UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

RESIGNIFICACIÓN DEL USO DE LAS NOCIONES DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD CON ESTUDIANTES DEL GRADO SÉPTIMO (12 – 17 Años).

AUTOR:

LUVIN CORNELIO CHAVERRA RAMIREZ

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

QUIBDÓ

2018

RESIGNIFICACIÓN DEL USO DE LAS NOCIONES DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD CON ESTUDIANTES DEL GRADO SÉPTIMO (12 – 17 Años).

AUTOR:

LUVIN CORNELIO CHAVERRA RAMIREZ

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

Dra. TAMARA DEL VALLE CONTRERAS

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

QUIBDÓ,

AGOSTO - 2018

DEDICATORIA

A Dios, por haberme bendecido al forjar mi camino, guiarme por el sendero correcto y ser mi guía al desarrollar esta tesis como parte de mi proyecto de vida.

A mi hija, mis padres y hermanos, por su apoyo constante y la confianza puesta sobre mí en todas las batallas de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Con la realización de este trabajo que reporta un sueño de formación en el campo de la investigación, expreso un profundo y sentido agradecimiento a:

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), por haberme brindado la oportunidad de ser beneficiado en el programa de Becas para la Excelencia Docente.

La Universidad de Medellín y la Fundación Universitaria Claretiana por abrir sus espacios para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El doctor Luis Albeiro Zabala Jaramillo, por haberse tomado el arduo trabajo de orientarme en el campo de la investigación, mostrarme el camino en el cual se investiga desde la Teoría Socioepistemológica y por haber tenido toda la paciencia del mundo para guiarme con sus ideas durante todo el desarrollo de la tesis.

La doctora Tamara del Valle Contreras, por su disposición al aceptar asesorar intelectualmente este proyecto y brindar sus aportaciones.

La doctora Daniela Reyes Gasperini, quiero agradecer muy especialmente, por haber confiado en mí al aceptar leer este trabajo y contribuir para la consolidación de este proyecto.

La doctora Solange Roa Fuentes y el doctor Javier Santos Suarez Alfonzo, agradezco porque sus conferencias y orientaciones durante este proceso de investigación aportaron significativamente a este logro.

Robinson Mena Buenaño, compañero, colega y amigo, te agradezco por tu desinteresada ayuda y por estar ahí cada vez que te necesité.

El amigo y compañero de trabajo Mario Onni Arriaga Palacios, quien siempre estuvo dispuesto a orientarme en este proceso de investigación.

Las amigas y compañeras de trabajo Martha Cecilia Palacios Mena y Ernestina Valencia Gamboa, por su apoyo y colaboración desde el principio hasta el final en la realización de este proyecto.

El rector de la Institución Educativa Armando Luna Roa, Especialista Daffny Amadeo Palacios, por su voluntad a la hora de generar espacios para socializar esta investigación y estimular cada día mi vocación docente.

Los docentes y estudiantes de la Institución Educativa Armando Luna Roa, por su apoyo y comprensión durante el desarrollo de las actividades programadas en la investigación.

La facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Medellín, por haberme asignado docentes competentes y comprometidos en los procesos de formación.

RESUMEN

La investigación de esta Tesis de Maestría pretende fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes del grado séptimo (entre 12 y 17 años), mediante la resignificación del uso de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, para contribuir al mejoramiento de los resultados en la prueba SABER. Durante el desarrollo este propósito, se diseñó un cuestionario relacionado con la temática objeto de estudio, el cual, fue aplicado a un grupo heterogéneo de 24 estudiantes, y también se realizó entrevistas semiestructuradas que fueron aplicadas a un grupo de 8 estudiantes, con quienes se documentaron los datos recolectados sujetos a un análisis a-priori y a-posteriori bajo fundamentos de la Socioepistemología para posteriormente realizar la confrontación de los resultados obtenidos en el a-priori y a-posteriori, con la intención de favorecer la construcción social del conocimiento.

El habitual discurso Matemático Escolar, centra su atención en los objetos matemáticos y en la forma como se comparten los conocimientos en las prácticas de aula, sin cuestionarse en el cómo propiciar aprendizajes con base en los usos del objeto de conocimiento matemático, ni atender a direccionar los aprendizajes mediante problemas que ayuden a reflexionar y poner en relieve el conocimiento que tiene el estudiante. En este sentido, como plantean Cantoral y Farfán (2003) “la Socioepistemología al tratar los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza” (Citado en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 86); nos permitió registrar cuáles conceptos y procesos requieren de resignificación progresiva para entender y atender la realidad del estudiante con el propósito de mejorar las situaciones de aprendizaje.

Para mostrar lo anterior, partimos del estudio de la Proporcionalidad como objeto matemático transversal que propicia el aprendizaje basado en el proceso de construcción social del conocimiento a través de las prácticas socialmente compartidas y con las actividades diseñadas en la unidad didáctica se logró identificar el rol asumido por los estudiantes al transitar el proceso de significación de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad en un conjunto de situaciones problemas que involucran experiencias construidas a partir de la realidad que se vive en la cotidianeidad de los individuos.

Los resultados de esta investigación proporcionan elementos que ponen en juego prácticas matemáticas que involucran múltiples significados de los objetos matemáticos y sus interrelaciones en las prácticas sociales asociadas a un campo de problemas que hacen transparente la relación entre las matemáticas del cotidiano y la matemática escolar.

Palabras clave: Teoría Socioepistemológica; Resignificación; Usos; Razón, Proporción, Proporcionalidad.

ABSTRACT

The research of this Master Thesis aims to strengthen the teaching and learning process in the seventh grade students (between 12 and 17 years old), by resignifying the use of the notions of Reason, Proportion and Proportionality, to contribute to the improvement of the results in the SABER test. During the development of this purpose, a questionnaire was designed related to the subject matter of the study, which was applied to a heterogeneous group of 24 students, and semi-structured interviews were carried out that were applied to a group of 8 students, with whom they documented the data collected subject to an a-priori and a-posteriori analysis under the foundations of the Socioepistemology, in order to subsequently compare the results obtained in the a-priori and a-posteriori, with the intention of favoring the social construction of knowledge.

The usual School Mathematics discourse focuses on mathematical objects and the way knowledge is shared in classroom practices, without questioning how to promote learning based on the uses of the mathematical knowledge object, or address Learning through problems that help reflect and highlight the knowledge that the student has. In this sense, as proposed by Cantoral and Farfán (2003) "Socio-Epistemology in dealing with the phenomena of production, acquisition and dissemination of mathematical knowledge from a multiple perspective, which incorporates the study of the epistemology of knowledge, its socio-cultural dimension, processes associated cognitive mechanisms and institutionalization via education "(Cited in Cantoral, Farfán, Lezama and Martínez, 2006, p.86); It allowed us to register which concepts and processes require progressive resignification to understand and address the reality of the student with the purpose of improving learning situations.

To show the above, we start with the study of Proportionality as a transversal mathematical object that promotes learning based on the process of social construction of knowledge through socially shared practices and with the activities designed in the didactic unit. It was possible to identify the assumed role by the students when going through the process of meaning of the notions of Reason, Proportion and Proportionality in a set of situations that involve experiences built from the reality that is lived in the daily life of individuals.

The results of this research provide elements that put into play mathematical practices that involve multiple meanings of mathematical objects and their interrelations in social practices associated with a field of problems that make transparent the relationship between the mathematics of everyday life and school mathematics.

Keywords: Socioepistemological theory; Resignification; Applications; Reason, Proportion, Proportionality.

INTRODUCCIÓN

Con la presente investigación de esta tesis de maestría se propuso estudiar la articulación de los aspectos sociales y educativos en torno a las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, bajo el marco de la Teoría Socioepistemológica (construcción social del conocimiento matemático). Además, resignificar desde los usos de objetos matemáticos pone en juego herramientas teóricas que contextualizan diversos significados de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, en situaciones problemas, permitiendo con ello, promover su funcionalidad a la hora de "comparar, relacionar, aproximar, estimar, equivaler, igualar, construir una unidad de medida, medir y conmensurar"; en diferentes situaciones del quehacer cotidiano del estudiante (Reyes-Gasperini, 2016, p. 23). Es por esto que, mediante un estudio de caso con estudiantes del grado séptimo se procura evidenciar cómo lo que ellos aprendan influye sobre sí mismo y sobre sus vidas. Con el propósito de construir situaciones de aprendizaje orientadas a desarrollar actividades con los estudiantes que promuevan la práctica educativa como espacios de interacción entre los objetos y las prácticas asociadas a ellos. En particular, se requiere articular las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, como elementos que trascienden el currículo escolar, ya que con base en la experiencia estamos convencidos que al implementar actividades en el aula, que contemplen dicha articulación se pueden superar las dificultades que se enfrentan al momento de lograr aprendizajes útiles en la vida cotidiana de los estudiantes.

Por consiguiente, esta tesis de maestría sitúa al lector en los diferentes alcances de la investigación, que se presentan en seis capítulos donde se relata paso a paso los aspectos que la involucran. En el primer capítulo se estudia la problemática, los antecedentes, se relacionan la hipótesis y los objetivos; el segundo describe los aspectos históricos y epistemológicos de la Razón, Proporción y Proporcionalidad; en el tercer capítulo se desarrolla el marco teórico; el cuarto explica la metodología de investigación; en el quinto se presenta el análisis de los datos arrojados inicialmente, y, en el sexto y último capítulo, se presentan las conclusiones y las proyecciones. Finalmente, hay un apartado que contiene la bibliografía utilizada y los respectivos anexos. Hacemos una breve descripción de cada uno de los capítulos que más adelante se trabajarán en extenso.

En el capítulo 1 presentamos la problemática, antecedentes y los objetivos de investigación. En primer lugar, se entregan antecedentes que sugieren la necesidad de indagar respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos: Razón, Proporción y Proporcionalidad, a partir de sus usos en diferentes contextos. En segundo lugar, se muestra algunas investigaciones que hacen énfasis en las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, como aspectos indispensables en el aprendizaje de las matemáticas; "investigaciones focalizadas en la identificación de los fenómenos o situaciones problemas que constituyen la razón de ser de un objeto matemático, junto con los sistemas de prácticas que se ponen en juego, sus contextos de uso y marcos institucionales" (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017, p. 1). En tercer lugar, exponemos los objetivos de investigación, siendo estos los que orientan cambios profundos en las prácticas de aula bajo la complejidad en el estudio de objetos matemáticos, dificultades en el aprendizaje y al centrar la mirada en el estudiante frente al uso y razón de ser de los objetos matemáticos en la vida cotidiana de todo ciudadano.

En el capítulo 2 se presenta un análisis histórico-epistemológico de los conceptos razón, proporción y proporcionalidad. Con ello, se pudo dar profundidad a los contenidos del currículo al estar asociados con otros conceptos o procedimientos y una valoración crítica de los mismos. Así también, nos permitimos mostrar su aplicación en contextos aritméticos, geométricos y su funcionalidad en otras áreas del saber.

Bajo el enfoque de la Socioepistemología, que entre otras cosas, para Cantoral y Farfán (2004) "se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión" (Citado en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 86), en el tercer capítulo, consideramos caracterizar los fundamentos teóricos que direccionan el desarrollo de esta investigación.

En el capítulo 4 nos adentramos en describir el diseño de la metodología de una investigación cualitativa centrada en un estudio de casos, que según Stake (2007) "nos permite indagar en lo particular y complejo de un caso singular para llegar a comprender el fenómeno observado" (Stake, 2010, p. 11).

El análisis de los resultados obtenidos mediante las actividades del cuestionario de preguntas cerradas y Semi-abiertas y las entrevistas Semi-estructuradas; nos permitió en el capítulo 5 seleccionar actividades desarrolladas antes y después de la experiencia (a priori y a posteriori), fundamentados en la Socioepistemología como herramienta principal que aporta elementos transversales para propiciar los usos de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad. Lo anterior se desarrolló en dos momentos: en primer lugar, se aplica el cuestionario y en segundo lugar, se realiza el análisis de la entrevista.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta investigación, donde se muestra la necesidad de intervenir las prácticas que se viven día tras día en el aula de clase al estudiar las nociones de razón, proporción y proporcionalidad, sin atender al escenario de los individuos a quienes se dirige la enseñanza. De esta manera, se busca alcanzar aprendizajes mediante actividades que propicien la construcción social del conocimiento matemático y su uso en diferentes contextos.

Índice

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se presentan algunas investigaciones relacionadas con la noción de proporcionalidad, de igual forma, se pretende esbozar en forma breve la necesidad de realizar un estudio en profundidad de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad con estudiantes del grado séptimo, con el propósito de abordar la variedad de representaciones que tienen estos objetos de conocimiento en la práctica social y su utilidad en el estudiante para el aprendizaje de las Matemáticas.

1.1. PROBLEMÁTICA

La Institución Educativa "Armando Luna Roa" ubicada en el municipio de Quibdó, ciudad capital del departamento del Chocó (Colombia), es el plantel en el cual se va a desarrollar este proyecto de investigación y los resultados obtenidos se implementarán para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta es una Institución cuyas metas están enfocadas en formar estudiantes capaces de liderar la transformación de su realidad social a partir del desarrollo de las distintas dimensiones contenidas en el currículo y la pertinencia de sus procesos. La IE. Armando Luna Roa, inició labores en 1972 con una sola jornada, con la finalidad de resolver problemas de cobertura en el servicio educativo del municipio de Quibdó y aportar con la educación del Departamento.

Con su creación se buscaba dar oportunidad de acceso educativo a las personas provenientes de los crecientes barrios periféricos de la actual comuna número uno del municipio de Quibdó y, posteriormente, a los desplazados que finalizando la década de los 80´s comenzaron a irrumpir en el municipio como resultado de la crisis humanitaria que ha dejado el conflicto armado, un número significativo de la población desplazada es infantil y juvenil, de los diferentes puntos de la geografía regional. Hoy sigue cumpliendo con esa labor social desde su fundación y juega un papel muy importante en la reconstrucción del tejido social de este municipio.

La población estudiantil es mixta, diversa culturalmente, de bajos recursos económicos, muchos de ellos son desplazados y en su mayoría viven en un ambiente donde reina la soledad y el abandono, algunos trabajan para poder sobrevivir y la mayoría de las familias tienen a la madre como cabeza principal del hogar.

Al analizar históricamente las fortalezas y debilidades en las competencias evaluadas en Matemáticas noveno grado durante los años 2009, 2012 y 2014, es evidente que en esta evaluación realizada periódicamente la competencia Comunicación, representación y modelación, no ha presentado avances en este lapso de tiempo, siendo su nivel de competencia débil durante estos tres años, resultados que ilustran los conocimientos, capacidades, habilidades y destrezas de los estudiantes; aspectos que resaltan la importancia del trabajo articulado de la razón, la proporción y proporcionalidad como objetos matemáticos que no deben trabajarse aislados, "conocimientos que producen pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones, para ejecutar algoritmos y realizar cálculos y para inventar y descubrir nuevas matemáticas" (Skovsmose, 1999, p. 15).

Resulta necesario fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante el enriquecimiento de las nociones de la Razón, Proporción y Proporcionalidad, y esto a su vez, debe "potenciar a los estudiantes ciudadanos para revelar la naturaleza crítica de la sociedad en que viven y para convertirse en actores que comprenden, transforman su realidad social, política y económica, y contribuyen a la creación de condiciones más democráticas en la sociedad" (Skovsmose, 1999, p. 14).

Por lo expuesto anteriormente, en esta investigación se debe garantizar la búsqueda de las prácticas asociadas a las nociones de razón, proporción y proporcionalidad, para propiciar su construcción social y su aplicación en diversos contextos "vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico" (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017, p. 4).

Sin embargo, es importante resaltar que el interés por favorecer ambientes de aprendizaje bajo un escenario socio-cultural resaltando prácticas sociales que involucren saberes matemáticos se ha incrementado en los últimos tiempos, esto obedece a la necesidad de intervenir en la realidad que vive el estudiante desde el aula y fuera de ella con el propósito de formar un ciudadano que se inserte de manera responsable a la sociedad.

Según el MEN (1998) "algunos de los conceptos fundamentales en la Enseñanza de las Matemáticas son la Razón y la Proporción; promoviendo en el estudiante el razonamiento proporcional desde preescolar hasta el grado undécimo de educación media, y se construye como un eje fundamental en el pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos" (Citado en Gutiérrez, 2013, p. 3), por lo que este tipo de razonamiento debería ser estudiado a profundidad para que se produzca una correcta construcción, práctica y empleo adecuado de éste; entendiendo como razonamiento proporcional según Lesh, Post y Behr (1998) "una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación, realizar múltiples comparaciones, capacidad de almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información" (Citado en Gutiérrez, 2013, p. 3).

Con la aplicación de esta investigación se busca mejorar el aprendizaje de los estudiantes del grado séptimo, a través del enriquecimiento de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, y con esto propiciar dinámicas que promuevan la construcción social del conocimiento matemático; a partir del estudio y análisis de aportes significativos de otras investigaciones que hacen énfasis en estos objetos de conocimiento como aspectos indispensables en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Como docente de aula beneficiado en el programa de Becas para la Excelencia Docente, hacemos esta investigación con el propósito de desarrollar un proyecto que impacte en el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje en la Institución Educativa Armando Luna Roa y de igual manera, mejorar los resultados en las pruebas Saber.

Las estructuras matemáticas, la red de significados que articulan un tema y las expectativas de aprendizaje, nos invitan a reflexionar en torno al "rol formativo y transversal que juega la proporcionalidad en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio" (Reyes-Gasperini, 2013, p. 22), ya que en algunos casos, estos conceptos carecen de argumentaciones y significados que ilustren situaciones donde se garantice la apropiación del saber matemático en la escuela, y con esto enriquecer las diferentes estructuras que orientan el hacer matemático, y más concretamente, que favorezcan al desarrollo del pensamiento lógico-matemático. De allí, la importancia del estudio y análisis de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, en esta investigación como objetos de conocimiento que incluyen situaciones vivenciales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A la luz de la noción de resignificación y los usos de los conocimientos matemáticos, la problemática que atiende esta investigación es aquella que busca propiciar la articulación entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano de los individuos; un caso particular es conectar mediante prácticas el desarrollo del pensamiento proporcional en la escuela y las actividades en el quehacer de un albañil. En este sentido, después de plantear y analizar la situación de un estudiante que está vinculado con una actividad u oficio (albañilería), hacemos el siguiente interrogante: ¿qué hace que un albañil saque cuentas rápidamente y que un estudiante en términos proporcionales, en el nivel escolar muchas veces con más estudios no sea capaz de sacar cuentas?

Lo anterior describe que, los usos del conocimiento en prácticas sociales ponen en juego la supervivencia, en cambio, en el sistema escolar los objetos de conocimiento matemático carecen de significados al estar vinculados a procedimientos que están estandarizados en el currículo. De este modo, la albañilería como práctica de referencia que favorece la construcción de conocimientos, nos permitirá estrechar la distancia existente entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano, lo cual implica reconocer el valor del uso de los conocimientos matemáticos en escenarios no escolares.

1.2. ANTECEDENTES

Son muchos los estudios realizados en torno a la razón, proporción y proporcionalidad como objetos de conocimiento indispensables en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Sin embargo, son pocas las investigaciones dedicadas específicamente a la transversalidad de dichos conceptos en la Matemática Escolar y otras disciplinas. A lo que Reyes-Gasperini (2013), aporta lo siguiente:

> Existe una fuerte centración en los procesos didáctico-pedagógicos, sin que ello implique una problematización del saber matemático escolar en juego, es decir, no encontramos en estos estudios que se trate al saber matemático como variable: hacer del saber un problema, un objeto de análisis didáctico, localizando y analizando su uso y su razón de ser (Reyes-Gasperini, 2013, p. 12).

A continuación, se presentan investigaciones que resaltan la importancia de profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad en diferentes marcos teóricos. Investigaciones que han efectuado trabajos previos desde diversos ámbitos y aportan elementos profundos de estrategias educativas dentro de los procesos de formación continua que favorecen las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social, con el ánimo de intervenir en el proceso de enseñanza y aprendizaje al producir innovaciones que permitan transformar las prácticas de aula mediante el empoderamiento docente.

Reyes-Gasperini (2013), en sus estudios sobre el Aprendizaje de la Proporcionalidad desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica, "propone que se debe establecer una clara diferenciación entre las nociones de Fracción, Razón, Proporción y proporcionalidad, puesto que el pensamiento proporcional excede la simple utilización del algoritmo descrito y el proceso que vive el saber matemático debe garantizar lograr aprendizajes centrados en prácticas sociales. Este hecho amerita profundizar en las diferencias significativas que tienen entre sí estas nociones, ya que su distinción permitirá un acercamiento a los usos y la razón de ser de la Proporcionalidad" con el objetivo de garantizar el éxito ante una situación de aprendizaje (Reyes-Gasperini, 2013, p. 21).

Como se ha dicho en el párrafo anterior, "se desarrolla la idea de comparación entre magnitudes, donde la notación introducida en la matemática escolar para referirse a la razón como una fracción (sin las argumentaciones contextualizadas correspondientes a su construcción), produce entre la mayoría de los estudiantes una ausencia de significación, en consecuencia, una falta de comprensión del concepto matemático y los procesos asociados" (Reyes-Gasperini, 2013, p. 24). Por tanto, se enfoca el aprendizaje con énfasis en la reproducción de técnicas y procedimientos que promueven el papel de imitador en el estudiante, es decir, "el propio discurso Matemático Escolar impide el aprendizaje de los estudiantes, o lo limita a la algoritmia y la memoria" (Reyes-Gasperini, 2013, p. 24).

Del artículo anterior realizado por Reyes-Gasperini (2013), se extrae para esta investigación la importancia de rediseñar el discurso Matemático Escolar (hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática), con el ánimo de producir innovaciones donde se hagan explicitas las diferencias entre las nociones de Fracción, Razón, Proporción y Proporcionalidad, enmarcando la estructura del discurso Matemático Escolar (libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales) para enriquecer o transformar las situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los profesores, "al introducir dichos saberes a partir de situaciones más vivenciales que les permitan tratar las diferentes argumentaciones posibles, así como sus usos y la razón de ser de dicho saber" (Reyes-Gasperini, 2013, p. 25).

En planteamientos de Del Valle (2015), "el discurso Matemático Escolar es un proceso mecánico y desprovisto de argumentaciones, donde existe una mayor centración en los objetos matemáticos que intervienen en los métodos de optimización que en sus usos en situaciones reales de diversas disciplinas, opacando el conocimiento del cotidiano al producir una barrera entre esas matemáticas del cotidiano y la matemática escolar" (Del Valle, 2015, p. 8).

Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2014) presentaron una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas, basándose en una unidad de análisis socioepistémica sobre la proporcionalidad (interacción invulnerable de las dimensiones social, cognitiva, epistemológica y didáctica del saber matemático), para que a través de ella pueda realizarse la problematización del saber matemático escolar. Actividades específicas que cuestionan el saber matemático escolar, concibiendo que desde la Teoría Socioepistemológica no sólo se reflexiona sobre el cómo se enseña, sino sobre el qué se enseña, "enfocándose en la discusión sobre la matemática en juego y no sólo en las acciones de profesores y estudiantes, porque en realidad estas últimas son efectos del discurso Matemático Escolar y no un reflejo de su dominio de conocimientos" (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2014, p. 10).

En el sentido de lo que se indicó en el párrafo anterior, se aprecian actividades que soportan que la proporcionalidad tiene la peculiaridad de ser transversal a todos los niveles educativos, adicionando a esta investigación experiencias y reflexiones en torno a la proporcionalidad directa e inversa, mediante actividades que problematizan el saber matemático escolar y con esto facilitar los procesos de aprendizaje al cuestionarse frente a la definición de proporcionalidad directa en los libros de texto, centrada en el conjunto de los números naturales y su autenticidad siempre y cuando la constante de proporcionalidad sea positiva (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2014).

Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2015) diseñaron una unidad de análisis socioepistémica recuperando circunstancialmente que la constante de proporcionalidad no fuera una cuestión numérica, sino que tenga que ver con la relación que existe entre las magnitudes. "Quisieron mostrar los avances respecto al tránsito de la proporcionalidad a lo proporcional centrando su atención en una disciplina social: el Derecho Penal, dando a conocer sus primeras hipótesis respecto de la importancia de encontrar cómo la proporcionalidad, un tema curricular transversal (inmerso en el campo aritmético por mucho tiempo), norma las tomas de decisiones a nivel jurídico, en donde las magnitudes no pueden ser cuantificables numéricamente, pues estas son pena y daño. Entendiéndose como un ejemplo del relativismo epistemológico y la racionalidad contextualizada que rige a los saberes matemáticos desde una perspectiva Socioepistemológica. Que permitirá, entre otras cosas, diseñar propuestas en donde se problematice el saber matemático escolar considerando las relaciones entre las magnitudes, no sólo como un valor numérico" (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015, p. 2).

"En palabras simples, la idea del principio mencionado es que debe existir proporcionalidad entre una pena que se aplique y el daño ocasionado, es decir, no se puede aplicar la misma pena para diferentes delitos, no es lo mismo un homicidio que un robo. La atención está puesta en la relación entre daño y pena, y no sólo en uno de sus componentes, sólo podrá medirse la arbitrariedad de la decisión si se toma en cuenta la relación entre la pena que se aplique y el daño ocasionado" (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015, p. 6).

En relación con el artículo anterior, se ilustra en esta investigación la noción de proporcionalidad como un tema curricular transversal y que, además, norma las tomas de decisiones a nivel jurídico, lo que favorece la funcionalidad de este saber en diferentes marcos de referencia y precisa que la proporcionalidad va más allá de los problemas con valores numéricos por la variedad de significados en diversos contextos de aplicación (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015).

Godino y Batanero (2002) hacen referencia en el desarrollo cognitivo y la progresión en el aprendizaje, "considerando el razonamiento proporcional como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química" (Godino y Batanero, 2002, p. 21).

Sumado a esto, Godino y Batanero (2002) plantean que diversas investigaciones han mostrado, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan más lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado (Godino y Batanero, 2002, p. 21).

La investigación anterior realizada por Godino y Batanero (2002), aporta a este escrito la importancia de hacer un cuestionamiento frente al cómo desarrollar el razonamiento proporcional en el estudiante, ya que este pone en juego diversas habilidades matemáticas y propicia ambientes de aprendizaje que evitan el uso de técnicas rutinarias a la hora de resolver problemas.

Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017) afirman que "en la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.) y sus respectivas medidas. En una fase del proceso de resolución las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números reales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto" (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017, p. 5).

La afirmación anterior, proporciona elementos que nos invitan a estudiar con más detalle el uso que se hace del término "proporcionalidad", ya que en él intervienen significados que caracterizan su aplicación y enriquecen la comprensión de los estudiantes en las prácticas sociales asociadas a un campo de situaciones problemáticas (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017).

Ruiz y Valdemoros (2006), realizan un estudio de caso que forma parte de un proyecto doctoral concluido, "que hace referencia a una evaluación sobre la propuesta de enseñanza de razón y proporción donde se reflejó el proceder de varios niños, quienes resolvieron el cuestionario inicial con algoritmos manejados de un modo mecánico, sin darle sentido a sus elaboraciones" (Ruiz y Valdemoros, 2006, p. 2).

El caso estudiado "concierne a que Paulina resolvía los problemas de razón y proporción utilizando algoritmos carentes de sentido y significado, es decir, tenía muy arraigado el procedimiento sin tener claro su uso. Ante esta situación diseñaron una secuencia de actividades conformada por modelos de enseñanza que favorecieran el establecimiento de sólidos enlaces entre su pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo permitiendo así que mejorara el manejo de algoritmos y los enmarcara en aplicaciones llenas de sentido" (Ruiz y Valdemoros, 2006, p. 5).

