

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Maestría en Educación Matemática

La noción de equipartición a través de objetos musicales

Documento que presentan

Gerardo Elias Sepúlveda Restrepo

Marco Antonio Ayala Chauvin

Leydy Yaneth Montoya Congote

Director de Tesis:

Dr. Luis Alexander Conde Solano

Medellín, Colombia

Marzo de 2017

RESUMEN

La investigación que a continuación se presenta, tiene su interés en el análisis de la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de objetos musicales, lo anterior a razón de que los métodos utilizados en la actualidad para la enseñanza de esta característica de las fracciones, no ofrecen a los estudiantes un mecanismo de comprobación de la existencia o no de la equidad de las partes. De este modo, se considera como hipótesis que los vínculos entre las matemáticas y la música pueden constituirse en un escenario diferente a los tradicionales, para que los estudiantes por medio de experiencias y representaciones puedan construir una noción de equipartición.

Para ello, en esta investigación se pretende involucrar a los estudiantes en un mundo interdisciplinar real que se concreta en un diseño de una propuesta de intervención en el aula; con el propósito de proveer a los estudiantes diferentes experiencias para identificar las consecuencias de que no se cumpla la equipartición en las relaciones de los objetos musicales con las fracciones. Todo esto a partir de la utilización de material concreto, guías de aprendizaje para el docente y los estudiantes, en armonía con el uso de un ambiente computacional de diseño multimedial, procurando favorecer la interacción con diferentes situaciones dinámicas de representación.

Las actividades fueron diseñadas bajo una perspectiva de representaciones semióticas, dándole relevancia al análisis de las percepciones visuales, corporales y auditivas, que ofrece la enseñanza de los objetos matemático-musicales.

Palabras clave: Equipartición, objetos matemático-musicales, fracción, representaciones semióticas.

ABSTRACT

The research that is presented below has its interest in the analysis of the construction of the notion of fraction equipartition in elementary students, through musical objects, the above because the methods currently used for teaching of this characteristic of the fractions, do not offer the students a mechanism to verify the existence or not of the equity of the parts. In this way, it hypothesizes that the links between mathematics and music can be constituted in a different scenario to traditional, so that students through experiences and representations can build a notion of equipartition.

For this, in this research it is intended to involve the students a real interdisciplinary world that is concretized in a design of a proposal of intervention in the classroom. With the purpose of providing the students with different tools to identify the consequences of not fulfilling the equipartition in the relations of the musical objects with the fractions. All this from the use of concrete material, teaching guides for the teacher and the students, in harmony with the use of a computer environment of multimedia design, in order to favor the interaction with different dynamic situations of representation.

The activities were designed from a perspective of semiotic representations, giving relevance to the analysis of the visual, body and auditory perceptions offered by the teaching of mathematical-musical objects.

Keywords: Equipartition, mathematical-musical objects, fractions, semiotic representations

ÍNDICE

RESUMEN	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE.....	v
LISTA DE IMÁGENES.....	viii
LISTA DE TABLAS.....	xi
LISTA DE ESQUEMAS	xii
AGRADECIMIENTOS	xiii
DEDICATORIA	xiv
1. Introducción y planteamiento del problema	1
1.1 Introducción	1
1.2 Planteamiento del problema.....	2
1.3 Pregunta y objetivos de investigación	4
2. Antecedentes.....	5
2.1 Enseñanza de las fracciones	6
2.2 Música y educación	10
3. Revisión de materiales educativos	14
3.1 Guías de aprendizaje cooperativo de matemáticas- grados 3º, 4º y 5º	14
3.1.1 Estructura de las guías de aprendizaje cooperativo	16
3.1.2 Guías de aprendizaje grado 3º	17
3.1.3 Guías de aprendizaje grado 4º	22
3.1.4 Guías de aprendizaje grado 5º	26
3.2 Material de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN).....	29
3.2.1 Los objetivos de la secuencia didáctica	30
3.2.2 Derechos básicos de aprendizaje	31
3.2.3 Centro de Aprendizaje 1	31

4.	Marco conceptual	38
4.1	Representación de los objetos matemático-musicales	38
4.1.1	Representación visual	39
4.1.2	Representación auditiva	39
4.1.3	Percepción corporal	40
4.2	El tiempo musical y sus equiparticiones.....	43
4.2.1	Las figuras musicales	44
4.2.2	Equiparticiones	44
4.2.3	Artefactos computacionales	45
5.	Metodología	47
5.1	Fase I. Diseño y desarrollo curricular	48
5.1.1	Estudio preliminar.....	48
5.1.2	Diseño de una propuesta de intervención.....	52
5.2	Fase 2. Análisis Cualitativo	62
5.2.1	Bases para el Análisis	62
5.2.2	Selección e interpretación de los datos	62
6.	Resultados del análisis.....	63
6.1	La medida como punto de encuentro entre las matemáticas y la música	64
6.2	Aproximación inicial a la noción de equipartición.....	68
6.3	Sistema de signos para medir el tiempo	75
6.4	Toda figura de la misma clase, tiene la misma duración	88
6.5	El compás como composición de equiparticiones.....	96
7.	Discusión.....	101
7.1	¿Cómo construyen los estudiantes de primaria la noción de equipartición de fracción, a través de objetos musicales?	101
7.2	Diseño de un ambiente computacional, material concreto y guías de aprendizaje, como mediadores para la construcción de significados de equipartición.....	103
7.3	Implementación de una propuesta de intervención que les permita a los estudiantes de primaria construir significados de equipartición, a través de objetos musicales.	

7.4 Artefactos tecnológicos en la enseñanza.....	104
7.5 Consideraciones generales.....	105
7.6 Otras consideraciones	106
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107

LISTA DE IMÁGENES

Imagen 1, Representación de fracciones	17
Imagen 2, Ejercicio de representación de fracciones	18
Imagen 3, Ejercicio de equipartición de una fruta	19
Imagen 4, Ejercicio de equipartición.....	20
Imagen 5, Representación de fracciones y equipartición	20
Imagen 6, Representación de fracciones y equipartición	21
Imagen 7, Representación de fracciones y equipartición	22
Imagen 8, Fracciones propias, impropias y equipartición.....	23
Imagen 9, Ejercicio de comprensión e interpretación del concepto.....	24
Imagen 10, Ejercicio de comprensión e interpretación del concepto.....	24
Imagen 11, Representación de fracciones en la recta numérica.....	25
Imagen 12, Representación de fracciones en la recta numérica.....	25
Imagen 13, ejercicio de equipartición de un cuadro.....	26
Imagen 14, Ejercicio de equipartición.....	27
Imagen 15, Ejercicio de equipartición.....	28
Imagen 16, Ejercicio de equipartición.....	28
Imagen 17, Esquema general de la secuencia didáctica del material de matemáticas MEN	30
Imagen 18, Ejercicio de equipartición de una barra de chocolate.....	31
Imagen 19, Ejercicio de representación de fracciones y equipartición	33
Imagen 20, Ejercicios de representación de fracciones.....	33
Imagen 21, Ejercicio de equipartición y representación de fracciones	34
Imagen 22, Ejercicio de representación de fracciones y equipartición	35
Imagen 23, Representación de fracciones con material manipulativo	35

Imagen 24, Ejercicio de equipartición.....	35
Imagen 25, Ejercicio de identificación de equiparticiones.....	36
Imagen 26, Ejercicio de equipartición.....	36
Imagen 27, Ejercicio de representación de fracciones con dibujos.....	37
Imagen 28, Ejercicios de equipartición de fracciones.....	37
Imagen 29, Representaciones semióticas de objetos matemático-musicales.....	43
Imagen 30, Valores de las Figuras y Silencios Musicales.....	44
Imagen 31, Relación matemáticas y música.....	64
Imagen 32, Relación matemáticas y música 2.....	65
Imagen 33, Cualidades del sonido.....	66
Imagen 34, Cualidades del sonido 2.....	67
Imagen 35, Cualidades del sonido 3.....	68
Imagen 36, Medida del pulso cardíaco.....	69
Imagen 37, Respuesta 1 categoría 2.....	69
Imagen 38, Ejercicio de baile.....	72
Imagen 39, El pulso-Multimedia.....	73
Imagen 40, Respuestas 2 categoría 2.....	73
Imagen 41, El ritmo musical-Multimedia.....	74
Imagen 42, Respuestas 3 categoría 2.....	75
Imagen 43, Respuesta 1 categoría 3.....	78
Imagen 44, Un cuadrado.....	79
Imagen 45, Respuestas 2 categoría 3.....	80
Imagen 46, Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia.....	80

Imagen 48, Duración de las figuras, juego-Multimedia.....	83
Imagen 49, Duración de las figuras musicales-Multimedia	84
Imagen 50, Respuestas 3 categoría 3	84
Imagen 51, Material manipulativo	85
Imagen 52, Respuestas 4 categoría 3	86
Imagen 53, Respuestas 5 categoría 3	86
Imagen 54, Figura musical, nombre y palabra	87
Imagen 55, Respuestas 6 categoría 3	87
Imagen 56, Pinto la cara del sol	89
Imagen 57, Respuestas 1 categoría 4	90
Imagen 58, Qué pasaría si-Multimedia	91
Imagen 59, Respuestas 2 categoría 4	93
Imagen 60, Respuesta 3 categoría 4.....	94
Imagen 61, Respuesta 4 categoría 4.....	95
Imagen 62, Respuestas 1 categoría 5	97
Imagen 63, Respuestas 2 categoría 5	98
Imagen 64, Respuestas 3 categoría 5	99

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Objetivos de las sesiones de clase	53
Tabla 2 Estructura del material manipulativo	58
Tabla 3 Cronograma de aplicación de la propuesta de intervención	60
Tabla 4 Descripción de categorías de análisis	63
Tabla 5 Rúbrica de autoevaluación	100

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1 Fases de desarrollo Metodológico	48
Esquema 2 Mapa de navegación de la multimedia.	57
Esquema 3, Sistema de signos para medir el tiempo	76

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestros agradecimientos a:

La gobernación de Antioquia, en la dirección del doctor Sergio Fajardo Valderrama por brindarnos la oportunidad de alcanzar esta meta, al ser partícipes del programa Becas de Maestría para Docentes de Antioquia.

El Instituto Colombiano de Crédito Educativo y Estudios Técnicos en el Exterior (ICETEX), en su programa de Becas de Maestrías de Reciprocidad entre Ecuador y Colombia.

El Dr. Luis Alexander Conde, quien además de ser un referente fundamental con sus trabajos, nos ofreció acompañamiento, entrega de ideas y orientación constante para el desarrollo de este estudio.

El Dr. Vicente Liern, por poner a nuestra disposición sus conocimientos y trayectoria en el campo interdisciplinar de la música y las matemáticas.

La Dr (c). Ana Celi Tamayo y el Dr. Vicente Liern por su detenida y generosa valoración de la tesis, así como por sus pertinentes sugerencias para este documento académico.

Los estudiantes, padres de familia, directivos y docentes de la Institución Educativa San Francisco de Asís, sede Cristóbal, por permitir que la aplicación de la propuesta de intervención y los objetivos de este trabajo vieran la luz y adquirieran sentido real.

Nuestras familias y compañeros de equipo, por aportarnos motivación, soporte y paciencia en las en las diferentes vivencias y etapas de desarrollo de esta investigación.

Todas las personas que contribuyeron de una forma u otra en la realización de este trabajo.

DEDICATORIA

Dedicamos esta tesis a:

Nuestras familias, por quienes emprendemos la búsqueda de ser honorables y mejores personas cada día.

Al ser supremo, energía o centro de fe de cada uno de nosotros, razón de nuestra presencia en el mundo.

1. Introducción y planteamiento del problema

1.1 Introducción

La presente investigación pretende ofrecer a los estudiantes de primaria la posibilidad de participar de un proceso de aprendizaje en un escenario didáctico que vincula el estudio de las matemáticas y la música, en la búsqueda de la adquisición de una noción de equipartición a través de objetos musicales. Se consideró como tema de interés, a razón de que este aspecto de las matemáticas es generalmente omitido o revisado de manera superficial en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en las instituciones educativas oficiales de Colombia.

El presente estudio se sustenta en representaciones semióticas, enfocándose en las representaciones visuales, corporales y auditivas, a fin de analizar la forma en la que los estudiantes las relacionan en la creación de esquemas mentales ligados al aprendizaje de la equipartición de fracciones. Para ello, se incluye la aplicación en el aula de los presupuestos que configuran la articulación de los elementos musicales con los elementos matemáticos, en lo que se llamará objetos matemático-musicales. En concordancia, se reconoce que la estructuración de la música occidental tiene un origen matemático en la Escuela Pitagórica (siglo V a. C), que se ha nutrido como ciencia y arte a través de los tiempos, permitiendo su aprovechamiento en las aulas de clase en la búsqueda de generar interés y agrado en los estudiantes.

Siguiendo un paradigma de investigación cualitativa, en este trabajo se partió del interés de los investigadores en atender una problemática identificada en las aulas, trascendiendo luego hacia una revisión de materiales educativos, en la búsqueda de argumentos que permitieran establecer la necesidad generalizada de ofrecer alternativas didácticas para la enseñanza de la equipartición de fracciones. Gracias a los hallazgos, se

adquirieron bases para la elaboración de una propuesta de intervención sustentada en el diseño y uso de materiales concretos, guías de aprendizaje y un ambiente computacional interactivo.

Finalmente, se hizo una recolección de información a través de videos, fotografías, registros de campo y los cuadernos de trabajo de los estudiantes, con el fin de seleccionar datos valiosos para el abordaje de un análisis que permitió definir una trayectoria de construcción de la noción de equipartición, a partir de la interacción de estudiantes de básica primaria con objetos musicales.

Desde esta perspectiva educativa, se espera ofrecer aportes que generen impactos positivos en la comunidad académica, al presentar una propuesta que sigue un propósito digno de fortalecer en la didáctica de las matemáticas pues, como podrá encontrar el lector tras estas líneas, los más interesados en participar de ambientes de aula variados, dinámicos y favorecedores de la curiosidad, son los estudiantes.

1.2 Planteamiento del problema

Desde la observación de las dinámicas de enseñanza y aprendizaje, algunos investigadores han llegado a la conclusión de que, las matemáticas causan sentimientos encontrados entre los estudiantes (Fernández & Quero, 2015). Esto establece un reto para los maestros, al demandar que las estrategias didácticas utilizadas en la enseñanza de esta área, estén dotadas de elementos que generen motivación e interés por el estudio de las matemáticas. Para este fin, la música representa un camino de alto potencial, pues:

Integra todos los elementos y componentes que forman parte del campo fenomenológico de lo educativo, lo heurístico, los saberes, los valores, actitudes, emociones, lenguajes, comunicación, formas de hacer, de entender, de actuar, de comprender el mundo desde lo social, científico, cultural y tecnológico. (Pérez, 2009, p.3).

Adicionalmente, conviene retomar las recomendaciones de Liern (2011) cuando advierte que los maestros deben aprovechar la oportunidad que les ofrece la música para que el niño vea que las matemáticas tienen sentido para ellos.

A pesar de la mencionada importancia de la música en la escuela, como eje transversal

o como área, la preocupación por realizar aportes al estudio de la diada música–matemáticas en el campo de la enseñanza se hace imperante si se observa la estructura de los currículos de las instituciones de educación pública colombianas. En ellos inevitablemente, se les da amplio interés a las matemáticas, transmitidas desde métodos rígidos, tendientes a la fragmentación de los contenidos y, en ocasiones (a juicio de los autores) intimidantes; mientras que la música tiene un lugar meramente recreativo, al servicio de la clase de artística y con poca relevancia, pero que aun en esas condiciones, genera espacios de emotividad, afecto, desarrollo de habilidades cognitivas y motivación hacia el conocimiento. Al respecto, Conde, Figueras, Liern & Pluvinage (2011) reconocen la diferencia existente entre la visión de la música y las matemáticas como áreas de estudio en la escuela.

La música forma parte de las actividades lúdicas que se llevan a cabo en la escuela y emerge de manera natural entre las expresiones emocionales de los estudiantes tanto dentro, como fuera del contexto escolar. Mientras que, a pesar de que saben que las matemáticas ocupan un lugar de gran relevancia académica dentro del currículum escolar, pocas veces viven las matemáticas como una actividad lúdica fuera de la escuela. (p.107)

Por lo tanto, este trabajo de investigación se justifica en la búsqueda de resultados académicos significativos desde la unión de la música y las matemáticas. Se quiere implementar una propuesta didáctica que les permita a los estudiantes de primaria acercarse al significado de equipartición, a través de elementos musicales vinculados con el aprendizaje de las fracciones.

Lo anterior, entendiendo que el uso de las fracciones representa una necesidad relevante para el desenvolvimiento de los estudiantes en la sociedad, a partir de la interpretación de los datos matemáticos con los que interactúa a diario; competencia que el ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) espera haya sido adquirida al terminar el quinto grado de básica primaria.

El desarrollo de esta investigación no se sustenta solo en las exigencias dadas por las políticas del gobierno colombiano, sino también y con más relevancia, en los requerimientos conceptuales de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Proceso en el que el acercamiento a la idea de equipartición constituye múltiples ventajas para el maestro

(red de escuelas de Campana, 2001).

Así pues, se espera que la emotividad, interés y concentración aportadas por los elementos musicales, conjugada al uso de las potencialidades matemáticas que contienen, conduzca a los estudiantes a adquirir la noción de equipartición en el aprendizaje de las fracciones, de una forma sólida, duradera y consiente.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

Según lo antes descrito, se plantea como pregunta de investigación:

¿Cómo construyen los estudiantes de primaria la noción de equipartición de fracción, a través de objetos musicales?

Entendiendo el compromiso que implica la respuesta a esta pregunta, se hace necesario definir un horizonte, y para ello, este trabajo plantea un objetivo de investigación que aporta a la generación de un conocimiento pedagógico y dos de desarrollo, que consisten en acciones indispensables para el alcance del objetivo de investigación; están ligados en la medida que ofrecen los insumos y el escenario propicio para realizar el proceso de análisis.

De acuerdo a lo dicho, se presentan a continuación los propósitos de este trabajo investigativo:

Analizar la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de objetos musicales.

Diseñar un ambiente computacional, material concreto y guías de aprendizaje, como mediadores para la construcción de significados de equipartición en estudiantes de primaria.

Implementar una propuesta de intervención que les permita a los estudiantes de primaria construir significados de equipartición, a través de objetos musicales.

2. Antecedentes

La música es el placer que el alma experimenta contando, sin darse cuenta de que cuenta.

Leibniz.

La música y las matemáticas han tenido estrecha relación desde épocas antiguas y, así mismo, ambas en su carácter de disciplinas abstractas han logrado impactar de diversas maneras a la sociedad. Desde la época de Pitágoras, se necesitó de las matemáticas para crear estructuras musicales.

Pitágoras estudió la naturaleza del sonido y fue el primero en darse cuenta que la música, siendo un medio esencial de la comunicación y el placer, podía explicarse en términos numéricos. Así, tomando al número como el fundamento de la música, les dio cimiento matemático a las relaciones entre los sonidos, mediante proporciones que denominó: la octava, la quinta y la cuarta.

Según Coronado (2008), para la cultura griega, la música (los números en movimiento), la aritmética (el estudio de los números en reposo), la geometría (las magnitudes en reposo) y la astronomía (las magnitudes en movimiento), hacían parte de las matemáticas. En aquella época se reconocían abiertamente las conexiones entre la música y la ciencia; no eran vistas como entes separados, sino como elementos complementarios para el pensamiento del hombre. Fue a partir de esta concepción integradora, que se llegó a importantes innovaciones y descubrimientos trascendentales para la humanidad.

Para San Agustín de Hipona (354 – 430 d. C.) la música es “la ciencia de la buena modulación” y en consonancia, sería correcto afirmar que a su vez admitiría denominarla como un arte, por su origen social y su atractivo estético. El hecho de afirmar que la música es una ciencia y un arte, significa que está formada por una serie de elementos relacionados entre sí, que puede llegar a originar ciertas aptitudes musicales que pueden ser utilizadas para la

interdisciplinaria, en este caso con las matemáticas, así que se puede aprovechar esta disciplina para incorporar en los estudiantes aquellos conceptos matemáticos que han generado durante años dificultades en el aprendizaje, como lo son las fracciones.

Finalizando esta mirada histórica, bastante corta en sí misma pero útil en cuanto su función de sentar bases para el desarrollo de la presente investigación, se puede decir que la música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Ambas ciencias, matemáticas y música, se encuentran al resolver problemas componiendo o interpretando; es así como comparten características en común.

Algunos autores como Tiburcio (2002), Peralta (2003), Liern (2008, 2011), Conde (2009, 2013) entre otros, han demostrado que existen posibilidades didácticas de enseñar matemáticas a través de la música, especialmente las fracciones, generando nuevas posibilidades de interpretación y creación de nociones alrededor del tema. Aprovechando estos hallazgos y, en la medida de lo posible, aportando nuevos avances, se pretende cambiar el contexto de interacción de los estudiantes, los maestros y el conocimiento, en las aulas de clase y aportar a la diversificación de estrategias para la enseñanza en este campo de las matemáticas.

Con este trabajo de investigación, se pretende identificar la forma en que los estudiantes de primaria construyen significados de equipartición, a través de objetos musicales y para ello, se busca trabajar en una propuesta interdisciplinaria diferente a las que se han usado en la educación tradicional, que ofrezca una estrategia didáctica en la enseñanza de las fracciones.

En este sentido, siendo conscientes de la importancia de conocer las iniciativas de investigación en la línea de Educación Matemática. En este apartado se presentan algunas de las propuestas que dan aportes relevantes al alcance de los objetivos de este trabajo.

2.1 Enseñanza de las fracciones

López (2012) adelantó una investigación en la que plantea una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones a partir de la relación parte-todo, siguiendo la metodología de Dienes (1977), las teorías de Piaget (1947) y la organización de los momentos metodológicos

del modelo Escuela Activa Urbana o Escuela Nueva. El desarrollo de este trabajo arrojó aportes para la didáctica de las matemáticas al encontrar que el acercamiento al concepto de fracción mediante el desarrollo de actividades que consideran los contextos continuos y discretos de las fracciones y los sistemas de representación con objetos concretos, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico, puede conducir a mejorar la comprensión del tema, aclarando que, cuando se considera la relación parte-todo, la implementación de esta estrategia no es lo más indicado para la conceptualización de las razones impropias.

Por su parte, Hincapié (2011) se dio a la tarea de fortalecer las prácticas de enseñanza de los docentes de primaria de una institución educativa del sector público, favoreciendo la comprensión conceptual de las fracciones, a partir del desarrollo de guías didácticas con situaciones problema que involucran sus diferentes representaciones y significados. El trabajo se realizó mediante reuniones con los docentes en las que se les entregaba una guía para que resolvieran las actividades planteadas, las analizaran y plantearan estrategias de solución. Luego la socializaban y ponían en discusión los resultados, las dificultades y errores presentados. De esta forma se pretendía institucionalizar los conocimientos. Entre los hallazgos se destaca la importancia que tiene el acercamiento a la comprensión del concepto desde la utilización de diversas representaciones y situaciones de contextualización que le den sentido a lo que se enseña, antes de mostrar algoritmos o conducir a la memorización de reglas.

De otro lado, Pazos (2009) aborda las dificultades que se presentan en la enseñanza de las fracciones, donde se hace más importante que el maestro adquiriera nuevas estrategias de enseñanza que permitan la adquisición de aprendizajes dotados de significado. La autora señala algunas prácticas habituales de la enseñanza de las fracciones, que muchas veces se convierten en obstáculos para un aprendizaje del tema, haciendo a los estudiantes habilidosos para resolver los problemas propuestos, pero no para la comprensión del objeto matemático. Entre las prácticas identificadas se encuentra el trabajo apoyado en representaciones gráficas que generalmente apuntan a la relación parte-todo, se usan las mismas cada vez (rectángulos y círculos) y se trabaja sobre cantidades continuas. Se advierte que estas prácticas dejan de lado otros contextos de uso de las fracciones, que ayudarán a una comprensión del tema, como el

reparto, la medida y el establecimiento de relaciones entre fracciones.

Los trabajos de Pazos (2009) plantean que, al mismo tiempo que en la enseñanza de las fracciones no se establecen las relaciones entre el trabajo con cantidades continuas y discretas, en las prácticas que abordan solo la relación parte-todo aparecen otras prácticas que afectan el proceso de comprensión:

- Se centran en el conteo de partes, priorizando el número de partes y no la relación entre la parte y el todo.
- No se trabaja la independencia de la forma.
- No se trabaja con fracciones mayores que la unidad.
- No se hace hincapié en la relación número de partes y tamaño de las mismas.
- No se representan distintas fracciones en una misma unidad.
- No tiene en cuenta la necesaria equidad de las partes.

Para cada práctica Pazos (2009) propone una alternativa que responde de mejor forma a las necesidades del estudio de las fracciones y plantea la necesidad de ir agregando complejidad a las presentaciones a medida que avance el proceso escolar. Plantea, además, un reto para los maestros: presentar las fracciones de manera que originen un problema desafiante para los estudiantes.

Otros autores como Cortina, Zúñiga & Visnovska (2013) plantean la conjetura de que el uso de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones constituye un obstáculo didáctico. Exponen por qué es razonable esperar que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales.

Los autores asumen un obstáculo no como el desconocimiento de algo, sino como el aprendizaje de un saber que luego dificultará la comprensión de un tema más complejo. En el artículo se tratan tres orígenes de los obstáculos en el aprendizaje matemático: de origen

ontogenético, de origen epistemológico y de origen didáctico. Estos últimos, sostienen los autores, pueden ser evitados, mientras que los dos primeros no.

Centrados en los obstáculos de origen didáctico, se establecen tres imágenes que conducen a una concepción de las fracciones que traerá dificultades en el aprendizaje de conceptos futuros, estas son: La fracción como resultado de transformar un objeto, la fracción como tantos de tantos y la fracción como incluida en un entero.

Para evitar los obstáculos didácticos mencionados, los autores presentan dos propuestas de enseñanza de las fracciones para evitar el uso de la equipartición, ancladas en la idea de que la noción de fracción surge de la conmensuración y también de su concepción como comparador, visiones que están en concordancia con los planteamientos matemático-musicales implementados en este estudio. Al respecto, en este trabajo, se sugiere que los obstáculos del concepto de equipartición se podrían atender a través de objetos matemático-musicales.

Finalmente, López (1987), presenta los resultados de una intervención con estudiantes de sexto grado, en la que se buscaba la construcción espontánea del concepto de fracción, centrando las actividades en ejercicios de repartos. Las dificultades y logros de los estudiantes fueron agrupadas en tres momentos: Pérdida de la equivalencia de las partes al fraccionar la unidad, las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero y el descubrimiento de la utilización de estrategias multiplicativas (en relación entre el entero y sus partes, como entre el conjunto de éstas y las partes proporcionales del reparto).

Enmarcadas en un enfoque constructivista, se encontró que las actividades de repartición representan acciones intelectuales, a través de las cuales es posible establecer relaciones entre el entero y sus partes, la composición de las mismas, el descubrimiento de las equivalencias y la reconstrucción de estas relaciones a través de estrategias multiplicativas. Desde esta mirada, para la investigadora, la enseñanza de las fracciones se plantea en varias etapas, iniciando con un acercamiento empírico al concepto, pasando por la introducción de los símbolos correspondientes al tema, para finalmente proceder a realizar cálculos.

En este trabajo se observó que el concepto en cuestión abre nuevos caminos al razonamiento y propicia el correcto desenvolvimiento de los sujetos en situaciones de la cotidianidad, lo cual permitió develar la riqueza epistemológica y psicológica de las fracciones, en su importancia para la construcción de la idea de la cantidad como valor relativo.

