mediante esta información durante las transacciones se deduce la respectiva cuenta contable de inventario.

*Unidad de medida:* Unidad de medida del artículo para el manejo del inventario.

*Indicador de producto:* P, indica que el artículo es un bien terminado y embalado.

*Permitir órdenes atrasadas y Verificar disponibilidad:* Por medio de estas opciones se podrán generar órdenes de trabajo incluso si no se tienen existencias o disponibilidad suficientes y el usuario debe interactuar con la información de la disponibilidad.

*Nivel precio de venta y Nivel de costos de inventario:* 2. Estos datos hacen que las transacciones de inventario y ventas se realicen con base en los precios de venta y costos del inventario (promedios ponderados) propios del almacén.

*Nivel precio de compra:* 1. Cuando el artículo tiene el valor 1, los precios de compra del artículo se capturan de la última compra que se ha hecho a un proveedor específico.

Figura 8. Datos del artículo X en el maestro de artículos.

Número catálogo	444	Nº artículo anterior	279
Descripción *	ESTOPA COMUN 100% ALGODON		
Descripción		Texto de búsqueda	ESTOPA COMUN
Tipo de abastecimient...	O Obsoleto	Nivel de costos de inventario	2 Sólo artículo/sucursal
Clasificación LM	IGMF MAT PREST SS OTROS INST...	Nivel precio de venta	2 Sólo artículo/sucursal
Unidad de medida	KG Kilogramo	Nivel de precio de compra	1 Proveedor/nivel de artículo
Tipo de línea	S Artículo Inventariables-Servic	Mét fijación precios juegos/config	Art que no pertenece al juego
Indicador de producto...	P Artículo empacado	Método cálculo costos configurador	Non Configured Item
Número planificador	5660 GUTIERREZ PEREZ...	Método de compromisos	1 Ubicación con mayor cantidad
Número comprador		Mensaje de impresión	*
<input checked="" type="checkbox"/> Permitir órdenes atrasadas		Mensaje intermitente de aviso	.
<input checked="" type="checkbox"/> Verificar disponibilidad		Conv de unidad de medida estándar	UM específica del artículo

Fuente: Elaboración propia

De la información de las siguientes figuras, se hace referencia a los campos clasificación ABC y los correspondientes a pesos y medidas:

Figura 9. Información ABC y Pesos y medidas: Datos del maestro de artículos.

The image shows two screenshots of a software interface for 'Datos del maestro de artículos'. The top screenshot is on the 'Información adicional' tab, which includes fields for 'Grupo de precios de artículos', 'Nva fij de precio en grupo', 'Grupo de nva fij de pcio de o...', 'Grupo de despacho', and 'Reexpedición'. It also features three radio button groups for 'Ventas inventario', 'Margen inventario', and 'Inversión inventario', each with options for 'Clasificación A', 'B', 'C', and 'Sin clasificación D'. The bottom screenshot is on the 'Pesos y medidas' tab, showing a list of 'Unidades medida' with dropdown menus and labels: 'Principal' (KG, Kilogramo), 'Secundario' (KG, Kilogramo), 'Compras' (KG, Kilogramo), 'Fijación precios' (KG, Kilogramo), 'Envío' (KG, Kilogramo), 'Producción' (KG, Kilogramo), 'Componente' (KG, Kilogramo), 'Peso' (LB, Libras), and 'Volumen' (GA, Galones).

Fuente: Elaboración propia

**Clasificación ABC del artículo en cuanto a ventas de inventario, margen de inventario y la inversión en el inventario.** Campos con los que se indica la clasificación ABC que tiene el artículo en el inventario; el sistema de información actualiza esta clasificación de acuerdo con el comportamiento de las ventas, el margen en ventas y la inversión en el inventario.

**Pesos y medidas:** En esta sección del catálogo se determinan todas las unidades de medida del bien.

La siguiente figura contiene información de los almacenes donde se administra inventario del bien; de esta se referencian los siguientes campos:

*Sucursal/planta.* La identificación (alfanumérica) de cada uno de los almacenes en los cuales tiene inventario el bien (artículo).

*Tipo de abastecimiento y tipo de línea:* S. (Ver explicación en los campos de la Figura 8).

*Fila de planificación (Familia de planificación):* Con estos datos alfanuméricos se identifican las familias y grupos en los cuales se clasifica el bien en el inventario.

*Figura 10. Almacenes donde se tiene inventario del artículo "X"*

Maestro de Artículos - Trabajo con sucursal de artículos Consulta: Todos los registros

✓ 🔍 + 📄 🗑️ ✖️ 📄 (R) 🛠️ Herramientas

Número del artículo: 279 ESTOPA COMUN 100% ALGODON

Registros 1 - 10 > X Personalizar cuadrícula

Sucursal/planta	Tipo de abastecimiento	Tipo línea	Fila de planificación
	A03 O	S	035
	A18 O	S	035
	A20 O	S	035
	A29 S	S	035
	A41 S	S	035
	A42 O	S	035
	A120 O	S	035
	A220 U	S	035
	A222 U	S	035
	A223 U	S	035

*Fuente: Elaboración propia*

De la información de la Figura 11 se resalta el campo País origen, con el cual se establece el código del país donde se administra el inventario. Anteriormente en la Figura 8 se identificaron los campos Clasificación LM, tipo de línea, tipo de abastecimiento, método de compromisos, verificar disponibilidad y permitir órdenes atrasadas.

Figura 11. Campo: País Origen: Datos del artículo "X" en el almacén A01

**Maestro de Artículos - Información sobre sucursales y plantas de artículos**

✓ ✕ Pantalla (F) Herramientas

Sucursal/Planta \* A03  
 Número del artículo 279 ESTOPA COMUN 100% ALGODON

**Datos básicos de sucursales/plantas** Información adicional Proceso de lotes

Tipo de abastecimiento C Obsoleto  
 Clasificación LM IGMF MAT PREST SS OTROS I...  
 Tipo de línea S Artículo Inventariables-Servic  
 N° planificador 5660 GUTIERREZ PEREZ LIBA...  
 N° comprador 2474 BOTERO VILLA NELSON...  
 N° proveedor 20416 SUBPRODUCTOS DE TE...  
 Mensaje de impresión \*  
 Método de compromisos 1 Ubicación con mayor cantidad  
 País origen CO Colombia

Ventas sujetas a impuesto Y IVA del 16%  
 Compras gravables Y IVA del 16%

Verificar disponibilidad  
 Permitir órdenes atrasadas

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente figura solo se hace referencia al campo Código de la política de órdenes, con el cual se establece la política para generar órdenes del artículo.