Del estudio de caso realizado por Ruiz y Valdemoros (2006), se toman en cuenta para la investigación que se reporta en este documento, la importancia de implementar estrategias de enseñanza que apunten al enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo en el estudiante, mediante actividades de aprendizaje basadas en el uso de los objetos matemáticos y sus diferentes modos de representación para favorecer la construcción social del conocimiento.

Teniendo en cuenta la revisión y análisis de algunas investigaciones que abordan la proporcionalidad como un saber matemático transversal, se plantea la hipótesis, la pregunta problematizadora y los objetivos de la presente investigación, con el propósito de abordar la resignificación de los usos de los objetos matemáticos, cuyas bases teóricas se presentaran en el capítulo 3, de igual forma la conceptualización de la unidad didáctica que plateamos en los objetivos que según Sanmartí (2000), es un conjunto de actividades estructuradas y articuladas en torno a unos ejes articuladores para lograr objetivos establecidos.

1.3. PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en estudiantes del grado séptimo mediante la Resignificación del Uso las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad?

1.4. OBJETIVO GENERAL

Evaluar los procesos que fortalecen el aprendizaje de las matemáticas, mediante la Resignificación del Uso de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad con estudiantes del grado séptimo.

1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar e interpretar una unidad didáctica para contribuir al desarrollo de procesos matemáticos (significados, procedimientos y argumentaciones) asociados a las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad.

- Intervenir el proceso de enseñanza y aprendizaje desde los usos de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad que tiendan a su Resignificación fundamentadas desde la realidad de quien aprende.

- Incentivar a partir de los Usos de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad estrategias fundamentadas en la dinámica social que favorezcan el empoderamiento por parte de los estudiantes.

1.6. HIPÓTESIS

Esta investigación plantea fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes del grado séptimo, articulando la matemática del cotidiano y la matemática escolar mediante la Resignificación del Uso de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad.

1.7. DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos tenido la oportunidad de apreciar diferentes situaciones que ilustran la proporcionalidad como eje transversal que promueve el aprendizaje significativo de las matemáticas, experiencias que invitan a reflexionar en torno a la enseñanza de este objeto de estudio como una temática escolar estrechamente vinculada a la vida cotidiana de todo ciudadano. En ese mismo sentido, este objeto matemático permitirá un acercamiento entre las matemáticas con otras disciplinas de saber cómo veremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LAS NOCIONES DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD.

En este apartado, queremos mostrar la importancia de conocer la evolución y desarrollo histórico de los conceptos para dar profundidad a los contenidos del currículo y una valoración crítica de los mismos. En ese sentido, este capítulo aborda aspectos histórico y epistemológico de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, con el propósito de comprender la naturaleza de dichos conocimientos, su trayectoria al llegar a las aulas de clase y su aplicación en diferentes contextos.

2.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LAS NOCIONES DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD

"Los historiadores atribuyen a los griegos, y en particular a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque reconocen que en sus orígenes pueden rastrearse hasta matemáticos babilonios" (Nolasco y Velázquez, 2013, p. 429).

Desde esta perspectiva, González (2008) plantea el siguiente argumento:

> La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones acarrean la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática. (p. 103).

2.1.1. *La aparición de los inconmensurables*

"La grandeza sublime del Teorema de Pitágoras y la mágica belleza del Pentagrama místico pitagórico generador de la sección áurea como razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular fueron dos de los tópicos más relevantes de la escuela pitagórica, pero se convirtieron en dos caballos de Troya para la geometría griega, porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la comunidad pitagórica donde aparecieron", ya que la imposibilidad de calcular de forma aritmética exacta la diagonal del cuadrado en función del lado, es decir la imposibilidad empírica y numérica de resolver el problema de la "duplicación del cuadrado" implicaría que había que hacer algo distinto. Es decir, renunciando a la exactitud aritmética y trascendiendo lo empírico replanteará el problema soslayando la presencia temible e inexorable del infinito mediante la construcción geométrica (González, 2008, p. 103).

En este sentido, en el contexto matemático de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, González (2008) explica lo siguiente:

> Si el descubrimiento de la inconmensurabilidad hubiera sido a través de la diagonal del cuadrado, $\sqrt{2}$ sería la primigenia magnitud inconmensurable de la historia, mientras que, si hubiera sido a través de la sección áurea entre diagonal y lado del pentágono regular habría sido, $\sqrt{5}$ (p. 103).

2.1.2. *La definición pitagórica de proporción*

En la Matemática actual las razones inconmensurables se expresan mediante números irracionales. Los babilonios y los egipcios habían trabajado con tales números, a base de aproximaciones, aunque sin estar conscientes de la falta de exactitud, es decir, sin la certeza de la diferencia radical entre razones conmensurables e inconmensurables. En cambio, para los griegos la palabra número significa "número entero positivo"; una fracción a/b indicaría no un número racional sino una relación entre los números enteros $a\ y\ b$, "la razón" entre $a\ y\ b$. En sentido actual sería un par ordenado de números (González, 2008, p. 111).

Para los pitagóricos, dos razones $p/q\ y\ m/n$, se dice que son "proporcionales": $p/q = m/n$, cuando existen enteros a, b, c, d, tales que $p = ca$, $q = cb$, $m = da$, $n = db$; por ejemplo: $9/12 = 15/20$, porque 9 contiene tres de las cuatro partes de 12, al igual que 15, contiene tres de las cuatro partes de 20 (González, 2008, p. 111). Al introducir estas ideas en el discurso Matemático Escolar, podemos decir que $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{15}{20}$ son razones equivalentes y por lo tanto forman una proporción al igualarlas $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20}$.

"La visión de número como tamaño se aplicó a las magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, en la creencia de que dos segmentos de línea eran siempre conmensurables, es decir que existía una unidad común de la que ambos serían múltiplos" (González, 2008, p. 111). Por tanto, el descubrimiento de los inconmensurables afectó los teoremas pitagóricos que utilizan proporciones y obligó a reconstruirlos.

Atendiendo al párrafo anterior, González (2008) muestra la siguiente relación: "sean los triángulos $ABC\ y\ ADE$, con bases $BC\ y\ DE$ sobre la recta MN. $BC\ y\ DE$ tendrán alguna unidad común de medida; sea GH contenido p veces en BC y q veces en DE. Marquemos los puntos de división sobre $BC\ y\ DE$ y unámoslos con el vértice A" (González, 2008, p. 111).

En este sentido, "los triángulos $ABC\ y\ ADE$ quedan divididos respectivamente en p y q triángulos menores, que según la Proposición I.38 de Los Elementos (los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes) tienen la misma área" (ver figura 1). Por tanto, la razón de los triángulos $ABC/ADE = p/q = BC/DE$, como se quería probar en la definición Pitagórica de Proporción (González, 2008, p. 111).

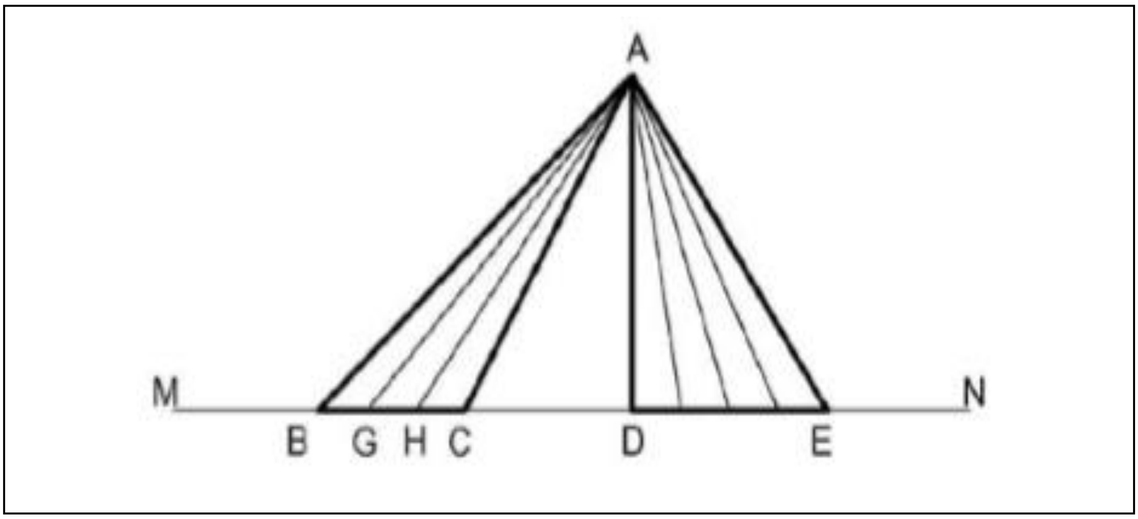


Figura 1. Definición Pitagórica de la proporción (González, 2008, p. 111).

Es evidente que la aparición de magnitudes inconmensurables invalida la prueba geométrica exhibida en esta proposición y en todas las pruebas pitagóricas en las que haya que comparar razones de magnitudes geométricas. Se explica, pues, el consiguiente secretismo de los pitagóricos sobre la cuestión irracional y la leyenda del castigo por su divulgación ante la amenaza apocalíptica que se cernía sobre la matemática y la filosofía pitagóricas. La aparición de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un doble desafío, uno filosófico ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número como esencia del Cosmos y otro matemático, ya que a partir de entonces en geometría era imposible medir siempre con exactitud (González, 2008, p. 112).

2.1.3. *La fundamentación de Eudoxo. La teoría de la proporción*

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables exigía una revisión de ciertos fundamentos de la matemática pitagórica, ya que a partir de entonces las magnitudes geométricas no podían ser expresadas mediante determinado tipo de números. El inevitable carácter continuo que tienen impide que se puedan someter a las manipulaciones algebraicas como a los números. De modo que, los griegos del siglo IV a.C. eran conscientes de la existencia de magnitudes geométricas que nosotros llamamos irracionales, pero no las concebían como números (González, 2008, p. 113).

Eudoxo de Cnido es uno de los matemáticos más importantes de la academia platónica, que al introducir la idea de "tan pequeño como se quiera", antecedente de nuestro proceso de "paso al límite", encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios:

1. Una definición: igualdad de razones, Euclides, Definición V.5.
2. Un axioma: axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad, Euclides, Definición V.4.
3. Un método: el Método de Exhaución, Euclides, Proposición X.1.

Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones de la siguiente forma (Definición V.5 de Los Elementos de Euclides):

> "Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente" (González, 2008, p. 113).

2.1.4. *Razón, proporción y la solución eudoxiana*

Los motivos de carácter epistemológico acerca de la propia naturaleza de número, así como de las definiciones de razón y proporción demandaron una re-conceptualización de estos dos últimos conceptos de manera que abarcaran tanto las magnitudes conmensurables como las inconmensurables en vista que la teoría clásica de las proporciones que sustentaba la geometría pitagórica se mostró incompleta. La solución fue proporcionada brillantemente por Eudoxo de Cnido quién reconoció la vital importancia de la propiedad arquimediana en una nueva definición del concepto de razón, tal y como lo expone Euclides en la Definición 4 del Libro V de los Elementos: “se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra” (Puerto, 2011, p. 7).

El propósito de esta definición es el siguiente: Suponga que el segmento D, correspondiente a la diagonal de un cuadrado, se lleva de manera consecutiva sobre una línea recta desde un origen O generando una serie de marcas sobre ésta denotadas como A_1, A_2, A_3… Ahora, si sobre una línea recta (paralela a la anterior) y desde un origen o se posiciona consecutivamente el segmento L, se generan marcas consecutivas designadas como a_1, a_2, a_3… Representado por Puerto (2011) en la construcción eudoxiana del concepto de razón (ver figura 2).

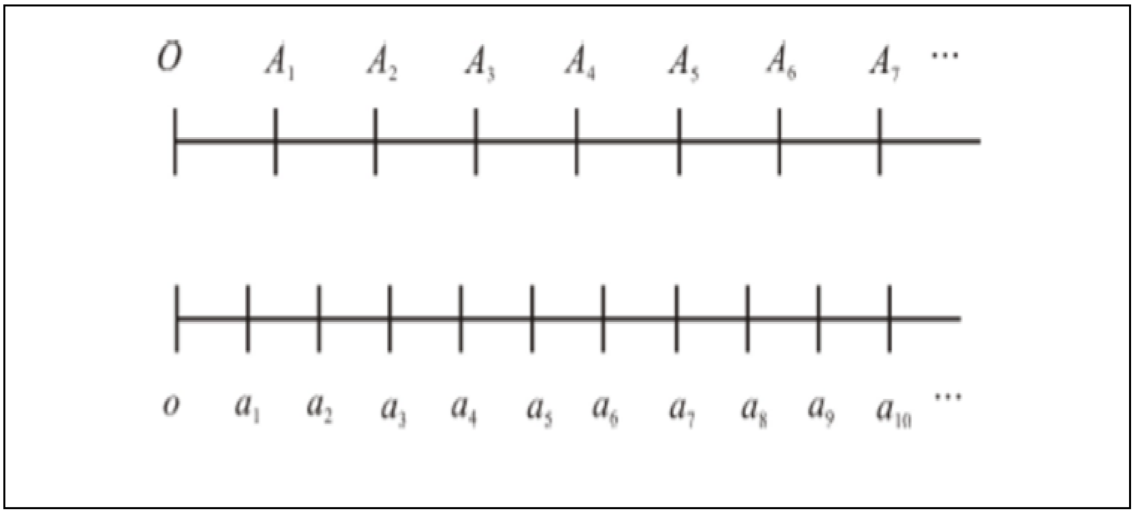


Figura 2. Construcción eudoxiana del concepto de razón (Puerto, 2011, p. 7).

Si las magnitudes en cuestión fueran conmensurables, alguna de las marcas superiores coincidiría con alguna de las inferiores, esto es, alguna A_m se ubicaría en la misma posición que alguna a_n, de modo que se establecería la proporción $D : L :: n : m$. La clave de la definición eudoxiana de razón radica en la observación que, para magnitudes inconmensurables, ninguna de las marcas A_i coincidiría con alguna de las A_j, lo que implica que toda A será superada por alguna a y viceversa lo cual, en términos de los segmentos dados inicialmente, afirma que un múltiplo de D superará cualquier múltiplo particular de L y viceversa. Es de notar que la definición de razón manejada por Eudoxo abarca tanto el caso conmensurable (en el cual la coincidencia entre marcas se presentará un número infinito de veces) como el inconmensurable (no hay coincidencia alguna entre marcas por lo que toda A se encontrará entre dos a sucesivas y viceversa, toda a se encontrará entre dos A consecutivas) (Puerto, 2011, p. 7).

Con esta definición de razón en mente, el concepto de proporción se establece casi que de manera inmediata apelando a la noción de "misma razón". Sí, de manera intuitiva, se espera establecer una proporción entre las diagonales y lados de dos cuadrados distintos, denotadas como $D, L\ y\ d, l,$ respectivamente, entonces construcciones similares a las de la figura Nº 3 realizadas para ambos cuadrados mostrarán idénticas posiciones relativas entre las marcas generadas para cada uno de ellos, establecido por Puerto (2011), como la construcción eudoxiana del concepto de proporción (ver figura 3).

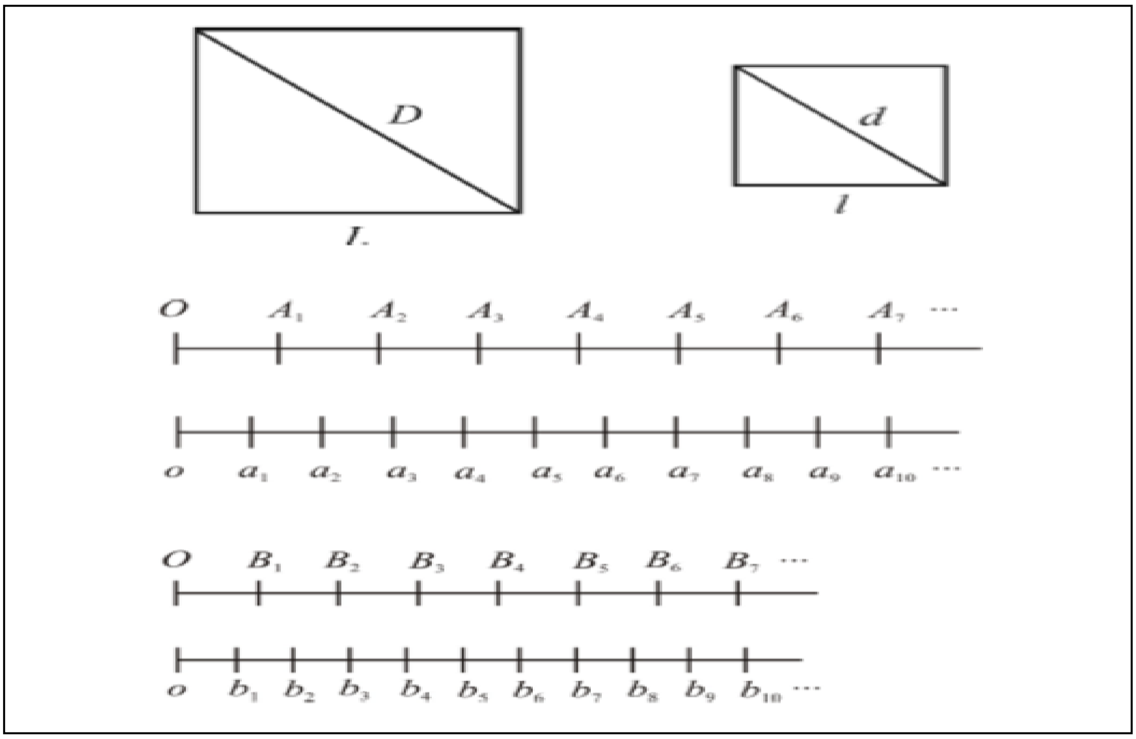


Figura 3. Construcción eudoxiana del concepto de proporción (Puerto, 2011, p. 8).

Que la identidad de las posiciones relativas entre las marcas A, a y B, b abarca la proporcionalidad para magnitudes conmensurables es inmediato ya que, para éstas, tal identidad puede incluir la coincidencia entre marcas. El paso lógico a continuación es precisar esa noción de "razón", labor que se concreta en la Definición 5 del Libro V de los Elementos:

> Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (Puerto, 2011, p. 8).

De este modo, la proporción $D : L :: d : l$ significa que, para cualquier par de números m, n, se tiene:

- Si $m \cdot D > n \cdot L$, entonces $m \cdot d > n \cdot l$, ó
- Si $m \cdot D = n \cdot L$, entonces $m \cdot d = n \cdot l$, ó
- Si $m \cdot D < n \cdot L$, entonces $m \cdot d < n \cdot l$.

Aspectos históricos en la construcción de los números reales.

"Así, mediante la Definición 6 del Libro V de los Elementos se consigue dominar el concepto de proporción para magnitudes conmensurables e inconmensurables: llámense proporcionales las magnitudes que guardan misma razón" (Puerto, 2011, p. 9).

2.1.5. *Thales de Mileto y la proporcionalidad*

Hacia el año 600 a.C. el padre tradicional de la matemática griega, Thales de Mileto, propone el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas (Jaramillo, 2012).

Teorema de Thales: “si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra” (Jaramillo, 2012, p. 11).

En este sentido, Jaramillo (2012) establece lo siguiente:

> Existe una leyenda que atribuye a Thales el uso de sus conocimientos de geometría para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y calcular la distancia a la costa de barcos en alta mar. Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco señalan que la medida de la altura de las pirámides se llevó a cabo a través de la determinación de la longitud de la sombra que ellas producían cuando una vara clavada verticalmente en el suelo producía una sombra igual a su altura. Para medir la distancia de los barcos en alta mar a la costa, la leyenda dice que Thales fue el primero en emplear la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Hay dudas muy grandes con respecto a esto, ya que estas ideas se habían manejado con mucha anterioridad en Egipto y Mesopotamia, donde Thales invirtió una parte de su vida (p. 11).

2.1.6. *Thales de Mileto y la pirámide de Keops*

Thales de Mileto (640 a.C. - 560 a.C.), conocido como uno de los siete sabios de la antigua Grecia y el padre de las matemáticas, la filosofía y la astronomía griega, mantuvo mucho contacto con los matemáticos egipcios y mesopotámicos, y precisamente en uno de sus viajes se le atribuyó el cálculo de la altura de la pirámide Keops de Egipto, “utilizando un concepto geométrico que manejaba a la perfección: la semejanza de triángulos” (Holguín, 2012, p. 15). Thales esperó el momento del día en que la sombra de su bastón midiera la misma longitud que el bastón mismo, y luego por semejanza de triángulos estimó que en dicho momento la sombra de la pirámide también sería igual a la altura de la misma, representado por Holguín (2012) de la siguiente manera (ver figura 4).

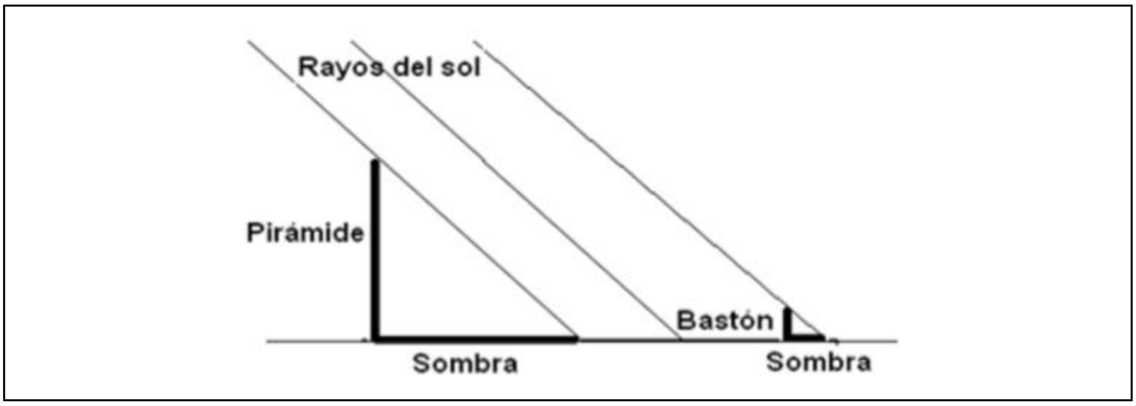


Figura 4. Cálculo de la altura de la pirámide Keops de Egipto (Holguín, 2012, p. 16).

2.1.7. *La proporción Áurea*

La proporción Áurea fue usada como una de las primeras reglas de composición fotográfica.

La proporción Áurea es uno de los principios formales de la composición visual que ha sido utilizado desde la antigüedad. Esta proporción se ha encontrado tanto en murales egipcios como mesopotámicos y aztecas, entre otras muchas culturas, como lo muestra FotoNostra: proporción Áurea en el cuerpo humano (ver figura 5).

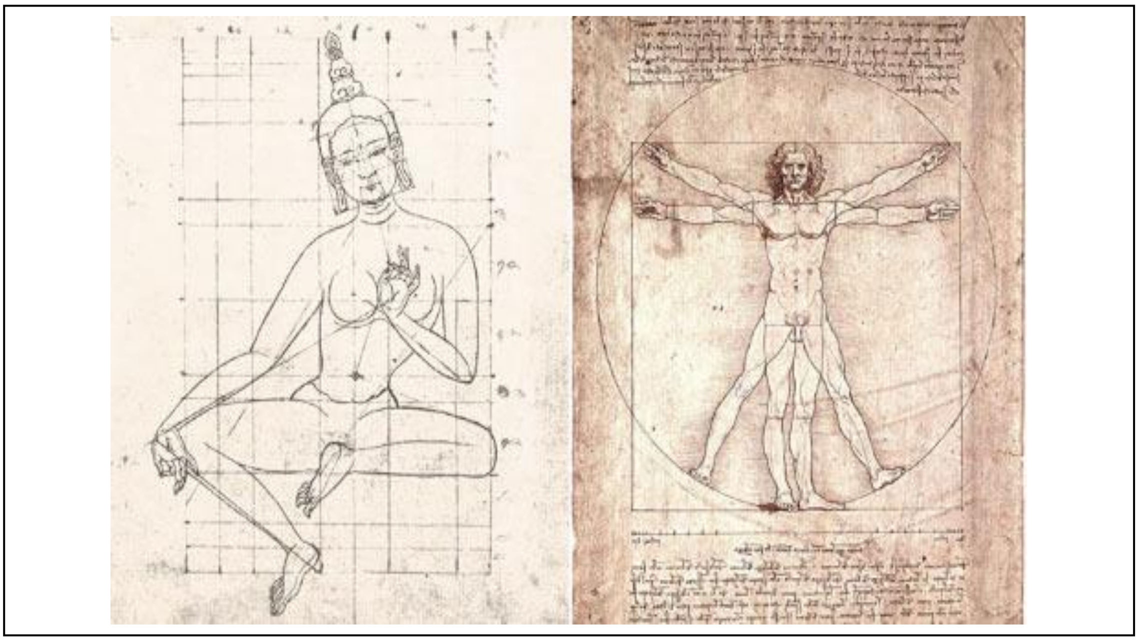


Figura 5. Proporción Áurea en el cuerpo humano (http://www.fotonostra.com/fotografia/seccionaurea.htm)

A lo largo de la historia los artistas y científicos han tratado de analizar qué hace bueno y efectivo un diseño o una composición fotográfica.

Matemáticos griegos, entre los siglos III y V antes de Cristo, teorizaron sobre lo que llamaron **la Proporción Áurea**. Esta proporción es el número irracional que vincula dos segmentos de la misma recta.

Cabe señalar, que la proporción Áurea o divina proporción en esta investigación muestra la utilidad de estos objetos matemáticos desde la antigüedad y su aplicabilidad en las artes, ciencias y en la vida cotidiana.

2.2. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DE LAS NOCIONES DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD

En la literatura es posible encontrar investigaciones relacionadas con la razón, proporción y proporcionalidad divididas en dos grandes áreas: Unas relacionadas con contextos aritméticos y otras con contextos geométricos.

La teoría de las razones y proporciones, en los elementos de Euclides, ocupa dos hábitats diferenciados: la teoría de las razones de magnitudes (en los libros llamados geométricos) y la teoría de las razones de números (en los libros llamados aritméticos). De esta forma, los números reales, que habían germinado, en el transcurso de los siglos, de la geometría y de la física de las magnitudes, ya no les debían nada de ahora en adelante. No solamente se habían apoderado de su autonomía, sino que, al mismo tiempo a través de la estructura de espacio vectorial, sirviendo más tarde para (re)fundar la geometría (Salazar y Díaz, 2009, p. 210).

2.2.1. *Contextos Aritméticos*

Oller y Gairín (2013) plantean la siguiente situación: la aritmetización de las razones se entiende como la progresiva identificación de razones con entes numéricos que se inicia en la Edad Media y que llega hasta nuestros días.

En este sentido, Campano define el concepto de razón del siguiente modo:

> Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese [número] menor que están en el mayor. Y [de una razón] de un número más grande en relación con otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es (Oller y Gairín, 2013, p. 332).

"Aquí se observa que lo perseguido por Campano es aritmetizar en cierto modo el concepto de razón, asignando un número a cada razón y no como una relación magnitudes como lo hizo Euclides" (Oller y Gairín, 2013, p. 332).

2.2.2. *Contextos Geométricos*

Ha sido más amplio el recorrido de la proporción en el contexto geométrico por la forma como se articula con muchas áreas del saber y por su aplicación con el quehacer cotidiano de todo ciudadano.