2.2 Música y educación

En el interés de estudiar cómo la música puede servir como una estrategia educativa en el proceso enseñanza y aprendizaje para el aprovechamiento académico de los estudiantes, Silva (2009) desarrolló una investigación documental, en la que se apoyó en la teoría de la metáfora de Johnson y la teoría de inteligencias múltiples de Gardner, a la vez que utilizó el método de análisis descriptivo cuantitativo. En este trabajo, se encontró que, al estudiar la música, las personas involucran varias áreas, entre ellas las visuales, auditivas, motoras y cognitivas. Además, la música y la emoción comparten la misma región del cerebro, la cual involucra la adquisición de conocimientos y el manejo de las emociones. Por otro lado, se expone la posibilidad de integrar la música con otras áreas a través del desarrollo de un currículo interdisciplinario, de tal forma que ninguna materia sea considerada aislada. Esto quiere decir, que abarque varias áreas o temas según las necesidades de los estudiantes, que siga un proceso de aprendizaje y que conduzca a que los estudiantes afirmen el valor de los conceptos tanto de las disciplinas de las artes como de las que no lo son.

Una vez tratada la importancia de la relación interdisciplinar de la música y las matemáticas, se hace necesario y casi obligado, mencionar los aportes de Conde (2009 y 2013) quien contribuye a esta línea con el desarrollo de dos trabajos investigativos: “Las fracciones al ritmo de la música” y “La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones”.

El primer trabajo consistió en la elaboración y aplicación de una unidad didáctica que relaciona las matemáticas, la física y la música, a través de mediadores tecnológicos. En esta propuesta, entrelaza las relaciones conceptuales entre los números fraccionarios y los elementos rítmicos en el contexto de la música, rescatando como tema importante la noción del tiempo, el espacio y su medida, ya que permite establecer una relación útil para

comprender el mundo de las fracciones. Inclina su interés en ver la fracción como medida; como una secuencia de actividades ordenadas e interconectadas entre sonido, tiempo, unidad de medida y estructura modular.

Su proyecto contiene siete módulos que se usaron para desarrollar una prueba piloto en una determinada población de educación básica y contienen una serie de trabajos o talleres que le permiten al docente despertar la creatividad de sus estudiantes y al mismo tiempo, incorporar en su aprendizaje las fracciones de una manera novedosa, a través de un trabajo participativo que promueve la discusión y el intercambio de ideas.

Adicionalmente, en su segundo trabajo, defiende que la disertación de campo rítmico ofrece al estudiante un acercamiento a la noción del tiempo desde las perspectivas de la medida del tiempo físico y la medida del tiempo musical estructurado por los números fraccionarios. De esta manera permite a los estudiantes la construcción de procesos cognitivos, de nociones de unidad, equipartición, operaciones y relaciones de orden en el tratamiento de los números fraccionarios. Para ello rediseña su propuesta didáctica e interdisciplinaria teniendo en cuenta los resultados de la aplicación realizada en su primer trabajo. En esta propone ejercicios con representación de sonidos y silencios para indagar sobre la noción de equipartición que los estudiantes tienen en espacios continuos y las estrategias que usan para hacer una partición de una figura geométrica.

En sus investigaciones demostró, entre varias cosas; que los estudiantes interpretaban la fracción como una serie de particiones sobre un objeto virtual o físico con efectos visuales y auditivos donde aplicaban la noción de equipartición con significado en la medida del tiempo en la construcción de compases. También que las experiencias rítmicas aportan a los estudiantes un contexto real y próximo a ellos donde pueden encontrar significados de algunas nociones de la matemática escolar. Resaltó la influencia de los artefactos computacionales en la cognición de los estudiantes. Además, recordó que los estudiantes necesitan involucrarse en experiencias variadas que los conduzcan a procesos de comprobación y argumentación, de tal forma que den cuenta por sus propios medios de la naturaleza de los conceptos estudiados.

Otro aporte importante a esta propuesta de investigación la realizan Conde, A, Parada,

S y Liern, V (2016) quienes reconocen la dificultad que causa el abordar este tema en la escuela tanto a profesores como a estudiantes, y afirman que no es un secreto que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es un proceso complejo. Además, resaltan la importancia de los resultados cognitivos que se pueden dar al relacionar las matemáticas y más específicamente las fracciones, con la música. Aquí se comparten una serie de actividades con las cuales se obtienen resultados o productos significativos que permiten promover en los niños experiencias sensoriales que favorecen la construcción de nociones matemáticas. El tiempo y el sonido se convierten en los objetos comunes de estudio que hacen posible un adecuado acoplamiento entre ambas disciplinas.

Las actividades planteadas en la propuesta de los autores fueron aplicadas en diversos programas de formación de profesores en México y Francia, partiendo de las experiencias de los estudiantes en el espacio-tiempo musical y enfocadas desde tres categorías referentes a la unidad relativa, relación parte-parte y equipartición, nociones que han sido consideradas fundamentales para el estudio de las fracciones en la escuela.

En tanto, el objetivo primordial de los investigadores es ofrecer a los profesores elementos teóricos y didácticos para el estudio de las fracciones en contextos interdisciplinarios, en donde no es necesario tener un conocimiento profundo en las disciplinas mencionadas, sino enlazar sus creencias y concepciones para implementar en sus clases nuevas formas de aproximación al estudio del tema bajo una mirada que tiene cuatro perspectivas: contexto, percepción natural, artefactos computacionales y adaptación curricular, y que a la vez permiten que el contexto musical se convierta en un mecanismo cognitivo para el aprendizaje de las fracciones con base en su estructura métrica (en la métrica musical existen ciertas reglas temporales que se deben cumplir independientemente del intérprete y de lo contrario surgen consecuencias acústicas que nos señalan el cumplimiento o no de las reglas temporales) implementando así, a diferencia de la educación tradicional, nuevas herramientas en el aula para el aprendizaje de las fracciones.

Desde Pitágoras (siglo V a.C) a Garnerd (1997) se han hecho aportaciones que han servido de base para que estos investigadores afirmen que la música está ligada al aprendizaje cognitivo, en particular en el ámbito de la lógica, el razonamiento espacial y el razonamiento abstracto.

Partiendo de un campo cognitivo Conde (2013) define la trayectoria de la noción de tiempo y su unidad relativa en estudiantes de sexto grado de primaria de una escuela oficial de la Ciudad de México. En esta trayectoria los estudiantes circulan desde su percepción como estímulo inicial y refinamiento de la misma, hasta sus significados y usos. En esta trayectoria los estudiantes transitan por los niveles de: identificación, categorización, asociación y significación. Precisamente, allí se puede observar cómo el concepto de equipartición, - elemento importante en esta propuesta de investigación- surge en el nivel asociación.

Continuando con la idea anterior de equipartición, en el presente estudio se considera pertinente retomar el punto de vista de Naik y Subramaniam (2008) quienes afirman que en situaciones en las que el conteo se utiliza para llegar a la cardinalidad de un grupo concreto, el tamaño de cada unidad puede ser ignorado. Partiendo de esa realidad, en este trabajo se pretende proporcionar los medios para que el estudiante encuentre el significado y la necesidad de aplicar una equipartición, dado que en contextos de medición el tamaño de la unidad es indispensable.

A modo de reflexión y teniendo como base las investigaciones mencionadas, se evidencia (en la opinión de los autores) que el universo académico de la didáctica de las matemáticas no cuenta con una cantidad considerable de propuestas interdisciplinarias para la enseñanza de las fracciones, lo que no ocurre con las iniciativas de trabajar el tema a través de particiones, las diferentes aplicaciones desde el planteamiento de problemas, la formación de docentes antes de abordar la temática con los estudiantes, entre otros. En este contexto, la intención de relacionar las matemáticas y la música representa un acierto y una necesidad para el acercamiento de espacios de aplicación y comprensión para los estudiantes, reto al que las nuevas generaciones de maestros deben responder.

3. Revisión de materiales educativos

Los libros de texto o libros guía son una herramienta pedagógica y didáctica que ha acompañado la labor educativa desde hace mucho tiempo, facilitando en cierta medida el trabajo del docente, pues le da una pauta a seguir en el desarrollo del currículo. El contexto de la Educación Matemática no es ajeno a esta realidad, pues son numerosas las editoriales o las iniciativas gubernamentales desde la creación de grupos académicos de diseño curricular, que se encargan de adaptar los conceptos y procesos matemáticos al aula escolar, para que el conocimiento de esta ciencia pueda ser abordado o interiorizado por los estudiantes de una manera dirigida y progresiva.

Los siguientes materiales educativos fueron consultados con el fin de observar la forma como se aborda el concepto de equipartición de los números fraccionarios, en cuanto al tipo de actividades que proponen y la respuesta de los estudiantes a los mismos.

Se aclara que no se trata de una revisión detallada de cada una de las actividades para cada grado, en todos los módulos existentes, sino que se han tomado los elementos que corresponden a la vinculación de la equipartición en la etapa introductoria de los significados de fracción, de acuerdo a los grados de los estudiantes con los que se desarrolla este estudio.

3.1 Guías de aprendizaje cooperativo de matemáticas- grados 3º, 4º y 5º

Las guías de aprendizaje cooperativo fueron creadas por un equipo de trabajo de la Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente (FEN), elaborada de acuerdo con el diseño metodológico y bajo el plan de trabajo de la FEN, con el fin de fortalecer los procesos formativos de aquellas instituciones que cuentan con modelos educativos flexibles y que siguen los principios de la pedagogía activa Escuela Nueva. La última edición de estas guías fue publicada por Botero, Guevara y Sierra (2013). Para la gobernación de Antioquia, este aporte fue visto como un recurso pedagógico y didáctico de alta calidad que le permite al maestro cualificar sus prácticas y fortalecer las comunidades académicas que ya está

constituidas

Con la implementación de este material en la zona rural, se ofrecen metodologías, estrategias y contenidos que les permite a los estudiantes la construcción de conocimientos, el desarrollo de competencias, habilidades y capacidades matemáticas.

Las guías de aprendizaje cooperativo, en este caso enfocados en las de matemáticas, están compuestas por una red de alcances y secuencias donde se muestra la estructura y secuencia lógica de cuatro unidades (Botero et al, 2013). De acuerdo a lo anterior y aunque este modelo es flexible porque el estudiante puede ser promovido en cualquier época del año, se espera que alcance unas metas en un tiempo estipulado, en este caso que logre el desarrollo de una unidad en cada periodo académico.

Esta secuencia muestra la relación existente entre los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los desempeños, los conceptos y procedimientos y los recursos didácticos (Botero et al, 2013).

Estas guías están divididas en unidades y guías para cada tema, cada unidad tiene cinco guías y, al finalizarlas, hay una evaluación que pretende valorar cuánto han avanzado en los aprendizajes los estudiantes. Una estrategia metodológica fundamental para el desarrollo de las actividades que se realizan con estas guías son los CRA (Centros de Recursos de Aprendizaje) rincones didácticos donde el estudiante puede encontrar aplicativos, profundizar conceptos o afianzar habilidades del área ya que se encuentran una cantidad de elementos o herramientas didácticas que hacen el aprendizaje más práctico y pedagógico.

Las actividades propuestas en estas guías permiten aprender haciendo, aprender a través del diálogo, la interacción, el trabajo en equipo y cooperativo con los compañeros y la orientación del profesor (Botero et al, 2013). Así construyen sus aprendizajes con los otros, aprenden a ser y hacer. De esta manera el docente encuentra que es necesario organizar a los estudiantes en pequeños grupos; promover el aprendizaje cooperativo y desarrollar estrategias flexibles y personalizadas. Es así como esta estrategia de aprendizaje está diseñada especialmente para que la adquisición de conocimientos se dé de manera autónoma y para que

exista trabajo cooperativo.

La principal meta con el uso de este material, es que el estudiante esté en capacidad de calcular, comparar, observar, clasificar, medir, resolver y plantear problemas, analizar, organizar e interpretar información, pero sobre todo que valore la utilidad de las matemáticas en todos los aspectos de la vida de los seres humanos (Botero et al, 2013).

3.1.1 Estructura de las guías de aprendizaje cooperativo

Las guías presentan la siguiente estructura:

- Actividades básicas: Es el momento en el que se plantean preguntas que indagan sobre los conocimientos previos que el estudiante tiene del tema.

- Actividades de práctica: Aquí se presentan los conceptos sobre el tema y el estudiante debe desarrollar diferentes actividades que le ayudan a comprender mejor la temática.

- Actividades de aplicación: En este apartado se proponen las tareas para que la familia acompañe al estudiante en su desarrollo.

Las temáticas desarrolladas en la guía de aprendizaje cooperativo del grado 3° y que se relacionan con la equipartición de fracciones (tema de interés en esta investigación) aparecen finalizando la unidad 3, en la guía 14 desde la página 111 hasta la 118; estas son:

- ¿Qué es una fracción?
- Clases de fracciones.
- Representación gráfica de las fracciones.

En el grado 4° aparecen las fracciones en la unidad 2 a partir de la guía 7 hasta la 10, página 65 a 83. Allí hay muchas actividades, pero el estudio se enfoca en aquellas relacionadas con la equipartición en las siguientes temáticas:

- Fracciones iguales a la unidad.
- Medir usando fracciones

3.1.2 Guías de aprendizaje grado 3°

La cartilla de matemáticas del grado 3° inicia la enseñanza de las fracciones finalizando la unidad 3, en la guía 14, página 111. A continuación, se da una muestra de algunas actividades que realizan los estudiantes.

Actividad 1

En la guía de aprendizaje se les propone a los estudiantes que desarrollen el ejercicio de la Imagen 1. En el grado 3° hay siete estudiantes. Se propone que realicen ejercicios en equipos que se identifican aquí como: equipo 1, equipo 2, equipo 3, equipo 4. Al iniciar esta guía, la educadora ha hecho una explicación del tema con dos ejemplos en el tablero.

En el cuaderno, representamos en fracciones las partes que comieron Nicolás, Paula, Eduardo, Isabela y Federico. Me guío por el ejemplo:

Nicolás comió	$\frac{2}{4}$	de la naranja
Paula comió	—	del banano
Eduardo comió	—	de la papaya
Isabela comió	—	de la manzana
Federico comió	—	de la piña

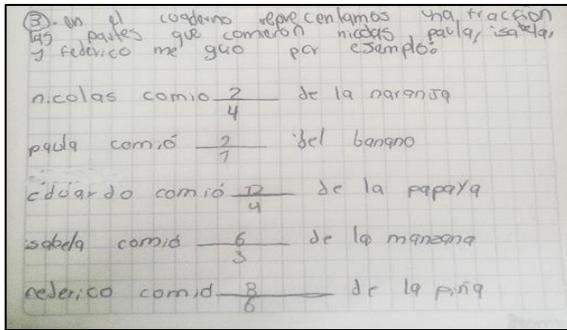
Imagen 1, Representación de fracciones, FEN (2013, p.113)

Al respecto el equipo 1 propone la solución que se muestra en la Imagen 2a, apoyada por la siguiente explicación:

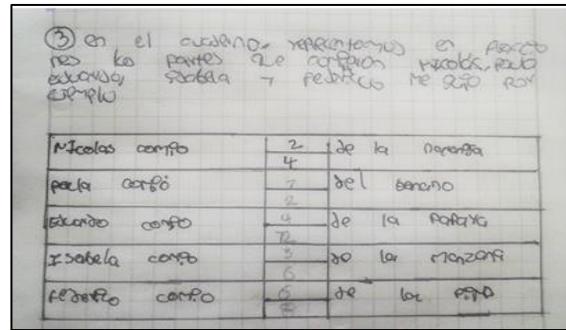
Nosotros pensamos que las frutas teníamos que dividir las como nos dice el profesor, y que arriba en el numerador iban las partes en que se dividió cada fruta y debajo en el denominador las partes que cada niño escoge comer.

Entre tanto el equipo 2, propone la solución de la Imagen 2b y comentan lo siguiente:

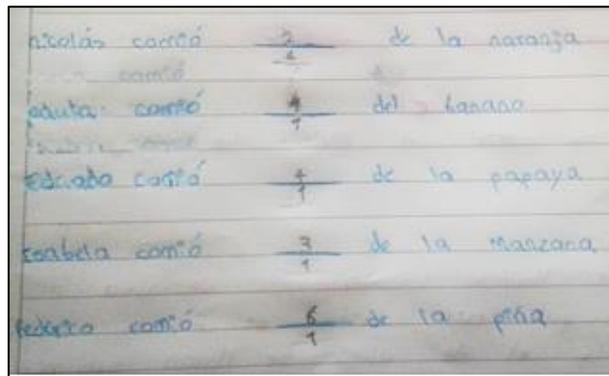
Yo entendí que el número de arriba eran las partes que se iban a comer y que el número de abajo eran las partes en las que se había dividido cada fruta.



a



b



c

Imagen 2, Ejercicio de representación de fracciones, tomada de trabajo de campo, grado 3°, 2016

El equipo 3, argumenta lo siguiente sobre su solución que se muestra en la Ilustración 2c

Yo pensé que el numerador, que es el número de arriba, era las partes de la fruta que se había comido cada uno y que el denominador que es el número que está abajo, era la fruta entera que cada uno había llevado.

El equipo 4, respondió que no habían entendido las instrucciones y que por esta razón no tenían ninguna representación en sus cuadernos. Por lo tanto, no se tiene una imagen objeto de investigación.

Teniendo en cuenta las anteriores situaciones, Pazos (2009) afirma que algunas prácticas que realizan los maestros en el aula al enseñar las fracciones, se pueden convertir en obstáculo didáctico, dado que los estudiantes adquieren habilidades para la resolución de problemas, pero no se está asegurando la comprensión de este concepto.

Se puede apreciar de acuerdo a las soluciones y sus respectivos argumentos de los equipos, que su comprensión de los ejemplos, ejercicios y explicaciones de la profesora, no

fueron entendidos por los estudiantes, en consecuencia, esto ocasionó el deficiente desarrollo de la actividad propuesta. Sólo el equipo 2 desarrollo el ejercicio como se indicaba según el ejemplo que había en el cuadro, por esta razón fue necesario hacer nuevas intervenciones y se completó este ejercicio en el tablero con la colaboración del equipo 2.

Actividad 2

Para realizar este ejercicio se formaron dos equipos (equipo 5 y equipo 6) y de ambos se sacó una muestra, como se aprecia a continuación.

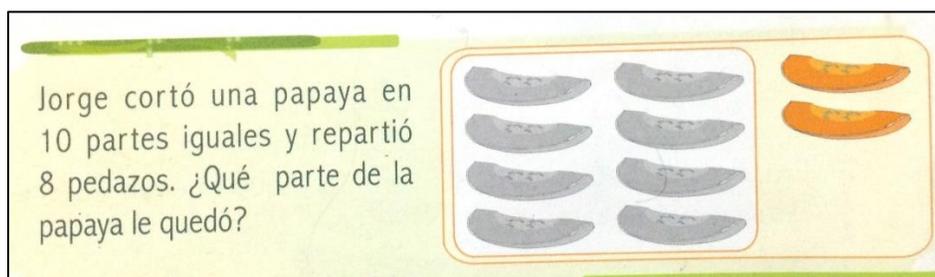


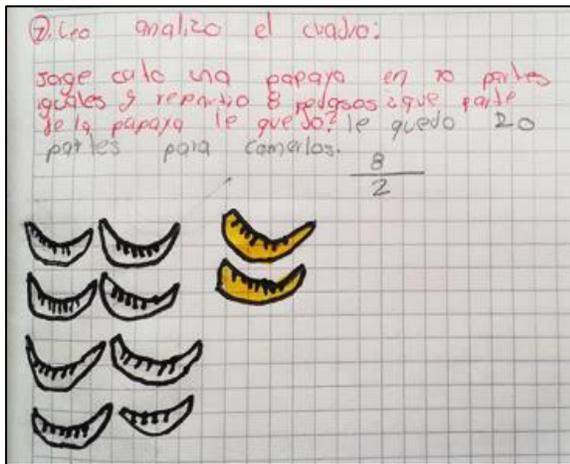
Imagen 3, Ejercicio de equipartición de una fruta, FEN (2013, p.116)

El equipo 5 desarrolló el ejercicio como se muestra en la Imagen 4a, y expresan lo siguiente:

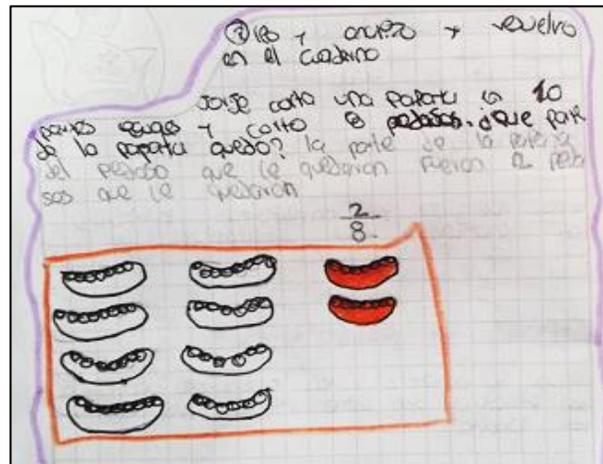
Pusimos el 8 en el numerador porque esas fueron las partes de la papaya que se repartió y el 2 en el denominador porque fueron las partes que le quedaron a Jorge.

El equipo 6 explica la solución de la actividad que se muestra en la Ilustración 4b:

Pusimos el 2 en el numerador porque esas fueron las partes que le quedaron y eso era lo que nos preguntaban en el ejercicio, y el 8 en el denominador porque en el enunciado decía que repartió 8 pedazos.



a



b

Imagen 4, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 3°, 2016

De acuerdo a las respuestas que dieron ambos equipos, se puede decir que los niños no tuvieron en cuenta el total de partes en que se dividió la fruta y centraron el ejercicio en las partes que se repartieron y las que sobraron.

Actividad 3

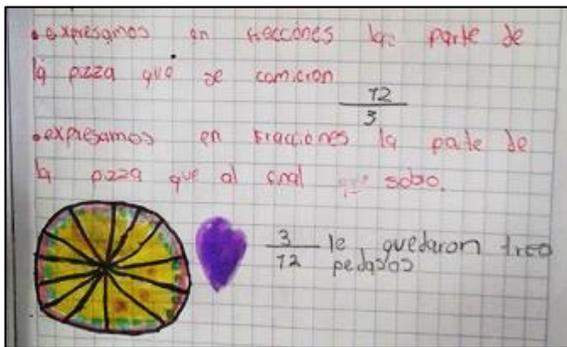
Se hace un tercer análisis a partir de la interpretación del siguiente caso

Claudia preparó una deliciosa pizza. La dividió en 12 partes iguales para compartirla con sus amigos y amigas. Cada uno comió una parte y al final sobraron tres pedazos.

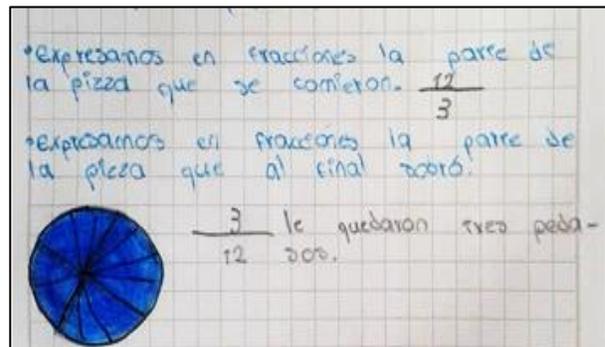
- Expresamos en fracciones la parte de la pizza que se comieron.
- Expresamos en fracciones la parte de la pizza que al final sobró.

Imagen 5, Representación de fracciones y equipartición, FEN (2013, p.116)

El equipo 7 resuelve el ejercicio como se muestra en las dos imágenes a continuación:



a



b

Imagen 6, Representación de fracciones y equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 3°, 2016

Los estudiantes del equipo 7 expresan lo que hicieron así:

En el primer punto del problema pensamos que en el numerador iba el 12 porque son las partes en que se dividió la pizza y en el denominador el 3, porque representa las partes que habían quedado. En el segundo punto del ejercicio, pusimos el 3 en el numerador porque se debe poner ahí las partes que sobraron y en el denominador el 12 porque son las partes en que fue dividida la pizza.

Otra solución es la presentada por el equipo 8 (Imagen 7), quienes la sustentan así:

En el primer punto del ejercicio, pensamos que en el numerador se debía poner las partes de la pizza que sobraron, o sea el 3 y en el denominador el 12 porque son las partes en que fue dividida la pizza. En el otro punto del ejercicio ubicamos el 3 en el numerador porque representa las partes que sobraron y en el denominador el 9 porque fueron las partes que se repartieron.

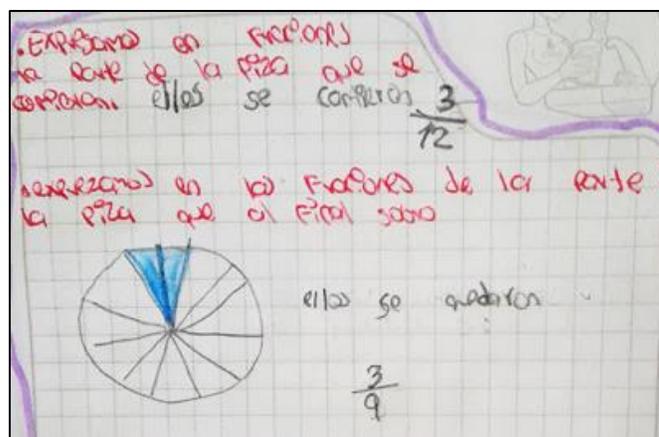


Imagen 7, Representación de fracciones y equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 3°, 2016

De acuerdo a las respuestas que dieron los estudiantes, se puede decir que no ven la necesidad de hacer equiparticiones como se puede ver en las gráficas. No se le da importancia al tamaño de las partes, aun cuando han recibido instrucciones sobre igualdad. Por otro lado, el resolver este ejercicio se vuelve algo mecánico, por lo que el estudiante le presta más atención a la ubicación de los números en la fracción que a la interpretación de los enunciados y la comprensión del ejercicio. Este resultado, en términos de Pazos (2009) se debe a que los estudiantes no están teniendo en cuenta la obligatoria equidad de las partes, pues se limitan a contar y no profundizan en cómo debe ser cada una y cuanto es preciso representar.

3.1.3 Guías de aprendizaje grado 4°

A continuación, se analizan algunas de las actividades que realizan los estudiantes del grado 4° cuando se va a abordar el tema de las fracciones.

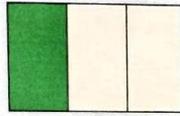
Actividad 1

Para la primera actividad, podemos observar en la imagen, cómo a los estudiantes se les pide colorear en cada figura, la fracción del área que se indica. Podemos afirmar que hay equipartición porque las figuras están divididas en partes iguales, pero no ha sido el niño quien se ha hecho responsable de hacer estas particiones, el material de trabajo se lo está mostrando.

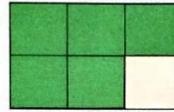
10. Leemos con atención la siguiente información:

Las fracciones que tienen el numerador menor que el denominador se llaman fracciones propias. Ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$.

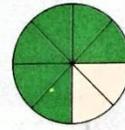
Las fracciones propias son menores que la unidad porque corresponden a un número de partes inferior al todo. Observemos estos ejemplos:



$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{5}{6}$$



$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Las fracciones que tienen el numerador mayor que el denominador se llaman fracciones impropias. Ejemplo: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{3}$.

Las fracciones impropias corresponden a un número de partes mayor que la unidad. Ejemplo:

$$\frac{6}{4} = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline \text{verde} & \text{verde} \\ \hline \text{verde} & \text{verde} \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{verde} \\ \hline \text{blanco} \\ \hline \end{array} \right]$$

11. Escribimos el texto del recuadro anterior en el cuaderno.

12. Tomamos dos hojas cuadradas y seguimos las indicaciones:

- Doblamos una de las hojas, hasta tener cuatro partes iguales.
- Coloreamos una hoja completa y dos partes de la otra hoja.
- De acuerdo con la actividad que realizamos, dialogamos:
 - ¿Qué fracción representan las partes coloreadas de las dos hojas?
 - ¿Cuántas hojas se necesitan para representar $\frac{6}{4}$?
 - ¿Por qué el numerador es mayor que el denominador?