Figura 12. Campos para administrar la política de inventarios

**Datos fabricación** Nivel calidad y potencia Servicio cliente Información producto a granel Planificación cadena suministros Administración bodegas Producto Demand Flow®

Código de la política de órdenes 0 Punto de reorden  
 Valor norma órdenes  
 Código de planificación 0 No planeado por MPS, MRP o D...  
 Regla de límite planeación  
 Límite de planeación  
 Límite congelado  
 Límite de despliegue de mensaje  
 Eliminar mensajes MRP

Cantidad de costos contables 1.00  
 Código del tipo de surtido Art final enviable  
 Redondear al siguiente número... No redondear  
 Salida y recepción 0 No se ha tomado ninguna acción  
 Horas reaprovisionamiento  
 Ingrediente activo  
 Artículo Kanban

Tamaño del diseño  
 N° de última revisión 1  
 N° de diseño 279

Cantidad de plazo de manufa...  
 Nivel del plazo  
 Plazo de manufactura  
 Plazo de entrega por unidad  
 Plazo acumu. de entrega 30  
 Fijo/Variable F Plazo de entrega fijo  
 Estado del material

Fuente: Elaboración propia

La figura 13 contiene la información de las cantidades consumidas, año a año (en la pantalla es el campo: Año fiscal) y mes a mes (en la pantalla los campos "mes anterior ###"), para el artículo "X" en el almacén A01.

Figura 13. Datos de los consumos del inventario del artículo "X" en el almacén A01

Año fiscal	Cant venta mes anterior 01	Cant venta mes anterior 02	Cant venta mes anterior 03	Cant venta mes anterior 04	Cant venta mes anterior 05	Cant venta mes anterior 06	Cant venta mes anterior 07	Cant venta mes anterior 08	Cant venta mes anterior 09	Cant venta mes anterior 10	Cant venta mes anterior 11	Cant venta mes anterior 12	Cant venta mes anterior 13	Cant venta mes anterior 14
14	48.00-						4.00		2.00-					
13	162.00	183.00		132.00	182.00	168.00	117.00	212.00	189.00	120.00	60.00			
12	73.00	130.00	16.00		51.00	158.00	125.00	101.00						
11	43.00	97.00	94.00	80.00	170.00	50.00	120	38.00	198.00		10.00	81.00		
10	59.00	57.00	139.00	80.00	2.00	2.00	10.00	43.00	164.00	41.00	112.00	9.00		
9	6.00	37.00	156.00	2.00	136.00	48.00	28.00	36.00	5.00	6.00	54.00	39.00		
8				110.00	33.00	48.00	26.00	45.00	67.00	143.00	37.00	2.00		
3			120.00		45.00	45.00	20.00	30.00		100.00				
2		125.00	120.00		25.00			60.00	180.00					
1	96.00	27.00	30.00	32.00	30.00	60.00		20.00	45.00	75.00	33.00-	11.00		

Fuente: Elaboración propia

En las secciones anteriores se calcularon los costos y las cantidades de pedido de acuerdo con los supuestos de cada uno de los modelos y se dio alcance al cálculo de la cantidad de pedido conforme lo hacen los funcionarios en las empresas de telecomunicaciones. El punto de pedido se calculó sólo para los modelos que lo tienen considerado. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4

Tabla 4 Información de los costos para el caso de estudio según modelos EOQ

Fuente: Elaboración propia

VARIABLE O DATO DE ANÁLISIS	VALORES	Valor Obtenido Modelo básico	Valor Obtenido Modelo considerando el ciclo de Pedido	Valor Obtenido Modelo con costo del inventario	Valor Real Práctica de la Empresa	Observaciones
Cantidad del pedido que minimiza la función de costos (Q)		4,17	4,20	5,60	4,20	La cantidad de pedido, de acuerdo con la práctica de la empresa, se calcula teniendo en cuenta un tiempo de ciclo, T, de 0,21 días.
Costo total (\$)		95,92	95,92	71,63	74,56	Aunque los procedimientos de la empresa no contemplan calcular los costos a cada uno de los items de inventario, dadas las características del proceso en este trabajo se optó por calcularlos haciendo uso del modelo con costos del inventario.  Los costos en consideración de pedidos pendientes son básicamente iguales a los costos del modelo básico debido a que en ellos se consideran los mismos valores de los componentes del costo y adicionalmente son casi idénticas las cantidades de pedido resultantes en cada uno de estos modelos.  Para los costos del modelo real de la empresa se partió de una cantidad de pedido de 4,2 KG y se usó el modelo con costos del inventario. Se encontró que son mayores los costos en comparación con los resultados obtenidos al realizar todo el despliegue formal del modelo con costos del inventario.

## REFERENCIAS

- [1] Hopp Wallace,J y Spearman M.L, *Factory Physics*, New York: McGraw-Hill, 1997.
- [2] Hopp Wallace,J y Spearman M.L, *Factory Physics*, 2da ed., New York: McGraw-Hill, 2001.
- [3] Hopp,W.J., Spearman,M.L., «Inventory Control: From EOQ to ROP,» de *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Managament*, Boston, Irwin/ McGraw-Hill, 2000, pp. 48-108.
- [4] Zipkin,P., *Foundations of Inventory Management*, McGraw Hill, 2000.

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Datos del sistema de información para el reabastecimiento de un bien.....	16
Tabla 2. Datos para hallar la cantidad de pedido de acuerdo con el modelo <i>EOQ</i> .....	17
Tabla 3. Valores de las variables de decisión para el modelo <i>EOQ</i> .....	18
Tabla 4 Información de los costos para el caso de estudio según modelos <i>EOQ</i> .....	30



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Inventario versus tiempo en el modelo <i>EOQ</i> .....	5
Figura 2. Cantidad de pedido ( <i>Q</i> ).....	8
Figura 3. Inversión en el inventario versus cantidad de pedido anual (modelo <i>EOQ</i> ) ...	11
Figura 4. Inventario neto en el modelo <i>EOQ</i> considerando pedidos pendientes.....	12
Figura 5. Datos para administrar el inventario del artículo “ <i>X</i> ” el almacén A01 .....	20
Figura 6. Informe del ERP (Administración del inventario: artículo “ <i>X</i> ”, almacén A01)	22
Figura 7. Datos de reabastecimiento del artículo “ <i>X</i> ” en el almacén A01.....	24
Figura 8. Datos del artículo <i>X</i> en el maestro de artículos.....	26
Figura 9. Información ABC y Pesos y medidas: Datos del maestro de artículos.....	27
Figura 10. Almacenes donde se tiene inventario del artículo “ <i>X</i> ” .....	28
Figura 11. Campo: País Origen: Datos del artículo “ <i>X</i> ” en el almacén A01.....	29
Figura 12. Campos para administrar la política de inventarios .....	29
Figura 13. Datos de los consumos del inventario del artículo “ <i>X</i> ” en el almacén A01 ..	30