> Fue Eudoxo de Cnido, de la Escuela platónica, quien emprende la magnífica tarea de colmar el abismo lógico y proporcionar una base firme a la Matemática griega, al introducir de forma brillante una teoría satisfactoria de la proporción, que al tratarse de forma geométrica tiene la inmensa ventaja de ser aplicable indistintamente a magnitudes conmensurables e inconmensurables como, por ejemplo, longitudes, áreas, volúmenes, etc., y que será recogida por Euclides en el Libro V de Los Elementos. He aquí la explicación de por qué Euclides retrasa, tanto como puede, el uso de proporciones. Pero era evidente que tarde o temprano tendrían que aparecer sino se quería mutilar gran parte del legado matemático pitagórico y ahora es el momento. El Libro V proporcionaría, pues, una base lógica firme a toda doctrina que en la Geometría griega tuviera que ver con proporciones (González, 2003, p. 76).

2.2.3. *La proporcionalidad en la Matemática*

La permanente necesidad de la humanidad de resolver problemas de su entorno, permitió que surgiera el concepto de proporción. Dichos problemas fueron en sus principios modelados geométricamente por grandes matemáticos como Thales de Mileto siglo V a. C., el cual logró aportar a la solución de diferentes situaciones. No obstante, dichas soluciones no hubieran sido posibles de no hacer un análisis métrico de las relaciones establecidas en dichos problemas (Daza, 2014). En general la aparición de nuevos conceptos y en especial los conceptos científicos se reducen a tres tipos básicos como lo establece Mosterín (2014):

> Los conceptos clasificatorios, los comparativos y los métricos. De esta manera, por ejemplo, se puede observar la estatura de dos personas y saber cuál es más alta que la otra (concepto comparativo). Pero se requiere de los conceptos métricos para establecer que tanto es más alta que la otra persona. Un concepto métrico es un homomorfismo entre un sistema empírico y un sistema numérico, el cual puede expresarse en varias escalas, características que corresponde evidentemente a la práctica científica. Una de las escalas establecidas por Mosterín, se denomina escala proporcional, la cual es de vital importancia pues no solo suministra información para determinar si un objeto es más, o menos, que otro con respecto a alguna característica, sino que señala en qué proporción exacta el uno es más, o menos, eso que el otro. Un ejemplo de escalas proporcionales, correspondientes a conceptos básicos, son la masa, la longitud o tiempo, entre otros (Daza, 2014, p. 26).

Otro de los problemas clásicos atribuidos a Thales de Mileto, fue haber calculado la distancia de una nave a la costa con ayuda de un razonamiento proporcional, como lo representa Daza (2014), modelación geométrica del problema clásico resuelto por Thales (ver figura 6).

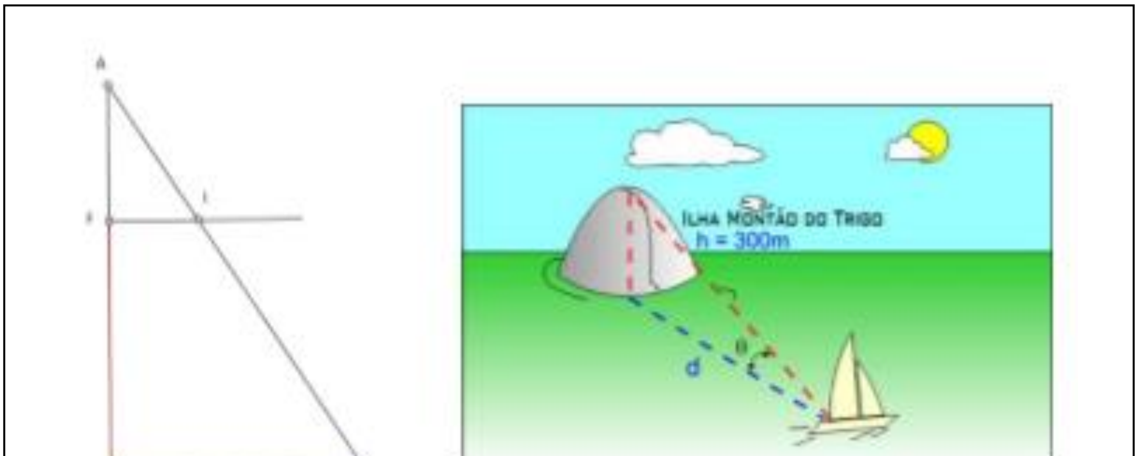


Figura 6. Cálculo de la distancia de una nave a la costa con la ayuda de un razonamiento proporcional realizado por Thales de Mileto (Daza, 2014, p. 26).

Aunque no es totalmente claro la forma en la cual Tales logró hacerlo, la suposición más probable es que si la nave o barco se encontraba en el punto B, Tales se habría subido a un faro CF que se encontraba en la orilla de la costa, con un aparato formado por dos listones en ángulo recto. Al colocar uno de ellos FA, vertical en línea recta con

CF, y el otro paralelo a CB, lanzaría una visual desde A hacia el barco, la cual determinaría el punto de intersección I con el listón paralelo a CB. Debido a que conocía la altura del faro y las longitudes de los listones, por semejanza de los triángulos AFI y ACB pudo determinar la distancia $CB = (CF + FA)\frac{FI}{FA}$ (Daza, 2014, p. 26).

2.2.4. *La proporcionalidad en la Física*

Como lo dicen en su estudio Parra, Ávila y otros (2013), grandes aportes se han realizado en la física con ayuda del concepto de proporción. Galileo, por ejemplo, establece la relación entre la longitud (h) y el tiempo (x) de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una proporcionalidad directa cuadrática de la forma $h = kx^2$. Kepler en 1618 encontraría que para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica. Lo que se conoce en la actualidad como la tercera ley de Kepler y nos permite saber a qué distancia se encuentra un planeta del sol, si conocemos el tiempo en que tarda el planeta en orbitarlo (Daza, 2014, p. 28).

Ya en el siglo XVII con el desarrollo del cálculo diferencial, Newton establece sus leyes del movimiento, determinando una relación proporcional entre fuerza y variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo. Dicho de otra forma, la fuerza es directamente proporcional a la masa y a la aceleración de un cuerpo. El mismo Newton determinó la ley de gravitación universal la cual afirma que la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (Daza, 2014, p. 28).

2.2.5. *La proporcionalidad en el Arte y la Arquitectura*

La proporcionalidad es una cualidad percibida por el ser humano en la naturaleza, que se puede describir a través de expresiones matemáticas, la cual evoca nociones de belleza, orden y armonía. A través de un experimento, en el cual se le dio a escoger a centenares de personas diferentes rectángulos para que seleccionaran el más agradable para la vista, Fechener (1876) comprobó que la mayoría de las personas preferían aquellos cuya razón entre los lados era $34/21$, valor que difiere en una cantidad casi despreciable al que Luca Pacioli denominó divina proporción, también considerada como sección Áurea, por Leonardo da Vinci, o sección divina por Kepler. Este número irracional surgió de la relación existente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular y en la actualidad se representa con el símbolo o letra griega (phi) ϕ (en honor al escultor griego Fidas 490 a.C. - 423 a.C.) (Daza, 2014, p. 29).

Tanto en la arquitectura como en el arte la humanidad se ha cuestionado sobre cuáles son las medidas que permiten que una obra sea más armoniosa a la vista, siendo la razón Áurea aquella que responde a estos parámetros. Por tal motivo aparece en diversas obras arquitectónicas, aunque en algunas se desconoce si la proporción fue incluida de manera voluntaria. Ejemplos de estas obras son: el Stonehenge, monumento megalítico ubicado en el Reino Unido; el Zigurat de Ur el cual es una torre formada por terrazas, característico de la arquitectura mesopotámica; las pirámides mexicanas de Teotihuacán; las fachadas del Coliseo Romano; del Partenón de la Acrópolis de Atenas, también de catedrales como Nótre Dame de París, e incluso en construcciones modernas como el Palacio de Cristal, sede de las naciones unidas en New York, entre otras, como lo ilustra Daza (2014): Plano y fachada del Partenón y pintura de Piet Mondrian e Ilustración realizada en el estilo neoplasticista de Piet Mondrian respectivamente (ver figuras 7 y 8).

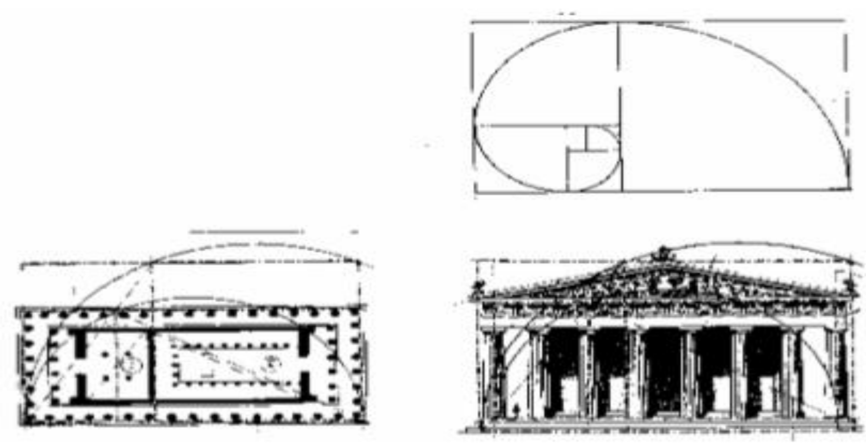


Figura 7. Plano y fachada del Partenón (Daza, 2014, p. 31).

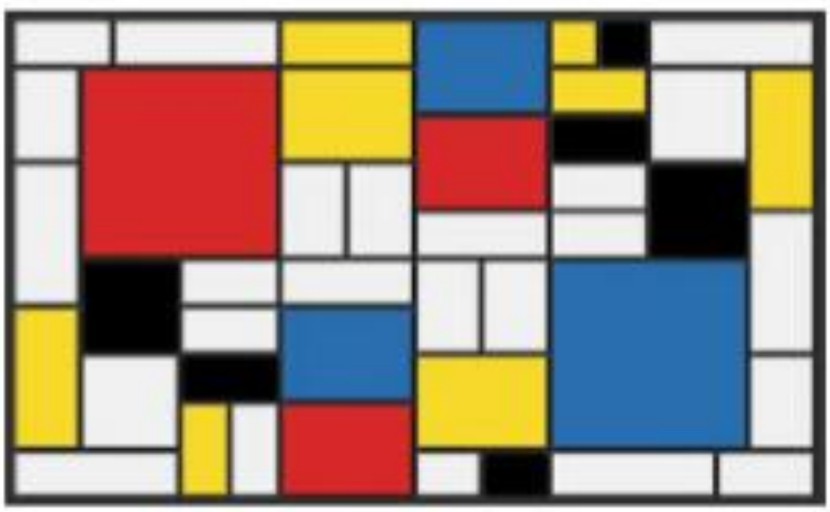


Figura 8. Pintura de Piet Mondrian (Daza, 2014, p. 31).

2.2.6. *La proporcionalidad en la Astronomía*

"En tiempos antiguos grandes astrónomos utilizaron sus conocimientos sobre la proporcionalidad, para realizar conjeturas acerca de la Tierra, el Sol, la Luna y las estrellas. Un ejemplo de esto fue Aristarco 260 a. C. quien estimó la distancia que hay entre la Tierra y el Sol, así como también la distancia que existe entre la Tierra y la Luna, basándose en el hecho de que la dirección Tierra-Luna y Luna-Sol forma un ángulo de 90º cuando la Luna está en cuarto creciente o en cuarto menguante" (Daza, 2014, p. 31). Aristarco calculó el ángulo α (figura 9) que forma la dirección Tierra-Sol y Tierra-Luna en 87º y utilizando estos valores conjeturó que la distancia de la Tierra al Sol era 19 veces mayor a la distancia de la Tierra a la Luna, como lo muestra Daza (2014): diagrama de la distancia de la tierra al sol, calculada por Aristarco (ver figura 9).

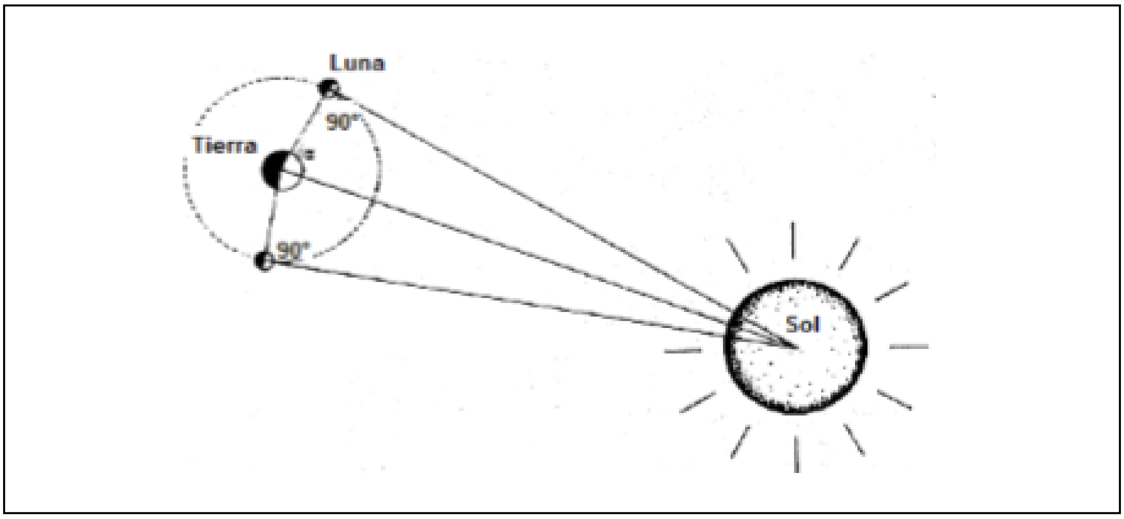


Figura 9. Diagrama de la distancia de la tierra al sol calculada por Aristarco (Daza, 2014, p. 32).

"En la actualidad conocemos que la distancia de la Tierra al Sol es 400 veces mayor que de la Tierra a la Luna, pero su trabajo es muy valorado dados los pocos recursos tecnológicos con los que se contaban en la época". El problema estuvo en el cálculo del ángulo α (Daza, 2014, p. 32).

2.2.7. *La proporcionalidad en la Música*

Los pitagóricos en la antigua Grecia consideraban que todo era número o relaciones entre números y esto se reflejaba también en la música y en lo que hoy conocemos como la armonía pitagórica. Para ellos, "la armonía era la proporción entre las partes de un todo y por lo tanto la música debía ser reducida a las proporciones más simples. Los historiadores sostienen que Pitágoras descubrió la resonancia que tiene una cuerda al tensarse y los acordes en diferentes fracciones de la misma, reafirmando su convicción más profunda que todo era número o relaciones entre ellos, como en este caso de la música con los números" (Daza, 2014, p. 33).

Según la leyenda, Pitágoras descubrió la armonía al escuchar el sonido de martillos provenientes de diferentes yunques en el taller de un herrero. El peso de estos martillos se correspondía con los números 12, 9, 8, 6; el peso del cuarto martillo daría el tono, y el del primer martillo, que era el doble del menor, daba la octava. El peso de los otros dos, que son las medias aritmética y armónica de los dos anteriores daría la quinta y la cuarta (Daza, 2014, p. 33).

Llevadas estas proporciones a un monocordio vemos que el tono o nota base lo da el sonido de la cuerda entera, es lo que se llamaba unísono, si la cuerda tiene la mitad de la longitud original suena una octava más alta que la anterior, la proporción $1/2$, que produce el mismo sonido que la cuerda entera solo que más agudo se llama octava (DO-DO) porque se llega a él a través de ocho intervalos de la escala, ocho notas, ocho teclas blancas del teclado; a esta proporción llamaban los griegos diapasón. Si su longitud es $2/3$ de la primera, la cuerda emite la quinta de la nota base, la proporción $2/3$ se llamó diapente, denominada hoy quinta (DO-SOL) pues se llega a ella a través de cinco intervalos. Por último, si su longitud es $3/4$ de la primitiva, la nota que suena es la cuarta de la base, a la proporción $3/4$ se le llamó diatésaron, conocida ahora como cuarta (DO-FA) con cuatro intervalos (Daza, 2014, p. 33).

El sonido de un piano se da al golpear unas cuerdas con unos martillos, activados por unas teclas ya sean blancas o negras. La longitud de las cuerdas está dada de tal manera que entre más cortas, más alto es el sonido que generan y se cumplen las proporciones mencionadas por Toledo (Daza, 2014, p. 34).

Se puede observar la estrecha relación que existe entre las escalas musicales que se manejan en la actualidad con el trabajo propio de la escuela pitagórica y su relación con la forma en que concebían el mundo y las matemáticas, ilustrado por Daza (2014): teclado de un piano (ver figura 10).

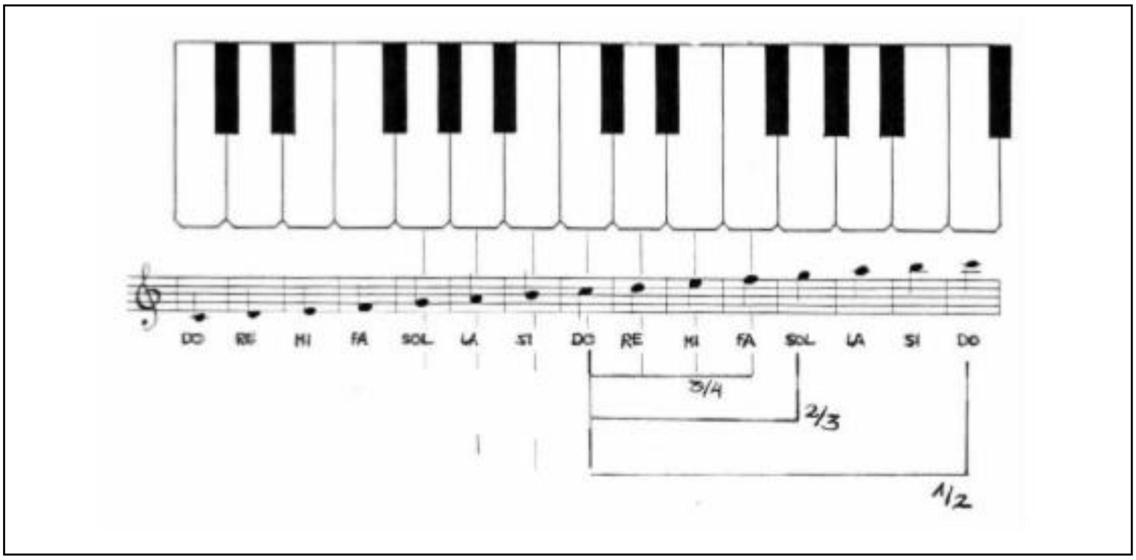


Figura 10. Proporciones en el teclado de un Piano (Daza, 2014, p. 35).

2.3. DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

Con este capítulo se ilustra que la razón, proporción y proporcionalidad, son objetos de conocimiento matemático que trascienden más allá de las aulas escolares, ya que el hecho de comparar es un aspecto elemental del ser humano y pone en relieve la Fracción, la Razón y la Proporción. Elementos que proporcionan fundamentos teóricos para dar explicaciones a fenómenos naturales, como también son agentes que han estado presente desde tiempos antiguos en la historia de la humanidad y que han evolucionado conceptualmente para dar solución a problemas en diversas áreas del saber por su utilidad en contextos Aritméticos y Geométricos.

En este capítulo se hace explicita la proporcionalidad como una estructura transversal que articula sus elementos a la contextualización de las prácticas desarrolladas en la vida cotidiana para constituir nuevos marcos de referencia donde se enriquezca este saber matemático como se muestra en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

El presente capítulo lleva el comedido de explicar en detalle el recorrido de la Socioepistemología a la investigación en Matemática Educativa, la cual se ocupa de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, haciendo un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo partiendo de la base de que los conocimientos matemáticos son producto de las prácticas sociales (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014, p. 367).

A continuación, el marco teórico de la investigación está sustentado en la Socioepistemología. Teoría que estudia la construcción social del conocimiento, lo que permite abordar las razones, proporciones y la proporcionalidad, lo que permite reconocimiento de fenómenos de producción y divulgación del conocimiento matemático, concibiendo al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática como una construcción social.

3.1. LA TEORÍA

La Socioepistemología es sin lugar a duda una aproximación teórica que desarrolla estrategias de investigación.

> una teoría de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2003, Citado en Morales 2012, p. 3).

La Socioepistemología, como sustento teórico para la investigación en Matemática Educativa, se ocupa específicamente del problema que plantean las dinámicas propias de la construcción del saber matemático. “Este enfoque autentifica toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto contribuyen a la sabiduría humana”. Algunos enfoques teóricos contemporáneos se limitan sólo a alguna de esas formas de saber (Cantoral, 2013, Citado en Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014 p. 1573).

Actualmente un docente se ve enfrentado a diversos cambios educativos, ya sean reformas en el currículo, textos, cambio en el prototipo del modelo de enseñanza-aprendizaje, etc.

Por consiguiente, la teoría Socioepistemología sienta las bases para el estudio de la naturaleza del saber matemático y le brinda al docente la oportunidad de transformar su realidad, tomando decisiones sobre su quehacer didáctico a través de herramientas que le ayudaran a fortalecer su labor. Desde sus inicios la Socioepistemología se cuestionó sobre que se enseña, que saber matemático es el adoptado por el sistema educativo, a quien va dirigido, para que se enseña y por qué se está enseñando; sin descuidar el cómo se debería enseñar los contenidos matemáticos (Cantoral, 2013).

Debido a que esta postura deja como objeto de estudio a los conceptos matemáticos para centrarse en las prácticas de enseñanza-aprendizaje que creo la necesidad de estudio. La Socioepistemología incorpora además de los componentes cognitivos, didácticos, epistemológico y el componente social; e integra cuatro dimensiones de tal manera que se logra una mirada sistémica a los fenómenos a abordar. El problema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no solo involucra las explicaciones de las temáticas, sino la didáctica utilizada para trasmitir el saber matemático.

La Socioepistemología, provee distintas formas de investigación, ya que las matemáticas para ella son consideradas parte esencial de la cultura, es decir un elemento vivo que se crea fuera del aula, pero se va recreando dentro de ella. Las matemáticas están presentes en diversos escenarios y a través de acciones básicas de la actividad humana. Ya sea en la construcción de viviendas, la siembra, recetas de cocina, etc. Por tanto, podemos asegurar que la Socioepistemología estudia la vida de los objetos matemáticos al seno de la vida social.

Es así como la Socioepistemología estudia la manera como se ha ido reconstruyendo el conocimiento poniendo en duda el discurso matemático escolar. Por lo cual se ha hecho necesario darle otra mirada al discurso matemático escolar, donde se ha resaltado que se le ha dado mayor importancia a los conceptos y no a las prácticas. El discurso matemático no es funcional ya que provoca que el estudiante no interiorice los contenidos pues la forma como se les presenta una matemática acabada donde el estudiante queda por fuera de su construcción lo que no permite que sea el estudiante quien lo construya o genere pues ya están acabados.

Por consiguiente, la Socioepistemología se traza como objetivo rediseñar el discurso matemático escolar donde se haga mayor énfasis en las prácticas como rol fundamental del proceso educativo.

3.2. DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR (dME)

En la actualidad, el modelo de enseñanza de la matemática está centrado en los conceptos, a partir de ellos se entregan ejemplos, aplicaciones, etc. Cordero y Flores (2007) mencionan que "el dME es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática" (Cordero y Flores, 2007, p. 14). La crítica a este dME es que no ha logrado un nivel funcional del conocimiento matemático, sino más bien se ha dejado en un nivel utilitario, es decir, no ha podido atender a lo funcional porque no rinde cuentas de la construcción social del conocimiento matemático. Lo funcional tiene relación con un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que le transforma su realidad, en oposición al conocimiento utilitario. Lo anterior provoca que el aprendiz no logre hacer suyos los conocimientos ya que estos se le presentan de una manera acabada y con escasa posibilidad de que él logre construir o generarlos, de tal manera que frente a diversas situaciones pueda lograr articular y movilizar dichos conocimientos. Es así que uno de los objetivos de la Teoría Socioepistemológica (TS) es realizar un rediseño del discurso matemático escolar (rdME), para ello se deben crear marcos de referencia que permitan la resignificación del conocimiento matemático.

El dME interpretado desde su construcción social, es la expresión de una epistemología dominante anclada exclusivamente a la construcción de estructuras conceptuales, situación que conlleva fenómenos como la exclusión, la opacidad y la adherencia: Es, por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático; por otro lado, es la negación de la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático; y por otro, no permite cuestionar ni trastocar el conocimiento (Soto, Gómez, Silva-Crocci y Cordero, 2012, Citado en Soto, Gómez, Silva-Crocci y Cordero, 2014, p. 1459).

Por otro lado, en el intento por difundir los saberes matemáticos se conforman discursos, que la Socioepistemología ha denominado con el término dME, "aclaran que la estructura de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos" (Minguer, 2004, Citado en Cantoral, *et al*., 2006, p. 86).

3.3. REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR (rdME)

Se refiere a la elaboración de propuestas de enseñanza basadas en una epistemología renovada, que será palpable en situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los profesores. Aquí están las estructuras objetivables del dME: libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otras (Cantoral, 2013, Citado en Reyes-Gasperini, 2016, p. 43).

3.4. LA NOCIÓN DE RESIGNIFICACIÓN

3.4.1. *¿Qué es resignificación?*

Uno de los fundamentos de la Socioepistemología es que ésta, a diferencia de otras aproximaciones teóricas, no considera a la matemática escolar como algo dado, inamovible e incuestionable. La Socioepistemología intenta cuestionar el contenido de la matemática escolar, y en muchos casos modificarlo o enriquecerlo. Aquí es donde entra el concepto de resignificación.

Resignificación es un concepto teórico de la Socioepistemología que sirve para designar ese proceso de enriquecimiento del contenido matemático.

La resignificación está íntimamente ligada a la generación y modificación que sufre el conocimiento matemático cuando se reconoce el papel de las prácticas provocando, entonces, que se reconozca también que dicho conocimiento tiene un uso -situado- y éste, además, tiene un desarrollo. Es decir, se resignifica continuamente ya que el significado establecido o construido por un grupo, no necesariamente deberá ser comprendido o utilizado por otro, en el mismo sentido (Cordero y Flores, 2007).

3.5. TEORÍAS DE LAS PROPORCIONES

3.5.1. *Desarrollo del razonamiento proporcional*

El esquema de proporción es considerado por Piaget como un componente básico del razonamiento formal, que será necesario, entre otros, para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación. Sin embargo, esto no quiere decir que los niños no tengan una percepción progresiva de las proporciones. El desarrollo de esta idea también sigue las etapas típicas de la teoría de Piaget, quien estudió cómo los niños la usan cuando tienen que estimar la probabilidad de un suceso (Godino y Batanero, 2002, p. 431).

3.5.2. *Razonamiento proporcional (el razonamiento proporcional en las matemáticas)*

Reyes-Gasperini (2011), enuncia que la noción de razón surge al comparar dos números o magnitudes a través de su cociente, mientras que las proporciones resultan de comparar los valores de dos listas de números o cantidades variables para ver si guardan siempre la misma razón entre sí. Si llamamos $a\ y\ b$ a dos cantidades, su razón está dada por el cociente:

$$\frac{a}{b}$$

Y si denotamos por x los valores que puede tomar una cantidad variable y por y los valores correspondientes de la otra, decir que $x\ e\ y$ son proporcionales significa que las dos cantidades están relacionadas por una expresión como la siguiente:

$$\frac{y}{x} = k \text{ donde } k \text{ es la constante}$$

O lo que es lo mismo:

$$y = kx$$

k es llamada la constante o factor de proporcionalidad.