Imagen 8, Fracciones propias, impropias y equipartición, FEN (2013 p. 69)

Se puede observar en la Imagen 9, cómo los estudiantes colorean esta representación de fracciones a partir del uso del material concreto, en este caso las hojas de bloc. La docente los orienta para que sigan las instrucciones que les indica la guía en los literales a y b.



Imagen 9, Ejercicio de comprensión e interpretación del concepto, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Luego los estudiantes pasan al desarrollo del punto c, en el cual deben responder a tres preguntas relacionadas con la actividad realizada en el ejercicio anterior. En la imagen 10, se puede apreciar que no se logra el objetivo trazado para la actividad, pues algunas respuestas ofrecidas por ellos indican que no hay una comprensión adecuada del tema. En términos de Pazos (2009) con esta actividad se estaría llevando a que el estudiante limite el ejercicio al conteo de partes y no se centre en la relación entre la parte y el todo.

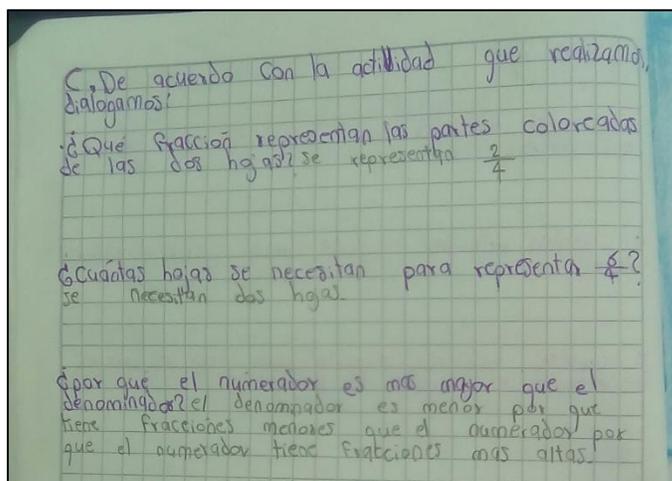


Imagen 10, Ejercicio de comprensión e interpretación del concepto, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Actividad 2

En una segunda actividad, se les explica a los estudiantes, que las fracciones se pueden

representar mediante rectas numéricas y que se debe tener en cuenta algunos parámetros como: dividir cada segmento que se toma como unidad en tantas partes como indica el denominador y desplazarse o tener en cuenta las partes que indica el numerador.

Después de haber expuesto el tema y mostrar algunos ejemplos en el tablero, se les pide a los estudiantes que solucionen el siguiente problema de la guía de aprendizaje (Imagen 11):

• El recorrido que realizan tres hormigas equivale a una distancia de un metro.
La primera hormiga ha recorrido $\frac{2}{4}$ de metro, la segunda $\frac{1}{5}$ de metro y la tercera ha recorrido $\frac{3}{10}$ de metro.

- Realizamos la suma de fracciones heterogéneas y verificamos si las tres hormigas han recorrido en total un metro de distancia.
- Representamos en la recta numérica las fracciones recorridas por cada hormiga, una a continuación de la otra.
- Averiguamos: ¿Qué distancia en centímetros recorrió cada hormiga?

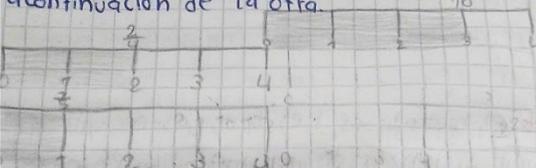


Imagen 11, Representación de fracciones en la recta numérica, FEN (2013, p.76)

Podemos observar en la Imagen 12, una muestra de cómo representaron algunos estudiantes esta situación en la recta.

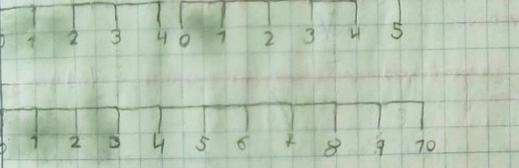
10 4 6

• Representamos en la recta numérica las fracciones recorridas por cada hormiga una a continuación de la otra.



• Averiguamos ¿qué distancia en centímetros recorrió cada hormiga?

• Representamos en la recta numérica las fracciones recorridas por cada hormiga una a continuación de la otra.



• Averiguamos ¿qué distancia en centímetros recorrió cada hormiga? La primera hormiga recorrió 50 cm, la segunda hormiga recorrió 30 cm, la tercera hormiga recorrió 30 cm.

Imagen 12, Representación de fracciones en la recta numérica, tomadas de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Se puede notar que los estudiantes no comprendieron el concepto que se les ha enseñado ya que quisieron representar solamente los números indicados en el numerador, teniendo en cuenta el denominador de la primera fracción, en las tres rectas. Además, no consideran que todas las fracciones que debían sombrear corresponden a la misma unidad a la cual se le debía realizar una equipartición en la distribución de cada segmento en la recta, lo cual los conduce a pensar que están tomando varias unidades divididas en cuatro partes. Aquí no establecieron una relación del significado de fracción como medida, sino que supeditaron el procedimiento a la concepción parte todo. Pazos (2009) explica que este tipo de situaciones se resuelve por simple conteo, que se requiere de actividades donde el estudiante pueda establecer que cada una de las partes en las que están divididas las unidades son equivalentes.

3.1.4 Guías de aprendizaje grado 5°

La guía de aprendizaje cooperativo de matemáticas del grado 5°, propone la siguiente actividad:

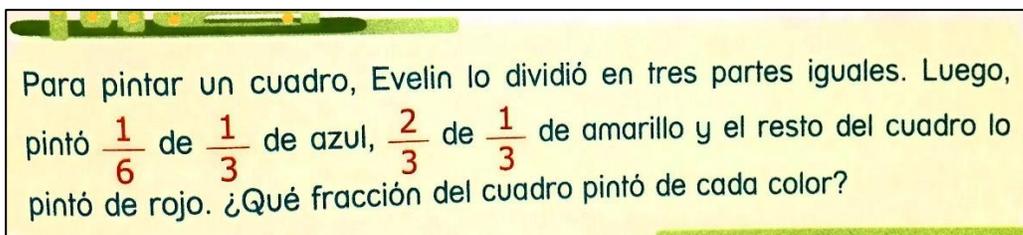


Imagen 13, ejercicio de equipartición de un cuadro, FEN, (2013, p.83)

En este grado se cuenta con tres estudiantes, a los que llamaremos estudiante A, estudiante B, y estudiante C. El grupo ha recibido instrucciones de la docente sobre este tema.

Estudiante A

La Imagen 14 da muestra de lo que realizó la estudiante A.

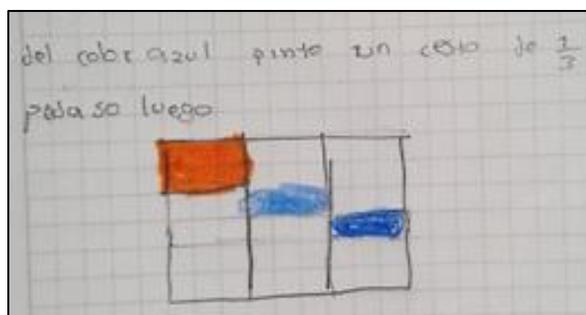


Imagen 14, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 5° 2016

Se puede observar que la estudiante divide un cuadro en tres partes, el ejercicio le pide colorear $\frac{1}{6}$ de uno de ellos, ella toma tres cuadrados pequeños y no se preocupa o no ve la necesidad de hacer las particiones en el primer tercio del cuadro, lo cual es correcto (Es posible que algunos docentes interpreten la actividad relacionando cada instrucción con uno de los tercios del cuadro, de tal forma que le azul quede en el primero de izquierda a derecha, el amarillo en el centro y el tercero de rojo, lo cual estaría mal, porque cada estudiante tiene la opción de elegir la forma en la que desea hacer su representación). Encontramos errores en la interpretación del área de amarillo y rojo, ya que ninguna de las dos aparece; el estudiante coloreó una parte de naranja, pero no aclaró a cuál de los colores anteriores estaba reemplazando (si se tratase del amarillo, estaría en lo correcto, pero si fuese el caso del rojo, habría un error). Valga decir finalmente, que tanto este estudiante como los dos próximos obviaron la condición de colorear de rojo el resto del cuadro, lo cual no dejaría ningún área en blanco. Claramente, el estudiante no maneja por completo la idea de fracción de una fracción, además de la idea de equipartición a la hora de discriminar las áreas que serán coloreadas según una u otra instrucción.

Estudiante B

Se puede observar que la estudiante B, hizo una interpretación similar a la estudiante A, en los primeros dos tercios, pero en el último tercio pinta todo.

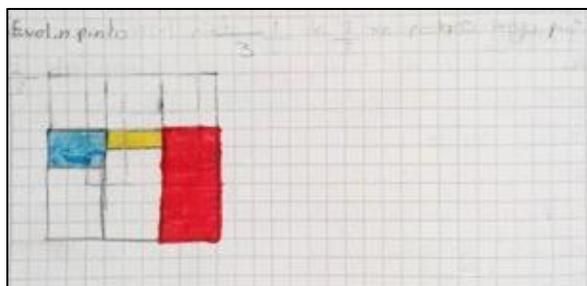


Imagen 15, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 5°, 2016

En este ejercicio es claro determinar cómo ha creado en ella un grado de dificultad que hasta le cuesta escribir una respuesta que explique lo que ha realizado. La estudiante sólo relaciona el número que está en el denominador con la cantidad de cuadritos que tiene cada parte y al igual que el estudiante C (imagen siguiente) no relaciona cada parte con el cuadro.

Estudiante C

Se puede considerar que el estudiante C, es quien más se aproxima a la solución del ejercicio, esto desde el punto de vista de que considera cada tercio como una figura independiente y no se tiene todo el cuadro como unidad de medida.

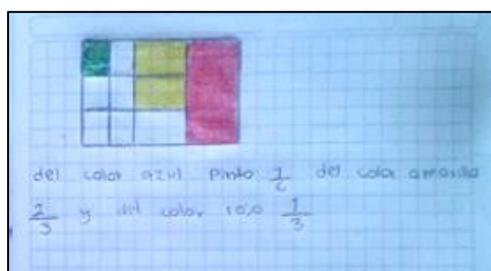


Imagen 16, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 5°, 2016

En las imágenes observadas, se dan evidencias de que los tres estudiantes interpretaron el ejercicio de manera diferente, aunque pertenecen a un mismo grado y comparten la misma mesa de trabajo. Este grupo forma una comunidad, que, en su búsqueda del conocimiento mediante el trabajo cooperativo, colaborativo y el acompañamiento del profesor buscan alcanzar una meta en común. Para ser miembro de una comunidad, según Radford (2006), los

estudiantes son entusiasmados a compartir los objetivos de la misma, interactuar en el salón de clases, comunicar a los otros de forma cooperativa y armónica sus pensamientos y aprendizajes. Estas formas de actuar serían indicadores de formas de ser en matemáticas y de saber matemáticas.

De acuerdo a lo anterior, se hace importante la interacción y la diferencia en los resultados que produce cada actividad que realizan los estudiantes y que esto puede servir como un puente para construir conocimiento. Es así, como la ausencia del concepto de equipartición que tienen los estudiantes se hace cada vez más notoria, al igual que el grado de confusiones que se le forman, en el momento de reconocer cuales y cuantas partes pueden determinar cierta área y la relación que existe entre ellas y la unidad. De hecho, se puede apreciar que, según las imágenes que se han tomado como muestra, si al estudiante no se le da la figura ya dividida en partes iguales, difícilmente llegará a solucionar el ejercicio tal y como se espera, porque no se tiene inmerso dentro de su proceso de enseñanza-aprendizaje el concepto de fracción dentro de otra fracción.

3.2 Material de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN)

Con la intención de promover el desarrollo de competencias en los estudiantes y “fomentar el aprendizaje de conceptos y el uso de procesos matemáticos, en vez de un aprendizaje de tipo memorístico basado en técnicas de cálculo que omiten la comprensión del sentido de los procedimientos” (MEN, 2015, p.5), el Ministerio de Educación Nacional, en conjunto con la Universidad de Los Andes y la organización PREST (Pôle régional pour l’enseignement de la science et de la technologie) de Quebec, Canadá, adaptaron una serie de situaciones problema para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria en Colombia. Para cada grado fueron creadas cinco secuencias didácticas que procuran responder a las necesidades de los estudiantes y a las metas planteadas en los estándares básicos de

competencias (EBC) y los derechos básicos de aprendizaje.

Cada secuencia didáctica está dividida en cuatro etapas: Comprensión, descontextualización, resolución de la situación problema y reflexión. La segunda etapa, descontextualización, se divide en varios centros de aprendizaje que buscan que los estudiantes realicen actividades dirigidas a afianzar y construir conceptos, así como desarrollar procesos, comprender y practicar procedimientos necesarios para resolver la situación problema (MEN, 2015, p.7); es aquí donde se sitúa el tratamiento de los fraccionarios (Módulo C del grado tercero y módulo B del grado cuarto) y de donde se extraerán las actividades que serán analizadas.

Para iniciar, se resalta la virtud de los centros de aprendizaje en su estructuración de tal forma que los estudiantes interactúan con el objeto matemático desde representaciones con material concreto inicialmente, luego de tipo pictórico, para llegar a una representación simbólica.

Estructura de la secuencia didáctica presentada en la guía:



Imagen 17, Esquema general de la secuencia didáctica del material de matemáticas MEN (2015)

3.2.1 Los objetivos de la secuencia didáctica

- Asociar una fracción a una parte de un todo (partes isométricas o partes equivalentes) o a un grupo de objetos y viceversa.
- Reconocer los diferentes significados de la fracción (compartir, dividir, relación entre

dos cosas)

3.2.2 Derechos básicos de aprendizaje

Para el interés del presente trabajo, se encontró relación con el siguiente derecho básico de aprendizaje:

Comprende el uso de las fracciones para describir situaciones en las que la unidad se divide en partes iguales (Grado 3°).

3.2.3 Centro de Aprendizaje 1

Tome una imagen de una barra de chocolate y pregunte a los estudiantes cómo hacer para compartirla entre 8 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad.

Después de debatirlo con los estudiantes, es necesario concluir que se debe dividir o cortar la barra de chocolate en 8 partes de tamaños iguales.

Pregunte la cantidad de chocolate que recibirá cada persona.

Respuesta: $\frac{1}{8}$ parte o también 1 parte de 8 partes.

Vuelva al primer ejemplo en el cual cada amigo recibe una parte de las ocho partes totales de la barra de chocolate. La cantidad que cada uno recibe es representada por el numerador, y la cantidad total de las partes es representada por el denominador.

$\frac{1}{8}$ $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$



Imagen 18, Ejercicio de equipartición de una barra de chocolate MEN (2015, p.32)

El primer ejercicio que se considera relevante es presentado en la imagen anterior, en ella se pide que haya un proceso de reparto en el que las partes deben tener la misma cantidad, un hecho posible de encontrar en la cotidianidad; sin embargo, el medidor escogido es una representación gráfica de una chocolatina. En este ejercicio los estudiantes difícilmente podrán encontrar una forma de verificación de la igualdad entre las partes, ya que no hay un mecanismo que permita hallar una consecuencia de realizar una inadecuada partición, dirigiendo a los estudiantes a la concepción de la fracción como fracturador. Al respecto, Freudenthal (1983) afirmó que estas situaciones son “de una concreción convincente y fascinante” (p.147), pero también “restringidas” (p. 144); para el autor, los estudiantes podrían

llegar a la idea de que para que algo se conciba como fracción, primero debió realizarse una transformación física e irreversible de un objeto, lo cual no siempre se cumple. Además, en palabras de Cortina, Zuñiga y Visnovska (2013):

Orientar a los estudiantes a asociar las fracciones con acciones que transforman los objetos de manera irreversible podría interferir con la posibilidad de que, a la larga, comprendieran las relaciones recíprocas (es decir, que 1 es cinco veces el tamaño de $1/5$). También podría llevar a los educandos a que concibieran las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos (p. 12).

Por otro lado, de una forma directa y sin la interacción con experiencias adicionales que permitan observar las demás connotaciones de la fracción, se concluye la actividad con una representación simbólica de la situación, en la que referencian las partes numerador y denominador desde una perspectiva de conteo que se desarrollará en el análisis del ejercicio expuesto a continuación.

Actividad 1

En esta tarea de aprendizaje se parte de la definición del denominador como el número de partes iguales en las que dividimos un todo y el numerador como el número de partes (de ese todo) que se toman (colección, objeto, figura, etc.). Al respecto, Conde, Liern y Parada (2016) citan a Naik y Subramaniam (2008) para explicar que, en las situaciones basadas en el conteo para llegar a la fracción representada por un subconjunto, el tamaño de cada unidad puede ser ignorado. Esto debido a que el proceso se basa solo en contar el número de partes sombreadas o seleccionadas y el número de partes totales en las que se dividió el objeto, sin fijarse en la necesidad de que cada parte tenga igual medida.

Ya en lo correspondiente a la actividad 1, como tal, presentan a los estudiantes cinco representaciones, a las cuales deben asignar una fracción que corresponda con una parte sombreada como se señala en la Imagen 19.

1 → **Numerador:** Es el número de partes iguales que se toman.
8 → **Denominador:** Es el número de partes iguales en las que dividimos un todo (colección, objeto, figura, etc.).

¿Qué fracción de la figura o de la colección de objetos representa la parte de color negro en los siguientes ejemplos?

a)  $\frac{1}{4}$

b)  $\frac{3}{5}$

c)  $\frac{1}{3}$

d)  $\frac{1}{2}$

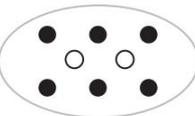
e)  $\frac{6}{8}$

Imagen 19, Ejercicio de representación de fracciones y equipartición, MEN (2015, p.37)

Inicialmente, pueden revisarse los literales a y d, en los cuales se dan rectángulos previamente divididos en partes iguales, con una de esas partes sombreada. Claramente los estudiantes no tendrán dificultad en resolverlo desde un simple conteo, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, sin necesidad de evaluar la equipartición. Al respecto Pazos (2009) expone que este tipo de actividades no priorizan la relación entre la parte y el todo, sino que basta con contar la cantidad de partes y escribirla en el denominador, mientras que la cantidad de partes sombreadas se escribe en el numerador.

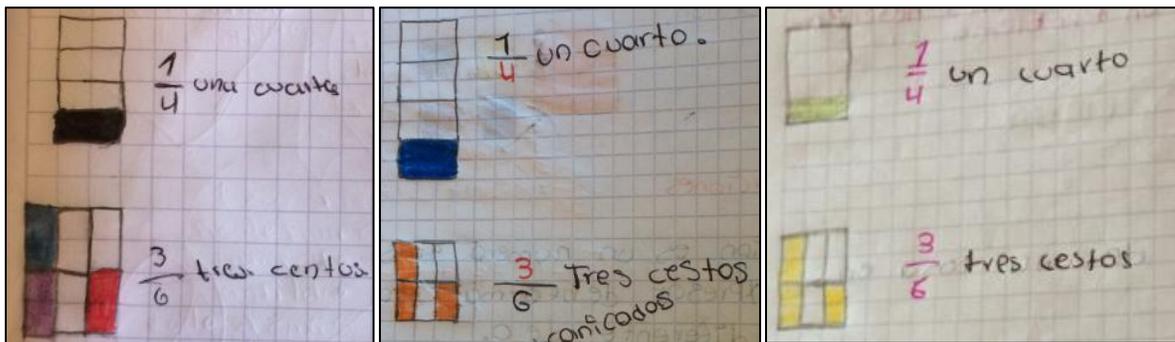


Imagen 20, Ejercicios de representación de fracciones, tomada de trabajo de campo, grado 4º, 2016

La Imagen 20 muestra las respuestas de los estudiantes a la primera parte del ejercicio, con una modificación del literal d, cambiando la figura, pero siguiendo el mismo principio de conteo. Aunque no se presentan particiones estrictamente equitativas, se encuentra que la técnica dada en la definición, resulta efectiva para responder correctamente, sin requerir comprensión del concepto.

En los literales b y e, los estudiantes se enfrentan a una situación completamente diferente a la anterior y a lo que se les ha explicado como introducción a la actividad, ya que estos son casos de trabajo con cantidades discretas, mientras que los literales a, d y e se refieren a un trabajo con cantidades continuas. Ignorar esta diferencia lleva a los maestros a establecer un obstáculo en la comprensión del concepto de fracción (Pazos, 2009), ya que se supone que el trabajo con cantidades continuas es suficiente para adquirir los conocimientos necesarios para trabajar con cantidades concretas, ante lo cual la autora advierte:

Deberíamos valorar la diferencia en el nivel de dificultad entre ambas situaciones y pensar que no es para nada similar pintar la cuarta parte de un rectángulo ya dividido en 4 partes iguales que calcular la cuarta parte de un conjunto (p. 1).

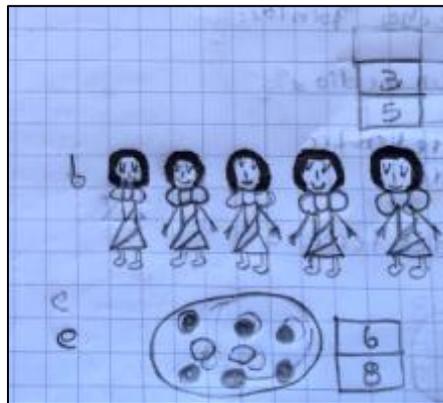


Imagen 21, Ejercicio de equipartición y representación de fracciones, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

La imagen 21 exhibe en el literal b, una respuesta en la que se asigna una fracción sin ningún método de distinción entre los cinco elementos, mientras que en el literal e, se realizó el razonamiento esperado por la guía del docente para la actividad. Sin embargo, al plantear un nuevo ejercicio en el que deberán transferir los aprendizajes, se puede ver que la noción adquirida no fue suficiente para llegar a una comprensión del concepto y, por el contrario, denota confusión en el procedimiento y en la representación de la respuesta.

Actividad 2

Se supone que al plantear un nuevo ejercicio en el que deberán transferir los aprendizajes, se puede ver que la noción adquirida anteriormente no fue suficiente para llegar a una comprensión del concepto y, por el contrario, denota confusión en el procedimiento y en la representación de la respuesta.

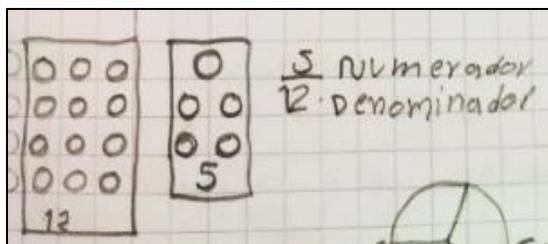


Imagen 22, Ejercicio de representación de fracciones y equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Homólogamente, al utilizar material manipulativo se hallan estas dificultades, agregando ahora un error más: para determinar una fracción de un conjunto suman el numerador con el denominador (Imagen 23).



Imagen 23, Representación de fracciones con material manipulativo, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Finalmente, el literal e) se considera pertinente para un acercamiento al concepto de fracción, ya que presenta una unidad y una parte de ella sombreada, sin ofrecer el número total de particiones, enfrentando al estudiante a “tomar decisiones acerca de cómo deben ser las partes y cuántas es necesario representar” (Pazos, 2009, p. 3). Al enfrentarse a este tipo de ejercicios el estudiante deberá tener claridad sobre la necesaria equidad de las partes, deducir el número de estas en las que se podría dividir la unidad y asignar una fracción que corresponda con la parte o partes representadas inicialmente.

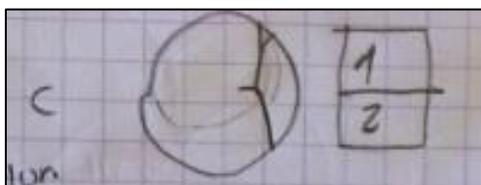


Imagen 24, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Observando la imagen 24, se podría pensar que el estudiante está relacionando el número de cortes con las primeras representaciones que se le enseñaron en los apartados anteriores. De esta forma, interpretaría que, si se ve una gráfica dividida en dos partes, una de ellas será $\frac{1}{2}$; si es en tres partes, una de ellas corresponderá a $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente, dejando de lado la evaluación de la igualdad entre las partes.

Actividad 3

El tercer ejercicio considerado pertinente de observar, tiene como intención acercar el concepto de equipartición a los estudiantes desde la comparación de figuras divididas en varias partes (algunas de igual área y otras que no cumplen esta característica).

Indica cuáles son las figuras que han sido correctamente divididas en partes iguales según su tamaño.

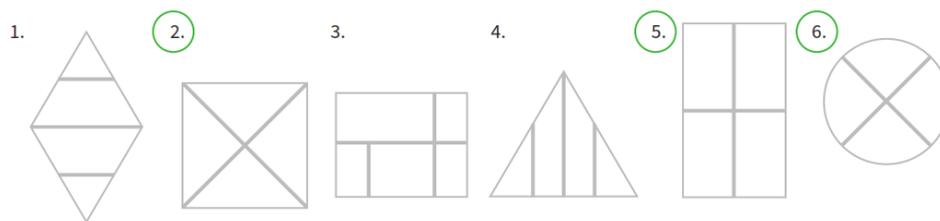


Imagen 25, Ejercicio de identificación de equiparticiones MEN (2015, p.37)

Pero no se ofrece un mecanismo de verificación de la respuesta, todo queda supeditado a la percepción visual de cada quien. Entonces, cuando se tiene como base el libro de texto, se hace aparentemente notable la partición equitativa de las figuras, pero cuando es llevado al cuaderno o se procura una transferencia del concepto a otras figuras, el resultado no siempre corresponde a lo que se procura representar.

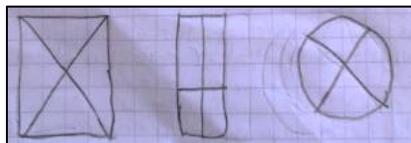


Imagen 26, Ejercicio de equipartición, tomada de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Para el desarrollo del ejercicio la maestra les pidió a los estudiantes que dibujaran solo las figuras que fueron divididas en partes iguales. Evidentemente, tomaron las opciones esperadas, pero sus representaciones no cumplen con el criterio establecido en el enunciado, porque las áreas ocupadas por cada parte, no son iguales a las demás.

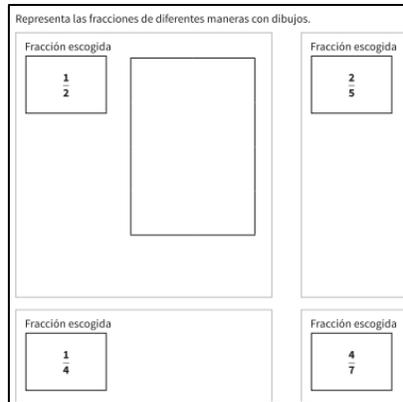


Imagen 27, Ejercicio de representación de fracciones con dibujos MEN, (2015, p.38)

El último ejercicio que se revisará procura reunir los elementos aprendidos en las etapas anteriores, se da la libertad a los estudiantes para que seleccionen sus formas de representación y se piden varias respuestas para la misma fracción. A continuación, se presentan algunas de las producciones de los estudiantes:

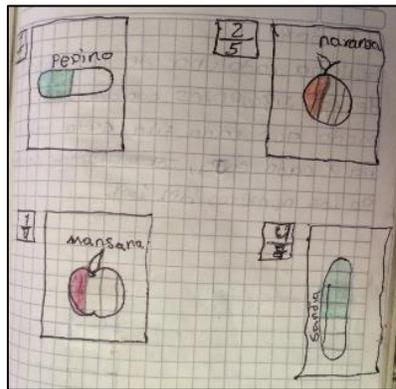


Imagen 28, Ejercicios de equipartición de fracciones, tomadas de trabajo de campo, grado 4°, 2016

Como puede notarse, los estudiantes se hicieron una idea del concepto de fracción dirigido a la relación parte todo, dejando de lado los demás significados estipulados en los objetivos (compartir, dividir, relación entre dos cosas...). Además, para nuestro interés de investigación, se puede observar que se respondió a las orientaciones frente a la definición de numerador y denominador, pero no se ha tenido en cuenta el criterio de equidad de las partes.