**UNIVERSIDAD DE MEDELLIN**

---

## ANEXO 2

# CONCEPTOS PRELIMINARES Y MARCO NORMATIVO

Carlos Enrique Londoño Estrada

[Carlos.Londono@epm.com.co](mailto:Carlos.Londono@epm.com.co)

María Andrea Arias Serna

[marias@udem.edu.co](mailto:marias@udem.edu.co)

Juan Guillermo Murillo Gómez

[jgmurillo@udem.edu.co](mailto:jgmurillo@udem.edu.co)

Universidad de Medellín  
Facultad de Ingenierías  
Medellín-Colombia

20 de noviembre de 2015

## CONCEPTOS PRELIMINARES Y MARCO NORMATIVO

A continuación se enuncian y desarrollan de manera general algunos conceptos básicos e importantes relacionados con la administración y gestión de los inventarios, a fin de generar las bases o insumos necesarios para el entendimiento de las próximas secciones correspondientes a los modelos de administración. Adicionalmente se tienen en cuenta elementos y conceptos específicos de materia normativa (Leyes, entidades responsables de regulación, vigilancia y gobierno), dando especial alcance a los conceptos técnico - financieros emitidos por las Normas Internacionales de Información Financiera, *NIIF*, y a las normas de inventarios.

Según se puede entender de Van [1], la administración del capital de trabajo puede representar inversiones (corto plazo) que determinan la posición de liquidez de las empresas, por lo que tener o no inventarios suele producir diferentes efectos sobre las empresas. Más, aún al interior de las dependencias cada una de las áreas puede argumentar y analizar las necesidades de tener o no inventario y la determinación de las cantidades óptimas de inventario, por ejemplo: el interés del gerente de producción es que se cubra la materia prima necesaria para la producción en el momento en que ésta va a ser procesada, mientras los agentes de venta y de las áreas que prestan servicios (áreas de soporte) desean contar con las unidades suficientes de inventario para cubrir su demanda y cualquier eventualidad que pueda aumentar las utilidades de la empresa, y finalmente, para la empresa, en general, su interés reside en conocer de qué manera o de cuántas maneras pueden disminuir sus costos por tener unos inventarios que cubran todas estas características. Las áreas de finanzas y las dependencias de logística y gestión de materiales (cadenas de abastecimiento), -entre otras-, desde hace varias décadas mantienen un interés especial para determinar cuál es la cantidad óptima de inventario; de aquí resulta que cada una de las empresas define cuál es el modelo de inventarios que mejor le aplica y genera algunas definiciones sobre lo que se va a administrar como inventario, sus prácticas, sus procesos y sus procedimientos internos. En las

próximas secciones de este trabajo se estudian algunos modelos de inventarios y la correspondiente aplicación de la medida de riesgo CVaR.

## 2.1 Conceptos preliminares

Es común que las empresas en un momento dado posean y administren inventarios, los cuales llegan a ser clasificados dependiendo de su función final y a la forma en que se presentan y mantienen. Según se define en Noori [2], partiendo de la forma en que se presentan y mantienen en las empresas los inventarios, éstos se clasifican en inventarios de materia prima, inventarios de productos en proceso de fabricación y los inventarios de productos terminados.

- **Inventarios de materia prima:** Lo constituyen los insumos y materiales básicos que ingresan al proceso; básicamente son todos los materiales con los cuales se elaboran los productos y que todavía no han recibido procesamiento alguno por parte de los procesos de la empresa.
- **Inventarios de productos en proceso de fabricación:** Lo integran los bienes adquiridos por las empresas y que se encuentran en proceso de producción; suelen cuantificarse generalmente por la cantidad de materiales, mano de obra y gastos de fabricación aplicables a la fecha de cierre.
- **Inventarios de productos terminados:** Lo conforman los bienes adquiridos por las empresas y que se han transformado en los procesos productivos correspondientes para ser destinados a su entrega o comercialización.

A continuación, de acuerdo con Puerta [3], se brindan algunas definiciones y conceptos sobre inventarios.

**Definición 1. Inventario:** Es el conjunto de mercancías o artículos que tiene la empresa para comercializar con aquellos, que permiten la compra y venta o la fabricación primero antes de venderlos, en un periodo determinado. Aparece generalmente en el balance general como el activo corriente más grande y en el

estado de resultados, el inventario final se resta del costo de mercancías disponibles para la venta para poder determinar el costo de las mercancías vendidas durante un periodo determinado.

**Definición 2. Modelos determinísticos de inventarios:** Una empresa suele tener un inventario razonable de bienes para asegurar su continuo funcionamiento. Tradicionalmente los inventarios se consideran como un mal necesario, si son pocos originan costosas interrupciones y si son demasiados equivalen a generar un capital ocioso. En un sentido simplista, por ahora, se puede decir que el problema del inventario es determinar la cantidad que equilibra los dos casos extremos. Un factor importante en la formulación y la solución de un modelo de inventarios es la demanda de un artículo por unidad de tiempo, la cual puede ser determinística (por ejemplo: se conoce con certidumbre) o probabilística (por ejemplo: se puede describir con una distribución de probabilidad).

**Definición 3. Modelos estocásticos de inventarios:** En general son aquellos en los cuales la demanda es incierta y desconocida; una variable aleatoria con una función de distribución conocida. Entre los más importantes se encuentran, el modelo del vendedor de periódicos el cual tiene ámbito de aplicación en productos perecederos o de consumo en el corto plazo y en el cual se considera un único pedido, y el modelo  $(Q, r)$  el cual es utilizado cuando se desea saber en cada instante de tiempo el nivel exacto de inventario a mano y maneja un punto de pedido y una cantidad de pedido. De manera general, como se listan a continuación, en Handley and Whittin [4] se documentan otros modelos estocásticos.

- *Modelo  $(R, r)$ :* Su política consiste en realizar un pedido cuando el nivel de inventario sea igual o menor a  $r$ . La cantidad a pedir es aquella que permite llevar el nivel de inventario a  $R$ . Este modelo define igual que el modelo  $(Q, r)$  los casos venta pendiente y pérdida de venta.

- *Modelo  $(R, T)$* : Es un modelo de revisión periódica en el cual  $T$  denota el tiempo que transcurre entre pedido y pedido. En cada revisión se ordena una cantidad de tal manera que el nivel de inventario llegue a  $R$ .
- *Modelo  $(nQ, r, t)$* : Es un modelo de revisión periódica en el cual la cantidad a ordenar es un entero múltiplo de  $Q$ .
- *Modelo  $(R, r, T)$* : Un modelo de revisión periódica que sigue una política de tipo  $(R, r)$ : Se realiza un pedido cuando el nivel de inventario sea igual o menor a  $r$  y la cantidad a pedir es aquella que permite llevar el nivel de inventario a  $R$ .