A pesar del aspecto tan sencillo de las fórmulas anteriores, las nociones de proporcionalidad y sus consecuencias son centrales en todas las matemáticas. Ejemplo de ello, es el papel que juegan en campos como la medición, la presentación y tratamiento de la información, el estudio de la variación y la geometría (Reyes-Gasperini, 2011, p. 86).

3.5.3. *Proporción*

Godino y Batanero (2002), enuncian que una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones. En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Cualquier cambio de disposición entre los cuatro números que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre sí dará lugar a una nueva igualdad de fracciones (Godino y Batanero, 2002, p. 422). Una proporción permite escribir cuatro igualdades equivalentes entre dos fracciones (que suelen ser interpretadas en este caso como razones), como se resume a continuación (ver figura 11).

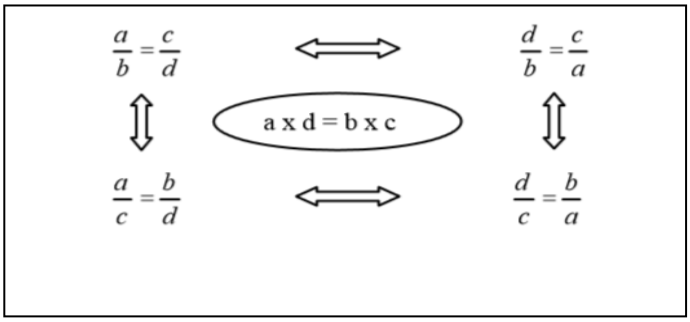


Figura 11. Definición de proporción (Godino y Batanero, 2002, p. 422).

3.5.4. *Magnitudes proporcionales*

Se llaman proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón, es decir, no se habla de la igualdad entre dos razones (idea aritmética), sino que se está hablando de la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes (idea variacional) (Reyes-Gasperini, 2013, p. 25).

3.5.5. *Magnitudes directamente proporcionales*

Dos magnitudes $A\ y\ B$ son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante.

3.5.6. *Magnitudes inversamente proporcionales*

Dos magnitudes $A\ y\ B$ son **inversamente proporcionales** si están inversamente correlacionadas y se verifica que:

Magnitud A	a	b	c	…
Magnitud B	a'	b'	c'	…

$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' \ldots = k,$ siendo k **la razón de proporcionalidad.**

3.6. DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

Este capítulo se fundamenta teóricamente con la literatura científica sobre la naturaleza de la Socioepistemología y su intervención en el discurso Matemático Escolar, al incorporar aspectos sociales a la investigación didáctica, requiriendo ampliar el espacio de la escuela incorporando otras prácticas de referencia, generando un cambio conceptual de centración (Cantoral, 2013).

En este orden de ideas, desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica, se aprecia claramente el requerimiento de una matemática funcional a la hora de construir significados mediante los procesos de interacción social para transformar la realidad que vive el ciudadano.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo, se pretende mostrar las actividades y un diseño metodológico que permite responder a la pregunta de investigación planteada, dentro del cual se pone en juego argumentos de los estudiantes al enfrentar problemas de su entorno, con el fin de resignificar las nociones de razón, proporción y proporcionalidad. Actividades que promueven el análisis de elementos conceptuales mediante un diseño que propicia un contexto que de funcionalidad a los conocimientos previos.

Desde la teoría Socioepistemológica esta investigación se considera de enfoque metodológico cualitativo al concentrarse en un contexto educativo, un objeto matemático explícito y los sujetos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta propuesta va encaminada a precisar el escenario social y cultural en el que se encuentran los objetos de estudio: razón, proporción y proporcionalidad, con la intención que el estudiante pueda comprender, transformar e interactuar con el mundo en que vive; lo que implica articular las distintas dimensiones de la realidad social con los diversos cambios en las políticas educativas.

En la investigación cualitativa, el investigador debe concentrarse en los datos colectivos e individuales, con el objetivo de apartarlos, y devolverlos a su significado inicial, con un análisis de la interpretación que le den los datos directamente (Zabala, 2015, p. 65).

La metodología a utilizar en esta investigación empírico-experimental es un estudio de casos, “un estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 2010, p. 11). Con un modelo de evaluación comprensiva de enfoque cualitativo, una educación centrada en responder a las necesidades de los estudiantes; un modelo que exige un método: pluralista, flexible, interactivo, holístico, subjetivo y orientado al servicio. Con un diseño hermenéutico, el cual utiliza la entrevista y la observación como principales técnicas de recolección de información.

Sobre la base las consideraciones anteriores, Denzin y Lincoln (1994) establecen que de los estudios cualitativos de casos se esperan "descripciones abiertas", "comprensión mediante la experiencia" y "realidades múltiples" (Citado en Stake, 2010, p. 46). No se puede sencillamente diseñar la búsqueda de significados complejos, ni alcanzarlos de forma retrospectiva. Las personas perciben las cosas de forma diferente, debido no sólo a la sencillez de sus observaciones, sino a que la experiencia determina en parte los significados (Stake, 2010, p. 46).

Esta investigación está enmarcada en un ambiente empírico-experimental por lo que se busca que el investigador y su entrevistado a partir de la entrevista y los cuestionarios alcancen los encuentros requeridos como soporte en la investigación cualitativa.

Empírico: Stake (2010) enuncia que “está orientado al campo de observación; la atención se centra en lo que se observa, incluidas las observaciones hechas por los informadores; hace todo lo posible por ser naturalista, no intervencionista; y hay una relativa preferencia por la naturalidad lingüística en las descripciones, con un cierto desdén por las grandes expresiones”(Stake, 2010, p. 50).

Experimental: el diccionario en línea de la Real Academia Española –RAE– lo define como "Fundado en la experiencia, o que se sabe y alcanza por ella".

Entrevista Semi-estructurada: se caracteriza por tener un formato flexible, buscando que la persona entrevistada encuentre la comodidad y confianza suficientes como para expresar libremente lo que piensa y ofrecer información sobre su vida, sin sentirse juzgado por la otra persona (Morosini, 2012, p. 23).

Esta investigación se desarrolla en la Institución Educativa Armando Luna Roa, con el propósito de contribuir al fortalecimiento de habilidades matemáticas que propicien un contexto de resignificación del uso de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad con estudiantes entre 12 y 17 años, con el ánimo de desarrollar el pensamiento proporcional en los estudiantes y buscar los procesos de construcción social del conocimiento matemático.

Se resalta la importancia de estos objetos matemáticos como saberes o conocimientos indispensables en el desarrollo del currículo, que nos invitan a generar espacios de reflexión y de interacción en los procesos áulicos, articulando la matemática del cotidiano y la matemática escolar. Producto de ello, esta triada, por un lado, desarrolla el pensamiento aritmético y potencia el algebraico, convirtiéndose, como plantean Lesh *et al.*, (1988, Citado por Guacaneme, 2002) en la piedra angular que recoge la aritmética y da nacimiento al álgebra. Y por otro, como lo señala Vergnaud (1994), es la columna vertebral del pensamiento multiplicativo.

Las actividades están enfocadas a motivar a los estudiantes a resolver situaciones problemas que mediante diversas argumentaciones propicien el uso de la proporcionalidad de acuerdo con la situación o escenario que se enfrente, con el objetivo de generar prácticas sociales que encause al estudiante a identificar su rol en la construcción social de conocimiento matemático.

En este sentido, el diseño realizado para la investigación y la aplicación de los instrumentos, se enfocaron en los casos de estudio que involucran a los estudiantes como principales actores en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.1. PARTICIPANTES

- **Estudiantes:**

En esta investigación participan 24 estudiantes entre hombres y mujeres del grado séptimo de la Institución Educativa Armando Luna Roa, estudiantes del mismo curso con diferencias significativas a la hora de usar procedimientos adecuados para enfrentar situaciones problemáticas de la matemática escolar. Diferencias encontradas despúes de asumir que los estudiantes están en condiciones para resolver diversos problemas que involucran las nociones de razón, proporción y proporcionalidad.

Tabla 1 Información de los estudiantes		
Estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Armando Luna Roa Etiquetados E1, E2, …, E24		
Grados	Estudiantes evaluados	Estudiantes entrevistados
Séptimo	24	8

En esta sección aplicamos el cuestionario de preguntas cerradas y Semi-abiertas con la intención de proporcionar herramientas teóricas que involucren diversos criterios para promover el aprendizaje de los estudiantes y validar el modo de proceder ante una situación problema en la búsqueda de una construcción progresiva del razonamiento proporcional y con ello, propiciar la construcción social del conocimiento matemático. De esta manera con las preguntas desarrolladas se analizaron los siguientes casos de estudio:

- **Los casos de estudio:**

Casos de estudio			
Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**
E1, E3, E4, E7, E9, E10	**E2, E5, E6, E11, E13, E14**	**E8, E12, E16, E19, E20, E22**	**E15, E17, E18, E21, E23, E24**
No interpreta la diferencia entre fracción y razón	Confunde la noción de fracción con la de razón	No diferencia una fracción de una razón	No posee fundamentos para diferenciar una fracción de una razón
Carece de fundamentos para identificar cuando una proporcionalidad es directa e inversa	Diferencia las magnitudes proporcionales de aquellas que no lo son	Identifica gráfica y analiticamente cuando una proporcionalidad es directa e inversamente proporcional	Reconoce magnitudes directa e inversamente proporcionales y realiza sus modelos gráficos
Completa tabla de valores que representa proporcionalidad directa	Completa tabla de valores que representa proporcionalidad directa	Completa tabla de valores que representa proporcionalidad directa e inversa	Completa tabla de valores que representa proporcionalidad directa
Desconoce la representación	Presenta dificultad al construir gráficas	Construye gráficas que representan	Construye gráficas que representan

gráfica de una proporcionalidad directa	que representan una proporcionalidad directa e inversa	una proporcionalidad directa e inversa	una proporcionalidad directa

A partir de la aplicación del cuestionario se realizó un análisis cualitativo que revela el uso de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad como elementos esenciales que intervienen en las acciones de los estudiantes al adquirir aprendizajes significativos para la vida cotidiana y proponer argumentaciones conceptuales de soluciones que necesariamente ponen en juego el conocimiento mediante procesos de resignificación de los conceptos al trabajar problemáticas que presenten situaciones cotidianas para ellos.

4.2. DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

Como se mencionó anteriormente, tras una elaboración y análisis Socioepistemológico del cuestionario se pretende que los estudiantes fortalezcan el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo con la intención de evidenciar dificultades de aprendizaje y argumentaciones fundamentadas en los conocimientos adquiridos a través de las actividades del día a día de los estudiantes para evitar el uso de los algoritmos de manera mecánica, con el propósito de que las prácticas sociales adquieran mayor importancia a la hora de articular la realidad que viven los estudiantes y el conocimiento Matemático Escolar.

Este capítulo enmarcó la forma como se ha venido llevando a cabo esta investigación cualitativa, utilizamos el método de estudio de casos, cuyas técnicas se sustentaron en cuestionario de preguntas cerradas, Semi-abiertas y entrevistas Semi-estructuradas, las cuales, juegan un papel fundamental a la hora de recoger los datos e interpretarlos para el análisis de los resultados expuestos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

Con este capítulo se presenta un análisis de los resultados obtenidos mediante la realización de actividades tales como: cuestionarios de preguntas cerradas y Semi-abiertas, entrevistas Semi-estructuradas; de donde se realizaron los "a priori" y los "a posteriori", estos últimos bajo el fundamento de la teoría Socioepistemológica.

El desarrollo del capítulo se orientó en dos momentos.

5.1. MOMENTO 1

El primer momento se enfoca en la aplicación del cuestionario. Para el a priori en este primer momento se presentan situaciones de aprendizaje de las matemáticas donde los **casos 1, 2, 3 y 4**, se seleccionaron de acuerdo con la relación encontrada en las respuestas arrojadas por los estudiantes y con base a ello se determinó el a posteriori, por medio del cual se pudo evidenciar las fortalezas y debilidades de los estudiantes a la hora de enfrentarse a situaciones problemas de objetos matemáticos como son la razón, la proporción y la proporcionalidad, donde los estudiantes organizados en el **caso 1** fueron quienes tienen más falencias a la hora de enfrentarse a dichos problemas y los estudiantes instaurados en el **caso 3**, quienes más fortalezas mostraron ante estas situaciones.

De acuerdo con las argumentaciones de los estudiantes relacionados en las actividades que recogen los casos de estudio, se evidencia que lo importante no son los algoritmos matemáticos sino el nuevo sentido que adquieren los conceptos para los estudiantes al comprender el uso y los diversos significados que pueden adoptar los objetos matemáticos ante una situación de aprendizaje.

Por tanto, en la búsqueda de justificaciones que propicien construir argumentos basados en un pensamiento matemático, la apropiación del saber juega un papel importante, ya que asume un rol fundamental en la confrontación de la problematización del saber matemático a través de su uso y su funcionalidad con el uso de algoritmos matemáticos como reglas que inducen a la memorización. De allí, que el análisis de los casos de estudio deja ver procedimientos y representaciones de los estudiantes que privilegian la articulación de argumentaciones para favorecer la construcción social del conocimiento matemático.

5.2.MOMENTO 2

El segundo momento se centra en la aplicación de la entrevista Semi-estructurada por su utilidad para obtener información más completa y profunda que con el desarrollo del cuestionario, el propósito central de la aplicación de la entrevista fue evaluar el progreso en el aprendizaje de los estudiantes al enfrentar situaciones problemáticas que involucran las nociones de razón, proporción y proporcionalidad, y con ella, asegurarnos de obtener respuestas basadas en argumentaciones útiles para este estudio de casos. En este sentido, la entrevista por su flexibilidad nos permitió recabar más información que el cuestionario y alcanzar mejores muestras, ya que los estudiantes tuvieron mayor disponibilidad para realizar la entrevista que al desarrollar el cuestionario.

5.3. ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMI-ESTRUCTURADA DE LOS ESTUDIANTES

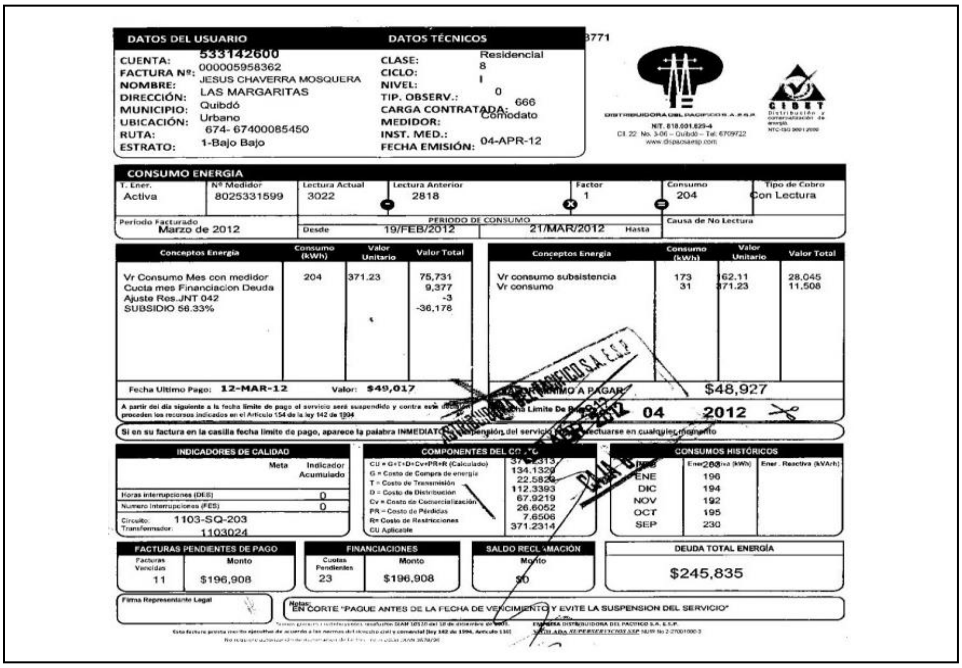
La entrevista Semi-estructurada se realizó a 8 estudiantes de los 24 que intervienen en esta investigación, estos ocho estudiantes reflejaron en sus respuestas el uso de la proporcionalidad en la solución de situaciones problemas de la vida cotidiana.

Dicha entrevista sirvió para tener un acercamiento con los estudiantes en el marco de la teoría Socioepistemológica que propicia la construcción social del conocimiento matemático, y con esto, proponer actividades que privilegien la articulación de argumentaciones en la búsqueda del desarrollo pensamiento proporcional en el estudiante.

5.3.1. *A priori de la entrevista Semi-estructurada*

La entrevista contiene una pregunta Semi-abierta, de donde surgen otros interrogantes después de analizar las respuestas de los estudiantes, la pregunta inicial fue:

Describa con sus palabras en un recibo de servicio público qué magnitudes se tienen en cuenta y cómo están correlacionadas para generar el valor que debe pagar el usuario.



DATOS DEL USUARIO

CUENTA: 533142600
FACTURA Nº: 000005958362
NOMBRE: JESUS CHAVERRA MOSQUERA
DIRECCIÓN: LAS MARGARITAS
MUNICIPIO: Quibdó
UBICACIÓN: Urbano
RUTA: 674- 67400085450
ESTRATO: 1-Bajo Bajo

DATOS TÉCNICOS

CLASE: Residencial
CICLO: 8
NIVEL: I
TIP. OBSERV.: 0
CARGA CONTRATADA: 666
MEDIDOR: Comodato
INST. MED.:
FECHA EMISIÓN: 04-APR-12

DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A. E.S.P.

CIDET

CONSUMO ENERGIA

T. Ener.	Nº Medidor	Lectura Actual	Lectura Anterior	Factor	Consumo	Tipo de Cobro
Activa	8025331599	3022	2818	1	204	Con Lectura

Periodo Facturado: Marzo de 2012
PERIODO DE CONSUMO: Desde 19/FEB/2012 Hasta 21/MAR/2012
Causa de No Lectura

Conceptos Energia	Consumo (kWh)	Valor Unitario	Valor Total
Vr Consumo Mes con medidor	204	371.23	75,731
Cuota mes Financiacion Deuda			9,377
Ajuste Res.JNT 042			-3
SUBSIDIO 56.33%			-36,176

Conceptos Energia	Consumo (kWh)	Valor Unitario	Valor Total
Vr consumo subsistencia	173	162.11	28.045
Vr consumo	31	371.23	11.508

Fecha Ultimo Pago: 12-MAR-12 Valor: $49,017

VALOR MINIMO A PAGAR $48,927

Fecha Limite De Pago 04 2012

A partir del día siguiente a la fecha límite de pago el servicio será suspendido y contra este documento proceden los recursos indicados en el Artículo 154 de la ley 142 de 1994

Si en su factura en la casilla fecha límite de pago, aparece la palabra INMEDIATO la suspensión del servicio puede efectuarse en cualquier momento

INDICADORES DE CALIDAD

	Meta	Indicador Acumulado
Horas interrupciones (DES)		0
Numero Interrupciones (FES)		0

Circuito: 1103-SQ-203
Transformador: 1103024

COMPONENTES DEL COSTO

CU = G+T+D+Cv+PR+R (Calculado)	371.2313
G = Costo de Compra de energía	134.1320
T = Costo de Transmisión	22.5828
D = Costo de Distribución	112.3393
Cv = Costo de Comercialización	67.9219
PR = Costo de Pérdidas	26.6052
R= Costo de Restricciones	7.6506
CU Aplicable	371.2314

CONSUMOS HISTÓRICOS

Mes	Ener. Activa (kWh)	Ener. Reactiva (kVArh)
	208	
ENE	196	
DIC	194	
NOV	192	
OCT	195	
SEP	230	

FACTURAS PENDIENTES DE PAGO: Facturas Vencidas 11, Monto $196,908
FINANCIACIONES: Cuotas Pendientes 23, Monto $196,908
SALDO RECLAMACIÓN: Monto $0
DEUDA TOTAL ENERGÍA: $245,835

Firma Representante Legal

Notas: EN CORTE "PAGUE ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO Y EVITE LA SUSPENSION DEL SERVICIO"

EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A. E.S.P.
VIGILADA SUPERSERVICIOS

Cuadro 1. Recibo (DISPAC).

5.3.2. *A posteriori de la entrevista Semi-estructurada, desde el marco de la teoría Socioepistemológica*

Al analizar algunas respuestas de los estudiantes en la entrevista Semi-estructurada, se deja en evidencia la importancia de relacionarse con el saber matemático para facilitar los procesos de aprendizaje y cómo otros campos hacen uso de la proporcionalidad en la solución de problemas. Sin embargo, la Socioepistemología nos invita a fortalecer estrategias didácticas que promuevan la articulación entre los aspectos sociales y educativos del objeto de conocimiento.

5.4. DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

El propósito fundamental de este capítulo fue describir las actividades y analizar los criterios seguidos para su diseño en la búsqueda de una construcción social del conocimiento. Aunado a esto, al poner en práctica las actividades se busca generar que los estudiantes se cuestionen sobre sus argumentaciones y puedan confrontar sus ideas con las ideas de los demás participantes.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de una investigación basada en la resignificación del uso de las nociones de Razón, Proporción y Proporcionalidad, a través de la confección de actividades que motivan a los estudiantes a construir el conocimiento a partir de las prácticas socialmente compartidas y asumir roles de liderazgo en la solución de problemas que respondan a mejorar la dinámica social.

6.1. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con la aplicación de este proyecto se buscó fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes del grado séptimo. Para ello, se propuso vincular la matemática escolar en la realidad que vive el estudiante, sobre la consideración de que las matemáticas que se emplean en escenarios no escolares favorecen la transversalidad de los usos del conocimiento, por lo cual, se hizo énfasis en la construcción social del conocimiento matemático.

En síntesis, en nuestro trabajo de investigación se siguió el principio de resignificar el saber, asumiendo que la razón, proporción y proporcionalidad como objetos de estudio útil en diferentes contextos o campos de aplicación, permitieron romper con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende.

6.2. OBJETIVO GENERAL

El foco de atención de esta investigación fue resignificar el uso de las nociones de objetos de conocimiento matemático, concretamente en el caso de la razón, proporción y proporcionalidad como fenómenos que articulan las cuatro dimensiones del saber matemático (social, epistemológica, didáctica y cognitiva), fortaleciendo la adquisición de otros significados y representaciones que provocan nuevos usos en el proceso de apropiación del conocimiento.

Por tal motivo, con la resignificación de algunos elementos teóricos y del uso de los saberes matemáticos en distintos escenarios se logró establecer y dimensionar el papel que juegan en los estudiantes sus experiencias y conocimientos previos así como sus situaciones vivenciadas, lo que permitió establecer una postura crítica frente al saber cómo conocimiento en uso y su significado a partir de prácticas en contexto.

6.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

El desarrollar situaciones problemas que involucran razonamientos donde se usó la proporcionalidad en el contexto de los participantes, permitió la interacción con los diversos significados, dando lugar a una clasificación a partir de distintos criterios como elementos vivos que propicia el trabajo colaborativo y cooperativo conducente a fomentar liderazgo por parte de los estudiantes.

A raíz de lo anterior, esta investigación centró su atención en el diseño de una Unidad Didáctica como una forma de planificar las actividades, orientadas a fortalecer la dinámica del grupo en el momento de trabajar las situaciones de aprendizaje para propiciar un contexto de resignificación de los usos de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad, favoreciendo así su carácter funcional y con ello potenciar los procesos de interacción social en la construcción de conocimiento, ya que el sustento teórico de esta investigación es la Socioepistemología.

6.4. ASPECTOS HISTORICO-EPISTEMOLÓGICO

El análisis Histórico-Epistemológico dejó en evidencia la importancia de entender la naturaleza y el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos para comprender los procesos de aprendizaje implicados al profundizar en los diversos significados de un objeto matemático, así como su construcción a partir de la realidad social y lo esencial de comunicar los conceptos como el resultado de los intereses y necesidades en el crecimiento de la humanidad.

Es importante resaltar que la investigación, se enfocó en los significados de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad desde diferentes contextos, para favorecer la interpretación de los usos del conocimiento según su época histórica e identificar el rol que adquieren las situaciones de proporcionalidad, su articulación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como también potenciar sus usos en distintos escenarios.

6.5. TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

En esta investigación se mostró la especial importancia de intervenir los objetos matemáticos desde la Socioepistemología, reconociendo el valor de situar los saberes en el entorno social de la vida del estudiante, lo que permitió enriquecer los significados para introducirlos en el aula teniendo en cuenta los distintos escenarios donde se usa el saber matemático; nos invitó además, a reflexionar en torno a la fuerte presión social que se ejerce en la escuela por el interés de proponer una epistemología de prácticas que favorezcan el aprendizaje en los estudiantes. La investigación dejó en evidencia, en las actividades desarrolladas por los estudiantes, cómo opera el enfoque socioepistemológico en la producción de conocimiento a partir de la práctica social.

Desde este enfoque, se centró la atención en situaciones de aprendizaje que permitieron la construcción de conocimiento matemático en torno a la proporcionalidad, desde significados propios que se pudieron construir y reconstruir como herramientas que favorecieron el desarrollo del razonamiento y la argumentación en el estudiante permitiendo que los saberes adquieran un nuevo sentido en los procesos de interacción social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior,* volumen (II), pp-pp. 152-171. Recuperado http://www.redalyc.org/pdf/2991/299124244008.pdf

Camelo, F. y Mancera, G. (2006). *El currículo desarrollado en torno a la proporcionalidad: un estudio cualitativo realizado en secundaria* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Manizales-Colombia.

Cantoral, R. Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. (2006) Socioepistemología y Representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial, 83-102.*

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología y Matemáticas. *Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. IPN. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21.*

Cantoral, R. y Reyes-Gasperini, D. (2014). Socioepistemología y Matemáticas: Del aula extendida a la sociedad del conocimiento "Todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27.*

Castaño, N. (2014). *Dificultades En La Enseñanza De Las Operaciones Con Números Racionales En La Educación Secundaria* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Autónoma, Manizales-Colombia.

Castro, I. y Díaz, L. (2010). Pensamiento proporcional. Una mirada Socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 889-908.*

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso Matemático Escolar. Un estudio Socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), 7-38.*

Daza, J. (2014). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional, Bogotá-Colombia.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica* (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso-Chile.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante. *Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452. 414-444.*

Godino, J., Beltrán, P., Burgos. M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. *Universidad de Granada, Universidad de Zaragoza.*

Gómez, K., Silva, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27 (25), 1457-1464.*

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de Exhaución. *Revista ISSN 1131-7787 (33), 101-129.*

González, P. (2003). *La historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática.*

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de Matemáticas. *Revista EMA, 7(1), 3-42.*

Gutiérrez, O. (2013). *Una propuesta didáctica que permita abordar y potencializar la aprehensión del concepto de proporcionalidad en estudiantes de la educación básica secundaria* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional, Manizales-Colombia.

Holguín, C. (2012). *Razonamiento Proporcional* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional, Bogotá-Colombia.

Jaramillo, L. (2012). *La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento Matemático.* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional, Medellín-Colombia.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista Científica Pensamiento y Gestión 20, 165-193.*

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). *Propuesta Metodológica para la Investigación Socioepistemológica.*

Morales, A. y Rosas, L. (2016). Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párvulos. El caso del polígono. *Estudios pedagógicos (Valdivia) 42 (2), 247-267.*

Morosini, E. (2012). *Investigación Cualitativa*. Universidad Nacional de Asunción. Asunción, Paraguay.

Nolasco, H. y Velázquez, S. (2013). Análisis histórico y epistemológico del concepto de semejanza. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 427- 435.*

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA 8 (2), 157-182.*

Obando, G. (2011-2012). *Sistemas de prácticas asociadas a las razones, la proporción y la proporcionalidad: el caso de las configuraciones epistémicas en algunos grados de* *la educación básica* (Tesis Doctoral sin publicar). Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17 (1), 59-81.*

Oller, A. y Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (3), 317-338.*

Pezoa, M. (2012). *La Práctica De Modelación Al Curriculum Escolar Chileno. Una Propuesta Desde La Socioepistemología* (Tesis de Doctorado no publicada). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso-Chile.