4. Marco conceptual

Para el interés de este trabajo, se les da relevancia a las conexiones entre las matemáticas y la música, a partir de las representaciones semióticas como puente dialéctico entre dichas disciplinas. Desde esta perspectiva, se establece un marco conceptual que sirve de soporte para el desarrollo de la propuesta de investigación, centrado en una característica común: los signos de la música pueden ser representaciones de fenómenos sonoros susceptibles de ser descritos a través de las matemáticas (Conde, 2013).

En esta investigación, los signos (musicales y matemáticos) son tomados como objetos reales, imaginarios o intuitivos por medio de los cuales algo adquiere significado para alguien. La caracterización del signo permite comprender objetos involucrados en las relaciones cognitivas entre las matemáticas y la música (Conde 2013). Así mismo, los objetos a los que se hace referencia aquí, pueden ser caracterizados como híbridos compuestos por una naturaleza matemática y otra musical. De tal forma, que se conciben a los objetos matemático-musicales como emergentes de las prácticas humanas que los construyen, caracterizan y los ubican dentro de un sistema. En el sistema temporal-musical, podríamos tratar el tiempo de duración de un sonido como un objeto matemático-musical por su naturaleza sonora y su medida con estructura fraccionaria (Conde 2013).

4.1 Representación de los objetos matemático-musicales

El tratamiento de objetos matemático-musicales demanda formas de representación de dichos objetos. Su caracterización, desde este estudio, se vale de un tratamiento simbólico, sonoro y corporal. De aquí, la aproximación a los objetos matemático-musicales involucran: la representación visual, para la representación del objeto por medio de signos pictóricos. La representación auditiva, para oír y apreciar sonidos y silencios musicales, con base en que las combinaciones de sus duraciones definen patrones rítmicos. Y la representación corporal, para adaptar los movimientos del cuerpo a los sonidos que son escuchados o emitidos a través de instrumentos musicales y la voz.

4.1.1 Representación visual

El sistema de signos musicales y matemáticos se vale de la representación para comunicar los procesos realizados con dichos objetos. Aquí se entiende por representaciones visuales aquellas representaciones pictóricas como diagramas, gráficas, modelos geométricos, animaciones dinámicas virtuales, entre otras, como método para comunicar matemáticas y música.

En el ámbito de las matemáticas De Guzmán (1996) señala que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Como consecuencia, la visualización aparece así, como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático, en particular, la relación espacio-temporal se constituye en un sistema de representación encargado de organizar la duración de los sonidos y silencios en una línea de tiempo de forma escrita.

Se puede inferir entonces, que estas funciones cognitivas posibilitan la producción de imágenes mentales sobre los objetos matemático-musicales representados de forma visual. En esta dirección, Arcavi (1999) entiende la visualización como el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas en la mente, en papel o con herramientas tecnológicas.

4.1.2 Representación auditiva

A diferencia de la actividad matemática, en la música se responde a la naturaleza de evento sonoro, en la cual la representación visual no es la única forma de comunicación y expresión, ya que un músico puede interpretar una melodía sin conocer dicho sistema de escritura.

La representación auditiva, implica el desciframiento (reconocer, discriminar e interpretar) de estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas (McAdams, 1993). Por lo tanto, se apela a la representación mental en forma de memoria auditiva para establecer relaciones y dar sentido a los sonidos percibidos. La memoria auditiva se desarrolla en gran parte por la repetición de estímulos auditivos que se perfeccionan y fortalecen a través de la atención. De

tal manera que oír con atención es escuchar y escuchar música con atención supone descubrir las diferentes cualidades del sonido (intensidad, timbre, altura y duración), que en su conjunto permiten disfrutar del fenómeno musical.

Aunque la cognición auditiva actúa de manera simultánea, los procesos mentales se activan en función de cada cualidad del sonido. Sin entrar en detalle de la función de cada uno de estos elementos, en este estudio se tratan los aspectos que involucran: i) la variación en la duración relacionada la medida de tiempo de las figuras musicales y ii) la interrupción regular, que consiste en aquellos que producen repeticiones de una sucesión de sonidos de igual duración alternados con silencios (Willems, 1993).

4.1.3 Percepción corporal

Las situaciones y movimientos se dan en un espacio y en un tiempo determinado, es así como a través de las nociones espaciales el niño adquiere las ideas de duración e intervalo. A partir de las múltiples experiencias corporales se forman esquemas que el individuo experimenta de forma recurrente. Para Johnson (1987) algunas de estas experiencias comparten rasgos comunes que se abstraen para dar lugar a los esquemas encarnados. Tanto las experiencias como los rasgos comunes entre ellas tienen un origen corporal, ya que surgen y son consecuencia de las experiencias vividas corporalmente.

Para el autor un esquema encarnado, es un patrón recurrente de nuestras interacciones perceptuales y programas motores que dan coherencia y estructura a nuestra experiencia. Por ejemplo, el esquema de verticalidad (arriba, abajo) cuando nos referimos a la frecuencia en la notación musical representadas en el pentagrama o la función correspondiente en el plano cartesiano. El término “patrón” alude a la naturaleza abstracta del esquema, que posee una estructura interna determinada. La “recurrencia” de dichos patrones apela a la necesidad de que existan experiencias repetidas. Dichas experiencias han de ser “interactivas” porque implican relación con el entorno y han de ser “corporales”, ya que se experimentan a través de nuestro cuerpo.

Es preciso aclarar que se tomarán las experiencias corporales rítmicas como casos particulares de las demás experiencias vividas corporalmente. Lamour (1985) estudia el ritmo desde el punto de vista motor atendiendo los siguientes aspectos:

- Periodicidad: son aquellos movimientos o prácticas periódicas en las que se identifica un elemento repetido.
- Estructura: son los movimientos que presentan una organización temporal, ya sea en duración, acentos, en agrupamientos, doblando la simple periodicidad.
- El ritmo o ritmicidad: se indica como rítmicos los movimientos que presentan una periodicidad interna.

Varela, Thompson & Rosch (1998) y Lakoff & Núñez (2000) consideran que el conocer de las personas no es meramente percibir una realidad objetiva “allí afuera” ni tampoco un procesamiento de información captada por las ventanas sensoriales, sino que es un proceso que se construye a partir de la experiencia corporal sensorio-motora, de la que existen elementos disponibles en la cognición encarnada para confrontar y dar sentido a muchas de las ideas que se construyen en el entorno escolar, a través de procesos metafóricos.

En la ejecución musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Es decir, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal. De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y los números fraccionarios (Conde, 2013).

Al realizar la ejecución del ritmo corporalmente (gesto) los estudiantes pueden determinar si el patrón rítmico cumple con ciertas propiedades, por ejemplo, pueden determinar si dos o más patrones rítmicos son equivalentes o no, al interpretarse simultáneamente. Es por ello que el gesto de los estudiantes no está sometido a las interpretaciones personales del maestro, es decir, es validado a través de la reproducción del propio ritmo.

El gesto desde la perspectiva de este trabajo, aunque está influenciado por la cultura e individualidades es estable en la ejecución porque posee una estructura rítmica musical y porque sigue un patrón. En el caso rítmico musical, los gestos deben ser articulados para cumplir con ciertas reglas temporales que no están sujetas a las interpretaciones de un observador (o experto) porque éstas están representando la métrica musical de un patrón

determinado.

En este sentido, promover experiencias auditivas en los estudiantes favorece la creación de representaciones mentales que permiten discriminar, comprender y relacionar estímulos auditivos musicales con ciertos objetos matemáticos, como en el caso de la noción de equipartición en el estudio de las fracciones. Los constantes refinamientos de las formas de representar visual, auditiva y gestual de los objetos matemático-musicales proporcionan al estudiante herramientas de comprobación y argumentación para dar cuenta, por sus propios medios, sobre la construcción y el significado de un concepto estudiado. Estos diferentes acercamientos y representaciones que el estudiante tiene con los objetos matemático-musicales caracterizan los procesos que hacen concretos dichos objetos (Wilensky, 1991).

A manera de síntesis en la Imagen 29, se muestran algunos ejemplos de las representaciones en cuestión.

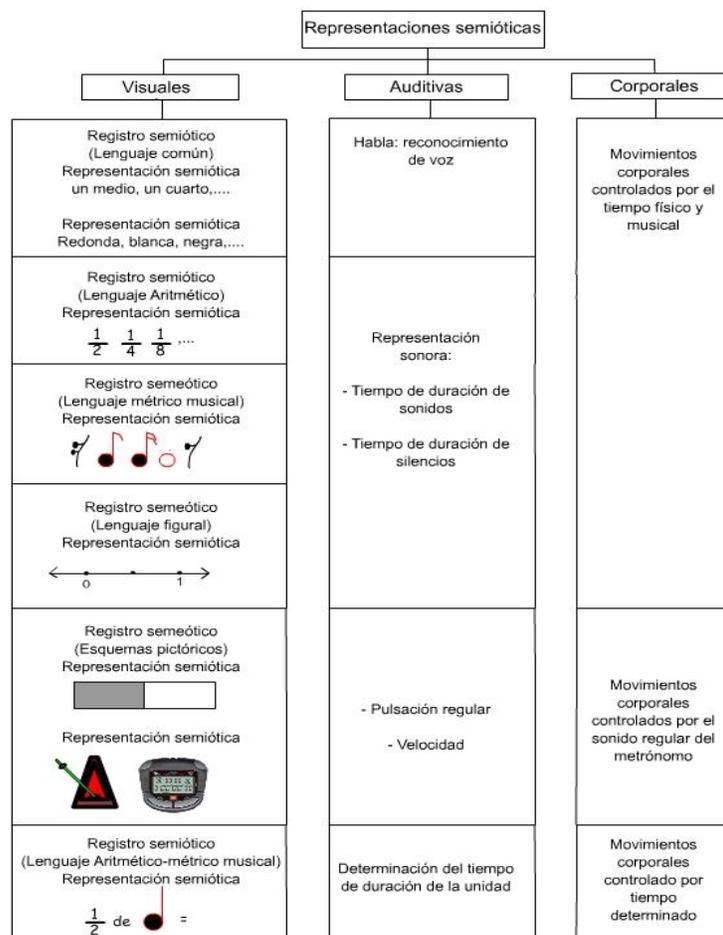


Imagen 29, Representaciones semióticas de objetos matemático-musicales (Conde, 2013, p. 61)

4.2 El tiempo musical y sus equiparticiones

La necesidad de crear producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, representaciones semióticas (Duval, 1993, p. 177), que expresen los valores relativos de las notas dentro de una única línea melódica son inevitables. Según Tiburcio (2002) a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, una página de casi cualquier partitura presentaba un sistema de signos en el que el ritmo, la altura y la duración de las notas musicales aparecían cuantificados con exactitud con respecto a la que la precedía; todo ello a su vez con otras clases de instrucciones dinámicas como la acentuación, la velocidad y la técnica con la que deba interpretarse cada efecto.

4.2.1 Las figuras musicales

La trascendencia de la propiedad que expresa que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente, es utilizada para la construcción de las figuras y silencios musicales (Figura 2) como representaciones semióticas encargadas de medir el tiempo de duración de un sonido o ausencia del mismo. Estas representaciones permiten fijar la música en el tiempo.

Simbolo	Nombre	Equivalencia	Simbolo	Nombre	Equivalencia
	Redonda	1		S. Redonda	1
	Blanca	$\frac{1}{2}$		Silencio de Blanca	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{4}$		Silencio de Negra	$\frac{1}{4}$
	Corchea	$\frac{1}{8}$		Silencio de Corchea	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	$\frac{1}{16}$		Silencio de Semicorchea	$\frac{1}{16}$
	Fusa	$\frac{1}{32}$		Silencio de Fusa	$\frac{1}{32}$
	Semifusa	$\frac{1}{64}$		Silencio de Semifusa	$\frac{1}{64}$

Imagen 30, Valores de las Figuras y Silencios Musicales (Conde, 2013, p. 6)

El uso de objetos matemáticos permitió formar una métrica musical encargada de organizar eventos sonoros y representar su experiencia temporal en dos dimensiones: el tiempo físico (segundos) y el tiempo musical (pulsos).

Con consciencia de la riqueza de las unidades de medida presentes en este sistema, se puede decir que son unidades que integran objetos matemáticos con objetos musicales con el fin de medir y representar la medida del tiempo de duración de sonidos y silencios.

4.2.2 Equiparticiones

En este trabajo se pretende dar un significado a la equipartición en el contexto musical, utilizando las relaciones estrechas de las fracciones con las figuras, silencios musicales y el compás, partiendo de la necesaria equidad de las partes que los conforman.

Para Kieren (1980) la equipartición es un elemento fundamental en el acercamiento a los números fraccionarios, sin embargo, como advierten Freudenthal (1983) y Cortina et al (2013)

se hace necesario sortear algunos procedimientos que llegarían a convertirse en obstáculos didácticos para un aprendizaje maduro del concepto. En este sentido, los planteamientos del presente trabajo no se sustentan en métodos tradicionales de enseñanza que toman como base el ejemplo del pastel, la pizza, la chocolatina, entre otros, entendiendo que estos conducirían a los estudiantes a una idea poco significativa de las fracciones (Conde, 2013).

La equipartición aquí es tratada desde una perspectiva de medición, que sigue dos principios: el primero consiste en que, a toda figura musical de la misma clase y su silencio corresponde la misma duración; mientras que el segundo se centra en asumir el compás como una composición de equiparticiones. Si alguno de éstos no se cumple, habrá una experiencia sensorial consecuente, desde lo visual, corporal y auditivo.

4.2.3 Artefactos computacionales

Durante las actividades matemáticas mediadas, los estudiantes producen una variedad de signos como palabras, gestos, acciones sobre las herramientas, interacciones y símbolos escritos-orales de cualquier naturaleza. Estos recursos semióticos de manera multimodal son usados tanto por estudiantes como por maestros en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Arzarello, Paola, Robuti & Sabena, 2009).

La incorporación de artefactos computacionales en la mediación del conocimiento promueve la participación de los estudiantes en un juego semiótico, como lo es el tratamiento de patrones rítmicos donde existe conexiones entre las representaciones dinámicas (creadas por herramientas computacionales) y el gesto como la coordinación sensorio-motora adaptada al fenómeno sonoro percibido. Esta forma organizada o configuración perceptual comprende un amplio espectro de posibilidades (de corporeizar, de matizar, de sucesos temporales) que dan significados a la obra o fragmento musical desde el punto de vista de la medida del tiempo de duración de un sonido.

Según Vygotsky (1995) los signos, significados, lenguaje y pensamiento, entre otros, son considerados como procesos psicológicos de origen social y como tal, son mediadores

semióticos entre la persona y el conocimiento. El conocimiento no es un objeto que se pasa de uno a otro independientemente del entorno social en el cual está inmersa la persona, sino que es algo que se construye por interacciones sociales y mediación de herramientas. En estas interacciones se aprenden formas de entender, explicar y construir el entendimiento de las cosas.

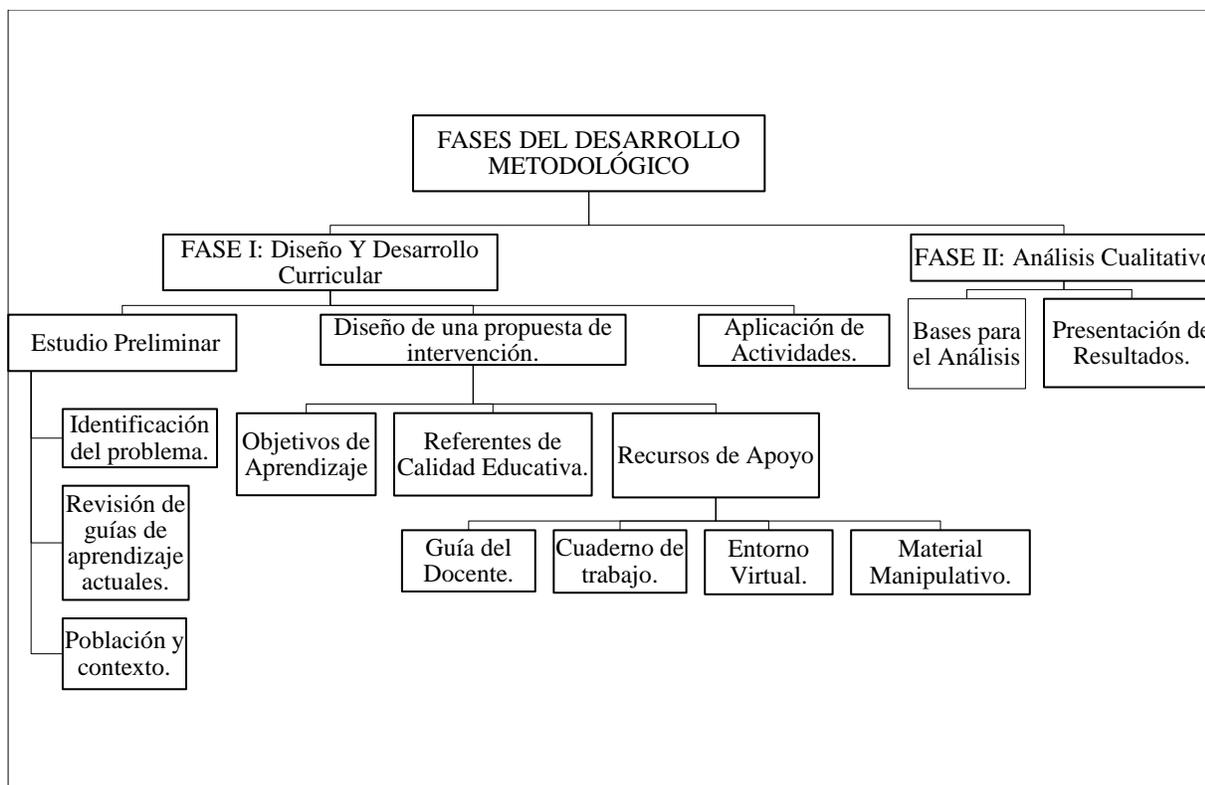
El uso de la computadora en la Educación Matemática contribuye a la creación de situaciones de aprendizaje que impliquen exploraciones donde los estudiantes encuentren las aplicaciones del área en diferentes contextos, de esta manera se logra captar el interés y motivación de los estudiantes. Se considera trascendental en este trabajo la incorporación de la computadora en la creación de experiencias, ya que con esta herramienta se puede ofrecer un abanico de actividades y representaciones que les permitan a los estudiantes construir un conocimiento significativo por sus propias prácticas.

5. Metodología

La presente propuesta de investigación es de carácter cualitativo, pues “se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes (los estudiantes) en un ambiente natural y en relación con el contexto (el aula de clases)” (Sampieri, 1996, p. 364). La búsqueda de la noción de equipartición de fracciones, a través de objetos musicales, supone una vinculación de la perspectiva de los estudiantes en la dinámica de aprendizaje, pues son estos quienes, a la luz de nuestro marco conceptual, tomarán las diferentes formas semióticas presentes en los objetos musicales, para luego convertirlas en un esquema de representación propio que les permita crear una noción del objeto matemático en cuestión.

Como ya se ha dicho, el contacto con los conceptos matemáticos no se da de manera tangible y evidente, son las representaciones posibles las que nos acercan a la concepción de ideas en cercanía a éstos; de ahí que deba reconocerse el carácter subjetivo de la interacción de los estudiantes con las diferentes actividades de la propuesta interdisciplinar que les será planteada. Por ello, el direccionamiento de las acciones desde una perspectiva cualitativa, será pertinente al “orientarse a aprender de experiencias y puntos de vista de los individuos, valorar procesos y generar teorías fundamentadas en las perspectivas de los participantes” (Sampieri, 1996, p. 365).

Esta investigación tiene una primera fase de diseño y desarrollo curricular en la que se construye una propuesta didáctica. La segunda parte se ubica dentro de una perspectiva cualitativa de análisis, dado que el interés es analizar la manera en que los estudiantes de primaria construyen una noción de equipartición de fracciones, a través de objetos musicales.



Esquema 1 Fases de desarrollo Metodológico. Producción propia.

5.1 Fase I. Diseño y desarrollo curricular

5.1.1 Estudio preliminar

En esta etapa se reúnen los datos que sirven como punto de partida para la implementación del presente trabajo investigativo, en ellos se exponen las motivaciones, inclinaciones, decisiones y proyecciones, hacia el planteamiento de una propuesta integradora de las matemáticas y la música.

Identificación del problema

Como ya se ha dicho, hablar de equipartición de fracciones no es muy común en las aulas de clase, generalmente se encuentra una referencia superficial de esta característica y, en el peor de los casos, no se hace presente. Para los autores no es ajena esta situación ya que, desde la experiencia docente en las aulas de básica primaria y los claustros universitarios, han vivenciado

las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes a la hora de abordar procesos conscientes en el uso y apropiación de las fracciones.

La iniciativa de centrarse en las nociones acerca de la equipartición de fracciones surgió al conocer los trabajos de Conde (2009 y 2013) quien, en calidad de docente de la maestría en educación matemática de la Universidad de Medellín, expuso las posibilidades del aprovechamiento didáctico de la relación interdisciplinaria de las matemáticas con la música. Dado que sus trabajos se enfocaron en el estudio de las fracciones (operaciones, unidad relativa, equivalencias, formas de representación, entre otros) en una población mexicana, se consideró pertinente la continuación de esta iniciativa, ahora en Colombia y en un aspecto específico: las equiparticiones.

Para evaluar la viabilidad de esta iniciativa, se hizo un rastreo bibliográfico desde las fortalezas de la música en el currículo escolar, la enseñanza de las fracciones y finalmente, las iniciativas que vinculaban ambas ciencias. Los hallazgos, presentados en los antecedentes del capítulo 1, confirmaron la viabilidad de esta propuesta al establecerla como tema de interés pedagógico a nivel internacional.

Revisión de guías de aprendizaje actuales

Como punto de partida para el planteamiento de la propuesta didáctica, se consideró relevante hacer una exploración crítica de los materiales educativos que en el momento se aplican en las aulas del país, haciendo foco en lo correspondiente a la noción de equipartición para la enseñanza de las fracciones. En este sentido, se seleccionaron dos de los documentos más implementados en la educación pública colombiana: los módulos de enseñanza del modelo Escuela Nueva y las situaciones problema presentadas por el Ministerio de Educación Nacional en el marco del programa para la transformación de la calidad educativa Todos a Aprender (PTA).

Con la realización de esta revisión no se buscaba censurar la utilización de alguno de los materiales mencionados, pues se entiende que en su preparación se tuvieron en cuenta argumentos favorables para la enseñanza del tema; por el contrario, se pretendió develar la

problemática derivada de su aplicación en la creación de nociones de equipartición y establecer un escenario favorable para la vinculación de objetos musicales con la enseñanza de las matemáticas.

Las reflexiones subsecuentes fueron presentadas en el capítulo 3, siguiendo un enfoque descriptivo no solo de las propuestas didácticas, sino también de las respuestas ofrecidas por los estudiantes.

Ahora bien, a pesar de que se consiguió el objetivo con esta tarea, se tiene conciencia de que la propuesta de intervención a presentar, no agota todas las posibilidades procedimentales y didácticas para el acercamiento de los estudiantes a la noción de equipartición y a la solución de los obstáculos didácticos hallados en los materiales, pero se continúa un diálogo que ya han iniciado autores como Tiburcio (2002), Peralta (2003), Liern (2008, 2011), Conde (2009, 2013), entre otros, al respecto de la relación didáctica y conceptual entre las matemáticas y la música.

Población y contexto

Esta propuesta investigativa se desarrolla con 17 estudiantes de los grados cuarto y quinto de la Institución Educativa San Francisco de Asís, Sede Cristóbal del municipio de Liborina, ubicado al occidente de Antioquia, Colombia. Fueron seleccionados por pertenecer a la básica primaria, presentar dificultades en el estudio de las fracciones (abordadas en el capítulo 3), vivir en un contexto de difícil acceso a formación en artes y por no tener formación previa en música. Se toma la totalidad de la matrícula en los grados mencionados y con ello al 68% de la población del centro educativo, respondiendo a que el espacio disponible en el aula de clases es apenas suficiente para un trabajo pedagógico con esa cantidad de estudiantes en un ambiente de aprendizaje adecuado.

La sede educativa en mención está ubicada en la zona rural montañosa del noroccidente del municipio, donde la principal fuente de ingresos económicos es el café, pocas familias viven de la ganadería, la producción de panela y el cuidado de aves de corral. Este entorno les permite a los estudiantes contribuir en su tiempo libre con el apoyo a sus padres en las labores, especialmente cuando hay cosecha de café, actividad que puede contribuir al fortalecimiento de conceptos matemáticos que de una u otra manera están inmersos en su vida cotidiana y que pueden llegar a ser una excelente oportunidad para fortalecer los procesos de enseñanza

aprendizaje en la escuela y más directamente en las clases de matemáticas; a la vez, se aporta a la educación en el hogar porque los niños transmiten estos conocimientos a sus padres, que por lo general en esta comunidad, sólo unos pocos llegan a terminar la educación básica, una mínima parte la secundaria y la mayoría se ubican en la primaria.

Los estudiantes que participan en esta intervención provienen de familias de escasos recursos, estratificadas en los niveles socioeconómicos 0, 1 y 2 del Sistema de Selección de Beneficiarios para Programas Sociales (SISBEN). Todos están subsidiados por el gobierno nacional en los programas de ayuda humanitaria para desplazados y familias en acción, ya que esta vereda está identificada como una población vulnerable por la violencia de grupos armados.

Los niños estudian bajo el sistema de Escuela Nueva, allí tienen la oportunidad de estar compartiendo en uno o dos salones con varios grados, en este caso desde preescolar hasta quinto. En este modelo interactúan niños de diferentes edades, grados y habilidades donde uno o dos maestros trabajan simultáneamente y hacia el mismo fin, debido a que el número de estudiantes y maestros es insuficiente para tomar cursos separados. Según (Radford, 2009) los niños, en este contexto, hacen evidente cómo la lógica cultural de producción, mediatiza unas formas de construcción de conocimiento y unas formas de cooperación humana en el aula de clase.

La aplicación de esta propuesta de investigación cuenta con la participación de 7 estudiantes del grado cuarto, cuyas edades oscilan entre 8 y 13 años y a 10 estudiantes del grado 5° con edades entre 10 y 11 años. Son dos grados en una misma aula, en donde cada uno puede progresar según sus capacidades, necesidades y ritmo de trabajo de forma individual; a la vez que avanzan en conjunto aceptando las capacidades diferentes, construyendo conocimientos y compartiendo saberes (Escuela Nueva, 2013).

Los materiales educativos con los que han interactuado y los proyectos alternativos de formación en los que han participado los estudiantes, no han contemplado el estudio de teoría musical, elementos básicos o interpretación de algún instrumento. El acercamiento a la música con el que cuentan corresponde al contacto social común, escuchar canciones, bailar y cantar de forma intuitiva o por imitación.

A la luz de este estudio se considera que la población descrita refleja de manera adecuada

las dinámicas educativas de la mayoría de las comunidades rurales colombianas, con diferencias marcadas por el clima y los intereses económicos de cada región, pero en estrecha relación desde las prácticas pedagógicas, el sistema de enseñanza y el acceso a formación académica y cultural complementaria. Entendiendo esto, se concluye que el desarrollo de la propuesta se puede realizar en cualquier institución educativa, pero se ha elegido esta población por facilidad en la consecución de autorizaciones por parte de los directivos, comunicación con la comunidad, disposición de los espacios y, sobre todo, por ofrecer la posibilidad de que estudiantes de zonas apartadas al casco urbano vivan por primera vez una experiencia de aprendizaje de la música, a la par de adquirir nociones matemáticas.