**Definición 4. Déficit:** Es una escasez de algún bien, ya sea dinero, comida o cualquier otra cosa, y genera pérdida en venta. Puede ocurrir que no se pierda la venta, y en este caso se denominará al evento pedido pendiente.

**Definición 5. Pedido pendiente:** Es un pedido de un cliente que no ha sido satisfecho; no hay pérdida en venta.

**Definición 6. Tiempo de reposición (Lead time):** Tiempo que transcurre entre el momento de colocación de un pedido hasta su recepción.

**Definición 7. Punto de pedido:** Es el nivel de inventario en el cual se hace un nuevo pedido de compra.

**Definición 8. Tamaño del pedido:** Es la cantidad de artículos a pedir en cada periodo de tiempo determinado.

**Definición 9 Cantidades en existencia:** Corresponde a las cantidades que físicamente se encuentran en la bodega; este dato se puede empíricamente conseguir realizando un conteo físico.

**Definición 10 Inventario disponible:** Corresponde a las cantidades que físicamente se encuentran en la bodega adicionándole aquellas cantidades que

se encuentran en proceso de compra (incluyen las cantidades pendientes de recepción y las que se encuentran en tránsito) y sustrayéndole las cantidades que han sido demandadas o solicitadas por los usuarios.

**Definición 11. Clasificación ABC de inventarios:** En todas las compañías es necesario realizar una discriminación de los productos y sus inventarios con el objeto de determinar aquellos que por sus características precisan un control más riguroso. La clasificación es una de las mejores estrategias y medidas de control interno de inventarios; de aplicarse correctamente puede permitir mantener el mínimo de capital invertido en stock. Vilfredo Pareto, sociólogo y economista italiano en 1897 afirmó que el 20% de las personas ostentaban el 80% del poder político y la abundancia económica, mientras que el 80% restante de la población (denominada "masas") se repartía el 20% restante de la riqueza y de la influencia política. Este principio puede aplicarse a muchos entornos, entre ellos: control de la calidad, logística (distribución), y la administración y control de los inventarios. En cuanto al control de inventarios, según Muñoz [5], este principio significa que unas pocas referencias o productos de inventario son las más importantes porque representan la mayor parte del valor de uso de los mismos. La Clasificación ABC es una metodología de segmentación de productos con base en criterios preestablecidos o indicadores de importancia, como por ejemplo: el "costo unitario", "el volumen anual demandado" y "el volumen de las ventas". Aunque se usan diversas medidas de valor, - dependiendo de los objetivos de la clasificación-, el criterio de mayor uso por los expertos en el tema es el valor monetario de los inventarios, y los porcentajes de clasificación son relativamente arbitrarios. La mayoría de los expertos suelen considerar que la zona "A" de la clasificación corresponde estrictamente al 80% de la valorización del inventario, y que el 20% restante debe dividirse entre las zonas "B" y "C", asignando porcentajes muy cercanos al 15% y el 5% del valor del stock a cada zona, respectivamente. Otros suelen asociar las zonas "A", "B" y "C" con porcentajes respectivos del valor de los inventarios del 60%, 30% y el 10%. sin embargo el primer caso es más común, por el hecho de la conservación del principio "80-20". Si bien los valores anteriores son una guía aplicada en muchas organizaciones, cada empresa las define de acuerdo con sus particularidades y las realidades en el sector correspondiente.



A partir de lo expuesto en Hopp [6], se plasma el rastro histórico del enfoque del modelamiento matemático para controlar los inventarios, teniendo como base los siguientes elementos:

1. Los modelos de inventarios están entre los casos más antiguos y discutidos de investigación de operaciones, son ampliamente usados y citados, y como tal componen el lenguaje de administración de producción.
2. Las obras escritas sobre los modelos de inventario son un papel clave en el comportamiento de prácticamente todos los sistemas de producción.
3. Los resultados clásicos de inventario han sido centro y base para más modernas técnicas de administración de inventario, como son: Requerimientos de planificación de materiales (*MRP*), Justo a Tiempo (*JIT*), y competencia basada en el tiempo (*TBC*).

## **2.2 Marco normativo**

Generalmente los inventarios comprenden la cuenta del activo corriente en la cual más inversión se compromete. Para realizar una adecuada administración, es indispensable conocer el alcance de las normas internacionales y nacionales (locales) que aplican al proceso de inventarios con el fin de incorporar las actividades que posibiliten planear, actuar y verificar el proceso conforme a la norma y en consecuencia contar con una adecuada identificación, medición y administración de los costos que a éstos corresponden y se asocian, tales como: mano de obra y otros costos de personal (que incluyen personal y actividades de supervisión y otros costos indirectos), para reconocerlos, y asegurar su correcto funcionamiento. Bajo este supuesto y en consideración a que el marco normativo actual provee a los directivos la justificación y los requerimientos de información necesarios para identificar y administrar los costos, más adelante se listan las normas internacionales vigentes que en materia de inventarios tienen ámbito de aplicación en Colombia; algunos de los costos relacionados en las normas hacen parte de la estructura de los modelos de administración de inventarios.

## **Marco Normativo Internacional**

Dos temas resultan esenciales en la contabilidad de los inventarios:

1. La cantidad de costo que debe reconocerse como un activo (para que sea diferido hasta que los ingresos correspondientes sean reconocidos).
2. Identificar la cantidad de gasto que debe reconocerse, incluyendo además cualquier deterioro que rebaje el importe en libros al valor neto realizable.

**NIC 2 - Inventarios:** Emitida en diciembre de 1993 por el Comité de Normas Internacionales de Contabilidad (*NIC*). Su última revisión fue en diciembre 2003, y sustituyó a la *NIC 2*, “Valoración y presentación de los inventarios en el contexto del costo histórico del sistema (publicado inicialmente en octubre de 1975)”. Como alcance, la norma internacional *NIC 2* aplica a todos los inventarios, excepto a:

1. Obras en curso, resultantes de contratos de construcción, incluyendo los contratos de servicios directamente relacionados ( *NIC 11* Contratos de Construcción).
2. Instrumentos financieros ( *NIC 32* Presentación y *NIC 39* Instrumentos Financieros - Reconocimiento y Medición).
3. Activos biológicos relacionados con la actividad agrícola y productos agrícolas en el punto de cosecha o recolección ( *NIC 41* Agricultura). Después de la cosecha su tratamiento es de *NIC 2*.