Puerto, Y. (2011). *Unidad didáctica para la construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá-Colombia.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México-México.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2012). El empoderamiento docente desde la teoría Socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1783-1792.*

Reyes-Gasperini, D. (2013). *Transversalidad de la proporcionalidad.* México: Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V. (IEPSA).

Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. y Cantoral, R. (2014). Cuando una crece, la otra decrece… ¿Proporcionalidad inversa o directa? *Revista Premisa 16 (62), 1-15.*

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación 2 (11), 155-176.*

Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (2), 299-324.*

Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 207-216.*

Sánchez, M. (2011). Una crítica a la Socioepistemología a través del concepto de resignificación.

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Barcelona: Marfil.

Sepúlveda, K. y Lezama, J. (2015). Un estudio Socioepistemológico de la epistemología de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento matemático. *XIV Conferencia Latinoamericana de Educación Matemática.*

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica.* Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

Shield, Malcolm y Dole, Shelley (2002). *Investigación de las representaciones de libros de texto de razón y proporción.*

Soto, D., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2014). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27.*

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de investigación en ciencias 3 (1), 51-58.*

Zabala, L. (2015). *Construcciones y Mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes* (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso-Chile.

ANEXO 1

A PRIORI DEL CUESTIONARIO DE PREGUNTAS SEMI-ABIERTAS DESDE EL MARCO DE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

1. ¿De las siguientes expresiones selecciona cuáles representan una fracción y explica el por qué?
   - **A.** $\frac{8}{0}$
   - **B.** $\frac{L}{D}$
   - **C.** $\frac{5}{4}$
   - **D.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
   - **E.** $\frac{1}{20}$

____

____

RESPONDE LAS PREGUNTAS 2 Y 3 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN:

María es una joven estudiante que está cursando séptimo grado, está cumpliendo trece años y quiere que su madre le prepare un pastel de vainilla para compartir con los compañeros del curso, la madre motivada por el cumpleaños de su hija le pregunta que para cuántas personas debe preparar el pastel y así sacar la cantidad de cada uno de los ingredientes que debe comprar, María le dice que para 30 personas, la madre le comenta que se debe comprar: harina, mantequilla, esencia de vainilla, azúcar, huevos, polvo de hornear, limones, sal, leche, bicarbonato; y que en ese caso se deben aplicar las siguientes cantidades: 125 gr de mantequilla, una cucharada de bicarbonato, una taza de leche, 600 gr de harina, una pizca de sal, 500 gr de azúcar, un sobre de canela, 10 huevos, una cucharada de levadura y una cucharada de ralladura de limón.

2. Si aumenta la cantidad de personas para compartir el pastel. ¿Qué pasaría con las porciones de cada individuo?

   - **A.** Aumentaría, porque al aumentar las personas aumentan las porciones de cada individuo.
   - **B.** Disminuiría, porque al aumentar las personas disminuyen las porciones de cada individuo.
   - **C.** No variaría, pues al aumentar las personas no afectaría las porciones de cada individuo.
   - **D.** Disminuiría, porque al disminuir las personas disminuyen las porciones de cada individuo.

Justifica tu respuesta

____

____

3. Si se quiere preparar un pastel con la misma receta para 15 personas, la cantidad de harina y azúcar que se necesita respectivamente es

   A. 300 gr y 250 gr
   B. 250 gr y 300 gr
   C. 600 gr y 500 gr
   D. 500 gr y 600 gr

Justifica tu respuesta

___

___

4. Se necesita pintar el salón de clases, la pintura que se gasta para cubrir el salón es proporcional a la superficie de las paredes que se desean pintar. Por cada $40\ m^2$ (4m x 10m) de pared se requiere 1 galón de pintura (3,785 L). Teniendo en cuenta que para pintar una área de $40\ m^2$ necesito 1 galón de pintura; para pintar una pared de $20\ m^2$ (4m x 5m) necesito

   A. Mayor cantidad de pintura porque la superficie es mayor.
   B. Exactamente la mitad de la pintura, porque es la proporción entre el área de la superficie de las paredes y la cantidad de pintura.
   C. Exactamente el doble de pintura, porque es la proporción entre el área de la superficie de las paredes y la cantidad de pintura.
   D. No se puede calcular, porque hacen falta datos.

Justifica tu respuesta

___

___

5. En una caja A se han metido 2 fichas azules y 1 ficha roja. En otra caja B se han metido 3 fichas azules y 1 ficha roja. Con los ojos vendados tienes que sacar una ficha roja para ganar un premio (primero movemos bien la caja para que las fichas se mezclen). ¿Cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

   A. La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha roja.
   B. La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha roja.
   C. Las dos cajas dan la misma posibilidad.
   D. No se puede determinar cuál de las dos cajas da mayor posibilidad.

Justifica tu respuesta

___

___

6. Se va a celebrar una fiesta para conmemorar un año más de labores en una compañía, se desea repartir vino en copas plásticas de $50\ cm^3$. Si se cuenta con 2

botellas de vino de 1000 cm^3 cada una y se le va a dar media copa a cada invitado, ¿para cuántos invitados alcanza el vino?

____

____

7. La siguiente tabla registra las distancias recorridas por un automóvil que viaja a velocidad constante en diferentes intervalos de tiempo, en la cual se representa la distancia en kilómetros (km) y el tiempo en horas (h).

Tiempo (h)	2	2,5	3	3,5	4
Distancia (km)	120	150	180	210	240
Velocidad (km/h)					

A. Expresa la razón entre la distancia y el tiempo para encontrar la velocidad a la que viaja el automóvil.
B. Completa los valores de la tabla, verifica que la velocidad sea constante durante el recorrido y justifica tu respuesta.
C. Representa gráficamente los valores de la distancia en función del tiempo de la tabla anterior, ubicando la distancia en el eje vertical (y) y el tiempo en el eje horizontal (x).
D. Indica si la relación entre la distancia y el tiempo es directa o inversamente proporcional. Justifica tu respuesta.

8. En la siguiente tabla se ilustra la relación entre la velocidad y el tiempo empleado por un automóvil al recorrer una distancia constante de 90 km, observa que a mayor velocidad empleada para recorrer esa distancia el tiempo que se invierte en el recorrido es menor.

Velocidad (km/h)	90	45	30	15
Tiempo (h)	1	2	3	6

A. Representa gráficamente los valores de la velocidad en función del tiempo de la tabla anterior, ubicando la velocidad en el eje vertical (y) y el tiempo en el eje horizontal (x).
B. Indica si existe una relación de proporcionalidad entre estas dos magnitudes. Si existe la relación, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? Justifica tu respuesta.
C. De los datos de la tabla encuentra la razón o constante de proporcionalidad si existe.

9. Tres amigos se reúnen para apostar en **Deportes Betlinee Fútbol**, deciden hacer una Polla de $10000 para la cual Juan aporta $7000, Diego $2000 y Luis $1000. Al ver los resultados se enteran que ganaron la Polla por un valor de $600000 y necesitan repartir el dinero de manera proporcional a la cantidad que aportó cada uno.

A. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno y argumenta por qué?
B. Según el enunciado, ¿cuánto ganaría cada individuo por cada $500 invertidos en la apuesta?
C. Después de conocido el valor ganado por cada uno, ¿cuánto disminuiría el dinero si les descuentan el 5%?

10. Completa la **tabla** para que las magnitudes de las columnas sean directamente proporcionales, indica cuál es la **constante de proporcionalidad** y representa la tabla gráficamente.

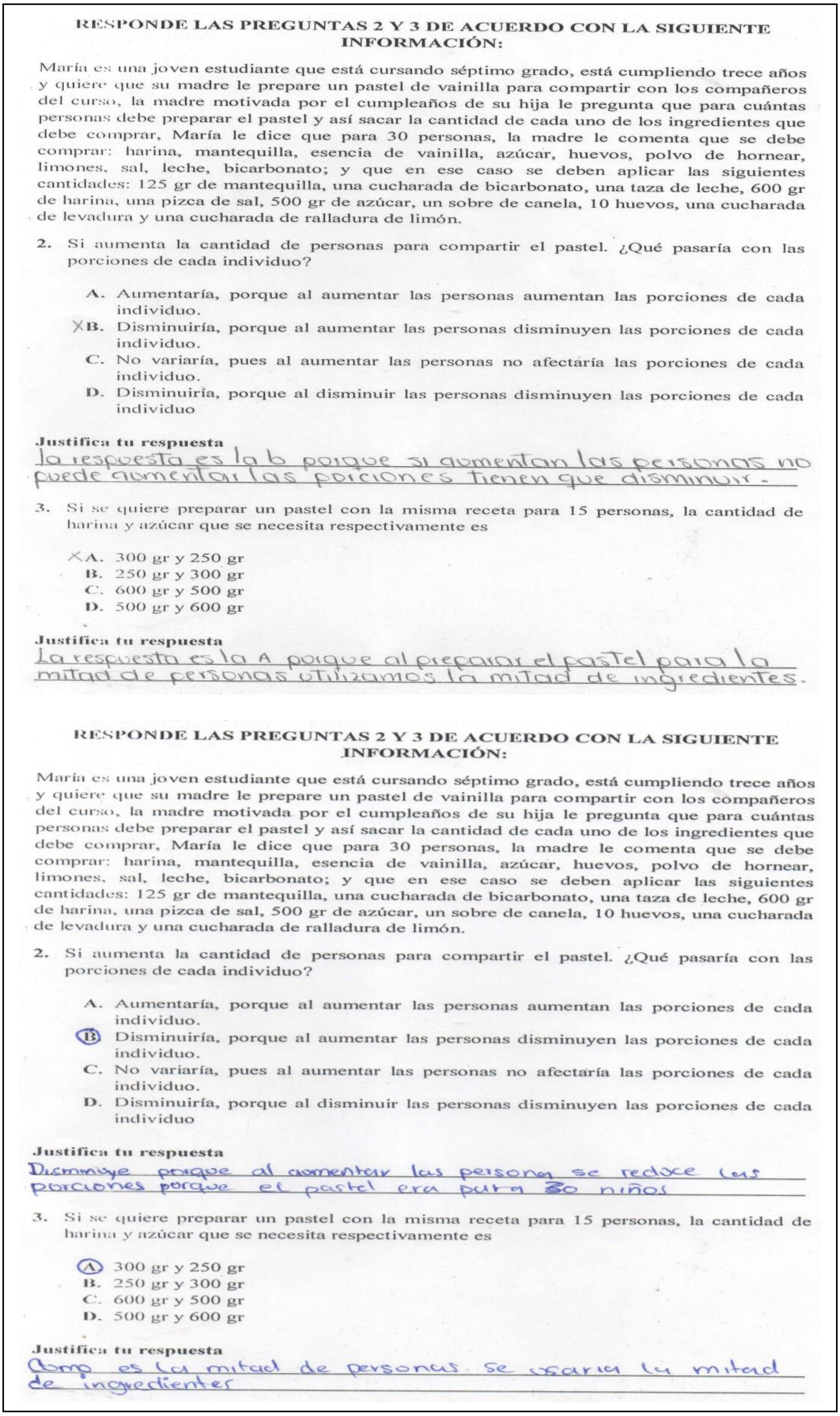
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0.5	**1.0**		**2.0**			**3.5**

Haz aquí la gráfica…

ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO DE PREGUNTAS SEMI-ABIERTAS DESDE EL MARCO DE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA.

Para el siguiente análisis se tuvo en cuenta la estructura de actividades que con mayor frecuencia se vinculan en la vida de los estudiantes y propician el uso de la proporcionalidad en diferentes escenarios.

Actividad 1.



RESPONDE LAS PREGUNTAS 2 Y 3 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN:

María es una joven estudiante que está cursando séptimo grado, está cumpliendo trece años y quiere que su madre le prepare un pastel de vainilla para compartir con los compañeros del curso, la madre motivada por el cumpleaños de su hija le pregunta que para cuántas personas debe preparar el pastel y así sacar la cantidad de cada uno de los ingredientes que debe comprar, María le dice que para 30 personas, la madre le comenta que se debe comprar: harina, mantequilla, esencia de vainilla, azúcar, huevos, polvo de hornear, limones, sal, leche, bicarbonato; y que en ese caso se deben aplicar las siguientes cantidades: 125 gr de mantequilla, una cucharada de bicarbonato, una taza de leche, 600 gr de harina, una pizca de sal, 500 gr de azúcar, un sobre de canela, 10 huevos, una cucharada de levadura y una cucharada de ralladura de limón.

2. Si aumenta la cantidad de personas para compartir el pastel. ¿Qué pasaría con las porciones de cada individuo?

A. Aumentaría, porque al aumentar las personas aumentan las porciones de cada individuo.
X **B.** Disminuiría, porque al aumentar las personas disminuyen las porciones de cada individuo.
C. No variaría, pues al aumentar las personas no afectaría las porciones de cada individuo.
D. Disminuiría, porque al disminuir las personas disminuyen las porciones de cada individuo

Justifica tu respuesta
la respuesta es la b porque si aumentan las personas no puede aumentar las porciones tienen que disminuir.

3. Si se quiere preparar un pastel con la misma receta para 15 personas, la cantidad de harina y azúcar que se necesita respectivamente es

X **A.** 300 gr y 250 gr
B. 250 gr y 300 gr
C. 600 gr y 500 gr
D. 500 gr y 600 gr

Justifica tu respuesta
La respuesta es la A porque al preparar el pastel para la mitad de personas utilizamos la mitad de ingredientes.

RESPONDE LAS PREGUNTAS 2 Y 3 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN:

María es una joven estudiante que está cursando séptimo grado, está cumpliendo trece años y quiere que su madre le prepare un pastel de vainilla para compartir con los compañeros del curso, la madre motivada por el cumpleaños de su hija le pregunta que para cuántas personas debe preparar el pastel y así sacar la cantidad de cada uno de los ingredientes que debe comprar, María le dice que para 30 personas, la madre le comenta que se debe comprar: harina, mantequilla, esencia de vainilla, azúcar, huevos, polvo de hornear, limones, sal, leche, bicarbonato; y que en ese caso se deben aplicar las siguientes cantidades: 125 gr de mantequilla, una cucharada de bicarbonato, una taza de leche, 600 gr de harina, una pizca de sal, 500 gr de azúcar, un sobre de canela, 10 huevos, una cucharada de levadura y una cucharada de ralladura de limón.

2. Si aumenta la cantidad de personas para compartir el pastel. ¿Qué pasaría con las porciones de cada individuo?

A. Aumentaría, porque al aumentar las personas aumentan las porciones de cada individuo.
B. Disminuiría, porque al aumentar las personas disminuyen las porciones de cada individuo.
C. No variaría, pues al aumentar las personas no afectaría las porciones de cada individuo.
D. Disminuiría, porque al disminuir las personas disminuyen las porciones de cada individuo

Justifica tu respuesta
Disminuye porque al aumentar las persona se reduce las porciones porque el pastel era para 30 niños

3. Si se quiere preparar un pastel con la misma receta para 15 personas, la cantidad de harina y azúcar que se necesita respectivamente es

A. 300 gr y 250 gr
B. 250 gr y 300 gr
C. 600 gr y 500 gr
D. 500 gr y 600 gr

Justifica tu respuesta
Como es la mitad de personas se usaria la mitad de ingredienter

Cuadro 1. La proporción en la preparación y repartición de un pastel.

Con las preguntas 2 y 3 del cuestionario, ilustradas en la **actividad 1**, se puede evidenciar como los estudiantes expresan sus argumentos mediante la consideración de que “a **más** corresponde **más** y a **menos** corresponde **menos**” o “a **más** corresponde **menos** y a **menos** corresponde **más**”, haciendo referencia a las nociones de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa respectivamente. Estas ideas soportan el lenguaje coloquial empleado en las aulas de clase por parte de estudiantes y docentes, el cual reduce y simplifica la profunda idea de la proporcionalidad como se puede observar en algunas de las respuestas obtenidas.

Actividad 2.

7. La siguiente tabla registra las distancias recorridas por un automóvil que viaja a velocidad constante en diferentes intervalos de tiempo, en la cual se representa la distancia en kilómetros (km) y el tiempo en horas (h).

Tiempo (h)	2	2,5	3	3,5	4
Distancia (km)	120	150	180	210	240
Velocidad (km/h)	60	60	60	60	60

A. Expresa la razón entre la distancia y el tiempo para encontrar la velocidad a la que viaja el automóvil.
B. Completa los valores de la tabla, verifica que la velocidad sea constante durante el recorrido y justifica tu respuesta.
C. Representa gráficamente los valores de la distancia en función del tiempo de la tabla anterior, ubicando la distancia en el eje vertical (y) y el tiempo en el eje horizontal (x).
D. Indica si la relación entre la distancia y el tiempo es directa o inversamente proporcional. Justifica tu respuesta.

a).

$\frac{120}{2} = 60$

$\frac{150}{2,5} = 60$

$\frac{180}{3} = 60$

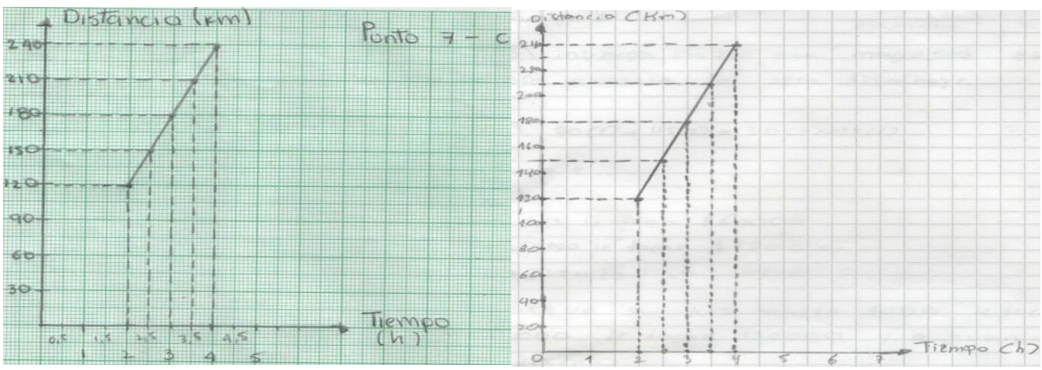
$\frac{210}{3,5} = 60$

$\frac{240}{4} = 60$

$\frac{120}{2} = \frac{150}{2,5} = \frac{180}{3} = \frac{210}{3,5} = \frac{240}{4.} = 60$

b). R//= Al ser la velocidad constante no cambia, se mantiene para cada casilla.

d) R//= La relación entre la distancia y el tiempo es directa porque si aumenta la distancia tambien aumenta el tiempo.



Cuadro 2. Magnitudes directamente proporcionales.

Por tanto, con la pregunta 7 del cuestionario, ilustrada en la **actividad 2**, queremos mostrar cómo un grupo de estudiantes argumentan conceptualmente sus ideas, representan gráficamente una relación de proporcionalidad directa, gráficas que ilustran diferentes actividades de la vida cotidiana y situaciones evaluadas frecuentemente en diferentes áreas del saber.

Actividad 3.

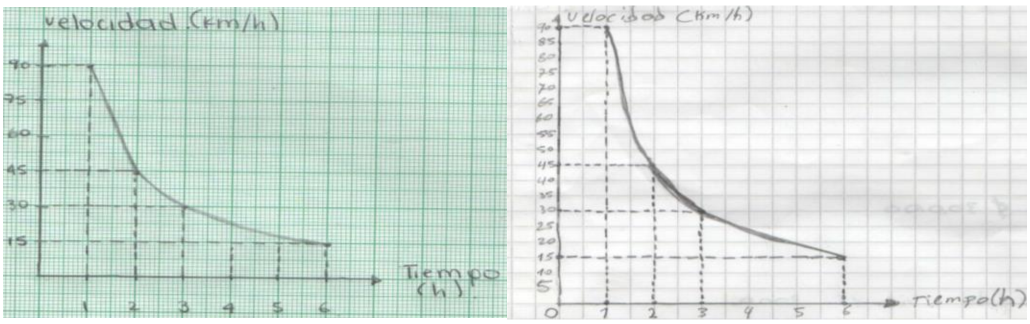
8. En la siguiente tabla se ilustra la relación entre la velocidad y el tiempo empleado por un automóvil al recorrer una distancia constante de 90 km, observa que a mayor velocidad empleada para recorrer esa distancia el tiempo que se invierte en el recorrido es menor.

Velocidad (km/h)	90	45	30	15
Tiempo (h)	1	2	3	6

A. Representa gráficamente los valores de la velocidad en función del tiempo de la tabla anterior, ubicando la velocidad en el eje vertical (y) y el tiempo en el eje horizontal (x).
B. Indica si existe una relación de proporcionalidad entre estas dos magnitudes. Si existe la relación, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? Justifica tu respuesta.
C. De los datos de la tabla encuentra la razón o constante de proporcionalidad si existe.

b). R//= si existe relación de proporcionalidad entre las 2 magnitudes y es inversa porque al aumentar la velocidad disminuye el tiempo.

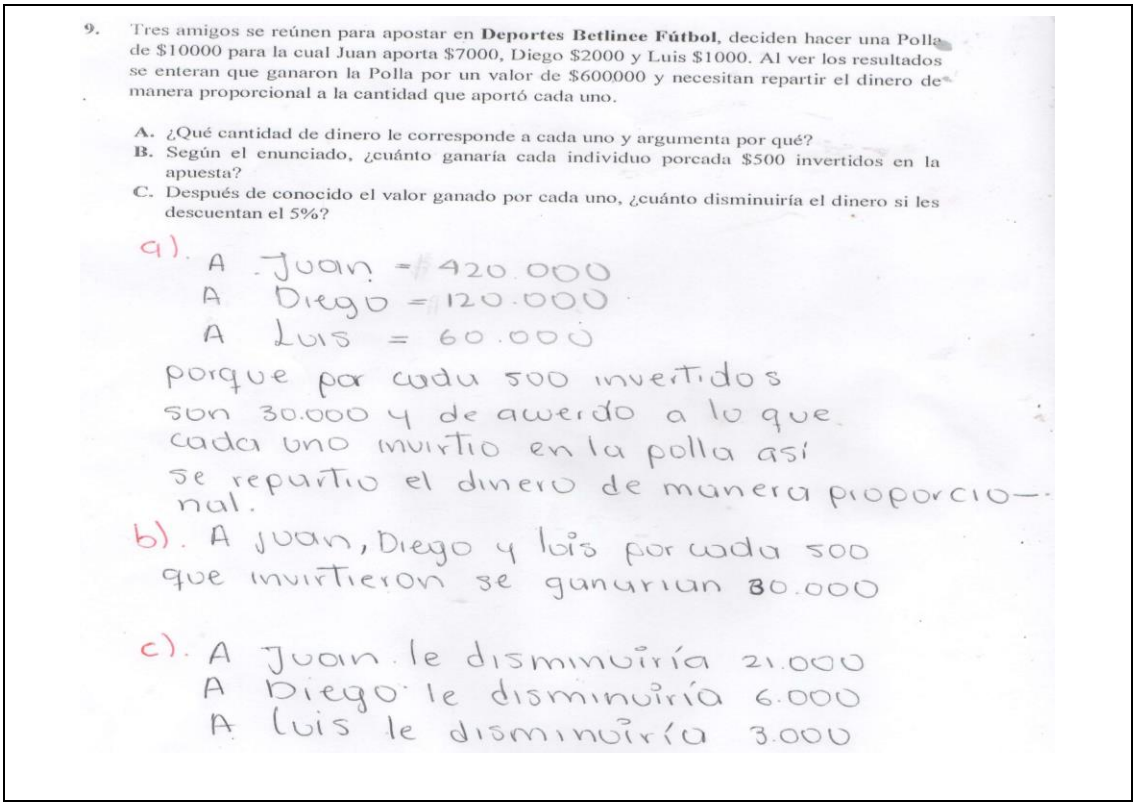
c). R//= $90(1) = 45(2) = 30(3) = 15(6) = 90$
La constante proporcionalidad es 90.



Cuadro 3. Magnitudes inversamente proporcionales.

Es importante reconocer que variables como la velocidad y el tiempo están involucradas en actividades de la vida cotidiana de todo individuo. Por esta razón, el objetivo principal de esta **actividad 3**, es ilustrar entre otras cosas cómo entre más rápido se realice una actividad menos tiempo tardará en desarrollarla y este es un principio fundamental que norma el quehacer diario en la vida del estudiante. Además, aquí se presenta la razón como producto de dos cantidades a la hora de identificar magnitudes inversamente proporcionales y al constante de proporcionalidad.

Actividad 4.



9. Tres amigos se reúnen para apostar en **Deportes Betlinee Fútbol**, deciden hacer una Polla de $10000 para la cual Juan aporta $7000, Diego $2000 y Luis $1000. Al ver los resultados se enteran que ganaron la Polla por un valor de $600000 y necesitan repartir el dinero de manera proporcional a la cantidad que aportó cada uno.

A. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno y argumenta por qué?
B. Según el enunciado, ¿cuánto ganaría cada individuo porcada $500 invertidos en la apuesta?
C. Después de conocido el valor ganado por cada uno, ¿cuánto disminuiría el dinero si les descuentan el 5%?

a). A Juan = 420.000
A Diego = 120.000
A Luis = 60.000
porque por cada 500 invertidos son 30.000 y de acuerdo a lo que cada uno invirtio en la polla así se repartio el dinero de manera proporcional.

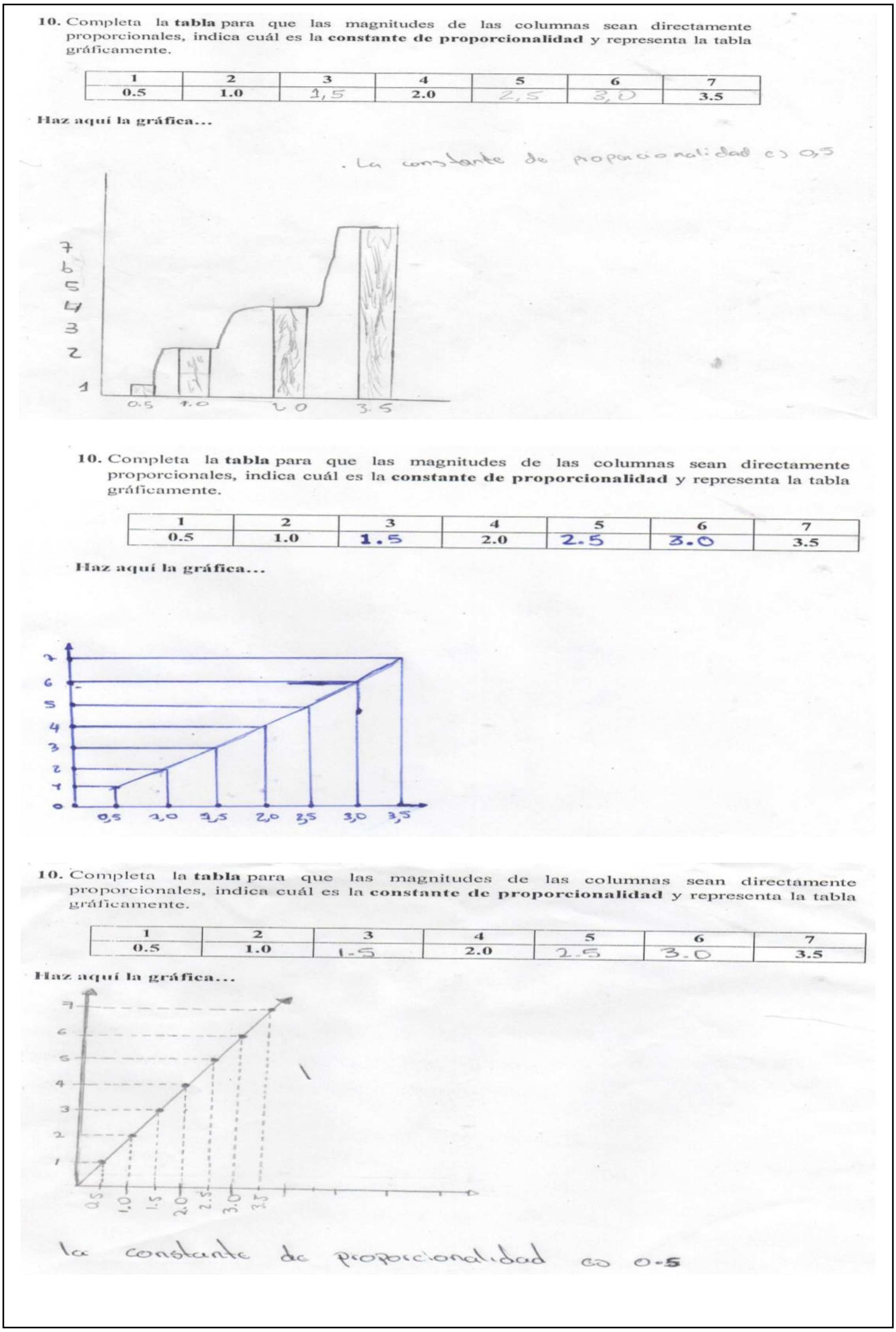
b). A juan, Diego y luis por cada 500 que invirtieron se ganarian 30.000

c). A Juan le disminuiría 21.000
A Diego le disminuiría 6.000
A Luis le disminuiría 3.000

Cuadro 4. Situación de reparto proporcional.