5.1.2 Diseño de una propuesta de intervención

Las reflexiones abordadas hasta ahora, los antecedentes y el marco teórico confluyen en esta etapa, para dar origen a una propuesta didáctica estructurada cuidadosamente en concordancia con las características de la población descrita en el apartado anterior, las políticas educativas del país, los aprendizajes esperados en los estudiantes y sus intereses de formación.

Las actividades fueron diseñadas de manera secuencial, para los grados cuarto y quinto de básica primaria, con posibilidades de adaptación a otros grados inferiores o superiores, según los niveles de desempeño de los estudiantes y sus necesidades de formación. Consta de cinco sesiones en las que se establecen objetivos de aprendizaje, se identifican los referentes de calidad educativa del país y se diseñan unos recursos de apoyo transversales a las actividades de aprendizaje.

Objetivos de aprendizaje

En la propuesta de intervención, los objetivos de aprendizaje son entendidos como los desempeños que se esperan evidenciar en los estudiantes, a partir del vínculo de los objetos musicales con los objetos matemáticos; constituyen, además, un aterrizaje de los referentes de calidad educativa al aula y marcan claramente las etapas de adquisición de nociones musicales.

En la siguiente tabla se presentan los objetivos seleccionados para cada sesión.

Tabla 1 Objetivos de las sesiones de clase

SESIÓN	OBJETIVOS
Sesión 1: Todo un mundo de Sonidos	Identificar las cualidades del sonido como objetos musicales que permiten establecer criterios de medición, así como de diferentes relaciones y representaciones matemáticas.
Sesión 2: Pulso, tiempo y ritmo; otra forma de medir.	Reconocer las características del pulso, el tiempo y el ritmo, como base para la composición, medición y caracterización de la música.
Sesión 3: Midiendo sonidos con las figuras musicales.	Establecer una relación entre las figuras musicales y la duración de los sonidos en la música, como mecanismo de representación discreta de fragmentos de un campo continuo.
Sesión 4: Un juego de reglas inquebrantables.	Reconocer la equipartición como criterio indispensable para hacer comparaciones numéricas entre los valores de las figuras musicales.
Sesión 5: Al compás de la equipartición.	Reconocer el compás musical como una composición de equiparticiones. Evaluar compases y patrones rítmicos, siguiendo la equipartición como criterio.

Referentes de calidad educativa

Reconociendo la necesidad de desarrollar un currículo acorde a las propuestas pedagógicas nacionales, para el diseño de las secuencias didácticas se vincularon varios documentos presentados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Inicialmente, se seleccionaron los estándares básicos de competencias, los cuales parten

de los cinco pensamientos matemáticos, para establecer los conocimientos y competencias que han de ser adquiridas por los estudiantes del país, al terminar un ciclo escolar de dos o tres grados según corresponda (1° a 3°, 4° a 5°, 6 a 7°, 8° a 9° y 10° a 11°). Para la propuesta de intervención, se seleccionaron algunos pertenecientes al ciclo de 4° a 5°.

El segundo documento de referencia son los derechos básicos de aprendizaje, los cuales fueron ofrecidos por el MEN a los docentes, padres de familia y estudiantes, con la finalidad de dar a conocer los aprendizajes mínimos que un niño debe adquirir en cada grado. Estos permiten que los estándares sean más cercanos a la actividad del aula y que las evidencias de aprendizaje sean más claras en la tarea de ofrecer indicios del alcance de las competencias del área.

El último referente de calidad que se tuvo presente en el diseño de las actividades, fue la matriz de evidencias que difundió el MEN y que elaboró el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), como una herramienta que aporta los aprendizajes evaluados en las pruebas de estado SABER (Aplicadas a los estudiantes de 3°, 5°, 9° y 11°). Con este insumo se pretende orientar los procesos de planeación, desarrollo y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes.

Además de servir como organizadores del currículo, para los propósitos de esta propuesta, los referentes de calidad educativa seleccionados ofrecen claridad acerca del debate común al tratamiento de propuestas interdisciplinarias que vinculan las artes: la correspondencia de las actividades con los planes de estudio o programas de las áreas. Tanto los estándares, derechos básicos de aprendizaje como matrices de referencia, sirven de soporte para demostrar que la apuesta por el vínculo matemáticas y música, no solo genera aprendizajes valiosos para los estudiantes, sino que responde a las expectativas del estado.

Recursos de Apoyo

Para el desarrollo de una propuesta curricular interdisciplinaria, se consideró pertinente la estructuración, diseño y elaboración de unos materiales de apoyo que sirvieran de soporte a las acciones de los investigadores y que, además sirvieran como productos finales para presentar ante el gremio de docentes que comparten la motivación por la vinculación de las relaciones matemático-musicales en las clases.

Guía del docente

La planeación se estructuró en un documento que se llamó guía del docente, en él se incluyó toda la estructura curricular, con las explicaciones pertinentes del sentido de los elementos matemático-musicales y la descripción detallada para cada actividad. La guía inicia con una presentación, en la que se contextualiza al lector frente al material que va a empezar a trabajar, luego se hizo una división por sesiones, llegando a cinco en total, para finalmente, incluir unas recomendaciones para la evaluación formativa de los estudiantes en un entorno de relación de las matemáticas y la música.

Dentro de cada sesión se consideraron varios aspectos, primero se establecieron las generalidades del plan: los objetivos, el tiempo estimado total y los recursos necesarios; el siguiente bloque incluye los referentes de calidad entre los que, como ya se ha dicho, fueron seleccionados los estándares de competencias, los derechos básicos de aprendizaje y la matriz de referencia del ICFES. Finalmente se agregó la sección de desarrollo, la cual está subdividida en: actividades básicas, actividades de práctica, actividades de aplicación y actividades de refuerzo.

Las actividades básicas consisten en la exploración de saberes previos y el recuento de la clase anterior, las actividades de práctica corresponden al momento de presentación de los objetos matemático-musicales a través de exploraciones virtuales, explicaciones del docente y análisis de audios o canciones. Las actividades de aplicación se direccionan hacia un trabajo autónomo de los estudiantes, permitiéndoles interactuar con los recursos de apoyo en la búsqueda de solución a cuestionamientos generadores de nociones. Por último, las actividades de refuerzo son aquellas que permiten retomar los elementos aprendidos durante la clase, hacer un balance de los elementos esenciales y fortalecer a los estudiantes con dificultades para el alcance de los objetivos de aprendizaje. Para cada actividad se establece un tiempo estimado, de tal forma que el docente pueda hacer un desarrollo óptimo de los momentos de la clase.

Cuaderno de trabajo

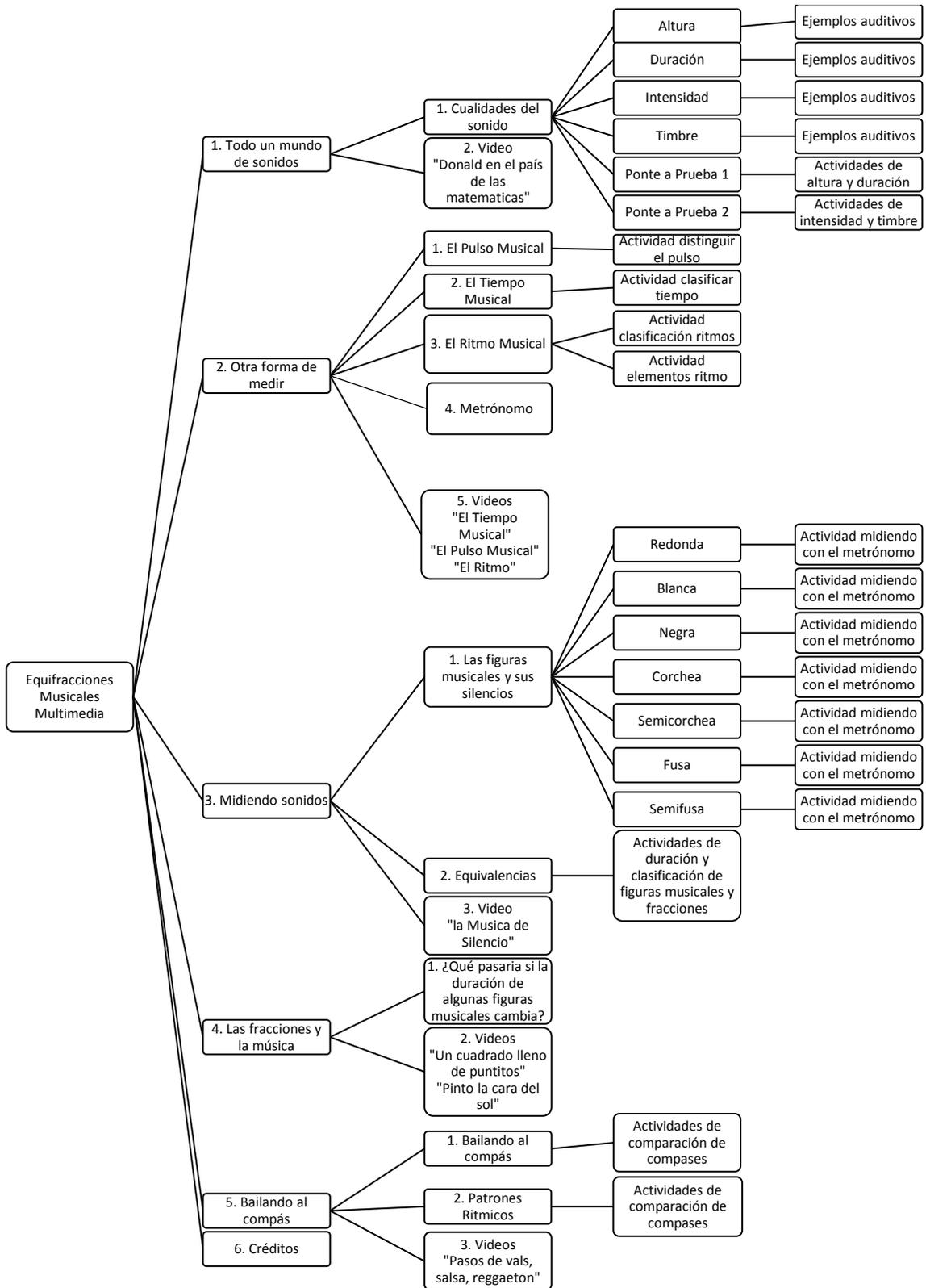
Con la intención de favorecer la autonomía, concentración, uso efectivo del tiempo de clase,

generación de hábitos de estudio, disposición motivacional para el desarrollo de las actividades y orientación del aprendizaje, se elaboró un cuaderno de trabajo. Este recurso contiene canciones, ejercicios, esquemas y preguntas generadoras de reflexión, descritas en la guía del docente. Para su uso, se tuvo en cuenta la necesidad de dar a conocer las representaciones gráficas con exactitud, la continuación de la metodología de estudio implementada en el sistema de escuela nueva y la necesaria condición del docente en el rol de mediador entre el estudiante y los objetos de aprendizaje. Además, la presentación del cuaderno de trabajo fue cuidada en su diagramación de tal forma que luciera llamativo, se presentó impreso completamente a color y se entregó a los estudiantes en una relación uno a uno.

Entorno Virtual

Entendiendo la necesidad de contribuir a este trabajo mediante la organización de representaciones gráficas y auditivas, se creó un entorno virtual en el que se dispusieron actividades descriptivas y evaluativas que permitieran mediar y comprobar la adquisición de los aprendizajes de los estudiantes. Este recurso no solo aporta procesos facilitadores de aprendizaje autónomo, sino que ofrece la posibilidad de autoevaluarse, retomar conceptos y repetir procesos cuantas veces se considere necesario en la elaboración de conclusiones.

A continuación, se presenta el mapa de navegación del entorno virtual, en él se puede observar la estructura general del recurso y su conexión con la secuencia didáctica trazada por la guía del docente y el cuaderno de trabajo de los estudiantes.

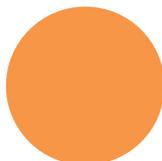
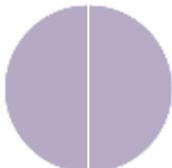


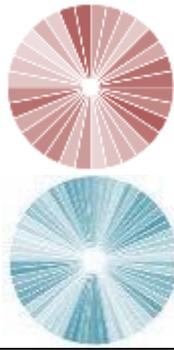
Esquema 2 Mapa de navegación de la multimedia.

Material Manipulativo

Con el fin de ampliar más las posibilidades de representación, se diseñó un material manipulable que cumple el propósito de simular situaciones en el espacio físico, desde una comparación de la duración de los sonidos con el área de un círculo, tomando la figura completa como la redonda, la mitad de esta como la blanca, un cuarto como la negra y así sucesivamente. La siguiente tabla muestra cómo se estructura esta relación.

Tabla 2 Estructura del material manipulativo

Material Concreto	Figura musical por fracción de círculo	Expresión numérica
	Redonda	1
	Blanca	$1/2$
	Negra	$1/4$
	Corchea	$1/8$
	Semicorchea	$1/16$



Fusa

1/32

Semifusa

1/64

Cada grupo de fichas se pintó del mismo color y se construyeron: 1 ficha para la redonda, 2 para la blanca, 4 para la negra, 8 para la corchea, 16 para la semicorchea, 32 para la fusa y 64 para la semifusa. A su vez, se tuvo como criterio que cada ficha equivalente a una figura fuera de igual tamaño que las demás de ese grupo, para así cumplir con el criterio de equipartición.

Aplicación de las actividades

El desarrollo de la intervención didáctica se llevó a cabo en la institución educativa y los estudiantes presentados en el apartado correspondiente a la población y el contexto.

La preparación previa incluyó la solicitud de autorización por parte del directivo docente del establecimiento educativo, para lo cual le fue enviado el respectivo documento. Una vez se contó con la firma de aprobación, se organizó una reunión de padres de familia en la que se expusieron los propósitos de la intervención, el tiempo que tardaría y la necesidad de apoyo en el proceso, para que los estudiantes pudieran exceder el tiempo habitual de la jornada escolar si fuese necesario. Adicionalmente, los investigadores presentaron un documento de autorización de uso de derechos de imagen sobre fotografías y fijaciones audiovisuales, el cual fue firmado por cada padre de familia o acudiente.

Contando con todos los requisitos formales para el inicio de las clases, se llevó a cabo la aplicación de la propuesta de intervención, siguiendo el cronograma de actividades que aparece en la siguiente tabla:

Tabla 3 Cronograma de aplicación de la propuesta de intervención

Fecha	Hora	Actividad
20-02-2017	7:30 a.m. a 1:15 p.m.	Desarrollo de la sesión 1
21-02-2017	8:00 a.m. a 2:00 p.m.	Desarrollo de la sesión 2
22-02-2017	7:30 a.m. a 2:10 p.m.	Desarrollo de la sesión 3
23-02-2017	7:30 a.m. a 2:00 p.m.	Desarrollo de la sesión 4
24-02-2017	7:30 a.m. a 2:00 p.m.	Desarrollo de la sesión 5

El primer día, los estudiantes tuvieron un buen comportamiento y participaron con mucho entusiasmo en todas las actividades que se tenían programadas.

Aunque el estudio de la música fue algo nuevo para ellos, demostraron disponibilidad y deseos de aprender algo diferente. Se vio alegría cuando recibían su cuaderno de trabajo y le asignaban un nombre, tenían muchas expectativas ante esta nueva experiencia. Hubo participación, concentración y fácil interpretación de los objetos matemático-musicales que se estaban enseñando.

El segundo día, fue un poco difícil con relación al anterior, pues algunos estudiantes estuvieron muy inquietos durante la jornada, se hizo un poco agotador para los docentes el cuidado de la disciplina y a la vez brindar el acompañamiento adecuado a los que de verdad se veían tan interesados en aprender de esta sesión. Por lo anterior, los docentes utilizaron diversas estrategias de acompañamiento, consiguiendo así que los estudiantes no perdieran el interés por lo que estaba en proceso de aprendizaje. En cuanto al objetivo de la clase, podemos decir que se cumplió en su totalidad, pues la dinámica activa que manejaron los docentes, la flexibilización en el tiempo en algunas actividades, la adecuada planeación, la utilización de herramientas virtuales y material didáctico y el orden de la secuencia, fueron elementos importantes que ayudaron a reconocer las características del pulso, el tiempo y el ritmo, como base para la elaboración, medición y caracterización de la música.

Avanzando en la semana, para el tercer día estaba en juego el aprendizaje de conceptos

que eran de vital importancia para alcanzar resultados positivos en esta secuencia didáctica, en especial, se necesitaba lograr que los estudiantes establecieran una relación entre las figuras musicales y la duración de los sonidos en la música como mecanismo de representación discreta de fragmentos de un campo continuo. Se puede decir que este objetivo se cumplió en aproximadamente el 50 % de los estudiantes y fueron aquellos que a través de la concentración y la coordinación pudieron llegar a crear ideas sólidas. En los otros estudiantes se hizo necesario repetir algunas actividades de las que se realizaron en clase, pero de una forma más personalizada y con más disciplina.

En el cuarto y quinto día se debía lograr que los estudiantes establecieran relaciones fraccionarias entre los valores de duración de las figuras musicales respecto a la redonda, pero sobre todo que reconocieran la equipartición como criterio indispensable en estas relaciones. Además, era necesario que aprendieran a distinguir un compás de otro y cómo en un esquema regular de pulsos agrupados de a dos, de a tres, de a cuatro o más, se va marcando el ritmo de una frase musical o de una canción. Aunque los estudiantes se veían muy tímidos e inquietos a la hora de inventar, interpretar o simplemente responder a las preguntas, se pudo obtener de ellos diferentes ideas y creaciones, en las cuales se evidenció una significativa elaboración de nociones y la funcionalidad de las estrategias propuestas en la tarea de reconocer la necesidad de la equipartición en las figuras de menor duración que pueden formar una redonda y en un compás musical.

El desarrollo de la propuesta de intervención despertó motivaciones en los estudiantes que no se incluyeron en la muestra y en los padres de familia, pues los primeros manifestaban interés al ver a sus compañeros divirtiéndose mientras aprendían sobre matemáticas y música, se divertían con los bailes, el juego, los cantos, manipulaban el material concreto e interactuaban con el entorno virtual. Los segundos por su parte, valoraron el hecho de que nunca les fue enseñada alguna forma de vincular las matemáticas y la música y que habían sentido mucha admiración y curiosidad en las actividades, al ver a sus hijos interesados y deseosos de aprender más del tema, explicando a los miembros de la familia cuáles son las figuras musicales, cómo se representan, los valores de duración expresados en fracciones y la necesidad de equipartición en las figuras de igual duración y en los compases.

5.2 Fase 2. Análisis Cualitativo

Una vez terminado el diseño e implementación de la propuesta de intervención, se procederá a realizar un análisis que ofrezca los insumos para responder a la pregunta y los objetivos de la investigación. Esta fase incluye inicialmente una descripción de las fuentes de información, para proceder posteriormente a la presentación de los resultados.

5.2.1 Bases para el Análisis

Reconociendo la necesidad de implementar instrumentos que facilitaran la recolección de información valiosa a la hora de llevar a cabo el análisis de resultados y, considerando que en esta fase se deben sentar las bases para aportar un conocimiento pedagógico e investigativo sólido, se plantearon como herramientas mediadoras los cuadernos de trabajo diligenciados por los estudiantes y videograbaciones de las clases. Adicionalmente, considerando el tipo de estudio que se está desarrollando, se le da un papel preponderante a la observación de los investigadores, a través del uso de un diario pedagógico como herramienta de registro de las experiencias e impresiones que surgieron del desarrollo de las sesiones de clase. En esta fase se parte de la exploración de los datos, para clasificarlos y ordenarlos según los intereses pedagógicos e investigativos de los autores.

5.2.2 Selección e interpretación de los datos

En este apartado se presentan los resultados de la implementación de la propuesta de intervención y su impacto en la generación de un ambiente que vincula las matemáticas y la música, en la creación de un espacio propicio para el acercamiento a los conceptos desde diferentes representaciones semióticas. Para este reporte se enlazan los datos ofrecidos por los instrumentos de recolección de información, a partir de una organización que responde al proceso de construcción la noción de equipartición de fracción por parte de los estudiantes. Siguiendo tal fin, se han agrupado las diferentes representaciones de los estudiantes en cinco categorías, las cuales se explican en el siguiente capítulo.

6. Resultados del análisis

Las categorías definidas para el análisis, surgieron del rastreo del proceso de construcción de la noción de equipartición, tras la sistematización de los datos ofrecidos por los instrumentos planeados. Para una lectura global inicial de la ruta de adquisición de conocimientos, se presenta a continuación una tabla que describe las esencialidades de cada categoría, para proceder luego con la exposición de las observaciones correspondientes.

Tabla 4 Descripción de categorías de análisis

N.º	Categoría	Descripción
1	La medida como punto de encuentro entre las matemáticas y la música.	El estudiante inicia la adquisición de bases, reconociendo las cualidades del sonido como objetos musicales que permiten establecer criterios de medición, así como diferentes relaciones y representaciones matemáticas.
2	Aproximación inicial a la noción de equipartición.	Se aborda el planteamiento de que el pulso en sus interacciones con otros objetos musicales, representa una forma de equipartición.
3	Sistema de signos para medir el tiempo.	La equipartición de fracciones es vista desde la identificación del número de pulsos o partes de estos, que componen cada figura musical. El estudiante hace comparación de magnitudes, asumiendo la fracción como medida.
4	Toda figura de la misma clase, tiene la misma duración.	El incumplimiento de la equipartición en las figuras musicales trae una consecuencia perceptible, evaluable y susceptible de ser representada desde lo auditivo, gráfico y corporal.
5	El compás como composición de	Se estudian las consecuencias de que uno o

6.1 La medida como punto de encuentro entre las matemáticas y la música

Como es consecuente en una intervención pedagógica con estudiantes de primaria, el proceso de adquisición de nociones matemáticas se da de una forma secuencial, iniciando con aspectos de base para la comprensión de elementos más complejos. Es por esto que en esta categoría se encuentran las formas de representación que ilustran las concepciones de la relación entre las matemáticas y la música.

Una de las actividades iniciales fue la presentación de un video en el que se exponía la forma en la que los griegos iniciaron la organización de los sonidos siguiendo criterios matemáticos; a partir de esto, se les pidió a los estudiantes que expresaran sus ideas e impresiones al respecto, a través de dibujos y palabras. De allí surgieron algunas respuestas como las que se presentan a continuación.

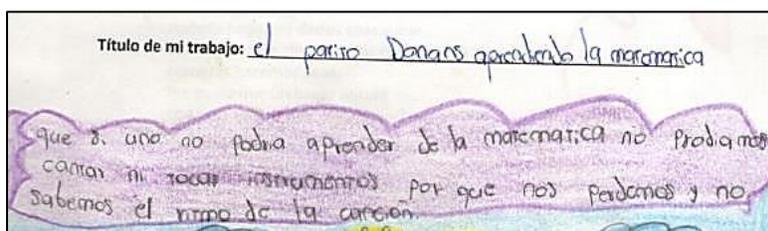


Imagen 31, Relación matemáticas y música

En la Imagen 31 se puede observar cómo el estudiante establece una relación de dependencia entre las matemáticas y la música, relacionada con criterios de métrica que marcan la necesidad de sincronía entre los músicos a la hora de ejecutar una canción. En esta respuesta el estudiante deja de lado la posibilidad intuitiva de hacer la música sin la conciencia directa de los elementos matemáticos que la constituyen. Este tipo de respuesta se presentó en varias ocasiones, por lo que ameritó un énfasis aclaratorio en el momento de socializar la actividad.

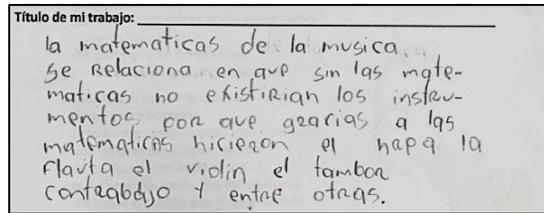


Imagen 32, Relación matemáticas y música 2

Algunos estudiantes establecieron la necesidad de aplicar principios matemáticos a la construcción de instrumentos, tal como se muestra en la Imagen 32, percibiendo relaciones geométricas, métricas y numéricas, las cuales fueron ampliadas en la socialización de las actividades, al preguntarles por algunas de las condiciones para la construcción de un instrumento, a lo que respondieron recordando el método que se mostraba en el video, relacionando la forma, el tamaño y la dimensión de las cuerdas.

En lo que respecta a las representaciones corporales enmarcadas en esta categoría, es conveniente mencionar la interpretación de la canción “sonido” en la que se observó empeño y curiosidad por parte de los estudiantes. En este ejercicio vincularon movimientos con las palmas, gesticulaciones e imitación de sonidos que acercaron las primeras ideas acerca de las cualidades del sonido y a la vez, ampliaron el campo estético de la música, pues se reconocieron varios estados de ánimo según la intencionalidad de la canción y respondieron con agrado al cantar. A partir de estas acciones se convirtió un fenómeno auditivo en uno observable de naturaleza cuantificable, en la condición de cantar al unísono, coincidir con los gestos de los demás o procurar la precisión en los elementos métricos musicales.

La medida, como objeto matemático ligado a la duración del sonido fue relacionada con la música en el ejercicio de escuchar, comparar y decidir cuándo un sonido es percibido por el oído más tiempo que otro o cuándo es el momento de empezar a cantar y cuándo parar en una canción. El nivel de dominio de la primera actividad se puede observar en la Imagen 33 mientras que la valoración de la segunda, se hizo evidente en el canto sincrónico en las partes constantes de la canción y asincrónico luego de los silencios e imitación de animales u objetos.

SONIDO	Largo	Corto
aplausos		X
cuando ago mis dedos chasquiar		X
bostezo	X	
los besos que me da mamá	X	
maullar	X	
Sirena de un barco	X	
Silbidos	X	
cornetas	X	
grito gógol	X	
contar	X	

SONIDO	Largo	Corto
Cuando aplaudo		X
Cuando chasqueo los dedos		X
Cuando hacemos sonar las betas	X	
Cuando un barco saluda	X	
Cuando bostezamos	X	
maullar	X	
los besos que me da mamá		X
Cuando silbamos	X	
Cuando escucho gritar gol	X	
Cuando hago silencio		X

Imagen 33, Cualidades del sonido

De las imágenes se puede deducir que, para el caso de “los besos que me da mamá” y algunos otros no ilustrados aquí, la valoración asignada respondió a las vivencias particulares de cada estudiante, haciendo manifiesta la necesidad de establecer una referencia o unidad de medida. De esta manera se cumple lo que McAdams (1993) plantea como el desciframiento de los estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas, sin pasar por un proceso de análisis estricto de las características de lo que se escucha, sea desde lo físico o lo biológico. De este modo, se halla un encuentro entre las imágenes mentales de los sonidos y el estímulo inmediato, para enfrentar al estudiante a la decisión de asignarle una duración y por ende, de darle significado.

Por su parte, los artefactos computacionales otorgaron dinámica a las relaciones matemático-musicales, acercando la posibilidad de comparar las características de varios sonidos, para luego elaborar conclusiones acerca de sus cualidades.

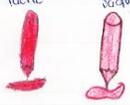
Cualidad	MI definición
Altura	<p>aguda grave</p> 
Timbre	
Intensidad	<p>fuerte suave</p> 
Duración	<p>que es una melodía larga</p> 

Imagen 34, Cualidades del sonido 2

Las representaciones gráficas que aparecen en la Imagen 34, dan cuenta de la forma en la que los estudiantes plasman sus concepciones acerca de los atributos commensurables de la música, dejando ver cómo se da una estructuración de ideas que servirán de base para la asimilación de elementos posteriores más estructurados. Así pues, se entiende que las representaciones visuales realizadas son producto de las reflexiones e interpretaciones de los estudiantes (Arcavi, 1999).