El costo de los inventarios debe comprender todos los costos derivados de la adquisición y conversión de los mismos, así como otros costos en los que se ha incurrido para darles su condición y ubicación actuales; se incluyen otros costos, siempre que se hubieran incurrido para dar a los mismos su condición y ubicación actuales, por ejemplo: los costos indirectos no derivados de la producción, los costos del diseño de productos para clientes específicos. En ciertas circunstancias, los costos financieros se incluyen entre los costos de los inventarios (*NIC 23* - Costos por Intereses).

Algunos costos son excluidos del importe en libros de los inventarios, y por tanto se reconoce como gastos del periodo en el cual se incurren; entre ellos:

- (a) las cantidades anormales de desperdicio de materiales, mano de obra u otros costos de producción.
- (b) los costos de almacenamiento, a menos que tales costos sean necesarios en el proceso productivo, previamente a un proceso de elaboración ulterior.
- (c) los costos indirectos de administración que no hayan contribuido a dar a los inventarios su condición y ubicación actuales.
- (d) los costos de comercialización.

**NIC 16 - Propiedad, planta y equipo:** La Norma Internacional de Contabilidad 16, establece el tratamiento para la contabilización de la propiedad, planta y equipo. Este tratamiento sirve para que los usuarios de los estados financieros puedan conocer la inversión que se ha hecho, así como los cambios que se han presentado por deterioro, obsolescencia, desapropiación o por un intercambio de la propiedad, planta y equipo.

El objetivo de la *NIC 16* es prescribir el tratamiento contable para propiedad, planta y equipo y los principales problemas son la oportunidad del reconocimiento de los activos, la determinación de sus cantidades cargadas, y los cargos por depreciación a ser reconocidos en relación con ellos. En este informe no se hará una exposición completa del contenido y alcance de esta norma.

Según *Ernst & Young* [7], este es un resumen de la definición de inventarios contenida en la norma *NIC 2 - Inventarios*: Los inventarios son activos poseídos para su comercialización en el curso normal de la operación o en forma de materiales o suministros, para ser consumidos en la prestación de servicios (operación y mantenimiento). Estos recursos son controlados por la empresa y se espera obtener en el futuro beneficios económicos. El inventario se reconoce como activo cuando el costo del mismo puede ser medido fiablemente y es probable que genere beneficios económicos futuros a la empresa.

Según *Ernst & Young* [7], se definen los siguientes aspectos en considerando de las Normas Internacionales de Información Financiera (*NIIF*):

**Definición NIIF 1 - Repuestos menores.** Son repuestos menores las piezas de repuesto y el equipo de mantenimiento permanente, que la empresa espera utilizar durante más de un periodo, que no cumplen las características para ser activos de reemplazo.

**Definición NIIF 2 - Activos de reemplazo.** Son activos de reemplazo las piezas de repuestos importantes y el equipo de mantenimiento permanente que la empresa espera utilizar durante más de un periodo, usar sólo en conexión con un elemento específico de la propiedad, planta y equipo, y que tienen un costo representativo en relación con el elemento específico de la propiedad, planta y equipo no explotado.

**Definición NIIF 3 - Valor neto realizable.** Es el precio estimado de venta de un activo en el curso normal de la explotación, menos los costos estimados para terminar su producción y los necesarios para llevar a cabo la venta.

**Definición NIIF 4 - Valor razonable.** Es el importe por el cual puede ser intercambiado un activo o cancelado un pasivo, entre partes interesadas y debidamente informadas, que realizan una transacción en condiciones de independencia mutua.

Aunque los repuestos “consumibles” pueden reconocerse como inventarios en el estado de situación financiera, de acuerdo con la norma NIC 16 - Propiedad, planta y equipo: “Las piezas de repuesto importantes y el equipo de mantenimiento permanente, que la empresa espere utilizar durante más de un año o usar sólo en conexión con un elemento específico de la propiedad, planta y equipo cumplen normalmente con las condiciones para ser reconocidos como activo fijo y están dentro del alcance de la NIC 16 - propiedad, planta y equipo”. La empresa considerará si los repuestos tienen un costo representativo en relación con el elemento específico de la propiedad, planta y equipo para proceder a la clasificación del ítem de inventario. Los ítems de inventario que cumplan con las características establecidas en la definición técnica de reconocimiento de activos fijos se les denominará activos de reemplazo o bienes muebles en bodega, y aquéllos que no cumplan con las características

necesarias se denominarán repuestos menores. La consideración del costo del ítem tiene como finalidad mantener una adecuada administración y control de la propiedad, planta y equipo ya que no considerar este requerimiento adicional implicaría reconocer como activo fijo a los repuestos que se esperan utilizar por más de un periodo contable pero cuyo valor no es representativo, incrementando significativamente el volumen de los elementos de la propiedad, planta y equipo a administrar y controlar (por ejemplo, clavos y tornillos con características específicas, entre otros). En consideración a lo anterior:

- ✓ *No son ítems de inventario los activos de reemplazo.*
- ✓ *Son ítems de inventario los repuestos menores.*

En los principios contables generalmente aceptados (*GAAP*) de Colombia, se utiliza una definición de inventario diferente. Algunos ítems del inventario bajo *GAAP* local deberán ser reclasificados a otros rubros, dependiendo de su naturaleza, y por lo tanto le serán aplicadas otras *NIIF*. Por ejemplo, los ítems de inventarios que cumplen los requerimientos para ser activos de reemplazo bajo *NIC 16*, Propiedad, planta y equipo, los ítems re manufacturados que cumplen la definición de propiedad, planta y equipo, entre otros.

### ***Marco Normativo Colombiano***

***Decreto 2649/1993 Capítulo II Sección 1. Artículo 63:*** Según el artículo 63 “Los inventarios representan bienes corporales destinados a la venta en el curso normal de los negocios, así como aquellos que se hallen en proceso de producción o que se utilizarán o consumirán en la producción de otros que van a ser vendidos”. Este artículo pertenece a la Sección 1 “Normas sobre los activos” del capítulo II “Normas técnicas específicas”. Mediante el Decreto 2649/1993 se reglamenta la contabilidad en general y se expiden los Principios o Normas de Contabilidad Generalmente Aceptados en Colombia, PCGA. Los PCGA son un conjunto de conceptos básicos y de reglas generales que deben ser observadas al registrar e informar contablemente sobre los asuntos y actividades de las personas naturales o jurídicas. Apoyándose en ellos, la contabilidad permite identificar, medir, clasificar, registrar, interpretar, analizar,

evaluar e informar las operaciones de un ente económico, en forma clara, completa y fidedigna. Los PCGA sirven de guía contable para la formulación de criterios referidos a la medición del patrimonio y a la información de los elementos patrimoniales y económicos de un ente y constituyen parámetros para que los estados financieros se realicen sobre la base de métodos uniformes de técnica contable.