Esta **actividad 4**, pretende colocar en evidencia la esencia de la proporcionalidad en la vida de los estudiantes, al enfrentarse en diferentes situaciones a realizar repartos proporcionales (dividir una cantidad en pates directa o inversamente proporcional), cálculos de porcentajes para comprender descuentos de promociones, por qué reprobar o pasar la materia, el uso de la batería de un teléfono celular, entre otras actividades útiles en su vida cotidiana.

Actividad 5.



10. Completa la **tabla** para que las magnitudes de las columnas sean directamente proporcionales, indica cuál es la **constante de proporcionalidad** y representa la tabla gráficamente.

1	2	3	4	5	6	7
0.5	1.0	1,5	2.0	2,5	3,0	3.5

Haz aquí la gráfica...

. La constante de proporcionalidad es 0,5

10. Completa la **tabla** para que las magnitudes de las columnas sean directamente proporcionales, indica cuál es la **constante de proporcionalidad** y representa la tabla gráficamente.

1	2	3	4	5	6	7
0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5

Haz aquí la gráfica...

10. Completa la **tabla** para que las magnitudes de las columnas sean directamente proporcionales, indica cuál es la **constante de proporcionalidad** y representa la tabla gráficamente.

1	2	3	4	5	6	7
0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5

Haz aquí la gráfica...

la constante de proporcionalidad es 0.5

Cuadro 5. Representación gráfica de proporcionalidad directa.

Con la pregunta 10 del cuestionario, ilustrada en la **actividad 5**, se quiere mostrar que los estudiantes con facilidad completan la tabla donde hay una proporcionalidad directa e identifican la constante de proporcionalidad, pero hay un grupo de estudiantes que no representan gráficamente una proporcionalidad directa, situaciones que se muestran en algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

ANEXO 2

UNIDAD DIDÁCTICA

RESIGNIFICACIÓN DE LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD PARA ESTUDIANTES DE 12 A 17 AÑOS.

LUVIN CORNERLIO CHAVERRA RAMIREZ
Institución Educativa Armando Luna Roa
luvincornelio@hotmail.com

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO
Universidad de Medellín
lzabala@udem.edu.co

Dra. TAMARA DEL VALLE CONTRERAS
Universidad Católica Silva Henríquez
tamaradc.mat@gmail.com

Dra. ELISABETH RAMOS RODRÍGUEZ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
elisabeth.ramos@pucv.cl

Índice

Contenido

RESUMEN

La presente unidad didáctica pretende contribuir al mejoramiento de los resultados en la prueba SABER mediante la resignificación de la noción de proporcionalidad con estudiantes de 12 a 17 años. Como lo enuncia Reyes-Gasperini, 2013 la proporcionalidad es considerada como un hilo conductor para algunos cursos de matemáticas y ciencias, ya que se aborda desde la vida cotidiana y se prolonga hacia la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad y el análisis matemático. Argumenta, por tanto, que la riqueza del concepto de proporcionalidad permite mostrar a las matemáticas como un todo articulado (Reyes-Gasperini, 2013, p. 18).

En esta investigación, partimos de que el estudio de la proporcionalidad como objeto matemático transversal precisa el aprendizaje basado en el proceso de construcción social del conocimiento a través de las prácticas socialmente compartidas. En este sentido, con las actividades diseñadas en la unidad didáctica se logró identificar el rol asumido por los estudiantes al transitar el proceso de significación de la proporcionalidad en un conjunto de situaciones problemas que involucran experiencias construidas a partir de la realidad que se vive en la cotidianeidad de los individuos.

La Teoría Socioepistemológica, como teoría empírica que busca intervenir para transformar las prácticas de aula mediante el rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME), nos permitió registrar cuáles conceptos y procesos requieren de resignificación progresiva para entender y atender la realidad del estudiante con el propósito de mejorar las situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Teoría Socioepistemológica; Resignificación; Proporcionalidad.

ABSTRACT

The present didactic unit aims to contribute to the improvement of the results in the SABER test by resignifying the notion of proportionality with students from 12 to 17 years old. As stated by Reyes-Gasperini, 2013, proportionality is considered as a common thread for some math and science courses, since it is addressed from everyday life and is extended to arithmetic, algebra, geometry, probability and analysis. mathematical. He argues, therefore, that the richness of the concept of proportionality allows to show mathematics as an articulated whole (Reyes-Gasperini, 2013, p. 18).

In this research, we start from the fact that the study of proportionality as a transversal mathematical object requires learning based on the process of social construction of knowledge through socially shared practices. In this sense, with the activities designed in the didactic unit it was possible to identify the role assumed by the students when going through the process of significance of proportionality in a set of problem situations that involve experiences constructed from the reality that is lived in the everydayness of individuals.

Socioepistemological Theory, as an empirical theory that seeks to intervene to transform classroom practices through the redesign of School Mathematics discourse (rdME), allowed us to register which concepts and processes require progressive resignification to understand and address the reality of the student with the purpose of improve learning situations.

Keywords: Socioepistemological Theory, Resignification, Proportionality.

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad como objeto de conocimiento matemático transversal ha sido ampliamente problematizado por los estudiantes y docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este contexto Obando, Vasco y Arboleda (2014) señalan: "Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de este objeto de conocimiento sigue vigente" (Obando, Vasco y Arboleda, 2014, p. 60).

La proporcionalidad, como objeto de conocimiento matemático escolar, ha sido tema de estudio para la investigación científica de corte educativo por más de cuatro décadas. Las primeras investigaciones atendieron a las dificultades encontradas en los estudiantes al resolver enunciados o problemas que involucren al razonamiento proporcional, muchos de estos estudios utilizaron fundamentos o aspectos cognitivos. Posteriormente, "la investigación se orientó hacia los estudios de tipificación de estrategias ante dichas tareas: se clasificaban las posibles respuestas, las dificultades o errores mostrados por los estudiantes ante ciertas tareas o justo al momento de intentar resolver o trabajar una situación problema" (Reyes-Gasperini, 2013, p. 17).

En este sentido, "si bien se reconoce la valoración que a nivel curricular tienen ejes temáticos en torno a la proporcionalidad, éste continúa siendo un problema complejo en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje; ya que, a pesar de los importantes avances logrados en la investigación en didáctica de las matemáticas (caracterizaciones finas de los problemas cognitivos y didácticos) aún no se logran consolidar propuestas que modifiquen la forma como se aborda la proporcionalidad en los contextos escolares" (Obando, Vasco y Arboleda, 2014, p. 61).

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La proporcionalidad como objeto de conocimiento fundamental en la Enseñanza de las Matemáticas, ha despertado en los últimos años mucho interés en el campo de la investigación en Matemática Educativa, ya que este concepto propicia estrechar lapsos entre la matemática del cotidiano y la matemática escolar, para intervenir en la realidad que vive el estudiante con el propósito de transformarla a través de las prácticas sociales.

La proporcionalidad como objeto matemático transversal, desarrolla en el estudiante el razonamiento proporcional desde preescolar hasta el grado undécimo de educación media, y se construye como un eje fundamental en el pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos, por lo que este tipo de razonamiento debería ser estudiado a profundidad para que se produzca una correcta construcción, práctica y empleo adecuado de éste; entendiendo como razonamiento proporcional "una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y múltiples comparaciones y la capacidad de almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información" (Gutiérrez, 2013, p. 3).

"La proporcionalidad es un objeto matemático especialmente importante en el proceso de matematización de diversas disciplinas científicas, además de propiciar el desarrollo del pensamiento relacional" (Parra, Ávila y Ávila, 3013, p. 1242). Desde nuestra experiencia, se requiere de la resignificación del uso de la proporcionalidad en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Armando Luna Roa, ya que el aprendizaje de este objeto matemático y su aplicación en diferentes contextos ha generado muchas dificultades en los estudiantes; dificultades reflejadas en los resultados arrojados en la prueba SABER.

Luego de haber identificado la problemática, se proyecta diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica que contribuya a fortalecer los procesos de aprendizaje en los estudiantes y como consecuencia, mejorar los niveles de desempeño en la prueba SABER.

ANTECEDENTES

Son muchos los estudios realizados en torno a la proporcionalidad como objeto de conocimiento indispensable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Sin embargo, son pocas las investigaciones dedicadas específicamente a la transversalidad de dicho concepto en la Matemática Escolar y otras disciplinas. A lo que Reyes-Gasperini (2013), aporta lo siguiente:

> Existe una fuerte centración en los procesos didáctico-pedagógicos, sin que ello implique una problematización del saber matemático escolar en juego, es decir, no encontramos en estos estudios que se trate al saber matemático como variable: hacer del saber un problema, un objeto de análisis didáctico, localizando y analizando su uso y su razón de ser (Reyes-Gasperini, 2013, p. 12).

A continuación, se muestran investigaciones que resaltan la importancia de profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad desde diferentes marcos teóricos. Investigaciones que aportan elementos profundos de estrategias educativas dentro de los procesos de formación continua, desde las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social, con el ánimo de intervenir en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir innovaciones que permitan transformar las prácticas de aula mediante el empoderamiento docente.

Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2014), presentaron una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas, basándose en una unidad de análisis socioepistémica sobre la proporcionalidad, para que a través de ella pueda realizarse la problematización del saber matemático escolar. Actividades específicas que cuestionan el saber matemático escolar, concibiendo que desde la Teoría Socioepistemológica no sólo se reflexiona sobre el cómo se enseña, sino sobre el qué se enseña, “enfocándose en la discusión sobre la matemática en juego y no sólo en las acciones de profesores y estudiantes, porque en realidad estas últimas son efectos del dME y no un reflejo de su dominio de conocimientos” (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2014, p. 10).

En este sentido, se hacen contradicciones de las reglas mnemotécnicas en actividades que soportan que la proporcionalidad tiene la peculiaridad de ser transversal a todos los niveles educativos, entre ellas la que da nombre a este artículo `cuando una crece, la otra decrece´ ¿proporcionalidad inversa o directa? Esta regla mnemotécnica es válida siempre que la constante de proporcionalidad sea positiva. Asimismo, se reflexiona en la función lineal no proporcional, sobre la pendiente como razón de cambio, sobre lo proporcional que subyace en la razón de cambio y en la justificación gráfica y algebraica de por qué la función lineal, con $b \neq 0$, no puede ser una función de proporcionalidad.

El artículo anterior realizado por Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2014), adiciona a esta investigación experiencias y reflexiones en torno a la proporcionalidad directa e inversa, mediante actividades que problematizan el saber matemático escolar y con esto facilitar los procesos de aprendizaje al cuestionarse frente a la definición de proporcionalidad directa en los libros de texto centrada en el conjunto de los números naturales y su veracidad siempre y cuando la constante de proporcionalidad sea positiva (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2014).

Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2015), diseñaron una unidad de análisis socioepistémica recuperando circunstancialmente de que la constante de proporcionalidad no fuera una cuestión numérica, sino que tenga que ver con la relación que existe entre las magnitudes. “Quisieron mostrar los avances respecto al tránsito de la proporcionalidad a lo proporcional. Centrando su atención en una disciplina social: el Derecho Penal. Dando a conocer sus primeras hipótesis respecto de la importancia de encontrar cómo la proporcionalidad, un tema curricular transversal (mucho tiempo inmerso en el campo aritmético), norma las tomas de decisiones a nivel jurídico, en donde las magnitudes no pueden ser cuantificables numéricamente, pues estas son pena y daño. Entendiéndose como un ejemplo del relativismo epistemológico y la racionalidad contextualizada que rige a los saberes matemáticos desde una perspectiva Socioepistemológica. Que permitirá, entre otras cosas, diseñar propuestas en donde se problematice el saber matemático escolar considerando las relaciones entre las magnitudes, no sólo como un valor numérico” (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015, p. 2).

“En palabras simples, la idea del principio mencionado es que debe existir proporcionalidad entre una pena que se aplique y el daño ocasionado, es decir, no se puede aplicar la misma pena para diferentes delitos, no es lo mismo un homicidio que un robo. La atención está puesta en la relación entre daño y pena, y no sólo en uno de sus componentes, sólo podrá medirse la arbitrariedad de la decisión si se toma en cuenta la relación” (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015, p. 6).

Este artículo de Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2015), ilustra en esta investigación la noción de proporcionalidad como un tema curricular transversal y que, además, norma las tomas de decisiones a nivel jurídico, lo que favorece la funcionalidad de este saber en diferentes marcos de referencia y precisa que la proporcionalidad va más allá de los problemas con valores numéricos (Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral, 2015).

Godino y Batanero (2002), hacen referencia en el desarrollo cognitivo y la progresión en el aprendizaje, "considerando el razonamiento proporcional como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química" (Godino y Batanero, 2002, p. 21).

Sumado a esto, plantean que diversas investigaciones han mostrado, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan más lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado (Godino y Batanero, 2002, p. 21).

La investigación anterior realizada por Godino y Batanero (2002), aporta a este escrito la importancia de hacer un cuestionamiento frente al cómo desarrollar el razonamiento proporcional en el estudiante, ya que este pone en juego diversas habilidades matemáticas y propicia ambientes de aprendizaje que evitan el uso de técnicas rutinarias a la hora de resolver problemas.

Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017) afirman que "en la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.) y sus respectivas medidas. En una fase del proceso de resolución las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números reales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto" (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017, p. 5).

La afirmación anterior, proporciona elementos que nos invitan a estudiar con más detalle el uso que se hace del término "proporcionalidad", ya que en él intervienen significados que caracterizan su aplicación y enriquecen la comprensión de los estudiantes en las prácticas sociales asociadas a un campo de situaciones problemáticas (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017).

Ruiz y Valdemoros (2006), realizan un estudio de caso que forma parte de un proyecto doctoral concluido, “que hace referencia a una evaluación sobre la propuesta de enseñanza de razón y proporción desarrollada en la investigación doctoral. El caso estudiado, reflejó el proceder de varios niños, quienes resolvieron el cuestionario inicial con algoritmos manejados de un modo mecánico, sin darle sentido a sus elaboraciones”, lo cual se vio ratificado al principio del programa de enseñanza. Dicho programa propició la ampliación del pensamiento proporcional cualitativo de Paulina, fortaleciendo su pensamiento proporcional cuantitativo en el terreno de la resolución de problemas. Así, la enseñanza, el cuestionario final y las entrevistas mostraron que el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo le permitió a paulina ampliar las relaciones cuantitativas y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones plenas de sentido (Ruiz y Valdemoros, 2006, p. 2).

Aquí se considera que “el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo del niño le permite ampliar las relaciones cuantitativas entre magnitudes y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones llenas de sentido” (Ruiz y Valdemoros, 2006, p. 5).

Del estudio de caso realizado por Ruiz y Valdemoros (2006), se toman en cuenta para la investigación que se reporta en este documento, la importancia de implementar estrategias de enseñanza que apunten al enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo en el estudiante, ya que estos privilegian la articulación de argumentos y el acceso al uso del conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta la revisión y análisis de estudios e investigaciones que profundizan en la proporcionalidad como saber matemático transversal, se plantea la pregunta problematizadora y los objetivos de la presente investigación, los cuales estarán basados en el marco teórico de la Socioepistemología, que indaga sobre la resignificación de los usos del objeto matemático, cuyas bases teóricas se presentarán más adelante, de igual forma la conceptualización de la unidad didáctica que plateamos en los objetivos que según Sanmartí (2000), es un conjunto de actividades estructuradas y articuladas en torno a unos ejes articuladores para lograr objetivos establecidos.

¿Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje en estudiantes de 12 a 17 años mediante la resignificación del uso de la noción de proporcionalidad?

Para lo cual nos proponemos como objetivo general:

Resignificar el uso de la noción de Proporcionalidad con estudiantes de 12 a 17 años a partir de un Análisis Didáctico.

De donde se despenden los siguientes objetivos específicos:

Realizar un Análisis conceptual, de contenido y cognitivo sobre la Proporcionalidad.

Diseñar una clase desde la instrucción que permita la resignificación de la noción de Proporcionalidad.

Analizar los usos de la noción de Proporcionalidad con estudiantes de 12 a 17 años.

MARCO TEÓRICO

A continuación, el marco teórico de la investigación está sustentado en la Socioepistemología. Marco teórico que estudia la construcción social del conocimiento, lo que permite abordar la proporcionalidad, lo que permite reconocimiento de fenómenos de producción y divulgación del conocimiento matemático, concibiendo al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática como una construcción social.

La teoría

La Socioepistemología es sin lugar a duda una aproximación teórica que desarrolla estrategias de investigación.

> una teoría de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2003 Citado en Morales 2012, p. 3).

La Socioepistemología, como sustento teórico para la investigación en Matemática Educativa, se ocupa específicamente del problema que plantean las dinámicas propias de la construcción del saber matemático. “Este enfoque autentifica toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto contribuyen a la sabiduría humana”. Algunos enfoques teóricos contemporáneos se limitan sólo a alguna de esas formas de saber (Cantoral, 2013, Citado en Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014 p. 1573).

Actualmente un docente se ve enfrentado a diversos cambios educativos, ya sean reformas en el currículo, textos, cambio en el prototipo del modelo de enseñanza-aprendizaje, etc.

Por consiguiente, la teoría Socioepistemología sienta las bases para el estudio de la naturaleza del saber matemático y le brinda al docente la oportunidad de transformar su realidad, tomando decisiones sobre su quehacer didáctico a través de herramientas que le ayudaran a fortalecer su labor. Desde sus inicios la Socioepistemología se cuestionó sobre que se enseña, que saber matemático es el adoptado por el sistema educativo, a quien va dirigido, para que se enseña y por qué se está enseñando; sin descuidar el cómo se debería enseñar los contenidos matemáticos (Cantoral, 2013).

Debido a que esta postura deja como objeto de estudio a los conceptos matemáticos para centrarse en las prácticas de enseñanza-aprendizaje que creo la necesidad de estudio. La Socioepistemología incorpora además de los componentes cognitivos, didácticos, epistemológico y el componente social; e integra cuatro dimensiones de tal manera que se logra una mirada sistémica a los fenómenos a abordar. El problema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no solo involucra las explicaciones de las temáticas, sino la didáctica utilizada para trasmitir el saber matemático.

La Socioepistemología, provee distintas formas de investigación, ya que las matemáticas para ella son consideradas parte esencial de la cultura, es decir un elemento vivo que se crea fuera del aula, pero se va recreando dentro de ella. Las matemáticas están presentes en diversos escenarios y a través de acciones básicas de la actividad humana. Ya sea en la construcción de viviendas, la siembra, recetas de cocina, etc. Por tanto, podemos asegurar que la Socioepistemología estudia la vida de los objetos matemáticos al seno de la vida social.

Es así como la Socioepistemología estudia la manera como se ha ido reconstruyendo el conocimiento poniendo en duda el discurso matemático escolar. Por lo cual se ha hecho necesario darle otra mirada al discurso matemático escolar, donde se ha resaltado que se le ha dado mayor importancia a los conceptos y no a las prácticas. El discurso matemático no es funcional ya que provoca que el estudiante no interiorice los contenidos pues la forma como se les presenta una matemática acabada donde el estudiante queda por fuera de su construcción lo que no permite que sea el estudiante quien lo construya o genere pues ya están acabados.

Por consiguiente, la Socioepistemología se traza como objetivo rediseñar el discurso matemático escolar donde se haga mayor énfasis en las prácticas como rol fundamental del proceso educativo.

Discurso Matemático Escolar (dME)

En la actualidad, el modelo de enseñanza de la matemática está centrado en los conceptos, a partir de ellos se entregan ejemplos, aplicaciones, etc. Cordero y Flores (2007) mencionan que "el dME es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática" (Cordero y Flores, 2007, p. 14). La crítica a este dME es que no ha logrado un nivel funcional del conocimiento matemático, sino más bien se ha dejado en un nivel utilitario, es decir, no ha podido atender a lo funcional porque no rinde cuentas de la construcción social del conocimiento matemático. Lo funcional tiene relación con un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que le transforma su realidad, en oposición al conocimiento utilitario. Lo anterior provoca que el aprendiz no logre hacer suyos los conocimientos ya que estos se le presentan de una manera acabada y con escasa posibilidad de que él logre construir o generarlos, de tal manera que frente a diversas situaciones pueda lograr articular y movilizar dichos conocimientos. Es así que uno de los objetivos de la Teoría Socioepistemológica (TS) es realizar un rediseño del discurso matemático escolar (rdME), para ello se deben crear marcos de referencia que permitan la resignificación del conocimiento matemático.

El dME interpretado desde su construcción social, es la expresión de una epistemología dominante anclada exclusivamente a la construcción de estructuras conceptuales, situación que conlleva fenómenos como la exclusión, la opacidad y la adherencia: Es, por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático; por otro lado, es la negación de la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático; y por otro, no permite cuestionar ni trastocar el conocimiento

(Soto, Gómez, Silva-Crocci y Cordero, 2012, Citado en Soto, Gómez, Silva-Crocci y Cordero, 2014, p. 1459).

Por otro lado, en el intento por difundir los saberes matemáticos se conforman discursos, que la Socioepistemología ha denominado con el término dME, "aclaran que la estructura de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos" (Minguer, 2004, Citado en Cantoral, *et al*., 2006, p. 86).

Rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME)

Se refiere a la elaboración de propuestas de enseñanza basadas en una epistemología renovada, que será palpable en situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los profesores. Aquí están las estructuras objetivables del dME: libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otras (Cantoral, 2013, Citado en Reyes-Gasperini, 2016, p. 43).

La noción de resignificación

¿Qué es resignificación?

Uno de los fundamentos de la Socioepistemología es que ésta, a diferencia de otras aproximaciones teóricas, no considera a la matemática escolar como algo dado, inamovible e incuestionable. La Socioepistemología intenta cuestionar el contenido de la matemática escolar, y en muchos casos modificarlo o enriquecerlo. Aquí es donde entra el concepto de resignificación.

Resignificación es un concepto teórico de la Socioepistemología que sirve para designar ese proceso de enriquecimiento del contenido matemático.

La resignificación está íntimamente ligada a la generación y modificación que sufre el conocimiento matemático cuando se reconoce el papel de las prácticas provocando, entonces, que se reconozca también que dicho conocimiento tiene un uso -situado- y éste, además, tiene un desarrollo. Es decir, se resignifica continuamente ya que el significado establecido o construido por un grupo, no necesariamente deberá ser comprendido o utilizado por otro, en el mismo sentido (Cordero y Flores, 2007).

Nuestra unidad didáctica está fundamentada en los elementos desarrollados en el marco teórico, elementos que nos permiten resignificar la noción de proporcionalidad con el ánimo de que el estudiante alcance una construcción social del conocimiento.

MARCO METODOLÓGICO

Desde la teoría Socioepistemológica esta investigación se considera de enfoque cualitativa al concentrarse en un contexto educativo, un objeto matemático explícito y los sujetos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta propuesta va encaminada a precisar el contexto teórico en el que se encuentra este objeto de estudio: proporcionalidad, con la intención que el estudiante pueda comprender, transformar, e interactuar con el mundo en que vive; lo que implica articular las distintas dimensiones de la realidad social con los diversos cambios en las políticas educativas.

En la investigación cualitativa, el investigador debe concentrarse en los datos colectivos e individuales, con el objetivo de apartarlos, y devolverlos a su significado inicial, con un análisis de la interpretación que le den los datos directamente (Zabala, 2015, p. 65). En ese sentido, hacemos uso de un estudio de casos, que según Stake (2007) nos permite indagar en lo particular y complejo de un caso singular para llegar a comprender el fenómeno observado.

Dentro del estudio de casos nos centraremos en el caso de estudios intrínsecos, que en términos de Stake (2007) “hay poco interés en generalizar sobre las especies; el mayor interés reside en el caso concreto, aunque el investigador estudia también una parte del todo, y busca comprender que es la muestra, como funciona.” (p. 39).

Sobre la base de las consideraciones anteriores, Denzin y Lincoln (1994) establecen que de los estudios cualitativos de casos se esperan "descripciones abiertas", "comprensión mediante la experiencia" y "realidades múltiples". No se puede sencillamente diseñar la búsqueda de significados complejos, ni alcanzarlos de forma retrospectiva. Las personas perciben las cosas de forma diferente, debido no sólo a la sencillez de sus observaciones, sino a que la experiencia determina en parte los significados (Stake, 2010, p. 46).

Esta investigación considera como contexto la Institución Educativa Armando Luna Roa, con el propósito de contribuir al fortalecimiento de habilidades matemáticas que propicien un contexto de resignificación del uso de la noción de proporcionalidad con estudiantes entre 12 y 17 años, con el ánimo de desarrollar el pensamiento proporcional en los estudiantes y buscar los procesos de construcción social del conocimiento matemático.

ANÁLISIS CONCEPTUAL

En este apartado, queremos mostrar la importancia de conocer la evolución y desarrollo histórico de los conceptos para dar profundidad a los contenidos del currículo y una valoración crítica de los mismos. En ese sentido, abordaremos los aspectos histórico y epistemológico de la noción de proporcionalidad, con el propósito de comprender la naturaleza de este objeto de conocimiento, su trayectoria al llegar a las aulas de clase y su aplicación en diferentes contextos.

Análisis Histórico, epistemológico y fenomenológico

Los historiadores atribuyen a los griegos, y en particular a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque reconocen que sus orígenes pueden rastrearse en los babilonios (Nolasco y Velázquez, 2013).

Desde esta perspectiva, González (2008) plantea el siguiente argumento:

> La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones acarrean la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática. (p. 103).

El objeto matemático proporcionalidad en la matemática griega

La matemática, a través de diferentes fuentes de la Antigüedad como el historiador romano Plinio (siglo I d.C.) y Diógenes Laercio, historiador griego de la filosofía que vivió entre los (siglos II y III d.C.), sabemos que por los años 585 a.C. el matemático griego Thales de Mileto calculó, de una manera ingeniosa, la altura de la Gran Pirámide de Keops. "La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya.". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual que mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura” Por lo que estableció la relación entre los lados de triángulos semejantes, que él mismo demostró y hoy conocemos como teorema de Thales (Parra, Ávila y Ávila, 3013, p. 1242).