De igual manera, a través de las diversas actividades, relacionar las matemáticas con la música fue una tarea que implicó tanto el reconocimiento y vinculación de saberes anteriores a la propuesta de intervención, como el estudio inductivo de conceptos nuevos. Todos estos elementos confluyeron en el establecimiento de conclusiones expresadas por medio de palabras, dibujos y movimientos, que alejaron a los docentes de una transmisión meramente teórica y favorecieron en los estudiantes la dinamización del proceso de aprendizaje. Un ejemplo de esto se puede observar en la actividad de refuerzo de la primera sesión.

La actividad consistía en hacer una o varias composiciones, en las que se usaran trazos diferenciados para indicar cada cualidad del sonido: La altura se expresaba con la ubicación de los gráficos en el espacio, arriba y abajo; el timbre se marcaba diferenciando los colores, la intensidad variaba según la fuerza con que se realizaban las figuras y la duración, con líneas cortas o largas. Además, se les pedía formar parejas y cantar sus creaciones según este

“juego de reglas” descrito.



Imagen 35, Cualidades del sonido 3

En el ejemplo de la Imagen 35, se observa la acomodación de los gráficos siguiendo la muestra de la primera línea y las condiciones predefinidas. El estudiante usó trazos similares a los del modelo, pero los acomodó de una forma diferente en las líneas de guía, las cuales para la actividad, constituían una línea de tiempo que se leía de izquierda a derecha. También se dió un cambio de las palabras de la frase musical, haciendo una distribución que asigna un fonema (articulación mínima de un sonido vocálico y consonántico) a cada trazo, mientras que en el de guía se hacía por sílabas.

Más allá de la forma, al realizar la interpretación musical de la composición, cobró notable relevancia la comprensión de las relaciones de las unidades gráficas con las auditivas y corporales, en concordancia con una concepción clara de la duración de cada unidad mínima (trazo y fonema) en la línea de tiempo. En otras palabras, aunque solo de una forma aproximada, la estructura de la actividad entró en concordancia con la definición que Conde (2013) ofrece para una partitura, al cumplirse que la organización de los sonidos y los silencios se da a través de un sistema de signos escritos en una línea de tiempo, los cuales dependen de la percepción del músico, a partir de lo visual, para interpretarlos (traducirlos en sonidos).

6.2 Aproximación inicial a la noción de equipartición

Una vez estudiadas y asimiladas las cualidades de los sonidos, la posibilidad de medirlos, de representarlos y organizarlos en una línea de tiempo; corresponde a este apartado presentar la forma en la que los estudiantes accedieron a una aproximación de equipartición desde el estudio de las características del pulso, el tiempo y el ritmo de la música.

Para iniciar el acercamiento a los nuevos objetos matemático-musicales, se realizó una actividad de percepción corporal en la que se les pidió a los estudiantes que formaran parejas y buscaran el pulso de su compañero. Al principio debían reconocer las sensaciones y los detalles percibidos, para luego salir al patio a realizar una actividad física que les generara cansancio y tomar de nuevo las impresiones. Durante el ejercicio, debían dar respuesta a varias preguntas organizadas como se muestra en la siguiente Imagen 36:

Pregunta	Respuesta (Lo que sientas, descripciones...)	Razones (Por qué diste la respuesta anterior)
¿Qué sientes?	que algo brinca como unos latidos	Porque esta circulando la sangre por las venas y nosotros las tocamos
¿Cómo podría describirse la distancia entre un golpe y otro?	que la distancia es la misma y no se va a sentir mas rapido hasta que estes cansado	porque la persona no esta cansada y esta en calma
¿Hay algún momento en el que paren los golpes?	no apesar de que te lo aprietes muy fuerte	Porque esta circulando la sangre y nunca para
¿A qué crees que corresponde la velocidad de los golpes?	que estan cansado o asustado	Porque puede ser que el corazón late fuerte y el pulso aumenta

Imagen 36, Medida del pulso cardiaco

Al plantear estos cuestionamientos, se condujo a los estudiantes a estudiar el pulso desde una perspectiva métrica que guarda estrecha relación con la equipartición, pues las respuestas a las preguntas permiten concluir que percibieron una relación de igualdad de distancia entre una pulsación y la siguiente, mencionando además, que cumplen la condición de no parar en ningún momento y requerir de la acción de un fenómeno externo (correr, asustarse, cansarse...) para que ocurra un cambio en esa mencionada distancia. Además, quienes fueron más lejos afirmaron que, a pesar de que se presentara un cambio de velocidad por el cansancio, las pulsaciones conservarían la relación equidistante al momento de medirlas.

Cuando estamos descansado el pulso del corazón va a misma distancia cuando estamos cansados nuestro corazón late fuerte y mas rapido pero siempre va a misma distancia

Imagen 37, Respuesta 1 categoría 2

Con esta actividad se estableció una aproximación a la noción de equipartición, sustentada en la percepción de medida en un campo continuo a través del análisis del tiempo

transcurrido entre las pulsaciones y la continuidad de las mismas, dándole sentido infinito al pulso. Además, los cambios de velocidad que los estudiantes perciben con cada una de las actividades, en este caso en la relación cansado y asustado, apunta a una inicialización en la comprensión de la variación pues implica explicar cómo se relacionan las magnitudes variables en un problema particular, así como medir y analizar cómo cambian estas magnitudes. Por ejemplo, desde los niveles de educación básica pueden analizarse los cambios en la temperatura, peso, posición, población, velocidad, entre otros. Los estudios sobre los fenómenos que cambian, han sido una poderosa motivación del hombre para construir modelos matemáticos, los cuales se han representado con ecuaciones que relacionan variables (Parada, Conde & Fiallo 2016).

Las conclusiones a las que llegaron los estudiantes poseen la condición de estar limitadas por sus formas de asimilación de la información y la estructuración de la misma en esquemas mentales. Además, a partir de ellas se pone en evidencia la diferencia entre el tiempo físico (medido por el reloj de manera estandarizada) y el tiempo percibido de forma subjetiva, en la mirada de Fraisse (1976) quien a través de sus estudios pudo establecer que la percepción que tienen las personas acerca del tiempo, depende de las circunstancias en las que se da el procesamiento de la información recibida.

Para profundizar en lo anterior, conviene analizar las reflexiones de los estudiantes al realizar otra actividad percepción corporal. Se les pidió que dieran un paso cada vez que escucharan un golpe de palmas (aplauso) que se repetía constantemente, el sonido variaba la velocidad pasado un corto periodo de tiempo y se incluían espacios de silencio en los que se generaba expectativa por el próximo movimiento. Al volver a emitir un estímulo sonoro, no se cambiaba la velocidad o distancia entre uno y otro.

En la socialización de la actividad se preguntó si era posible predecir cuándo el docente daría un aplauso o no, a lo que los estudiantes respondieron:

Estudiante 1: Sí, porque uno se quedaba mirando y... a ver si... cuando usted hace así (muestra el gesto de aplaudir inconcluso, dejando un espacio entre las manos) yo veía que usted no iba a dar palmada, entonces yo sentía eso normal.

Docente: Y cuando podían seguirlo preciso ¿qué era lo que les daba el indicio a ustedes de que yo iba a seguir... iba a seguir... iba a seguir y que ustedes podían caminar así (aplaude al

tiempo que da un paso).

Estudiante 2: Usted movía las manos, entonces todos seguíamos.

En este diálogo se puede observar cómo se encadenaban los procesos predictivos a un estímulo visual, hallado desde la lectura de un patrón en los gestos previos a la emisión u omisión de un sonido por parte del docente. Así, se manifiesta una forma de uso del pulso en el propósito de reafirmar el acercamiento a la equipartición, ya que responde a una de las seis categorías definidas por Lamour (1985) para las experiencias corporales de carácter rítmico: Presenta movimientos periódicos, descritos como una sucesión de acentuaciones con intervalos regulares de tiempo.

La identificación de la mencionada categoría se fortalece si se revisa la continuación del conversatorio entre el docente y los estudiantes:

Docente: Algunos (estudiantes) se equivocaban y otros lo hacían bien. Yo quiero que pensemos en los que lo hacían preciso, que lo hacían bien. A ver tú (dirigiéndose a una estudiante que pide la palabra).

Estudiante 3: Porque lo hacían al ritmo de las... de las palmadas.

Docente: ¡Ah, eso está bien interesante! Porque lo hacíamos al ritmo de las palmadas. Y cuénteme ¿cómo... cómo es eso? ¿Cómo que el ritmo? ¿Cómo sabías que era un ritmo?

Estudiante 3: Porque parecía como si fuera haciendo música.

Con la conclusión a la que llegó el estudiante se conjugaban los aprendizajes acerca de las relaciones de las matemáticas y la música, con la claridad de que en los objetos matemático-musicales hay un orden que facilita la precisión en los movimientos.

Para ampliar este aspecto, conviene mencionar la segunda parte de la actividad, en la que se agregaban canciones como el sonido motivador de las acciones corporales, fueran bailar o caminar y la interrupción de su reproducción como el espacio de tensión para conservar el pulso. Esta tarea se puso en contraste con la anterior.

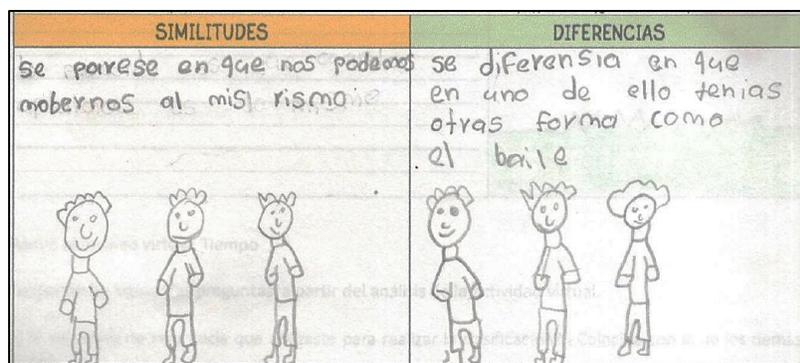


Imagen 38, Ejercicio de baile

La Imagen 38 presentada deja ver cómo en ambos casos se identifica la existencia de patrones que facilitaban los movimientos, distinguiendo la posibilidad de bailar como un aspecto que agregaba mayor énfasis en la predicción de cambios de velocidad, pulso y ritmo. Esta conclusión también fue encontrada en las socializaciones y se reportó en el diario pedagógico expresando que “para la mayoría se tornó más fácil [seguir el pulso], pues parece que conocían el ritmo de algunas canciones, mientras que en las que no conocían se podían ver nuevamente algo descoordinados; en general fue mucho mejor que cuando no había un patrón definido”.

En la misma línea, se utilizaron actividades virtuales que ampliaban las representaciones para los estudiantes; en una de ellas, se les pedía observar unas imágenes y sonidos asociados, en las que deberán identificar la posibilidad de medir el pulso. Para ello se hizo notar, por ejemplo, que en los latidos del corazón o en correr hay de manera implícita una distancia igual entre cada latido o paso, comparado con un bramido (sonido emitido por las vacas) o la caída de un árbol, en los que no se hace reconocible el pulso.

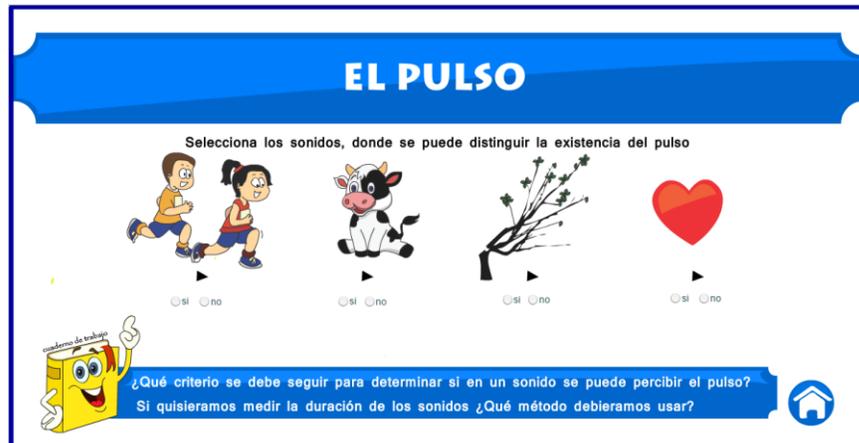


Imagen 39, El pulso-Multimedia

¿Qué criterio se debe seguir para determinar si en un sonido se puede percibir el pulso?
 Cuando es el mismo tiempo en cada golpe y la distancia de un golpe.

Transcripción: Cuando es el mismo tiempo en cada golpe y la distancia de un golpe.

cuando podemos medir el pulso constantemente que.

Transcripción: Cuando podemos medir el pulso constantemente.

cuando es el mismo tiempo en el golpe

Transcripción: Cuando es el mismo tiempo en el golpe.

yo puedo conocer un pulso que sí lo he escuchado y pronunciado el pulso.

Transcripción: yo puedo conocer un pulso que sí lo he escuchado y pronunciado el pulso.

Imagen 40, Respuestas 2 categoría 2

Como se aprecia en la Imagen 40, los estudiantes dieron respuestas de acuerdo a representaciones dinámicas, manifestando diversas formas de abstracción de nociones en la actividad. Algunos aluden al uso del pulso desde la medida del espacio entre cada golpe, otros en relación a un patrón de repetición y otros a la percepción auditiva, transformada en una manifestación corporal en el acto de cantar. Para este último caso, conviene observar cómo,

posiblemente, en la mente del estudiante tiene lugar la generación de una acción (reconocer el pulso), a través de procesos motores y sensoriales, la percepción (escuchar) y la acción (cantar), como elementos que no se pueden desligar de la cognición que está viviendo, en este caso, la aproximación a la noción de equipartición.

A partir de este proceso, podría pensarse que los estudiantes adquirieron y comprobaron un mecanismo de medida de los sonidos, pero... ¿sería posible que, además de contar con una idea de equipartición, tenga una experiencia de comprobación de las consecuencias de que no se cumplan los esquemas preestablecidos (regularidad, igual distancia entre cada pulso, la posibilidad de cantarlo...)?

Para procurar dar respuesta, se presentarán las conclusiones de los estudiantes después de interactuar con el ambiente computacional en una escena que vincula la duración de los sonidos mediante barras o bloques que se van llenando a medida que la canción avanza; además, se presenta una composición con dos elementos, melodía y acompañamiento, con la posibilidad de reproducirlos a la vez o de a uno. El análisis se centra en la pregunta referente a lo que sucedería si las notas de la melodía y las del acompañamiento no terminaran al mismo tiempo.



Imagen 41, El ritmo musical-Multimedia

En esta actividad (Imagen 41) se buscaba que los estudiantes establecieran una relación entre los sonidos y los posibles silencios de cada instrumento, en la tarea de participar de principio a fin en la distribución del tiempo que tarda la canción; por ejemplo, podría pensarse la idea de que un músico tocara con diferente duración una de las notas de la melodía o del acompañamiento.

Si las notas de la melodía o el acompañamiento no duraran el mismo tiempo que la canción ¿Qué crees que pasaría?
no sonaría lo mismo por que le quitarían un instrumento y dañaría la canción sonaría feo esa canción

Transcripción: No sonaría lo mismo porque le quitarían un instrumento y dañaría la canción. Sonaría feo esa canción.

Pasaría que sonaría distinto que la otra melodía y sonaría muy feo.

Transcripción: Pasaría que sonaría distinto que la otra melodía y sonaría muy feo.

creo que pasaría que se reproduciría más tiempo que las demás melodías

Transcripción: Creo que pasaría que se reproduciría más tiempo que las demás melodías.

Imagen 42, Respuestas 3 categoría 2

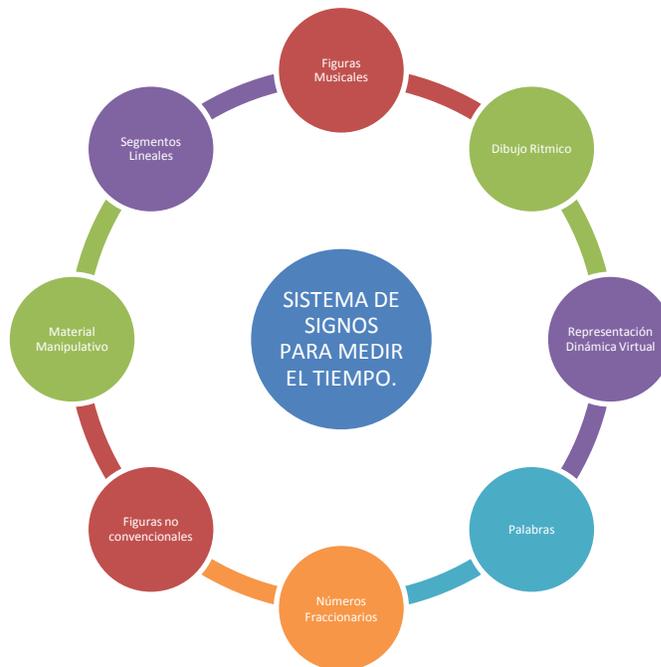
Como puede notarse, las respuestas de los estudiantes dieron respuesta al interrogante planteado párrafos atrás, pues la relación que hicieron entre la duración correcta de la canción o un fragmento de esta y el caso hipotético de alterarla, trae como consecuencia una percepción que denota la presencia de un error, a través de cierta incomodidad al escucharla.

Las reflexiones aportadas hasta ahora han dado indicios de la relación fraccionaria entre los objetos matemático-musicales, pero en el entramado didáctico y teórico de la presente propuesta, se hicieron visibles aspectos que ahondan aún más estos vínculos.

6.3 Sistema de signos para medir el tiempo

Con las respuestas de los estudiantes y los argumentos presentados en las secciones anteriores, se sentaron las bases para consolidar la construcción de la noción de equipartición. En esta etapa ya se cuenta con una forma de medir la duración de los sonidos, la comprensión de las cualidades de los mismos y un acercamiento a las consecuencias de la ruptura de los esquemas que garantizan el orden o armonía de los sonidos (no estrictamente en términos musicales).

Todo ese conocimiento adquirido es importante, pero no suficiente para que se logren las deducciones necesarias en el estudio de las fracciones a través de objetos musicales. Desde esta investigación se propone el establecimiento de un lenguaje que comunique directamente las representaciones simbólicas de las matemáticas con las correspondientes a la música y para ello, se aborda el uso de las figuras musicales, segmentos lineales, representaciones dinámicas en ambiente computacional, números fraccionarios, palabras, figuras no convencionales, material manipulativo y trazos de dibujo rítmico.



Esquema 3, Sistema de signos para medir el tiempo

La percepción de los sonidos y la necesidad de comunicar estas ideas, acercan a los estudiantes a formas de representación no convencionales ligadas a diferentes duraciones, estas se nutren de las experiencias vividas en las clases y los esquemas mentales generados en la interacción con símbolos adquiridos desde el lenguaje visual de la televisión, los medios escritos y la imaginación misma. Es así como, tras realizar una actividad de juego que vincula un patrón rítmico regular (en la canción siempre se sigue un el patrón de dos negras, dos corcheas y una negra ♩ ♪ ♪ ♩) con movimientos corporales que exigen coordinación y concentración, se consiguió una forma de representación producida por los equipos de trabajo colaborativo, que cumple con criterios de medición, comparación y simbolización desde las matemáticas y la música.

Los docentes realizamos un primer ejemplo en el tablero y luego los estudiantes hicieron sus creaciones. En esta actividad se pudo evidenciar que algunos estudiantes trataban de imitar la forma de escritura que había en el tablero, mientras que otros demostraron más creatividad e iniciativa en sus formas de representar. Los docentes terminan esta actividad haciendo preguntas sobre las características de las grafías tales como: ¿Tienen el mismo tamaño? ¿Representan la misma duración? ¿Hay figuras repetidas? ¿Cómo distinguieron una duración de otra? Son pocos los estudiantes que se atreven a responder, pero se puede decir que comprendieron el ejercicio porque se llegó a reflexionar acerca de la existencia de sonidos de diferentes duraciones en la música y cómo estos pueden ser medidos y organizados de modo que se establezcan símbolos y palabras que guíen a los músicos en sus interpretaciones y composiciones. (Diario pedagógico, anexo 4).

Como puede leerse en el fragmento del diario pedagógico, plantear un sistema de signos no es tarea sencilla para los estudiantes y lo es menos, la explicación de éste mediante palabras. En sí mismo, este momento de creación plantea una organización consciente de las ideas frente a lo auditivo y corporal, para llegar a plasmarlas en símbolos dotados de significados. Se advierte entonces, que la búsqueda de este objetivo implica el acercamiento constante con los estudiantes y la motivación hacia el descubrimiento de algo genuino, para que se alejen de los ejemplos (estrictamente necesarios, a juicio de los investigadores) presentados con antelación.

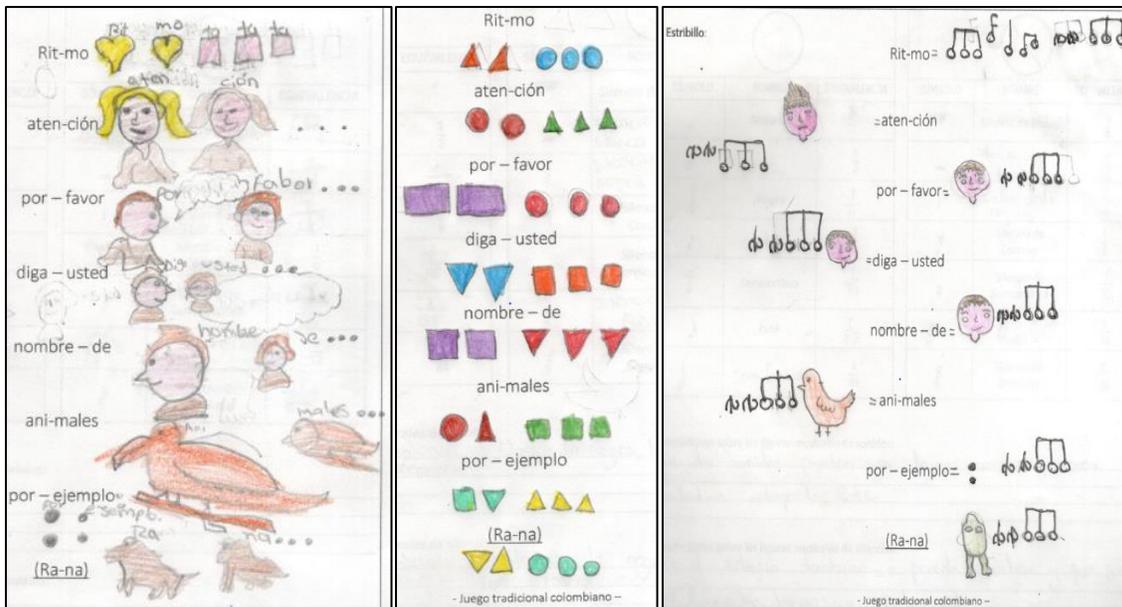


Imagen 43, Respuesta 1 categoría 3

Teniendo en cuenta la imagen 43, para los estudiantes se hace posible el planteamiento de propuestas desde sus habilidades de esquematización y síntesis, encontrando que algunos parten de una representación que vincula gráficos y al parecer de una manera necesaria, el texto que le corresponde. En segundo lugar, se da una simbolización desde figuras geométricas que reflejan una abstracción mayor, ligada a las matemáticas y distante de los signos convencionales de la música. Finalmente, aparecen algunas formas cercanas al lenguaje musical, pero que no corresponden al significado preestablecido de las mismas, acompañándolas de un dibujo que ilustra el asunto a tratar en el estribillo. En las tres formas de plasmar las duraciones de los sonidos del juego, se identifica la presencia de un patrón que diferencia las duraciones a través del color y/o las figuras.

Esta transferencia de palabras y sonidos a un lenguaje simbólico permite concluir que los estudiantes se encuentran más cerca de “alcanzar mejores niveles de razonamiento, argumentación, solución de problemas y en consecuencia a la adquisición de sistemas de ideas y de signos” (Conde, 2013, p.90), aprendizajes primordiales para la construcción de la noción de equipartición. Con base en esto, se puede inferir que la actividad fue efectiva y pertinente para los objetivos de este trabajo de investigación.

Otro sistema de representación que cobra importancia para los fines de este trabajo investigativo es el uso nuevamente de la estrategia de dibujo rítmico (Maya, 2015), en la cual a medida que los estudiantes cantan una canción, realizan trazos correspondientes a la duración de las figuras musicales que la componen.

9 Un cuadrado lleno de punticos
Tita Maya

Un cuadro
lleno, lleno de punticos
es la casa
de la hormiga y el ciempiés
si lo pinto
lleno, lleno de punticos
despacito
comienzan a aparecer

Imagen 44, Un cuadrado (Maya, 2015)

Con esta actividad (Imagen 44), desde una dinámica progresiva, se llegó a una representación pictórica de la relación existente entre la duración de las figuras musicales, las palabras, los sonidos y los trazos. Los estudiantes se sorprendieron con la precisión o imprecisión con la que acababan la letra de la canción, la melodía y su dibujo, aludiendo indirectamente, a las nociones de equivalencia, métrica musical y ritmo.

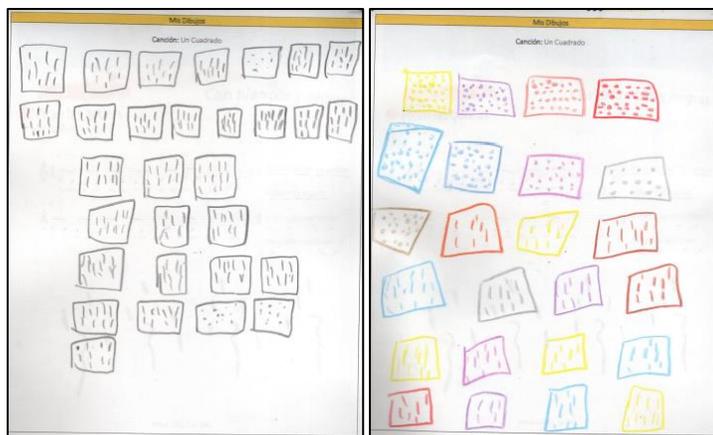


Imagen 45, Respuestas 2 categoría 3

Es justo considerar entonces, el papel preponderante que las representaciones visuales cobran en estas actividades, en un proceso que Arcavi (1999) llama “ver lo invisible”, entendiendo que los dibujos y símbolos trascienden las limitaciones de la mente, en cuanto al pensamiento, aprendizaje y solución de problemas. Como ya se ha dicho, ha de comprenderse que este medio de representación posee sus propias limitaciones, las cuales se desean reducir desde las relaciones posibles con la información tomada de los demás sentidos, que para el caso son, lo auditivo (mediante desciframiento de estímulos) y corporal (mediante esquemas).

Así pues, el siguiente paso para enlazar los objetos musicales y los objetos matemáticos (las fracciones), será transferir las experiencias previas del juego a las formas convencionales de escritura de la música, aterrizando en las figuras musicales y sus relaciones fraccionarias respecto a la redonda como unidad. Para conseguirlo, se facilitó la interacción de los estudiantes con el entorno virtual, en una actividad autónoma de exploración, deducción y generalización de relaciones.



Imagen 46, Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia

En este ejercicio que se señala en la Imagen 46, se introducen varias representaciones

que ilustran una propiedad presente en las figuras musicales: Cada figura dura la mitad de la anterior y el doble de la siguiente (Conde, 2009). Se presenta la construcción de una redonda como la figura equivalente a cuatro pulsos, denotados por radios de una circunferencia que se va llenando a medida que un sonido o un silencio se mantienen en el tiempo. Como puede verse, la redonda está representada por una circunferencia completa, formada por cuatro fracciones de 1/4 o, lo que es lo mismo, cuatro negras. En lo auditivo, mientras se forma la circunferencia se reproduce un sonido o se deja un silencio de duración equivalente a cuatro pulsos, marcados a igual distancia temporal por un golpe del metrónomo.