**Decreto 2650/1993:** Por el cual se reglamenta el Plan Único de Cuentas (PUC) para comerciantes, además de las circulares a través de las cuales la Superintendencia Nacional de Salud (SNS), establece los demás PUC. El Plan Único de Cuentas es un instrumento que se ha concebido para armonizar y unificar el sistema contable de los principales sectores de la economía colombiana, cuyo fundamento legal encuentra asidero en la norma técnica de clasificación de los hechos económicos, establecida en el artículo 53 del Decreto Reglamentario 2649 de 1993 (Decreto Reglamentario de la Contabilidad en Colombia).

**Resolución 356/2007- de la Contaduría General de la Nación. modificada y adicionada por las resoluciones de la Contaduría General de la Nación 145, 146 , 205 , 557 , 558 y 669 de 2008; 246, 315 y 501 de 2009; 193 de 2010:** “Por la cual se adopta el Manual de Procedimientos del Régimen de Contabilidad Pública”, y se definen los inventarios: Los inventarios representan el valor de los bienes tangibles, muebles e inmuebles, e intangibles, adquiridos o producidos por la entidad contable pública, con la intención de que sean comercializados, transformados o consumidos en actividades de producción de bienes o prestación de servicios, o para suministrarlos en forma gratuita a la comunidad, en desarrollo de funciones de cometido estatal.

**Artículos 62 al 72 del Estatuto Tributario (Inventarios, provisión y Ajuste):** Mediante el cual se definen y determinan algunos aspectos para establecer el costo de los activos movibles y el costo de los activos fijos en general. Artículo 62: Sistemas para establecer el costo de los activos movibles enajenados. Artículo 63: Limitaciones y controles para la valuación en el sistema de juego de inventarios. Artículo 64: Disminución del inventario final por faltantes

de mercancía. Artículo 65: Gradualidad en el desmonte de la provisión *LIFO* (*Last In First Out*) o *UEPS* (Últimas en Entrar Primeras en Salir). Artículo 66: Determinación del costo de los bienes muebles. Artículo 67: Determinación del costo de los bienes inmuebles. Artículo 68: Costo fiscal de activos. Artículo 69: Costo de los activos fijos. Artículo 70: Ajuste al costo fiscal de los activos fijos. Artículo 71: Utilidad en la enajenación de inmuebles. Artículo 72: Avalúo como costo fiscal.

**Decreto 326 de 1995 “Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 174 de 1994 (Inventarios)”**. En este Decreto se reglamentan y establecen los procedimientos y mecanismos para (a): Determinar el costo de enajenación de los activos movibles, (b) Desmontar la provisión *LIFO* (*Last In First Out, traducido al español como UEPS, Últimas en Entrar Primeras en Salir*), (c) Valorar los inventarios declarados (consistencia del valor de los inventarios con el valor en libros de contabilidad), (d) El cambio del método de valoración durante el ejercicio contable, (e) Los avalúos tomados como costo para determinar la renta o la ganancia ocasional en la enajenación de inmuebles que constituyan activos fijos para el contribuyente, (f) Ámbito de aplicación de los ajustes por inflación, efectos contables y fiscales del sistema de ajustes por inflación, (g) Bases para los ajustes fiscales, (h) Exclusión de los inventarios para las bases de deducción teóricas correspondientes a los años gravables 1995 y 1996.

**Artículos 25, y 27 al 31 del Decreto 187 de 1975**: Contabilización de los inventarios, aspectos a considerar cuando el costo de lo vendido se determine por el sistema de juego de inventarios o por los sistemas permanentes o continuos, y reglas para asentar los inventarios de existencias al terminar cada ejercicio contable.

**Decreto 1333 de 1996 “Por el cual se reglamenta parcialmente el Estatuto Tributario”**: En esta norma se establecen plazos para adoptar y poner en práctica el sistema permanente o continuo de Inventarios, uso parcial del sistema de inventarios periódicos, solicitudes de autorización (para hacer uso parcial del sistema de inventarios periódicos en forma combinada con el sistema de inventarios permanentes, usar otro sistema de reconocido valor técnico,

cambiar el método de valoración de los inventarios), y los requisitos de las solicitudes, así como de los términos para resolverla.



## REFERENCIAS

- [1] Van,H., James,C., Wachowicz,Jhon, Fundamentos de administración financiera, México: Editora Marisa de Anta, 2001, p. 768.
- [2] Noori,H., and Radford,R., «Calidad Total y Respuesta Sensible Rápida,» de *Administración de Operaciones y Producción*, Bogotá, Colombia, McGraw Hill, 1997.
- [3] Puerta,M.E., Arias,M.A., y Londoño,J.I., de *Matemáticas Aplicadas: Optimización de Inventarios Aleatorios*, Medellín, Sello Universidad de Medellín, 2011, pp. 13-62 y 29-59..
- [4] Hadley G. and T.M.Whitin, *Analysis of Inventory System*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1963.
- [5] Muñoz,David, *Administración de Operaciones "Enfoque de administración de procesos de negocio"*, México: Cengage Learning, 2009.
- [6] Hopp,W.J., Spearman,M.L., «Inventory Control: From EOQ to ROP,» de *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Managament*, Boston, Irwin/ McGraw-Hill, 2000, pp. 48-108.
- [7] Ernst and Young, «Definiciones técnicas - Inventarios de Definiciones técnicas en materia contable y financiera Programa NIIF,» SE, Medellín, Diciembre 2012.