A Teano se le atribuye haber escrito tratados de matemáticas, uno de ellos sobre la proporción áurea. La búsqueda de relaciones de proporcionalidad fue la principal motivación que dio lugar a la mayor parte de la producción de la escuela pitagórica. Por la descripción histórica precedente, consideramos que la matemática griega es geométrica, y para ubicarnos en su epistemología, asumimos que el origen del objeto matemático proporcionalidad surge en ese contexto. Los Elementos de Euclides, representan acabadamente el tipo de geometría que caracteriza el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna (Parra, Ávila y Ávila, 3013, p. 1243).

Thales de Mileto y la proporcionalidad

Hacia el año 600 a.C. el padre tradicional de la matemática griega, Thales de Mileto, propone el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

Teorema de Thales: si dos rectas $r\ y\ r'$ se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra.

En este sentido, Jaramillo (2012) establece lo siguiente:

> Existe una leyenda que atribuye a Thales el uso de sus conocimientos de geometría para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y calcular la distancia a la costa de barcos en alta mar. Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco señalan que la medida de la altura de las pirámides se llevó a cabo a través de la determinación de

> la longitud de la sombra que ellas producían cuando una vara clavada verticalmente en el suelo producía una sombra igual a su altura. Para medir la distancia de los barcos en alta mar a la costa, la leyenda dice que Thales fue el primero en emplear la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Hay dudas muy grandes con respecto a esto, ya que estas ideas se habían manejado con mucha anterioridad en Egipto y Mesopotamia, donde Thales invirtió una parte de su vida (p. 11).

Thales de Mileto y la pirámide de Keops

Thales de Mileto (640 a.C. - 560 a.C.), conocido como uno de los siete sabios de la antigua Grecia y el padre de las matemáticas, la filosofía y la astronomía griega, mantuvo mucho contacto con los matemáticos egipcios y mesopotámicos, y precisamente en uno de sus viajes se le atribuyó el cálculo de la altura de la pirámide Keops de Egipto, utilizando un concepto geométrico que manejaba a la perfección: la semejanza de triángulos. Thales esperó el momento del día en que la sombra de su bastón midiera la misma longitud que el bastón mismo, y luego por semejanza de triángulos estimó que en dicho momento la sombra de la pirámide también sería igual a la altura de la misma, representado por Holguín (2012) de la siguiente manera (ver figura 1).

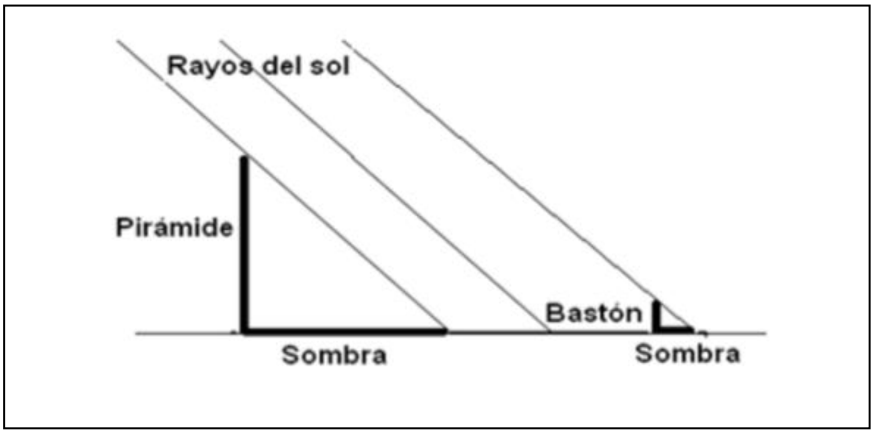


Figura 1. Cálculo de la altura de la pirámide Keops de Egipto (Holguín, 2012, p. 16).

De la epistemología del concepto

Para comprender el proceso, lo que lograron y sus limitaciones, es necesario empezar desde los griegos destacando las aportaciones de cuatro geómetras, cuyos trabajos nos permiten ahora entender el origen y desarrollo de la proporcionalidad. Los sistemas de prácticas desarrollados por cada uno de ellos para resolver cierto tipo de problemas, constituyen, de acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico, el significado que tenían de la Proporcionalidad; por ejemplo: Apolonio tenía, en forma embrionaria, una cierta idea del uso de coordenadas, Arquímedes utilizaba un método de modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite, así también Euclides y Pappus utilizaban transformaciones por proyecciones. Apolonio no sólo aportó una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. Se le considera a Apolonio ser el primero en utilizar un sistema de coordenadas para realizar demostraciones geométricas, antes que Fermat y Descartes (Parra, Ávila y Ávila, 3013, p. 1243).

La proporcionalidad en la geometría

La permanente necesidad de la humanidad de resolver problemas de su entorno, permitió que surgiera el concepto de proporción. Dichos problemas fueron en sus principios modelados geométricamente por grandes matemáticos como Tales de Mileto siglo V a. C., el cual logró aportar a la solución de diferentes situaciones. No obstante, dichas soluciones no hubieran sido posibles de no hacer un análisis métrico de las relaciones establecidas en dichos problemas. En general la aparición de nuevos conceptos y en especial los conceptos científicos se reducen a tres tipos básicos como lo establece Mosterín (2014):

> Los conceptos clasificatorios, los comparativos y los métricos. De esta manera, por ejemplo, se puede observar la estatura de dos personas y saber cuál es más alta que la otra (concepto comparativo). Pero se requiere de los conceptos métricos para establecer que tanto es más alta que la otra persona. Un concepto métrico es un homomorfismo entre un sistema empírico y un sistema numérico, el cual puede expresarse en varias escalas, características que corresponde evidentemente a la práctica científica. Una de las escalas establecidas por Mosterín, se denomina escala proporcional, la cual es de vital importancia pues no solo suministra información para determinar si un objeto es más, o menos, que otro con respecto a alguna característica, sino que señala en qué proporción exacta el uno es más, o menos, eso que el otro. Un ejemplo de escalas proporcionales, correspondientes a conceptos básicos, son la masa, la longitud o tiempo, entre otros (Daza, 2014, p. 26).

Otro de los problemas clásicos atribuidos a Thales de Mileto, fue haber calculado la distancia de una nave a la costa con ayuda de un razonamiento proporcional, como lo representa Daza (2014), modelación geométrica del problema clásico resuelto por Thales (ver figura 2).

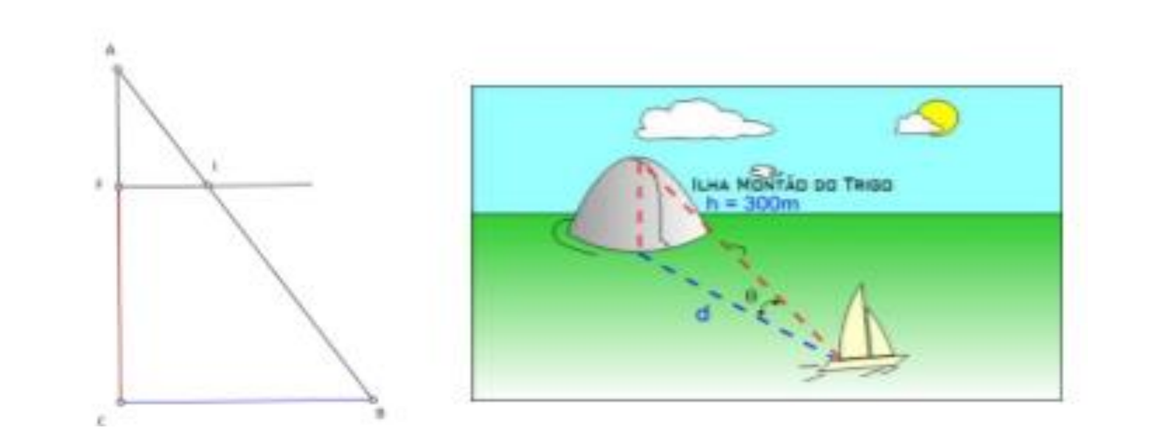


Figura 2. Cálculo de la distancia de una nave a la costa con la ayuda de un razonamiento proporcional realizado por Thales de Mileto (Daza, 2014, p. 26).

Aunque no es totalmente claro la forma en la cual Thales logró hacerlo, la suposición más probable es que si la nave o barco se encontraba en el punto B, Thales se habría subido a un faro CF que se encontraba en la orilla de la costa, con un aparato formado por dos listones en ángulo recto. Al colocar uno de ellos FA, vertical en línea recta con CF, y el otro paralelo a CB, lanzaría una visual desde A hacia el barco, la cual determinaría el punto de intersección I con el listón paralelo a CB. Debido a que conocía la altura del faro y las longitudes de los listones, por semejanza de los triángulos $AFI \; y \; ACB$ pudo determinar la distancia $CB = (CF + FA)\frac{FI}{FA}$.

El objeto matemático proporcionalidad y su epistemología en la física

En la Física, con Aristóteles surge incipientemente lo que sería proporcionalidad de manera cualitativa: entre mayor es el peso de un cuerpo mayor es su rapidez al caer, es decir una proporcionalidad entre la rapidez y el peso, posteriormente considerada errónea. Al derrumbarse el paradigma aristotélico centrado en los atributos de los cuerpos y no en sus relaciones, el significado de proporcionalidad desarrollado en la geometría griega se enriquece al emerger en el estudio de fenómenos físicos, por ejemplo Galileo establece la relación entre la longitud y el tiempo de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una proporcionalidad directa cuadrática de la forma: $h \, \alpha \, t^2$, después Kepler (1618), en sus famosas leyes encontraría para su tercera ley que: para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica. Esto es: $T^2 \alpha\, L^2$. En el siglo XVII al igual que la geometría, la Física también adquiere una algebrización (Parra, Ávila y Ávila, 3013).

Con el desarrollo del cálculo diferencial, la proporcionalidad con Newton, se enriquece con sus leyes del movimiento, así en sus Principia en la segunda Ley, para una fuerza F, en la interacción de cuerpos: $dp\ \alpha\ dt$ lo que sería una proporcionalidad directa lineal entre el momento lineal y el tiempo, al considerar la masa constante la relación entre la fuerza y la aceleración es: $F\ \alpha\ a$. El mismo Newton, al formular su Ley de la gravitación universal, tiene que: $F\ \alpha\ I/r^2$ (fuerza y distancia entre cuerpos), como una proporcionalidad inversa cuadrática. En la posteridad se daría un continuo establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre los objetos de la Física en sus diversas representaciones (gráfica, numérica y analítica) en la Física Clásica. Posteriormente, al emerger la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica la proporcionalidad, se ha enriquecido aún más (Parra, Ávila y Ávila, 3013).

La proporcionalidad en el Arte y la Arquitectura

La proporcionalidad es una cualidad percibida por el ser humano en la naturaleza, que se puede describir a través de expresiones matemáticas, la cual evoca nociones de belleza, orden y armonía. A través de un experimento, en el cual se le dio a escoger a centenares de personas diferentes rectángulos para que seleccionaran el más agradable para la vista, Fechener (1876) comprobó que la mayoría de las personas preferían aquellos cuya razón entre los lados era $34/21$, valor que difiere en una cantidad casi despreciable al que Luca Pacioli denominó divina proporción, también considerada como sección Áurea, por Leonardo da Vinci, o sección divina por Kepler. Este número irracional surgió de la relación existente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular y en la actualidad se representa con el símbolo o letra griega (phi) ϕ (en honor al escultor griego Fidas 490 a.C. - 423 a.C.).

Tanto en la arquitectura como en el arte la humanidad se ha cuestionado sobre cuáles son las medidas que permiten que una obra sea más armoniosa a la vista, siendo la razón Áurea aquella que responde a estos parámetros. Por tal motivo aparece en diversas obras arquitectónicas, aunque en algunas se desconoce si la proporción fue incluida de manera voluntaria. Ejemplos de estas obras son: el Stonehenge, monumento megalítico ubicado en el Reino Unido; el Zigurat de Ur el cual es una torre formada por terrazas, característico de la arquitectura mesopotámica; las pirámides mexicanas de Teotihuacán; las fachadas del Coliseo Romano; del Partenón de la Acrópolis de Atenas, también de catedrales como Nótre Dame de París, e incluso en construcciones modernas como el Palacio de Cristal, sede de las naciones unidas en New York, entre otras, como lo ilustra Daza (2014): Plano y fachada del Partenón y pintura de Piet Mondrian e Ilustración realizada en el estilo neoplasticista de Piet Mondrian respectivamente (ver figuras 3 y 4).

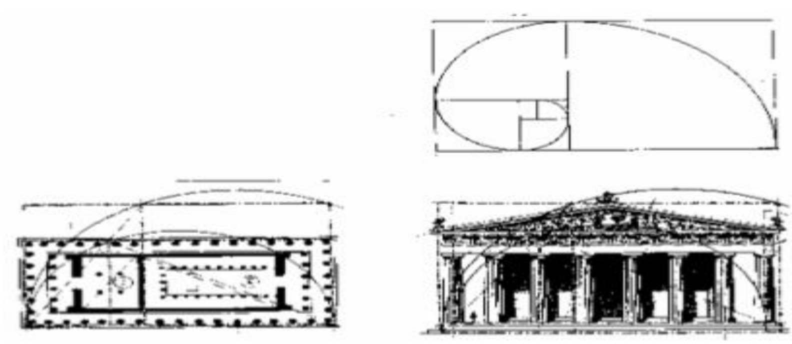


Figura 3. Plano y fachada del Partenón (Daza, 2014, p. 31).

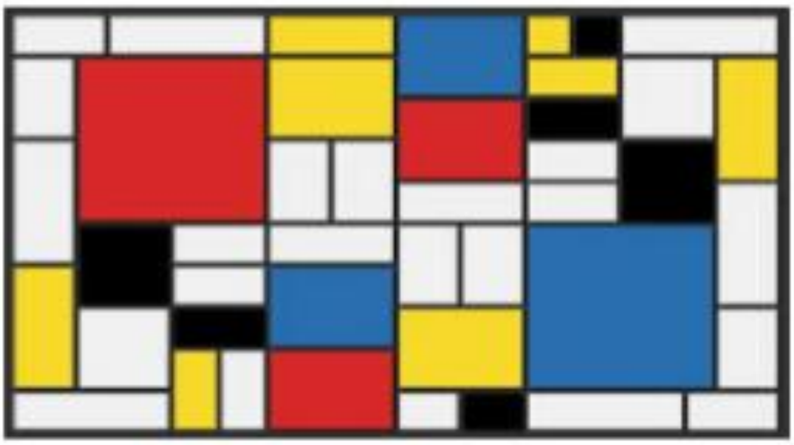


Figura 4. Pintura de Piet Mondrian (Daza, 2014, p. 31).

La proporcionalidad en la Astronomía

En tiempos antiguos grandes astrónomos utilizaron sus conocimientos sobre la proporcionalidad, para realizar conjeturas acerca de la Tierra, el Sol, la Luna y las estrellas. Un ejemplo de esto fue Aristarco 260 a. C. quien estimó la distancia que hay entre la Tierra y el Sol, así como también la distancia que existe entre la Tierra y la Luna, basándose en el hecho de que la dirección Tierra-Luna y Luna-Sol forma un ángulo de 90º cuando la Luna está en cuarto creciente o en cuarto menguante. Aristarco calculó el ángulo α (figura 5) que forma la dirección Tierra-Sol y Tierra-Luna en 87º y utilizando estos valores conjeturó que la distancia de la Tierra al Sol era 19 veces mayor a la distancia de la Tierra a la Luna, como lo muestra Daza (2014): diagrama de la distancia de la tierra al sol, calculada por Aristarco (ver figura 5).

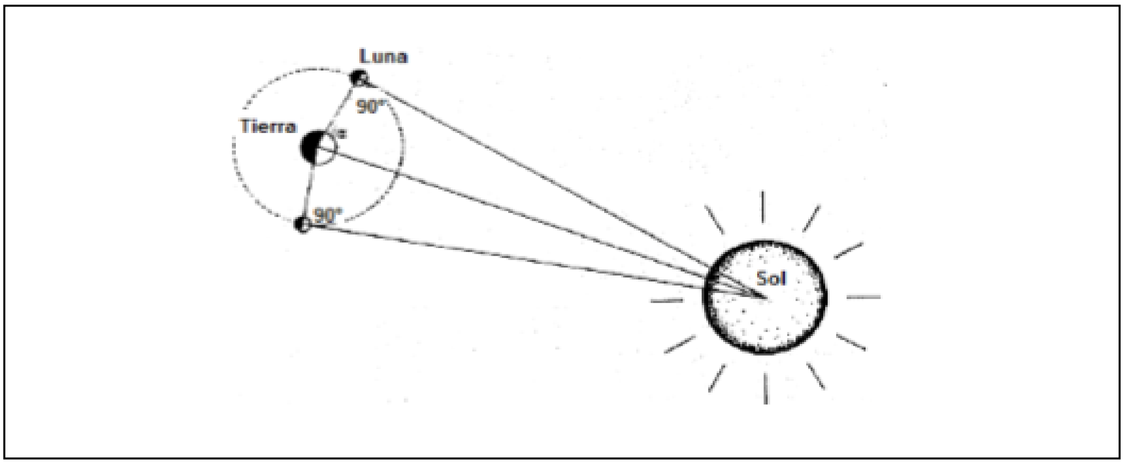


Figura 5. Diagrama de la distancia de la tierra al sol calculada por Aristarco (Daza, 2014, p. 32).

En la actualidad conocemos que la distancia de la Tierra al Sol es 400 veces mayor que de la Tierra a la Luna, pero su trabajo es muy valorado dados los pocos recursos tecnológicos con los que se contaban en la época. El problema estuvo en el cálculo del ángulo α.

La proporcionalidad en la Música

Los pitagóricos en la antigua Grecia consideraban que todo era número o relaciones entre números y esto se reflejaba también en la música y en lo que hoy conocemos como la armonía pitagórica. Para ellos, la armonía era la proporción entre las partes de un todo y por lo tanto la música debía ser reducida a las proporciones más simples. Los historiadores sostienen que Pitágoras descubrió la resonancia que tiene una cuerda al tensarse y los acordes en diferentes fracciones de la misma, reafirmando su convicción más profunda que todo era número o relaciones entre ellos, como en este caso de la música con los números.

Según la leyenda, Pitágoras descubrió la armonía al escuchar el sonido de martillos provenientes de diferentes yunques en el taller de un herrero. El peso de estos martillos se correspondía con los números 12, 9, 8, 6; el peso del cuarto martillo daría el tono, y el del primer martillo, que era el doble del menor, daba la octava. El peso de los otros dos, que son las medias aritmética y armónica de los dos anteriores daría la quinta y la cuarta.

Llevadas estas proporciones a un monocordio vemos que el tono o nota base lo da el sonido de la cuerda entera, es lo que se llamaba unísono, si la cuerda tiene la mitad de la longitud original suena una octava más alta que la anterior, la proporción $1/2$, que produce el mismo sonido que la cuerda entera solo que más agudo se llama octava (DO-DO) porque se llega a él a través de ocho intervalos de la escala, ocho notas, ocho teclas blancas del teclado; a esta proporción llamaban los griegos diapasón. Si su longitud es $2/3$ de la primera, la cuerda emite la quinta de la nota base, la proporción $2/3$ se llamó diapente, denominada hoy quinta (DO-SOL) pues se llega a ella a través de cinco intervalos. Por último, si su longitud es $3/4$ de la primitiva, la nota que suena es la cuarta de la base, a la proporción $3/4$ se le llamó diatésaron, conocida ahora como cuarta (DO-FA) con cuatro intervalos.

El sonido de un piano se da al golpear unas cuerdas con unos martillos, activados por unas teclas ya sean blancas o negras. La longitud de las cuerdas está dada de tal manera que entre más cortas, más alto es el sonido que generan y se cumplen las proporciones mencionadas por Toledo.

Se puede observar la estrecha relación que existe entre las escalas musicales que se manejan en la actualidad con el trabajo propio de la escuela pitagórica y su relación con la forma en que concebían el mundo y las matemáticas, ilustrado por Daza (2014): teclado de un piano (ver figura 6).

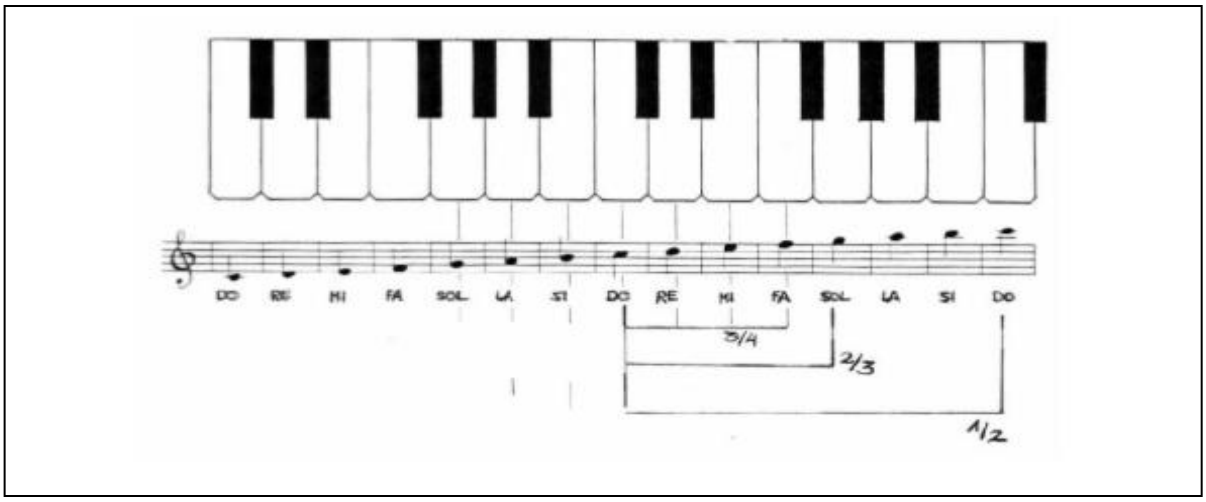


Figura 6. Proporciones en el teclado de un Piano (Daza, 2014, p. 35).

ANÁLISIS DE CONTENIDO

Al realizar una revisión en los libros texto utilizados por los docentes de la institución educativa para apoyar las prácticas de aula y los conocimientos relacionados con el estudio de la proporcionalidad, encontramos las definiciones presentadas a continuación:

Razones: una **razón** es una expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. La razón entre a y b se escribe $\frac{a}{b}$ o a: b, y se lee: "a es a b"

En una razón $\frac{a}{b}$ se identifican dos términos: el **antecedente** (a), que corresponde al primer término, y el **consecuente** (b), que es el segundo término.

Proporciones: dos razones forman una **proporción** si se puede establecer una igualdad entre ellas. La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee: "a es a b como c es a d". Las razones que forman una proporción son razones equivalentes.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a y d son los **extremos,** c y b son los **medios.** El cociente de las razones que forman una proporción es el mismo, y se denomina **cociente** o **razón de proporcionalidad.**

Propiedad fundamental de las proporciones: en toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

Magnitudes directamente correlacionadas: dos magnitudes A y B están **directamente correlacionadas** si al aumentar A, también aumenta B, o si al disminuir A, también disminuye B.

Magnitudes inversamente correlacionadas: dos magnitudes A y B están **inversamente correlacionadas** si al aumentar A, disminuye B, o viceversa.

Proporcionalidad directa: dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante.

Proporcionalidad inversa: dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si están inversamente correlacionadas y se verifica que:

Magnitud A	a	b	c	$\ldots$
Magnitud B	a'	b'	c'	$\ldots$

$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' \ldots = k$, siendo k **la razón de proporcionalidad.** (Vamos a aprender Matemáticas. Libro del estudiante 7°, 2017, p. 72, 74, 76, 82).

ANÁLISIS COGNITIVO

En este apartado se estudia el currículo, los libros de texto y se analizan los errores y dificultades en torno al objeto de estudio.

a. Análisis curricular

En Godino y Batanero (2002), el razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química (p. 431).

Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017), utilizan la siguiente situación problemática de valor faltante para mostrar los diversos sistemas de prácticas mediante los cuales se puede abordar su solución:

Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?

A partir de esta situación, se ilustran representaciones diagramáticas de soluciones que ponen en juego la noción de función con el propósito de propiciar significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad, haciendo énfasis en el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables, donde se pone en juego el conocimiento de la estructura de una familia de funciones (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone 2017).

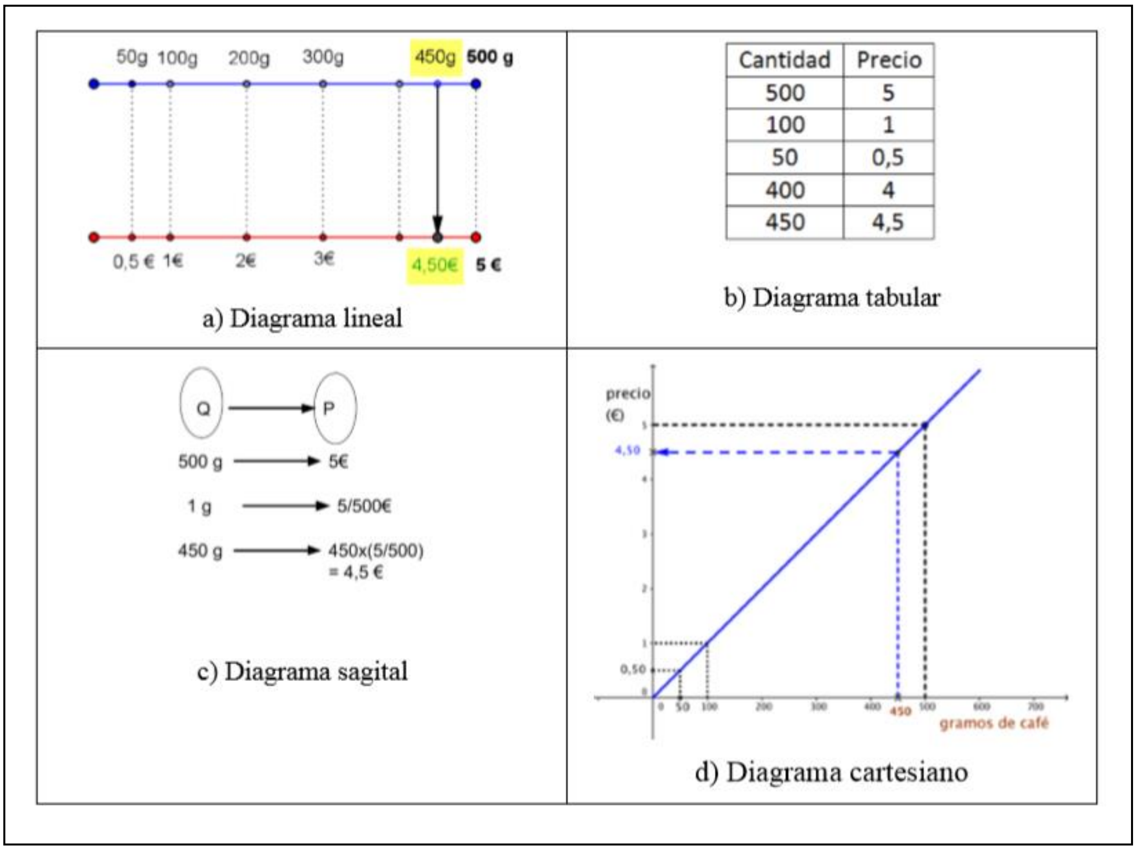


Figura 13. Problema de valor faltante (Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone, 2017).