La blanca por su parte, se forma con el mismo método, pero esta vez alcanza a crear solo media circunferencia y el sonido o silencio se sostiene solo la mitad de la animación anterior, o sea, lo que tardan dos pulsos.

Con cada escena se aprenden también los signos que representan el sonido y el silencio de cada figura, consiguiendo acercarse a la generalización de la duración de los sonidos y los silencios de la música, en su lenguaje universal.

Esta actividad permitió que los estudiantes interactuaran con el conocimiento desde lo visual y auditivo, relacionándose en los diálogos con el gesto de marcar el pulso con las palmas, para confirmar conjeturas acerca de la duración de los sonidos.

¡Recuerda!: Cada figura equivale al doble de duración de la anterior y a la mitad de la siguiente.

					
SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA	SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda			Silencio de Blanca	
		$\frac{1}{2}$			
	Negra				
		$\frac{1}{8}$		Silencio de Corchea	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea			Silencio de Semicorchea	
	Fusa				$\frac{1}{32}$
		$\frac{1}{64}$		Silencio de Semifusa	

Imagen 47, Cuadro resumen de equivalencias de figuras musicales

Para apoyar la interacción con el entorno virtual se presentó en el cuaderno de trabajo una tabla que debía ser completada con la información extraída, tarea en la cual surge el siguiente diálogo entre el docente y un grupo de estudiantes:

Docente: Si la redonda y su silencio duran lo mismo ¿qué pasa con la blanca y su silencio?

Estudiantes: Duran lo mismo

Docente: y ¿si fuéramos a la negra? la negra y su silencio ¿cuánto duran?

Estudiantes: Lo mismo

Docente: ¿Y una corchea y su silencio cuanto podrán durar?

Estudiantes: Lo mismo

Docente: ¡Ah! ¿Entonces qué podemos generalizar?

Estudiante: (Ya responde solo una estudiante) Que cada símbolo de la música y el silencio, valen lo mismo.

Esta conversación permite evidenciar cómo la interacción con el ambiente computacional, en calidad de recurso semiótico multimodal (Arzarello et al., 2009), favorece la creación de una noción que no había sido tratada con antelación pero que se nutrió de las ideas del pulso, la cualidad de medida de los sonidos, la comparación de representaciones auditivas y visuales, la esquematización no convencional para describir sonidos y las experiencias corporales vividas en el desarrollo de las clases. La conclusión a la que llegaron los estudiantes representa un aspecto primordial en la simbolización de la música, pues su estandarización facilita la lectura y ejecución de las obras de una manera práctica. Además, para la actividad de completar el cuadro, saber esto les permitió replicar sin problemas la relación fraccionaria de cada figura.

Otra de las deducciones a las que llegaron los estudiantes corresponde al establecimiento de relaciones entre una figura y su anterior, como en el caso de la redonda y la blanca:

Docente: ¿Qué cantidad de pulsos hay en una blanca?

Estudiantes: Dos pulsos

Docente: ¿y cuantos había en una redonda?

Estudiantes: Cuatro

Docente: ¿Qué relación hay entre la blanca y la redonda?

Estudiantes: eh... (piensan) La blanca tiene... (otra pausa para pensar) la mitad de los pulsos que tiene la redonda.

Si se observa con atención, las palabras de los estudiantes describen una trayectoria de construcción de una nueva noción de equipartición, puesto que se establece una unidad de medida como base (el pulso), para luego expresar la duración de un sonido con relación a esta y trascender posteriormente a relacionar una figura con otra, partiendo de la cantidad de veces en las que el pulso aparece en ellas.

Por otro lado, en lo que constituiría un sistema de signos adicional, utilizando el entorno computacional se presentaron animaciones mediante barras, fracciones y sonidos o silencios, para que los estudiantes asignaran la figura correspondiente. Se les pidió ordenar de mayor a menor las figuras musicales, según su duración y las fracciones correspondientes a cada una, de menor a mayor como se indica en la Imagen 48.

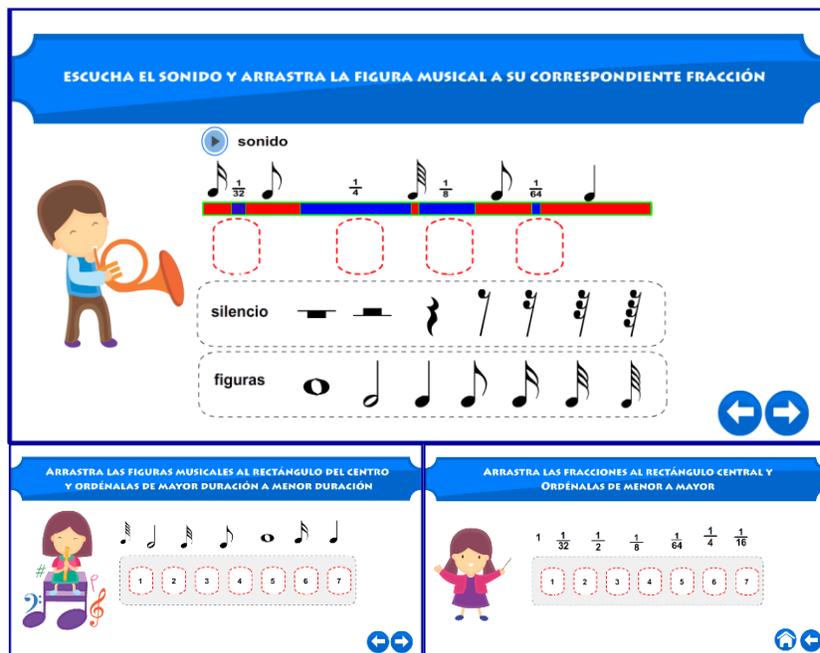


Imagen 48, Duración de las figuras, juego-Multimedia

En la primera escena, se usa una forma de representación dinámica que llamó la atención de los estudiantes desde la sección de ritmo. Mientras se reproducía un sonido o transcurría un silencio, una barra de color se iba formando y prolongando hasta parar al mismo

tiempo que el audio.

Esta representación responde a la concepción de fracción como medida y comparte las características de segmentos lineales, forma pensada por Freudenthal (1983) como el medio más elemental para ilustrar valores de magnitud en una relación fraccionaria. Para este estudio se considera un recurso correcto, en el sentido que permite observar las mismas propiedades de la duración de los sonidos, ahora de una forma gráfica (imagen 49).

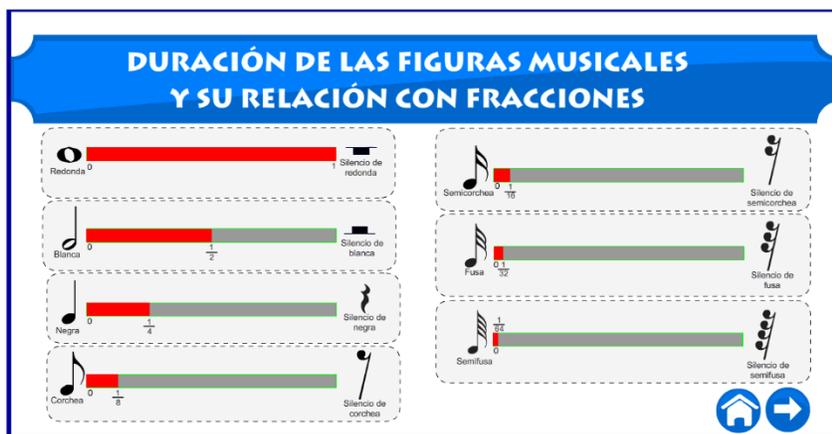


Imagen 49, Duración de las figuras musicales-Multimedia

Con la realización de estas actividades se consiguió el afianzamiento de las relaciones músico-matemáticas, llegando a completar la tabla de representaciones, como se muestra en la siguiente imagen:

											
SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA	SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA	SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA	SÍMBOLO	NOMBRE	EQUIVALENCIA
	Redonda	1		Silencia de Blanca	1		Redonda	1		Silencia de Redonda	1
	blanca	$\frac{1}{2}$		Silencia de Blanca	$\frac{1}{2}$		blanca	$\frac{1}{2}$		Silencia de Blanca	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{4}$		Silencia de Negra	$\frac{1}{4}$		Negra	$\frac{1}{4}$		Silencia de Negra	$\frac{1}{4}$
	corchea	$\frac{1}{8}$		Silencia de Corchea	$\frac{1}{8}$		corchea	$\frac{1}{8}$		Silencia de Corchea	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	$\frac{1}{16}$		Silencia de Semicorchea	$\frac{1}{16}$		Semicorchea	$\frac{1}{16}$		Silencia de Semicorchea	$\frac{1}{16}$
	Fusa	$\frac{1}{32}$		Silencia de Fusa	$\frac{1}{32}$		Fusa	$\frac{1}{32}$		Silencia de Fusa	$\frac{1}{32}$
	Semifusa	$\frac{1}{64}$		Silencia de Semifusa	$\frac{1}{64}$		Semifusa	$\frac{1}{64}$		Silencia de Semifusa	$\frac{1}{64}$

Imagen 50, Respuestas 3 categoría 3

Aquí se encuentra un consolidado de algunas de las formas de representación con las que habían interactuado hasta ese momento. Todas constituyen signos que expresan la medida de la duración de un sonido, tomando como base el número de pulsos (incluida una o varias

partes de este) de tal forma que, si se mencionaba la palabra de la figura musical, el estudiante pensaría en la fracción con respecto a la redonda, el símbolo que le corresponde y, tal vez, reproduciría en su mente uno de los sonidos que relacionó con esa figura.

En adición, se dispuso el material manipulativo que guarda similitud con los usados en los muy comunes problemas del pastel y la pizza, reportados por Freudenthal (1983) y Godino (2004) como poco convenientes para el desarrollo del concepto; pero esta vez, con una connotación diferente, dotada de sentido y precisión, gracias a su relación con los objetos musicales.



Imagen 51, Material manipulativo

El material manipulativo cumple el papel de representación concreta de la duración de las figuras musicales, mediante una comparación de la redonda con el equivalente a formar una circunferencia, la blanca a la mitad de esta, la negra un cuarto y así sucesivamente.

Este material les permitió a los estudiantes acercarse a la solución de ejercicios de comparación entre la duración de las figuras musicales, siendo más accesible que los sonidos (percibidos por el oído de una forma compleja de manipular), las barras de medida en el entorno virtual (porque aunque son dinámicas, en la programación no se incluyó la posibilidad de agruparlas o moverlas según sea la necesidad) y las formas abstractas de los números fraccionarios o las figuras musicales (cuyo entramado es el que se quiere resolver); todo desde la experiencia corporal de manipulación y tacto.

Luego de analizar las características de las fichas del material, se les pidió a los estudiantes relacionarlas con las figuras musicales, encontrando respuestas como las presentadas en la imagen.

	Ficha	Figura Musical	Ficha	Figura Musical
$\frac{1}{1}$	la redonda		circulo	Redonda 
$\frac{1}{2}$	la mitad de la redonda		mitad de circulo	blanca 
$\frac{1}{4}$	la mitad de la blanca		mitad de blanca	negra 
$\frac{1}{8}$	la mitad de una negra		mitad de corchea	corchea 
$\frac{1}{16}$	la mitad de la corchea		mitad de semicorchea	Semi corchea 
$\frac{1}{32}$	la mitad de la semicorchea		mitad de fusa	fusa 
	la mitad de la fusa		mitad de semi fusa	semi fusa 

Imagen 52, Respuestas 4 categoría 3

El principio manejado en las representaciones dinámicas virtuales (cada figura es el doble de la anterior y la mitad de la siguiente) fue transferido al material manipulativo, manteniendo la redonda como unidad de referencia y las demás figuras como partes de esta. Así, al preguntarles por los criterios que permitieron establecer una relación entre las dos representaciones, algunas de las respuestas fueron:

por que cada figura representa la duracion de las figuras musicales

Transcripción: Porque cada figura representa la duración de las figuras musicales.

la forma el tamaño y el color.

Transcripción: La forma el tamaño y el color.

iguales formas el color

Transcripción: Iguales formas, el color.

Imagen 53, Respuestas 5 categoría 3

En los aportes de los estudiantes se evidencia que no se tomó el material de forma aislada y sin sentido métrico, sino que se asumió como una herramienta adicional a las formas ya conocidas para el manejo de las figuras musicales y sus correspondientes fracciones.

La posibilidad de ampliar el cúmulo de representaciones no termina ahí; de los tantos

posibles, se utilizó un recurso más: la verbalización de la duración de los sonidos a través de palabras cantadas.

Figura	Nombre	Palabra
◦	Redonda	Taaaan
♪	Blanca	Taan
♩	Negra	Tan
♪	Corcheas	Ta-ta
♫	Semicorchea	Taca-Taca

Imagen 54, Figura musical, nombre y palabra

El producto de este nuevo recurso se vio plasmado, más que en lo visual, en formas de expresarse en el lenguaje corporal, pues las composiciones elaboradas fueron cantadas, en un espacio de encuentro lúdico, amigable y constructivo académicamente. Algunas producciones se muestran a continuación.

The image displays four panels of handwritten musical compositions. Each panel includes a title and a series of rhythmic notations with corresponding words.

- Panel 1:** Title: "Mi Composición". The notation consists of various rhythmic symbols (circles, vertical lines, and groups of three) with words like "tan", "taaan", "taca-taca", and "ta-ta" written below them.
- Panel 2:** Title: "taca taca". The notation shows rhythmic symbols with words "tan", "taaan", "ta-ta", "taca", and "taca" written below.
- Panel 3:** Title: "taan tuca". The notation shows rhythmic symbols with words "taan", "tuca", "tan", "taca", "tin", and "tunta" written below.
- Panel 4:** Title: "flato flata". The notation shows rhythmic symbols with words "taan", "taaan", "taca-taca", "tan", "taca-taca", and "tan" written below.

Imagen 55, Respuestas 6 categoría 3

Como puede notarse, cada quien eligió su estilo de escritura y definió ciertas convenciones que le permitieron manejar con mayor facilidad la ejecución musical de las composiciones.

Aquí se identificó una dificultad casi generalizada para el manejo de las figuras de silencios, pues debieron recurrir nuevamente a una forma no convencional para expresarlas, en este caso, encerrar la palabra en un globo. Para los docentes esta situación implicó la necesidad de retomar las representaciones dinámicas, para reforzar las concepciones de silencio musical, aprovechando la creatividad en la nueva forma de notación, como reflejo de las interpretaciones generadas en la clase.

6.4 Toda figura de la misma clase, tiene la misma duración

Para abordar esta categoría de análisis, se parte de entender que, en las observaciones reportadas hasta el momento, no se han dado elementos de peso para la identificación de una consecuencia perceptible cuando se incumplen las reglas métricas de la música y las fracciones. Es por esto que en la propuesta de intervención se enlazaron las cualidades de los materiales de apoyo a fin de crear situaciones y representaciones que les otorgaran a los estudiantes la posibilidad de cuestionar y percibir la presencia o no de particiones equitativas en la notación y reproducción de sonidos.

Para iniciar, se retoma la estrategia de dibujo rítmico, con la canción “pinto la cara del sol”. En esta tarea, los estudiantes desarrollaron ejercicios de comprobación, en lo que se puede tomar como una autoevaluación, ya que en el caso de no terminar el dibujo a tiempo o hacerlo muy rápido, habrá un estímulo auditivo, corporal y visual que les indicará que se debe corregir algo en el ejercicio. Aquí se enfatizó en la necesidad de conservar la igualdad en la duración de las figuras, relacionándolas con el tamaño del trazo que le corresponde y el carácter determinante de este principio para que el dibujo final sea exacto, nutriendo así la noción de equipartición.

Para evitar confusiones, se aclara que las observaciones que se realizarán aplican solo en canciones que llevan el pulso uniforme, ya que existen canciones que presentan elementos que les permiten, en diversas formas, alterar la duración habitual de las figuras musicales.

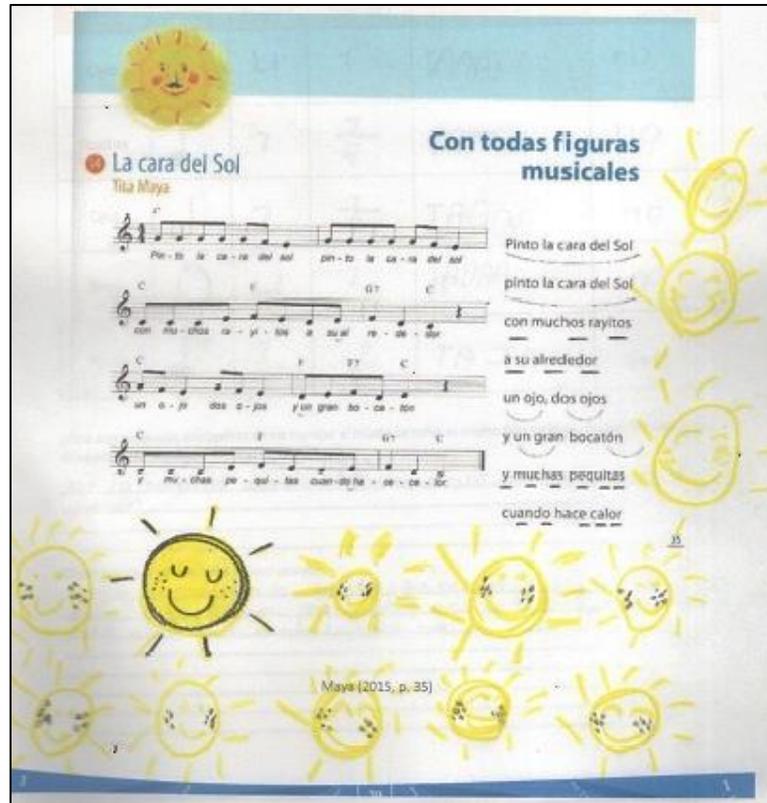


Imagen 56, Pinto la cara del sol (Maya, 2015)

Para hacer el análisis de la actividad, se les propuso a los estudiantes responder qué consecuencias encontraban al no manejar el mismo tamaño, trazo y tiempo dedicado a dibujarlo, en relación a la duración de cada figura musical. Algunas de las respuestas dadas fueron:

¿Qué consecuencias encuentras en no manejar el mismo tamaño, el mismo tipo de trazo y el tiempo dedicado a dibujarlo, para una figura musical en específico?

quedaría deforme, si hacemos los rayitos más rápido la canción sigue sonando y nosotros ya terminamos y si los dibujamos más lento la canción termina de sonar en esa parte y nosotros no hemos terminado

Transcripción: Quedaría deforme, si hacemos los rayitos más rápido la canción sigue sonando y nosotros ya terminamos y si los dibujamos más lento, la canción termina de sonar en esa parte y nosotros no hemos terminado.

que si uno dibuja muy rápido deja
la canción y termina uno primero
que la canción

Transcripción: Que, si uno dibuja muy rápido, deja la canción y termina uno primero que la canción.

que la nosotros siempre terminamos primero antes de la
canción

Transcripción: Que nosotros siempre terminamos primero, antes que la canción.

Terminaríamos más ligero que la canción y terminaríamos muy
feo el dibujo si lo hacemos más ligero que la canción.

Transcripción: Terminaríamos más ligero que la canción y terminaríamos muy feo el dibujo, si lo hacemos más ligero que la canción.

Imagen 57, Respuestas 1 categoría 4

Evidentemente, los estudiantes hicieron una relación acorde a las reglas de la métrica musical, marcando consecuencias observables de no seguir la equipartición con respecto al pulso y las diferentes figuras musicales que se vinculan con el dibujo y los sonidos. La alusión a la deformidad en la figura y terminar antes o después que la canción, son la muestra de una concepción implícita de necesidad de que todas las figuras de la misma clase respondan a la misma duración dentro de la canción, de manera indefectible.

Para ahondar en esa propiedad, se propuso hacer uso nuevamente de las herramientas virtuales, para mostrar varias animaciones. Se seleccionaron dos figuras, la negra y la corchea para recrear el evento en el que, de las cuatro negras que forman una redonda o las dos corcheas que forman una negra, una dura más o menos tiempo que las otras del mismo tipo. Para el caso, se reproducía un sonido correspondiente a una de las figuras, con una duración menor o mayor a los demás, a la vez de marcar un punto hasta donde llegaría el trazo si se prolonga ese sonido (ver imagen 58).

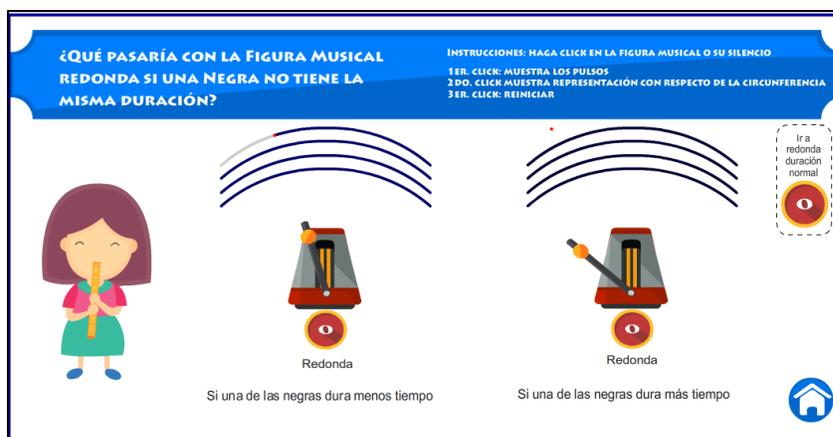


Imagen 58, Qué pasaría si-Multimedia

Las preguntas al respecto de los dos casos expuestos facilitaron la conclusión de la necesaria equidad de las partes dentro de las fracciones, puesto que se evidenció una consecuencia perceptible desde varias fuentes: el sonido duraba más o menos tiempo, una de las líneas era más larga o más corta, además de que el sonido y los trazos acababan antes o después de marcar el golpe del pulso.

El siguiente diálogo entre el docente y los estudiantes permitirá conocer las impresiones generadas:

Docente: Vamos a ver qué pasa si una de las negras no tiene la misma duración (reproduce la animación).

Estudiante: Que el círculo no queda completo y le queda faltando un moquito (pedazo pequeño) para poder completar el pulso entero.

Docente: ¿la qué, la figura qué?

Estudiante: La figura redonda

Docente: Entonces si estuviéramos tocando una canción y todos los músicos tocaran la redonda completa, pero hay un músico que la toca apenas hasta esta parte (señalando la figura presentada en la animación) ¿qué sucede?

Estudiante: Se pierde

El estudiante hizo una asociación de las formas establecidas previamente en las animaciones virtuales para la figura redonda, pensándola como un círculo formado por cuatro secciones correspondientes al tiempo que hay entre cada pulso, con el fenómeno de que uno de

esos pulsos dure menos. Como se lee, el estudiante identificó que algo no estaba bien según las reglas y estableció una forma de describirlo, “le falta un moquito”; pero no solo recurre a lo evidente para analizar el caso, cuando se compara con tocar un instrumento, dota de sentido y contexto la ocurrencia del error, dejando claro que el músico que no sigue las reglas “se pierde”.

Esta actividad fue presentada en Conde, Parada y Liern (2016), pero en su momento no había sido aplicada en aulas de clase. Ahora se puede confirmar la veracidad del supuesto de que la negra representaría para los estudiantes equiparticiones de tiempo de la redonda, las cuales se relacionarían con un fenómeno físico que se daría en el caso de alterar esta condición.

Desde esta perspectiva se da respuesta a la dificultad de ofrecer una forma de confirmación de la equipartición en los ejemplos de la pizza, el pastel y afines.

Del caso se desprendieron algunas preguntas que buscaban clarificar y dar a conocer los argumentos que condujeron a la conclusión presentada. Algunas de las respuestas fueron:

a. ¿Cuántas negras necesito para obtener una redonda? ¿Cómo podemos comprobarlo?
necesito 4 negras para completar una redonda con el pulso musical

Transcripción: Necesito 4 negras para completar una redonda. Con el pulso musical.

b. ¿Cuántas redondas necesito para obtener una negra? ¿Cómo llegaste a esa respuesta?
un cuarto de la redonda porque con 4 partes formamos la redonda.

Transcripción: Un cuarto de la redonda porque con 4 partes formamos la redonda.

c. Las negras que usamos para completar una redonda ¿Tienen la misma duración?
sí son las mismas y también tienen el mismo tamaño y la misma duración

Transcripción: Sí porque son las mismas y también tienen el mismo tamaño y la misma duración.

d. ¿Qué pasaría si una de las negras que forman una redonda no tiene la misma duración de las demás?
no se podría hacer una redonda porque no queda un círculo, no queda bien el pulso

Transcripción: No se podría hacer una redonda porque no queda un círculo, no quedaría

bien el pulso.

Imagen 59, Respuestas 2 categoría 4

En las respuestas se puede ver cómo los objetos musicales cobraron importancia en el lenguaje usado para argumentar, ya no necesitan recurrir a términos extraídos de contextos diferentes, sino que las representaciones se han ligado a concepciones matemáticas. Aparece también de manera explícita la esencia de esta categoría de análisis, la propiedad que cumplen las figuras musicales: todas las figuras de la misma clase, tienen la misma duración. Si esto no ocurre, hay un error, una alteración de la regla, a partir de lo cual se identifica un efecto negativo en lo estético y matemático de la música.

Adicionalmente, con esta situación de interacción con el ambiente computacional y el análisis de los fenómenos dinámicos, se hace un acercamiento a responder las inquietudes de Cortina et al (2013) frente a la idea de situar la equipartición como un obstáculo didáctico para un aprendizaje maduro de las fracciones. En sus planteamientos los autores identifican tres tipos de obstáculos, a saber, de origen ontogenético, de origen epistemológico y de origen didáctico. La teoría sostiene que los dos primeros no pueden, ni deben ser evitados, mientras que el tercero sí, pues se vale de las estrategias de enseñanza para procurar apoyar el aprendizaje de las nociones matemáticas.

Con la aplicación de actividades que vinculan los objetos musicales con los matemáticos, en la consecuente relación de representaciones semióticas de tipo auditivo, visual y corporal, los estudiantes van más allá de concebir la fracción como fracturador, como tantos de tantos o como incluida en un entero. El método planteado en la intervención didáctica pasa en diversos momentos por estas concepciones, pero no se queda allí, trasciende a partir de la reorganización de conocimientos y la consolidación de ideas.

Las actividades que se están analizando no invitan al estudiante a transformar la duración de las figuras, sino que las compara con otras desde una perspectiva métrica. Además, aquí no se limita la naturaleza multiplicativa de las fracciones, ni la aceptación de tamaño relativo en ellas; por el contrario, desde la comprensión del pulso y el tiempo musical, se entiende la posibilidad de que las figuras musicales no correspondan a una duración igual en todos los casos.

Finalmente, en el presente trabajo no se restringe la mirada de la fracción como incluido en un entero, pues se ofrece la posibilidad de expresar el tamaño de una cantidad, “con base en otra que no tiene físicamente nada en común” (Thompson y Saldanha, 2003, citado por Cortina et al, 2013, p. 13), al plantear preguntas como ¿Qué parte de una blanca son dos corcheas?; para responder, el estudiante no se basará estrictamente en que ambas figuras pueden describirse a partir de la redonda como unidad, sino que ahora las analizará de un modo independiente.

Responder a los cuestionamientos de los autores citados implica un análisis detenido y juicioso que ahonde en las descripciones y argumentos, aquí solo se ha hecho un acercamiento a fin de que el lector le ofrezca crédito a esta iniciativa aun cuando encontrara coherentes (que sin duda lo son) los reparos hacia la equipartición, en la perspectiva y contexto descrito por ellos.

Continuando con el análisis de las producciones de los estudiantes, conviene estudiar ahora la forma en la que se usó el material manipulativo para fortalecer la identificación de efectos consecuentes de no cumplir las características de la equipartición en los elementos musicales. Se plantearon varias preguntas acerca de las relaciones fraccionarias entre la duración de las diferentes figuras musicales.