**UNIVERSIDAD DE MEDELLIN**

---

## ANEXO 3

# PSEUDOCÓDIGO DE LOS ALGORITMOS ALGORITMO DE FEDERGRUEN:

Evaluación de algunas funciones y resultados

Carlos Enrique Londoño Estrada

[Carlos.Londono@epm.com.co](mailto:Carlos.Londono@epm.com.co)

María Andrea Arias Serna

[marias@udem.edu.co](mailto:marias@udem.edu.co)

Juan Guillermo Murillo Gómez

[jgmurillo@udem.edu.co](mailto:jgmurillo@udem.edu.co)

Universidad de Medellín  
Facultad de Ingenierías  
Medellín-Colombia

20 de noviembre de 2015

## ALGORITMO DE FEDERGRUEN

Como se mencionó en el trabajo de investigación: La administración de inventarios es un campo del conocimiento en el cual desde hace varias décadas algunos autores han venido brindando aportes. Se reseña de manera especial las contribuciones realizadas a partir del año en 1913, tomando como punto de referencia los aportes del ingeniero Ford Whitman Harris a quien se le atribuye la definición del modelo denominado  $EOQ$ , Economic Order Quantity. A partir de entonces han surgido diversas extensiones de éste modelo, las cuales se han propuesto teniendo en consideración diferentes hipótesis, entre ellas las más conocidas tienen relación con la situación de escasez y la pérdida en ventas. De acuerdo con lo anterior existe un grupo de modelos que considera la situación de escasez y plantea que si en un momento determinado un cliente llega a solicitar productos y no se tienen existencias suficientes, entonces éste se marcha y realiza su compra en un establecimiento diferente. En los últimos años, otro grupo de modelos (no menos numeroso), obvia o no contempla la situación de escasez y en consecuencia se han generado varias extensiones que abarcan diferentes líneas de investigación (se citan entre otros los trabajos realizados por Hwang et al en 1990 y Tersine y Barman en los años 1991 y 1994). Por su parte, en el año 1990 Federgruen y Lee dieron a conocer el modelo de inventarios focalizado en el tamaño económico del lote dinámico considerando descuentos en el precio de compra.

En cuanto al modelo  $(Q, r)$ , se resaltan los aportes de Hadley y Whitin quienes dieron a conocer las funciones de costos aproximados y exactos para una política de administración de inventarios  $(Q, r)$ , las cuales han sido ampliamente estudiadas y aplicadas a partir de entonces (es decir desde 1963). Adicionalmente tienen relevancia las numerosas investigaciones que han realizado varios autores sobre la función de costos  $(Q, r)$ , a partir de que Zipkin demostrara la convexidad conjunta de ésta función.

Federgruen y Zhen, por su parte, contribuyen en estas investigaciones generando un algoritmo que ha sido considerado simple y eficiente para el cálculo de un óptimo  $(Q, r)$ , y es así como finalmente para el caso de estudio, se plantea utilizar éste para hallar el valor óptimo tanto de los costos como de las variables de decisión “Cantidad de pedido” y “Punto de pedido” en el modelo  $(Q, r)$  con costos del inventarios. Por medio de la aplicación de éste algoritmo se plantea resolver el problema de minimización propuesto en el desarrollo del trabajo “Medidas de riesgo financiero en la optimización de inventarios: un caso de estudio en las empresas prestadoras de servicios de telecomunicaciones”; se aclara que aunque se parte del algoritmo propuesto por Federgruen, A. and Y.S Zheng, la presente versión corresponde a una adaptación realizada por Arango et al.

```

# Proyecto de investigación 2015/07

rm(list=ls(all=TRUE))

cat('\n','Evaluación de algunas funciones y resultados de Zheng y de Arango
et ál.', '\n', '\n')

# Parámetros del caso de estudio
h. <- 23
p <- 29
lamb <- 20
L <- 1
K <- 10
alfa <- 0.95

# Esta es un parámetro auxiliar que simplifica en algunas partes el código
a <- lamb*L

# Función F
F. <- function(x, l=a){ppois(x,l)}

# Función G. Versión continua de la ecuación (3)
G <- function(y){
  (h.+p)*integrate(F.,0,y,subdivisions=10000)$value+ p*(a-y)}

# Mínimo de G, y0
te <- 0
paso <- 0.2
while(G(te + paso) - G(te) < 0){te <- te + paso}
y0 <- te

# -----
# Q y r en el modelo EOQ. Ec. (20) y (21)

```

```

Qd.ast <- round(sqrt(2*lamb*K*(h.+p)/(h.*p)),1)
S <- Qd.ast*h./(h.+p)
rd.ast <- round(lamb*L - S,1)
Cd.ast <- round(((Qd.ast-S)*(Qd.ast-S)/(2*Qd.ast)*h.+
                lamb*K/Qd.ast+S^2*p/(2*Qd.ast),2)

# -----
# Algoritmo Federgruen con la función G

# Función Delta de G
DG <- function(y){G(y+1)-G(y)}

S0 <- C.ast <- Q0 <- r0 <- R0 <- 0

te <- 0
while(DG(te) < 0){te <- te + 1}
S0 <- C.ast <- lamb*K + G(te)
Q0 <- 1
r0 <- te - 1
R0 <- te + 1
while((C.ast > G(r0))|(C.ast > G(R0))){
  if(G(r0) <= G(R0)){
    S0 <- S0 + G(r0)
    r0 <- r0 - 1}
  else{
    S0 <- S0 + G(R0)
    R0 <- R0 + 1}
  Q0 <- Q0 + 1
  C.ast <- round(S0/Q0,2)}
(r.ast <- r0)
(Q.ast <- Q0)
(C.ast)

# -----

```

```

# r(Q) con G. Método de la secante
r.Q <- function(Q){if(Q==0){return(y0)}
  if(Q!=0){x<-z<-0.5
    signo<-sign(G(x+Q)-G(x))
    while(sign(G(z+Q)-G(z))==signo){z<-z+1}
    x[2]<-z
    k<-2
    while(abs(x[k]-x[k-1])>0.2){
      x[k+1]<-x[k]-(G(x[k]+Q)-G(x[k]))*(x[k]-x[k-1])/
        (G(x[k]+Q)-G(x[k])-G(x[k-1]+Q)+G(x[k-1]))
      k<-k+1}
    return(x[length(x)])}}

# -----
# Función H. Ec. (6)
H <- function(Q){G(r.Q(Q))}

# -----
# Función auxiliar para integrar H entre 0 y Q. Aproximación por trapecios.
int.H <- function(Q){x <- c(0:Q,Q)
  (G(y0)+G(r.Q(Q)))/2 +
  sum(sapply(2:(length(x)-1),function(k){G(r.Q(x[k]))}))}

# -----
# Función C(Q). Ec. (7)
C_ <- function(Q){(lamb*K+int.H(Q))/Q}

#####
#####
## Hacia el CVaR
## Función FF. Función de distribución de la función Fi
FF <- function(y,xi){F.(y+xi/p)-F.(y-xi/h.)}
#FF(Qd.ast,225)

```

```
# -----
## VaR de FF. Método de la secante
VaR <- function(y,nivel){x <- z <- 0
  while(FF(y,z)-nivel < 0){z <- z + a/2}
  x[2] <- z
  k <- 2
  while(xor((abs(x[k]-x[k-1]) > 0.1),(FF(y,x[k])!=FF(y,x[k-1])))){
    x[k+1] <- x[k] - (FF(y,x[k])-nivel)*(x[k]-x[k-1])/(FF(y,x[k])-FF(y,x[k-1]))
    k <- k+1}
  p1 <- c(floor(x[k]),x[k],ceiling(x[k]))
  p2 <- sapply(1:3,function(j){FF(y,p1[j])-nivel})
  p3 <- min(p2)
  p4 <- p1[which(p2==p3)]
  length(p4) <- 1
  return(p4)}
#VaR(Qd.ast,alfa)
#FF(Qd.ast,1400)
```

```
# -----
## Funciones y sub barra y y super barra para el cálculo de CVaR:
y.sb <- function(y,nivel){y - VaR(y,nivel)/h.}
y.sp <- function(y,nivel){y + VaR(y,nivel)/p}
```

```
# -----
## CVaR de Fi
CVaR <- function(y,nivel){
  (h.*integrate(F.,0,y.sb(y,nivel), subdivisions=1000)$value+
  p*integrate(F.,0,y.sp(y,nivel), subdivisions=1000)$value+
  p*(a-y)-nivel*VaR(y,nivel))/(1-nivel)}
```

```
# -----
# Mínimo de cvar, y0c
y0c <- function(nivel,paso=0.5){te <- 0
  while(CVaR(te + paso,nivel) - CVaR(te,nivel) < 0){te <- te + paso}
```



```

return(te)}

# -----
## r(Q) con CVaR. Cálculo con el método de la secante
rc <- function(Q,nivel,paso=0.5){
  if((Q==0)&(nivel==0)){return(y0)}
  if(Q==0){return(y0c(nivel,paso))}
  if(Q>0){te <- 0
    while((CVaR(te + Q,nivel) - CVaR(te,nivel)) < 0){te <- te + 1}
    tol <- 0.4 # Tolerancia
    x <- c(te - 1,te)
    k <- 2
    while(abs(x[k]-x[k-1]) > tol){
      x[k+1] <- x[k]-
        (CVaR(x[k]+Q,nivel) - CVaR(x[k],nivel))*(x[k]-x[k-1])/
        ((CVaR(x[k]+Q,nivel) - CVaR(x[k],nivel))-
        (CVaR(x[k-1]+Q,nivel) - CVaR(x[k-1],nivel))))
      k <- k+1}
    return(x[k])}
}
#rc(0,alfa)
#y0c(alfa)
#rc(Qd.ast,alfa)

# -----
# Función H con CVaR
Hc <- function(Q,nivel,paso=0.5){
  if(Q==0){return(CVaR(y0c(nivel,1),nivel))}
  if(Q>0){CVaR(rc(Q,nivel,paso),nivel)}
}
#Hc(0,alfa)
#Hc(Qd.ast,alfa)

# -----
# Función auxiliar para integrar Hc entre 0 y Q. Aproximación por trapecios
int.Hc <- function(Q,nivel,paso=0.5){x <- c(seq(0,Q,paso),Q)

```

```

((CVaR(y0c(nivel,paso),nivel) +
  CVaR(rc(x[(length(x)-1)],nivel,paso),nivel))/2 +
  sum(sapply(2:(length(x)-2),function(k){CVaR(rc(x[k],nivel,paso),
    nivel}})))*paso+
  (CVaR(rc(x[(length(x)-1)],nivel,paso),nivel)+
    CVaR(rc(Q,nivel,paso),nivel))*(Q-x[(length(x)-1)]/2}

#x <- c(0:Qd.ast,Qd.ast)
#y<-sapply(1:length(x),function(k){Hc(x[k],alfa)})
#plot(x,y,type='l',col='blue',main='H(Q)',xlim=c(0,max(x)),ylim=c(0,max(y)))
#abline(h=0,v=0)
#H0 <- Hc(0,alfa)
#HQ <- Hc(Qd.ast,alfa)
#points(c(0,Qd.ast),c(H0,HQ),pch=16,col='red')
#lines(c(0,0,Qd.ast,Qd.ast,0),c(H0,0,0,HQ,H0),col='red')

#int.Hc(Qd.ast,alfa)
#(H0+HQ)*Qd.ast/2

# -----
# Función C(Q) para el CVaR
Cc <- function(Q,nivel,paso=0.5){(lamb*K+int.Hc(Q,nivel,paso))/Q}
#Cc(Qd.ast,alfa)

# -----
# Función de costo con CVaR
C. <- function(Q,r,nivel){(lamb*K+
  sum(sapply((r+1):(r+Q),function(y){CVaR(y,nivel)})))/Q}

# -----

# Algoritmo Federgruen para el CVaR

# Función Delta de CVaR

```

```

DCVaR <- function(y,nivel){CVaR(y+1,nivel)-CVaR(y,nivel)}

S <- C.ast.alfa <- Q <- r <- R <- 0

te <- 0
while(DCVaR(te,alfa) < 0){te <- te + 1}
S <- C.ast.alfa <- lamb*K + CVaR(te,alfa)
Q <- 1
r <- te - 1
R <- te + 1
while((C.ast.alfa > CVaR(r,alfa)|(C.ast.alfa > CVaR(R,alfa))){
  if(CVaR(r,alfa) <= CVaR(R,alfa)){
    S <- S + CVaR(r,alfa)
    r <- r - 1}
  else{
    S <- S + CVaR(R,alfa)
    R <- R + 1}
  Q <- Q + 1
  C.ast.alfa <- round(S/Q,2)}

(r.ast.alfa <- r)
(Q.ast.alfa <- Q)
(C.ast.alfa)

(C.Qd.ast.alfa <- round(Cc(round(Qd.ast),alfa),2))
R <- round(100*(C.Qd.ast.alfa/C.ast.alfa-1),2)

cat('lambda =',lamb,', L =',L,', h =',h.,', p =',p,', y0 =',y0,', G(y0)
=',round(G(y0),2),'\n')
resultado<-matrix(c(K,lamb*K,
                    Qd.ast,Q.ast,Q.ast.alfa,
                    rd.ast,r.ast,r.ast.alfa,
                    Cd.ast,C.ast,C.ast.alfa,
                    C.Qd.ast.alfa,R), nrow = 1)

```

```
dimnames(resultado)<-list(NULL, c('K', 'lamb*K',  
    'Qd.ast', 'Q.ast', 'Q.ast.alfa',  
    'rd.ast', 'r.ast', 'r.ast.alfa',  
    'Cd.ast', 'C.ast', 'C.ast.alfa',  
    'C.Qd.ast.alfa', 'R'))
```

resultado

## REFERENCIAS

Federgruen, A. and Y.S. Zheng, «A Simple and Efficient Algorithm for Computing Optimal  $(r, Q)$  Policies in Continuous Review stochastic Inventory Systems,» *Operations Research*, vol. 40, nº 4, pp. 808-813, Jul-Aug 1992.