Pregunta 1	
¿Cuántas semifusas caben en una blanca?	
Análisis	Gráfica
<p>comenzamos la blanca y la semifusa con la semifusa</p>	
Respuesta	
<p>se necesitan 32 semifusas para cubrir la blanca</p>	

Imagen 60, Respuesta 3 categoría 4

Para responder a esta pregunta los estudiantes tomaron la ficha que representa la duración de la blanca y la llenaron con cuantas fichas de duración correspondiente a la semifusa cupieran exactamente, para luego contarlas. Este era el primer nivel de dificultad que se planteó, notando que representó bastante facilidad para ellos.

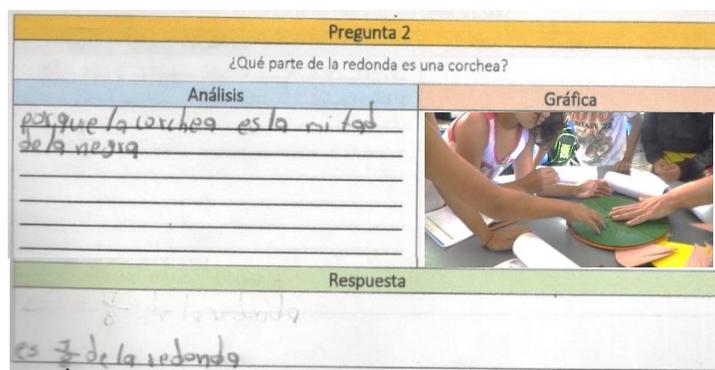


Imagen 61, Respuesta 4 categoría 4

La nueva pregunta representó mayor complejidad en las relaciones, lo cual ya se esperaba desde los reportes de Liern (2011), quien anticipaba que los estudiantes debían seguir tres pasos: Preguntarse cuántas figuras pequeñas caben en la figura más grande, dividir la figura grande en tantas partes como indique el número de figuras pequeñas que caben en ella y finalmente, establecer a una de las figuras pequeñas una de las partes del paso anterior. En la muestra no se hizo sencilla la descripción de los procesos de forma escrita, pero en la construcción de la respuesta a partir del material y con el apoyo del docente, se vivieron las etapas hasta llegar a una respuesta correcta.

El siguiente reto para la integración del material concreto con las situaciones virtuales y el análisis matemático, fue la representación de casos en los que la equipartición no se cumple, recreando la pregunta ¿qué pasa si una de las negras que componen una redonda, dura más o menos tiempo?

En la videograbación se registra la siguiente respuesta:

Estudiante: Le voy a leer la pregunta (inicia a leer) sabemos que en una redonda caben cuatro negras, pero ¿Qué pasaría si una de las negras tuviera menor duración que las demás? (retoma la explicación) por ejemplo, en la canción que cantamos ahorita [Pinto la cara del sol] era con... ¿con cuál era?

Docente: Blanca

Estudiante: Con blanca, entonces así (muestra en la hoja de trabajo y dibuja) cuando estábamos haciendo los ojos era como (canta) taan taan, entonces si era con otra, como con una negra, quedaría (inicia dibujo del primer ojo) taan y entonces aquí (inicia dibujo del segundo ojo) ta, quedaría un ojo mocho, quedaría en la mitad.

Docente: ¿Entonces es posible que dentro de la redonda digamos que la vamos a llenar con cuatro negras, pero que una de esas sea de diferente duración?

Estudiante: No

En esta explicación se da completamente la relación que se esperaba establecieran los estudiantes, pues toman todos los elementos aprendidos hasta el momento y los conjugan a partir de las representaciones semióticas, para elaborar conclusiones coherentes con la construcción de la noción de equipartición. Con este aporte queda claro que las figuras musicales y la necesaria equidad en sus duraciones al respecto del pulso, interactúan en un juego de reglas inquebrantables que garantizan la estética de la música como arte y la precisión matemática como ciencia. De esta forma se concluye este apartado, reafirmando las conclusiones con la postura de Conde, Parada y Liern (2016), para quienes la importancia de este ejercicio radica en que “existe una consecuencia acústica percibida por el estudiantado que le ayuda a dar un significado a las equiparticiones, situación que no se percibe en el ejemplo del pastel”.

6.5 El compás como composición de equiparticiones

Ya se ha hablado de las cualidades del sonido, las cuales establecen unas características medibles en la música, se abordaron el pulso, el tiempo y el ritmo, como elementos estructurantes de su precisión matemática; se estableció un sistema convencional de signos para su escritura, estudiando las relaciones fraccionarias entre sus duraciones, para finalmente concluir que, por regla general, toda figura de la misma clase debe tener la misma duración, de tal forma que, en caso de no cumplirse, la percepción auditiva, la ejecución corporal y la representación gráfica de estas, exhibirá una alteración; un error.

Con todo esto claro, corresponde ahora abordar un nuevo objeto musical: el compás. Concebido en este trabajo como una división del tiempo musical en partes iguales, de tal

forma que pueda ser medido. Para ello se establece un cifrado de compás, que es el que le dice al músico cuántos pulsos tendrá cada uno. De aquí, surge una nueva relación de equipartición entre los elementos de la música, porque al cabo de cada compás deberá haber pasado el mismo tiempo (esto en una pieza sin dinámicas, que es lo más común).

Para formar los compases se utilizan las figuras musicales de acuerdo al cifrado de compás, por ejemplo, en el cifrado de 4/4 se interpreta que cada compás debe tener el equivalente a la duración de cuatro negras o sus silencios y en el de 3/4, cada compás será equivalente a la duración de tres negras o sus silencios. Existen más cifrados de compases, los cuales siguen las mismas reglas matemáticas.

Para introducir a los estudiantes en el estudio de este objeto musical, se realizaron actividades de baile en diferentes ritmos, algunos fueron ejemplificados por ellos mismos y otros fue necesario mostrarlos en video. Adicionalmente, se presentó la estructura musical de los patrones rítmicos del vals y el reggaetón, explicando la lógica de construcción de los compases y su relación con la forma de bailarlos.

Todos los elementos explicados confluyeron en un momento de análisis en el que se planteaban dos situaciones en las que se altera el patrón rítmico con la introducción o resta de un pulso en uno de los compases y se espera descubrir las consecuencias de este fenómeno.

a. ¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo? que en la primera nos dio hasta el 4 y encambio la otra queda un poquito y nos enredamos mucho
a. ¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo? en la primera no debio nada y encambio en las dos ultimas si debio un poquito y nos enredamos en el vals.
a. ¿Qué pasa con el ritmo de Vals si en un compás colocamos o quitamos un tiempo? sonaria distinto seria un poco complicado para bailar

Imagen 62, Respuestas 1 categoría 5

Las dos primeras respuestas pueden leerse a partir de la división de los pasos de baile según el compás, recibiendo un estímulo corporal ante el incumplimiento de la equipartición,

mientras que la tercera responde a una consecuencia auditiva que se traslada luego a lo corporal.

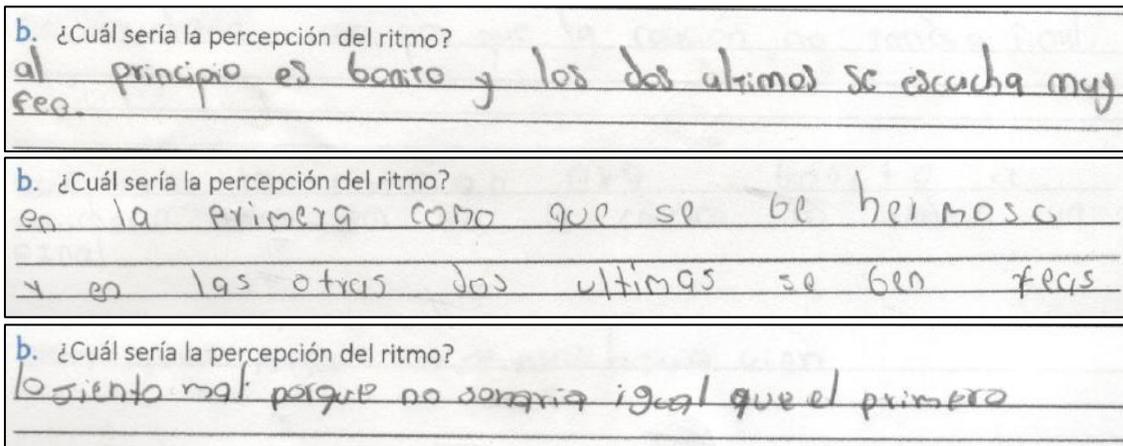


Imagen 63, Respuestas 2 categoría 5

En esta pregunta se auscultan las posturas estéticas de los estudiantes y se ligan a las relaciones matemáticas presentes en los compases. Para ellos, la precisión es hermosa, mantiene el orden; garantiza el agrado en lo que se percibe a través del oído, reafirman de una forma implícita, la postura platónica que sostiene que, si a las artes se les suprime lo medible, lo aritmético o pesable, lo que quedará no es mucho. También se puede leer categóricamente, a la luz del mismo pensador, la conexión entre la belleza (cercana a la perfección) y la medida, la exactitud. Esto refleja una vez más la comunicación semiótica entre las matemáticas y la música, a través del empleo de signos de un sistema de representación (Duval, 1998).

De aquí en adelante, las actividades estuvieron impregnadas del tinte estético correspondiente a la música y la precisión científica atribuible a las matemáticas. Diversos ejercicios apuntaron a confirmar una y otra vez la necesidad de conservar la equipartición, como puede verse en la imagen 63. Los procesos de relaciones matemáticas se llevaron a cabo en el espacio continuo del tiempo musical, en el que la correspondencia de duración de las figuras se estableció no solo en una concepción de las fracciones como parte-todo, sino en la ya conocida visión como medida.



Imagen 64, Respuestas 3 categoría 5

En la imagen 64 se observa cómo se evaluaron algunas composiciones, en busca de errores en los compases según las reglas músico-matemáticas, apoyados en el material manipulativo. La forma de analizar cada línea musical se describe con la siguiente explicación dada para el literal c:

Estudiante 1: Aquí comprobamos que esta está mala porque aquí pusimos todas las que eran (señala el material manipulativo) y acá sobraba una, entonces no cabía la negra.

Estudiante 2: O sea que viene sobrando esta semicorchea (muestra la ficha levantándola con la mano), porque si quitamos esta semicorchea, ahora sí cabe la negra entera. Vea, entonces (quita la semicorchea que indicó que estaba sobrando) así quedaría un compás de tres cuartos, pero como viene hasta acá (pone la ficha de nuevo y muestra el exceso), no quedaría un compás de tres cuartos porque no cabe la negra entera.

Como se evidencia, hubo una correcta interpretación de la dinámica de evaluación de los compases y las características que permitían concluir la existencia o no de un error. Algunos resultaban sencillos para la mayoría, mientras que otros guardaban mayor dificultad, pero todos se mostraron concentrados en la tarea de aprendizaje.

Para cerrar este espacio de análisis, se presenta a continuación el resultado de una

rúbrica de autoevaluación, en la que los estudiantes sintetizaron sus impresiones acerca de su desempeño en el estudio de los elementos básicos para elaborar una noción de equipartición de fracciones.

Tabla 5 Rúbrica de autoevaluación

Descriptor	Siempre	Algunas veces	Nunca
Represento correctamente la equivalencia entre las figuras musicales y la redonda.	6	11	
Reconozco a qué fracción es equivalente una figura musical, de otra diferente a la redonda.	4	13	
Explico claramente la consecuencia de que, en la duración de una figura musical, uno o varios pulsos no sean equivalentes.	4	11	2
Puedo determinar cuándo un compás está bien escrito, verificando la duración de cada figura y el cifrado correspondiente.	5	12	
Represento correctamente un patrón rítmico, haciendo uso del material manipulativo.	8	9	

De este ejercicio de autoevaluación puede interpretarse la concepción mayoritaria de que sus aprendizajes fueron amplios, ya que las respuestas se agrupan entre siempre y casi siempre en la ocurrencia del caso de dominar una habilidad necesaria para la adquisición de la noción de equipartición a través de objetos musicales. La habilidad en la que se sienten con mayor dominio la mayoría de los estudiantes es la representación de patrones rítmicos con el uso del material manipulativo y la que les generó menos seguridad fue la explicación de que en la duración de una figura musical, uno o varios pulsos no sean equivalentes.

La lectura general de la rúbrica refleja un impacto positivo en los aprendizajes de los estudiantes, pero no deja de advertir la necesidad de un acompañamiento constante en la realización de las actividades, a fin de identificar y proponer alternativas de corrección a las dificultades que se van generando en el avance del desarrollo de la propuesta de intervención.

7. Discusión

7.1 ¿Cómo construyen los estudiantes de primaria la noción de equipartición de fracción, a través de objetos musicales?

La construcción de la noción de equipartición de fracciones, a través de objetos musicales en estudiantes de primaria, implica la creación, rastreo, adaptación y uso de materiales pedagógicos pertinentes, que cumplan el rol de mediadores y guías en los diferentes momentos de la enseñanza. Adicionalmente, se reconoce como necesaria la correcta disposición actitudinal del docente para la dinamización de los procesos y el acompañamiento constante a los estudiantes, ofreciendo recomendaciones, aclaraciones y ejemplificación de situaciones detonantes de deducciones y nuevas preguntas.

El contexto descrito, crea las condiciones para hacer posible el desarrollo de las diferentes etapas para la construcción de la noción estudiada.

Inicialmente, los estudiantes establecen como cierta la existencia de relaciones entre las matemáticas y la música, le otorgan sentido matemático a las preconcepciones que poseen acerca de la identificación de los sonidos, hacen evidentes sus cualidades y las diferencian entre sí. En esta etapa descubren la existencia de una cualidad preponderante para el objetivo perseguido: la duración, como elemento susceptible de ser medido. Esta comprensión inicial es intuitiva, pues no poseen un sistema de comprobación de la exactitud del tiempo de duración de un sonido.

Para solucionar esta dificultad, los estudiantes descubren, estudian y comprenden la forma como el pulso, el tiempo y el ritmo musical constituyen una aproximación a la noción de equipartición, a la par de darle al pulso la condición de ser la unidad de medida de la música, clarificando además que no se trata de una medida de tiempo físico, sino una relativa a este, definida por el autor o ejecutor de una obra. Aquí se observa la equipartición en la condición de que la distancia entre cada pulso, sin importar el tiempo musical y patrón rítmico de una canción, debe ser la misma.

Acto seguido, los estudiantes encuentran que hay una forma de establecer unidades de medida a partir del pulso, que pueden ser convencionales o no convencionales inicialmente, hasta cobrar forma en las figuras musicales como lenguaje universal para expresar la duración de un elemento sonoro de la música. Además, establecen una relación fraccionaria entre cada una de ellas, partiendo de la redonda como unidad y las demás como cierta parte de ella, siguiendo la propiedad de que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

Gracias a este descubrimiento, aprenden que en este lenguaje se cumple una propiedad inquebrantable: todas las figuras de la misma clase tienen la misma duración. Esta propiedad es evaluada en condiciones de incumplimiento de la regla, alterando la duración de una de las figuras que podrían ser equivalentes a la otra, a través de representaciones dinámicas computacionales, uso de material concreto y representaciones corporales, en la tarea de establecer una consecuencia perceptible en el fenómeno descrito.

En este nivel ya habrán consolidado las bases y concepciones necesarias para la construcción de la noción de equipartición, pero dependerá del nivel de deducción y creación de esquemas mentales que cada estudiante posea, para determinar si ha concluido con un proceso exitoso. Para el docente, los insumos que le permitirán hacer una valoración de los niveles de adquisición de la noción serán las diferentes representaciones semióticas que se construyeron en las etapas anteriores, reflejadas en la argumentación y esquematización de las percepciones visuales, corporales y auditivas con las que interactuó.

Finalmente, retomando las ideas aprendidas hasta el momento, los estudiantes se involucran en la tarea de concebir el compás como un conjunto de equiparticiones, evaluando la correcta composición de líneas musicales, explorando la partición presente en pasos de baile y analizando la alteración de patrones rítmicos. En todos los casos, se busca reafirmar que no sería posible escribir, interpretar o bailar la música (la que no sufre alteraciones por el efecto de introducir nuevos objetos musicales), si no se siguen las reglas de equipartición estudiadas.

En este proceso de construcción de la noción de equipartición, los estudiantes reflejan además de los aprendizajes de leyes numéricas, el reconocimiento del carácter estético de la música y las matemáticas, a partir de la valoración de las experiencias auditivas placenteras y el rechazo a las que les generan sensaciones incómodas, ambas ligadas respectivamente al cumplimiento de la partición equitativa en la duración de las figuras musicales y los compases,

así como a las que no la cumplen.

La trayectoria descrita para la adquisición de la noción de equipartición, tiene su sustento en el análisis y sistematización de las representaciones, argumentos, dudas y aciertos de los estudiantes, en respuesta al objetivo de investigación del presente estudio.

7.2 Diseño de un ambiente computacional, material concreto y guías de aprendizaje, como mediadores para la construcción de significados de equipartición.

Debido a la naturaleza dinámica y, a juicio de los autores del presente estudio, poco explorada de los objetos matemático-musicales en el contexto educativo, el análisis de la construcción de la noción de equipartición en los estudiantes de primaria, exige el diseño y aplicación de una propuesta de intervención que se ajuste a las necesidades de quienes no han recibido formación en música y que se encuentran en proceso de adquisición de concepciones matemáticas alrededor de las fracciones.

Es por esto que este trabajo investigativo ofrece a la comunidad académica del sector educativo oficial, tres herramientas de apoyo que servirán como mediadores en el proceso de enseñanza de la equipartición de fracciones a través de objetos musicales. El primero es una pareja de guías de aprendizaje, denominadas guía del docente y cuaderno de trabajo, las cuales presentan los objetivos, tiempos, recursos y describen de manera secuencial las actividades a realizar. El segundo es un ambiente computacional en diseño multimedial que ofrece representaciones dinámicas auditivas y visuales, permite el desarrollo de actividades interactivas y favorece la comprobación de respuestas de manera autónoma. El último, pero no menos importante, es un material manipulativo que cumple la función de representar la duración de las figuras musicales, desde un diseño circular fraccionado según corresponde a cada una.

Los autores de este trabajo de investigación se encuentran en etapa de gestión ante la editorial Universidad de Medellín, para la publicación de los recursos educativos construidos, en procura de que estén a disposición de la comunidad de docentes y académicos interesados

en estudiarlos o implementarlos en las instituciones educativas. De este modo, se hace un aporte pedagógico fundamentado en los datos, desde el análisis previo de guías de aprendizaje, hasta la legitimación de la metodología, a través de su implementación y análisis.

7.3 Implementación de una propuesta de intervención que les permita a los estudiantes de primaria construir significados de equipartición, a través de objetos musicales.

Desde la aplicación de las actividades, se promovieron experiencias en el contexto musical (que además de ser un contexto real, puede ser cercano a los estudiantes), ofreciendo elementos de comprobación de la equipartición; lo cual no ocurre en algunos de los escenarios habituales en el estudio de las fracciones en la matemática escolar.

7.4 Artefactos tecnológicos en la enseñanza

En concordancia con los hallazgos de autores como Conde (2009, 2013), Conde, Parada y Liern (2016), entre otros, en esta investigación se encontró un gran aliado en la vinculación de los artefactos computacionales a la enseñanza de las fracciones en contextos musicales. Las evidencias de aprendizaje de los estudiantes develaron el factor motivante que constituyen, además de la riqueza conceptual que ofrecen al permitir la representación dinámica de sucesos que, mostrado de otra forma a los estudiantes, carecerían de sentido.

Adentrarse en la aventura de diseñar materiales educativos físicos o virtuales es un trabajo que requiere empeño, estudio y una vasta disposición de tiempo para la exploración, reestructuración y adaptación de los recursos a las problemáticas que puedan presentar en el camino; sin embargo, desde la experiencia vivida por los autores, se invita a docentes e investigadores a asumir este reto como una contribución a la creación de un vínculo que sin duda, muchos habrían deseado establecer desde la educación inicial: El aprendizaje de las matemáticas a través del siempre interesante mundo de la música.

7.5 Consideraciones generales

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la equipartición de fracciones, a través de objetos musicales, genera diversos escenarios de discusión que plantean cuestionamientos relevantes alrededor de la pertinencia de las actividades presentadas en la propuesta de intervención, las implicaciones de dirigir la atención investigativa hacia el vínculo de las matemáticas y la música, la fidelidad conceptual de las representaciones semióticas incluidas en los recursos de apoyo y las creadas por los estudiantes, entre otras que finalmente, confluyen en la intención de responder a la forma en la que los estudiantes de primaria construyen la noción de equipartición de fracciones, cuando se aplican estrategias didácticas que toman como base los objetos matemático-musicales.

Decir que la entrada de la música al aula de clase genera un clima de interés, llama la atención y favorece la concentración de los estudiantes frente al estudio de las matemáticas, es un motivo bastante relevante para situarlo como una de las primeras conclusiones a las que se llegó en esta investigación. Fueron variadas las emociones positivas que se observaron y valiosos los aportes ofrecidos en la disposición de un clima de aula óptimo para la construcción de conocimientos.

El enlace entre las dos ciencias y artes fue dotado de sentido conceptual y estético, a lo largo de la aplicación de la propuesta de intervención planteada. Cada relación matemática estuvo acompañada de una forma de representación musical que retrataba las impresiones, concepciones, aciertos y desaciertos en el tratamiento de una situación que implicara el uso de las fracciones, pero ahora sin la angustia de la equivocación. Esto gracias a la posibilidad de percibir el incumplimiento de las reglas músico-matemáticas, para volver sobre el error y corregirlo.

Dadas las múltiples dificultades identificadas desde el rastreo bibliográfico y la revisión de algunas guías de enseñanza utilizadas en la actualidad, es consecuente decir que, a pesar de los temores que pueda generar el proceso de vinculación de las matemáticas con la música, es un medio asequible y conveniente para que docentes y estudiantes prueben una alternativa poco explorada para la dinamización de procesos en el estudio de la equipartición de fracciones. Si se le otorga relevancia a esta iniciativa, puede concluirse con base en los

resultados presentados, que se evitarán los conflictos conceptuales provenientes de la metáfora de partir chocolatinas, pizzas, entre otras que no dotan a los estudiantes de mecanismos de verificación de la existencia o no de un reparto equitativo.

7.6 Otras consideraciones

El presente estudio abre puertas al desarrollo de nuevas investigaciones, en las que se haga una aplicación de la propuesta de intervención aquí presentada, pero ahora en estudiantes del primer ciclo de educación básica primaria (1° a 3°). El fin sería constatar el supuesto de que, a través de la adaptación de los recursos de apoyo, esta población construirá también la noción de equipartición, a través de objetos musicales, para este caso, con una connotación del concepto de fracción desde un enfoque intuitivo.

Otra iniciativa investigativa que puede desprenderse del presente trabajo es la caracterización de las formas en las que los estudiantes aplican la noción de equipartición de fracción adquirida, en contextos ajenos al ambiente musical, revisando el proceso de transferencia del saber hacia formas más complejas del tema.

Finalmente, se propone la posibilidad de estudiar la concepción de infinito desde el aprendizaje inicial de las matemáticas, haciendo uso del pulso musical y sus características, como contexto para el planteamiento de una propuesta didáctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. In F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of PME-NA* (pp. 55-80). Ohio: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education Columbus.
- Arzarello, F., Paola, D., Robuti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 97–109.
- Berrios, R & Lucca, N (2009) *La investigación cualitativa: fundamentos, diseños y Estrategias*. Editorial SM Colombia Sur América.
- Botero, M. Guevara, C. & Sierra, P (2013). *Matemáticas 4° y 5°*. Guías de Aprendizaje. Fundación Escuela Nueva Volvamos a la Gente. Bogotá D.C.
- Conde, A. (2009). *Las fracciones al ritmo de la música*. (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Conde, A. (2013). *La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones*. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Conde, A., Mourut de Montpellier, O., Liern Carrión, V., & Pluvinage, F. (2011). El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza. *SUMA*, 68 (noviembre 2011), 107-113. Recuperado de <http://revistasuma.es/revistas/68-noviembre-2011/el-sonido-de-las-fracciones-una.html>.
- Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 16(2).
- Coronado, J. P. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias pedagógicas*, (2), 235-244
- Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Revista Educación Matemática*, 25(2).
- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.
- Dienes, Z.P. (1977): *Las seis etapas del aprendizaje de la matemática*. Barcelona. Teide.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 38.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *LA GACETA DE LA RSME*, Vol. 9.1, p.143-168.
- Fernández, M., & Quero, C. (2015). Música y matemáticas: conexiones curriculares para un mayor éxito educativo. *Recursostic.educacion.es*. Recuperado de <http://recursostic.educacion.es/artes/rem/web/index.php/es/curriculo-musical/item/331-m%C3%BAsica-y-matem%C3%A1ticas-conexiones-curriculares-para-un-mayor-%C3%A9xito-educativo>.
- Fraisse, P. (1976), *Psicología del ritmo*. Madrid: Morata.
- Gaviria, M (2015). *Noción de Número: Cognición y Juego*, Tesis para optar al grado de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada, España: GAMI,
- Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.
- Johnson, M. (1987). *The body in the Mind*. Chicago: University of Chicago Press
- Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieran(Ed). *Recent Research on Number Learnin*, (pp. 128-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Lakoff, G. & Nuñez, F. (2000). *Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
- Lamour, H. (1985). *Pédagogie du rythme*. Paris: Revue E.P.S
- Liern, V. (2008). Las fracciones de la música. *Revista Suma*, (59), 129-134.
- Liern, V. (2011). Música y matemáticas en la educación primaria. *Revista Suma*, (66), 107-112.
- López, A. (1987), “¿Por qué y cómo enseñar fracciones?”. “En cuadernos de Pedagogía”
- López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.
- McAdams, S. (1993). Recognition of sound sources and events. In S. McAdams y E. Bigand (Eds.), *Thinking in Sound: The Cognitive Psychology of Human Audition* (pp. 146-198). Oxford: Oxford University Press.

- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Matriz de referencia Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Curriculares de Matemáticas*. Bogotá. Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (2015). Guía de enseñanza para docentes de primaria, matemáticas grado 4° Módulo B.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*. Bogotá: Magisterio.
- Parada, S. E., Conde, L. A., & Fiallo, J. (2016). Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación/Digital Mediation and Interdisciplinarity: an Approach to the Study of Variation. *Bolema*, 30(56), 1031.
- Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema. *Revista Que hacer educativo. Didáctica y practicas Docentes*, 40-45.
- Peralta, J. (2003) *Matemáticas para no desafinar*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 6.2, 437–456
- Pérez, M. (2009). Una pedagogía dialógica desde la educación artística-musical. *El Artista*, 6, 60-72. E-ISSN: 1794-8614.
- Prieto Castillo, D. (1996). La enseñanza en la Universidad. Buenos Aires, Argentina: UNLA.
- Red de escuelas de Campana. (2001). *La enseñanza de las fracciones en el 2do ciclo de la Educación General Básica*. Buenos Aires: Bureau Internacional de Educación UNESCO.
- S.L. Fotocopias. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (1996). Metodología de la investigación. Edición McGraw-Hill.
- Silva, E. (2009). Música como estrategia educativa en el proceso enseñanza aprendizaje para el aprovechamiento académico de los estudiantes a nivel elemental en la región Educativa de Bayamón. (Tesis de Maestría). Universidad Metropolitana.
- Thompson, P.W. y L.A. Saldanha (2003), “Fractions and Multiplicative Reasoning”, en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.
- Tiburcio, S. (2002). Música y Matemáticas. *Elementos*, N.º 44, (8) Diciembre-febrero, 21- 26.

Varela, F., Thompson, E. & Rosch, E. (1998). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge: MIT Press.

Wilensky, U. (1991). Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education. In I. Harel, y S. Papert, (Eds.), *Constructionism* (pp.193-204); Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Willems, E. (1993). *El ritmo musical* (Trad V. Hemsy). Buenos Aires: Eudeba.