Perry, Guacaneme, Fernández y Andrade (2003), afirman que a comienzos de la década de los años noventa, con la propuesta de reforma curricular promovida por el Ministerio de Educación Nacional, se le reconoció un lugar importante al estudio de la correlación en la proporcionalidad. Antes de tal propuesta, los libros de texto apenas hacían una alusión al “aumento” (o disminución) simultáneo de las dos magnitudes como condición para establecer que las magnitudes son directamente proporcionales (p. 27).

b. Análisis de texto

Perry, Guacaneme, Fernández y Andrade (2003), establecen que después de la divulgación de los documentos que concretaban pedagógicamente la propuesta de dar un lugar importante al estudio de la correlación en la proporcionalidad (MEN, 1989), “los libros de texto incorporan definiciones de correlación directa e inversa y proponen la identificación del tipo de correlación como una de las dos condiciones para establecer el tipo de proporcionalidad” (p. 27).

Martínez, Muñoz, Oller y Ortega (2017), consideran que los problemas presentes en los libros de texto juegan un papel principal en la enseñanza ya que su resolución habitualmente supone una de las principales tareas que realizan los estudiantes, especialmente en las unidades didácticas de proporcionalidad aritmética. En este sentido, proponen que para reflexionar en torno a los problemas de proporcionalidad compuesta “se debe efectuar un análisis en los libros de texto con el propósito de caracterizar la enseñanza que se imparte, detectando posibles diferencias que permitan plantear posibles mejoras en la enseñanza” (p. 98).

Guacaneme (2002), selecciona cinco textos correspondientes al grado séptimo de la educación básica, textos que pretenden responder a disposiciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1975; MEN, 1989), donde realiza un análisis profundo respecto a los conceptos de razón, proporción y magnitudes directa e inversamente proporcionales, señalando distintas diferencias en su tratamiento como que la proporcionalidad compuesta es presentada sin definición y no se relaciona con los demás contenidos (Guacaneme, 2002 **citado** por Martínez, Muñoz, Oller y Ortega, 2017).

En los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en el año 2015 para el grado séptimo, se proponen ejemplos ilustrativos para la enseñanza de la proporcionalidad como objeto de conocimiento matemático transversal, como también se establecen competencias básicas y criterios de evaluación, con el ánimo de propiciar la articulación de los aprendizajes en el estudiante. En este sentido, presentamos a continuación la propuesta de los DBA para garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje:

Identifica si en una situación dada las variables son directamente proporcionales o inversamente proporcionales o ninguna de las dos. Por ejemplo:

- ✓ Reconoce características necesarias para garantizar la proporcionalidad.

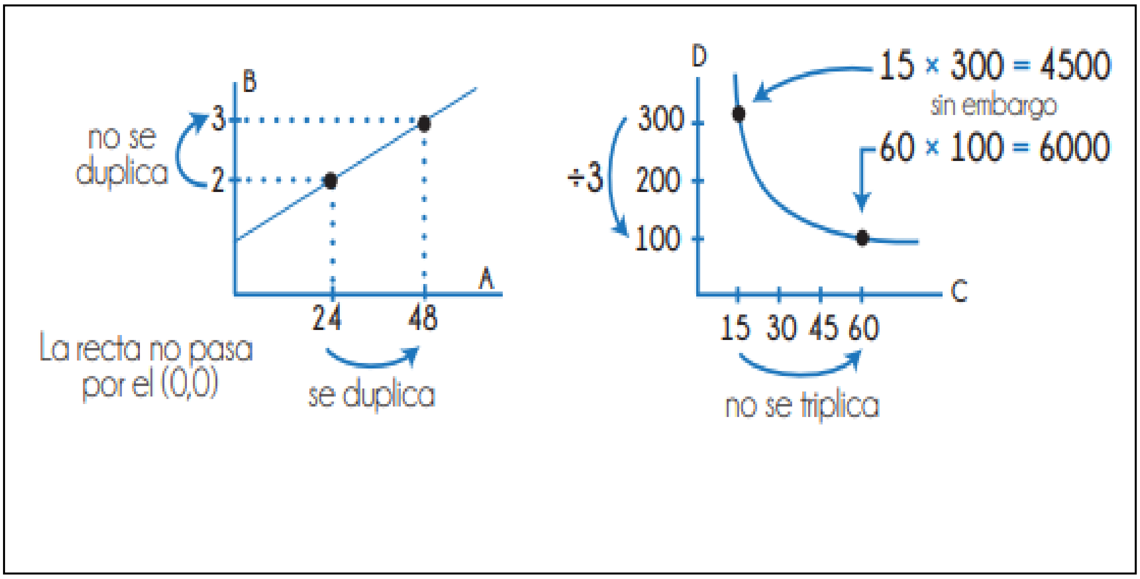


Figura 7. Representación gráfica de variables que no son directa e inversamente proporcionales (DBA, 2015).

Cuando A crece, B crece. Sin embargo, A y B no son **directamente proporcionales**. Cuando C crece, D decrece. Sin embargo C y D no son **inversamente proporcionales**.

- ✓ Las longitudes en un mapa y las longitudes reales que este representa son directamente proporcionales. Por ejemplo, si en el mapa la distancia de A a B es cuatro veces más que la distancia de A a C, entonces, en la realidad, la distancia de A’ a B’ es cuatro veces más que la distancia de A’ a C’.

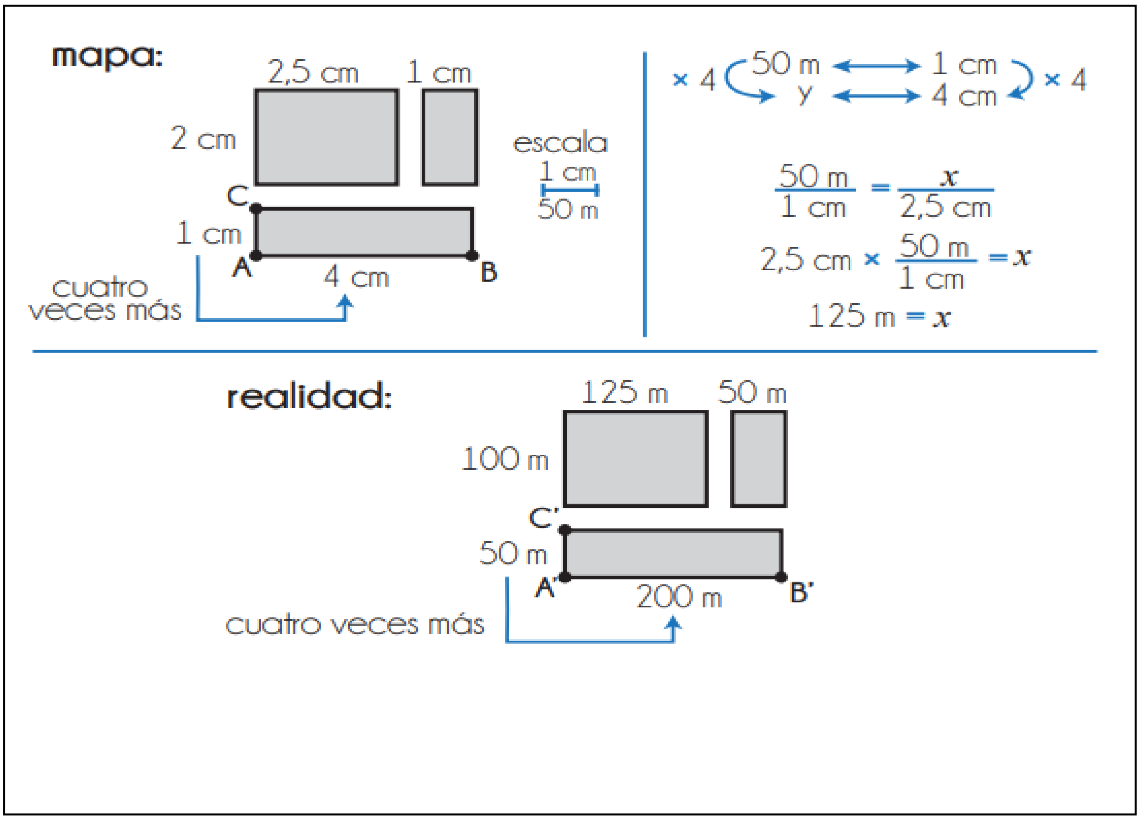


Figura 8. Representación de variables directamente proporcionales (DBA, 2015).

✓ Se necesitan 600 tejas para cubrir el tejado. Entre más trabajadores hagan el trabajo, menos tejas tendría que poner cada uno. El número de trabajadores es inversamente proporcional al número de tejas que coloca cada trabajador. Por ejemplo, cuando el número de trabajadores se duplica, el número de tejas por trabajador se divide por 2.

# de trabajadores	# de tejas por trabajador
1	600
2	
3	
	12
60	

# de trabajadores	# de tejas por trabajador
1	600
2	300
3	200
50	12
60	10

×2 ÷2

×30 ÷30

$1 \times 600 = 600$

$2 \times 300 = 600$

$3 \times 200 = 600$

$50 \times 12 = 600$

$60 \times 10 = 600$

Figura 8. Representación de variables inversamente proporcionales (DBA, 2015).

En la prueba ICFES (2014), la cual fue liberada para fines académicos e investigativos, en una de las preguntas formuladas encontramos una situación donde se hace uso de la noción de razón como la comparación entre dos magnitudes con argumentaciones contextualizadas que propician la comprensión del conocimiento matemático y garantizan la construcción social del conocimiento. Presentamos a continuación la situación problema tomada del ICFES (2014), con la intención de hacer evidente la importancia de este objeto matemático en las prácticas de aula:

En una institución educativa hay dos cursos en grado undécimo. El número de hombres y mujeres de cada curso se relaciona en la tabla:

	Curso 11A	Curso 11B	Total
Número de mujeres	22	23	45
Número de hombres	18	12	30
Total	40	35	75

Tabla

Figura 10. Uso de la noción de razón (ICFES, 2014).

La probabilidad de escoger un estudiante de grado undécimo, de esta institución, que sea mujer es de $\frac{3}{5}$. Este valor corresponde a la razón entre el número total de mujeres y

A. el número total de estudiantes de grado undécimo.
B. el número total de hombres de grado undécimo.
C. el número total de mujeres del curso 11 B.
D. el número total de hombres del curso 11 A.

En la pregunta anterior se busca la solución de problemas mediante la lectura e interpretación de tablas, aplicando la probabilidad mediante el uso de la noción de razón y la simplificación de fracciones.

De esta misma prueba ICFES (2014), también se analizó la siguiente pregunta:

El subsidio familiar de vivienda (SFV) es un aporte que entrega el Estado y que constituye un complemento del ahorro, para facilitarle la adquisición, construcción o mejoramiento de una solución de vivienda de interés social al ciudadano. A continuación se presenta la tabla de ingresos en salarios mínimos mensuales legales vigentes (SMMLV) y el subsidio al que tiene derecho, para cierto año.

SUBSIDIO FAMILIAR DE VIVIENDA (SFV)

Ingresos (SMMLV)		Valores $		Valor de SFV en SMMLV
Desde	Hasta	Desde	Hasta	
0	1	0	535.600	22
1	1,5	535.601	803.400	21,5
1,5	2	803.401	1.071.200	21
2	2,25	1.071.201	1.205.100	19
2,25	2,5	1.205.101	1.339.000	17
2,5	2,75	1.339.001	1.472.900	15
2,75	3	1.472.901	1.606.800	13
3	3,5	1.606.801	1.874.600	9
3,5	4	1.804.601	2.142.400	4

Figura 11. Representación de la noción de razón y proporción (ICFES, 2014).

Una familia con ingresos entre 0 y 1 SMMLV recibe un subsidio equivalente a

A. 1,4 veces el subsidio de una familia de ingresos entre 2 y 2,25 SMMLV.
B. 1,8 veces el subsidio de una familia de ingresos entre 2,5 y 2,75 SMMLV.
C. 3,5 veces el subsidio de una familia de ingresos entre 3 y 3,5 SMMLV.
D. 5,5 veces el subsidio de una familia de ingresos entre 3,5 y 4 SMMLV.

Con esta pregunta se busca la solución de problemas mediante la lectura e interpretación de tablas, articulando las nociones de razón y proporción, y su uso en situaciones de la vida cotidiana.

En el año 2012, el ICFES propone la siguiente pregunta:

Se encuestó a un grupo de personas, de diferentes edades, sobre el dinero que gastaron en transporte público en el último mes. Las respuestas se registraron en la tabla.

Nombre	Edad	Dinero gastado ($)
Juana	20	25.000
Steven	23	28.000
Andrés	24	31.000
Ana	25	35.000
Camilo	31	38.000
Sandra	34	40.000
Anderson	40	45.000

Tabla

Figura 12. Magnitudes directa e inversamente correlacionadas (ICFES, 2012).

De acuerdo con la información de la tabla, la edad de estas personas y el dinero que gastaron en transporte público están correlacionados, porque

A. las personas menores de 30 años gastan menos dinero.
B. a mayor edad más dinero se invierte en transporte y viceversa.
C. a menor edad más dinero se invierte en transporte y viceversa.
D. las personas mayores de 30 años gastan más dinero.

En esta pregunta se puede evidenciar el uso de las magnitudes directa e inversamente correlacionadas en situaciones del contexto.

c. Errores y dificultades

El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Esta posibilidad no es una mera hipótesis, basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimiento válido multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos (Rico, 1995).

Gascón (2010) dice que el fenómeno de desarticulación de las organizaciones matemáticas, y particularmente el aislamiento escolar de la proporcionalidad, ha estado latente desde mediados de los años noventa. A partir de esta consideración, se hace un llamado para cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad, presente en los libros de texto y en los diseños curriculares y que se ha vuelto dominante en la institución escolar. En este cuestionamiento se pone en duda hasta qué punto es conveniente aislar la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto de conocimiento matemático para ser enseñado. En tal sentido el autor propone que "El problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes" (p. 17). Al mismo tiempo propone que para dar una respuesta al problema didáctico anteriormente esbozado es necesario cuestionar las razones de ser de dichas relaciones funcionales, es decir, determinar la pertinencia de trabajar en el aula de clase este tipo de relaciones (Gascón, 2010 **citado** por Sánchez, 2013).

Por su parte, Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena (2008) plantean que otro problema para analizar es cómo describir el complejo de ostensivos y su función en la dinámica praxeológica institucional. Por ejemplo, si se considera el caso de la proporcionalidad y de la función lineal, con el fin de comprender las condiciones de evolución de la actividad matemática realizada por los estudiantes en una clase; es importante saber qué herramientas ostensivas les está permitido utilizar y cómo dichos ostensivos les ayudan (o les dificultan) para relacionar la proporcionalidad con otros tipos de praxeologías matemáticas enseñadas (Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena, 2010 **citado** por Sánchez, 2013).

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

La planificación de clases bajo las condiciones del marco de la Teoría Socioepistemológica como teoría empírica de intervención para transformar es la siguiente:

Área o materia: Matemáticas

Unidad didáctica No. 1

Título de la unidad didáctica: Resignificación del uso de la noción de proporcionalidad con estudiantes del grado séptimo.

Introducción
En la presente unidad didáctica como propósito fundamental estudiaremos actividades que promuevan la articulación de los aspectos sociales y educativos de la noción de proporcionalidad, en busca de la construcción social del conocimiento matemático por parte del estudiante.

Objetivos didácticos	Criterios de evaluación	Actividad a realizar
✓ Interpretar la magnitud como cualidad de un objeto que puede ser medible. ✓ Comprender las relaciones entre magnitudes físicas. ✓ Definir el concepto de razón a través de comparaciones entre magnitudes. ✓ Representar la razón y la proporción entre magnitudes y sus relaciones proporcionales. ✓ Aplicar las propiedades de las proporciones y comprender su utilidad a la hora de realizar	✓ Identifica y aplica las magnitudes en una situación dada. ✓ Comprende la razón establecida entre dos magnitudes. ✓ Reconoce el uso de la proporcionalidad en actividades del cotidiano. ✓ Diferencia las magnitudes proporcionales de aquellas que no lo son. ✓ Utiliza la proporcionalidad a la hora de resolver situaciones problémicas del cotidiano. ✓ Reconoce magnitudes	✓ Construir la noción de magnitud y de razón relacionando la edad de los estudiantes con el nivel académico que cursan, con el propósito de asociar la edad que debe tener cuando esté cursando el grado once. ✓ Se propone trabajar la razón y la proporción como

repartos directa e inversamente proporcionales. ✓ Identificar en unas variables la proporcionalidad directa. ✓ Identificar en unas variables la proporcionalidad directa o inversa y cuando no se cumple ninguna de las dos en una situación dada. ✓ Reconocer magnitudes directa e inversamente proporcionales y realizar sus modelos gráficos.	directa e inversamente proporcionales y realiza sus modelos gráficos. ✓ Analiza los tipos de proporcionalidad en contextos aritméticos y geométricos.	fundamentos al hacer uso noción de proporcionalidad al momento de comprar un producto al que se le proporciona un descuento en porcentaje, para que el estudiante aplique las ideas matemáticas involucradas en la situación problemática.

Contenidos

- ✓ Magnitud.
- ✓ Razón.
- ✓ Propiedades de las razones.
- ✓ Proporción.

- ✓ propiedades y teoremas de las proporciones.
- ✓ Magnitudes directamente proporcionales.
- ✓ Magnitudes inversamente proporcionales.
- ✓ Representación gráfica de variables directa e inversamente proporcional.

Actividades tipo y tarea propuestas	Competencias básicas trabajadas		
	Razonamiento	Comunicación	Resolución de problemas
Poseer fundamentos para diferenciar una fracción de una razón	x		x
Identificar gráfica y analiticamente cuando una proporcionalidad es directa e inversamente proporcional	x	x	x
Completar tabla de valores que representa proporcionalidad directa e inversa			x
Reconocer magnitudes directa e inversamente proporcionales y realizar sus modelos gráficos	x	x	x
Diferenciar las magnitudes proporcionales de aquellas que no lo son	x		

Metodología

Se solicita a los estudiantes trabajar en equipos de tres personas donde se propone realizar debates con la participación del profesor, con el propósito de desarrollar las clases participativas, entretenidas y a partir de las conclusiones lograr aprendizajes en los estudiantes.

Atención a la diversidad

- ✓ Premiar, valorar y agradecer de alguna forma la interacción y la participación de los estudiantes.
- ✓ Estimular a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismo.
- ✓ Verificar las actividades desarrolladas por los estudiantes, comprendiendo sus ideas para que aprendan de sus propias experiencias y construyan un nuevo conocimiento.
- ✓ Realizar una plenaria en la que cada grupo socializa sus interpretaciones y argumentos, hacer una realimentación general buscando mejor comprensión para alcanzar aprendizajes y vincular el contenido escolar con la práctica social.

RECURSOS	
Espacios	Materiales
✓ Aula de clases. ✓ Sala de informática. ✓ Cancha de microfútbol. ✓ Patio escolar.	✓ Textos programados. ✓ Tablero. ✓ Marcadores. ✓ Borrador. ✓ Laminas. ✓ Cartón paja o cartulina. ✓ Regla graduada. ✓ Tijeras. ✓ Programas tutoriales de computadora. ✓ Computadoras. ✓ Video Beam.

Procedimiento de evaluación	Instrumentos de evaluación

Evaluar las actividades desarrolladas de carácter individual y colectivo, mediante estrategias que asuman roles que involucre: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Valore en los estudiantes su actitud, dedicación, interés y participación, al momento de desarrollar las actividades en el aula. Proponga retos cuando la clase esté en el clímax como estrategia de motivación, incentivando a los estudiantes con algunos beneficios.	Diseñe una matriz de evaluación con el propósito que el estudiante conozca los criterios que serán tenidos en cuenta y los porcentajes de cada componente. Oriente los procesos de evaluación con base en el ser, el saber y el saber hacer de los estudiantes. Prueba tipo SABER Juegos de roles Trabajos prácticos Talleres Debates.

ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN

El propósito de la unidad didáctica es fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante la resignificación del uso de la noción de proporcionalidad, para ello se diseñó un plan de actividades orientadas a propiciar el uso de objetos matemáticos en situaciones del cotidiano de los estudiantes.

1. Se les solicita a los estudiantes que digan su edad para que cada uno establezca una relación entre la edad y el nivel académico que cursan, con el propósito de asociarlo con la edad que debe tener cuando esté cursando el grado once.

Algunas respuestas:

Estudiante 1.

Si teniendo 13 años estoy en séptimo, cuando tenga 17 años estaré en el grado once.

Estudiante 2.

Si teniendo 15 años estoy en séptimo, cuando tenga 19 años estaré en el grado once.

Estudiante 3.

Si teniendo 14 años estoy en séptimo, cuando tenga 18 años estaré en el grado once.

De aquí resulta la siguiente pregunta: ¿Cómo representaría la relación existente en la situación anterior en forma de fracción?, cada estudiante debe presentar escrita su respuesta para socializarla e identificar sus pre-saberes y confrontarlos con sus propias opiniones.

Algunas respuestas:

Estudiante 1.

$$\frac{13}{\text{Séptimo}}, \frac{17}{\text{Undécimo}}$$

Estudiante 2.

$$\frac{15 \text{ Años}}{\text{Séptimo}}, \frac{19 \text{ Años}}{\text{Undécimo}}$$

Estudiante 3.

$$\frac{\text{Séptimo}}{14}, \frac{\text{Undécimo}}{18}$$

Con el planteamiento anterior, busco la construcción del concepto de magnitud y de razón, junto con su aplicación en situaciones presentadas dentro y fuera del aula de clases, promoviendo la interacción entre el estudiante y el conocimiento.

2. Al ingresar a un almacén de calzado encontramos que un par de tenis tiene un descuento del 30%, si el precio en la etiqueta es de $200000 ¿Cuánto costará el artículo al aplicarle el descuento?

R// el 100% corresponde al precio del producto sin aplicar el descuento, es decir, equivale a $200000 y el 30% es el porcentaje que debemos encontrar para restarselo a $200000 y así saber cuanto se debe pagar por los zapatos al aplicar el descuento.
De esta situacion planteamos la sgte proporción:

$$100\% \text{ ——— } 30\%$$
$$\$200000 \text{ ——— } X$$

$$\frac{100\%}{\$200000} = \frac{30\%}{X}$$

$$X\,(100\%) = (30\%)(\$200000)$$

$$X = \frac{(30\%)(\$200000)}{(100\%)}$$

$$X = \$60000$$

Al restarle $60000 a $200000 nos resulta

$$\begin{array}{r} \$200000 \\ -\ \$60000 \\ \hline \$140000 \end{array}$$

lo que significa que el valor a pagar por los tenis es $140.000

Figura 14: (Desarrollo de algoritmos en un problema de valor faltante).

Cuando vamos a un almacén a comprar y encontramos productos que presentan descuentos, debemos tener claridad de cuánto dinero nos rebajan en relación con el porcentaje que ilustra el descuento. En estas situaciones utilizamos procedimientos aplicados en la solución de problemas de proporcionalidad, al plantear una proporción donde encontramos tres datos conocidos y un cuarto dato por calcular.

3. Diego es un estudiante que en la jornada contraria trabaja con su padre como ayudante de albañilería, en la obra se dedica a preparar la mezcla para mampostería (pegar ladrillos) y revoque (repellar paredes). Para revocar prepara 16 baldes de arena por cada bulto de cemento y para mampostería por cada bulto

de cemento prepara 18 baldes de arena; después de una semana realizando dicha actividad, Diego calculó que por cada bulto de cemento preparado su padre pegaba aproximadamente 52 ladrillos y que en el revoque un bulto de cemento le alcanzaba aproximadamente para 8 m^2 de pared.

Figura 15: La proporcionalidad en la albañilería

De la situación anterior responde los siguientes interrogantes:

A. Terminando la jornada de trabajo, a Diego le corresponde preparar 1/4 de cemento. ¿Qué cantidad de arena debe utilizar para hacer una mezcla de mampostería y cuántos ladrillos pegarían con esa mezcla? Justifica tu respuesta

R//= Utilizaran 4,5 baldes de arena y pegaran 13 ladrillos.
Si con un bulto de Cemento se utilizan 18 baldes de de arena, con la cuarta parte del cemento que es 1/4, se utiliza la cuarta parte de 18 baldes que equivale a 4,5 baldes de arena. lo mismo sucede con los ladrillos, si con un bulto de cemento se pegan 52 ladrillos con la cuarta parte del Cemento se pegarán la cuarta parte de los ladrillos que serían $\frac{52}{4} = 13$ ladrillos.

B. ¿Cuántos ladrillos pegaría y cuántos metros cuadrados revocaría el papá de Diego junto con otro compañero de la obra en siete días, si diario gastan 36 baldes de arena para ladrillos y 2 bultos de cemento para revoque? Justifica tu respuesta

R//= pegarian 728 ladrillos y revocarían $112M^2$ de pared.
Al gastar 36 baldes de arena pegando ladrillos es porque se gastaron 2 bultos de cemento, multiplicamos los dos bultos de cemento por los 7 dias de la semana ($2 \times 7 = 14$) y en total son 14 bultos de Cementos, como un bulto de Cemento se pegan 52 ladrillos multiplicamos por los 14 bultos ($52 \times 14 = 728$) por esa razón se pegan 728 ladrillos en la semana de trabajo. mismo ocurre con el revoque, como un bulto se revocan $8m^2$ se multiplica $14 \times 8 = 112$ y en total son $112M^2$ que se revocan en la semana.

C. ¿Cuántos bultos de cemento se utiliza para el revoque de una pared que mide 60 m^2? Justifica tu respuesta

R//: se utilizan 7,5 bultos de Cemento.
Dividimos 60 entre 8 y nos da 7,5 bultos de Cemento.

Figura 16: Procedimientos y argumentaciones

En esta actividad se ilustra el desarrollo de procesos matemáticos mediante procedimientos y argumentaciones que propician el uso de la proporcionalidad en actividades de la vida cotidiana.

CONCLUSIONES

Esta investigación se desarrolla a partir de la siguiente pregunta ¿Cómo fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en estudiantes del grado séptimo mediante la resignificación del uso la noción de proporcionalidad? De donde surge el siguiente objetivo "Evaluar los procesos que fortalecen el aprendizaje de las matemáticas, mediante la resignificación del uso de la noción de proporcionalidad con estudiantes del grado séptimo".

Intervenir los objetos matemáticos en el marco de la Socioepistemología como teoría empírica, nos invita a reflexionar en torno a la importancia de la construcción social del conocimiento matemático. Por tal motivo, la búsqueda de elementos teóricos que garanticen resignificar los usos de saberes matemáticos en distintos escenarios, permite dimensionar el papel que juegan los estudiantes en sus respectivas experiencias particulares a la hora de emprender una postura crítica frente al saber cómo conocimiento en uso y su significado a partir de las prácticas contextualizadas, como es el caso de la proporcionalidad.

La evidencia encontrada nos permite concluir que la proporcionalidad como objeto de conocimiento matemático funcional, propicia la adquisición de otros significados y representaciones que provocan nuevos usos en el proceso de apropiación del conocimiento. Nuestra propuesta propicia la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, entendiendo que para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos (Cantoral, citado por Reyes-Gasperini, 2013, p. 7).

El propósito fundamental de la unidad didáctica es favorecer el aprendizaje de los estudiantes provocando en él una reflexión sobre las actividades áulicas y propiciar mayor acercamiento al conocimiento. En este sentido, se permite visualizar actividades que involucran el quehacer cotidiano de todo ciudadano con el ánimo de enriquecer las prácticas en el ambiente áulico.

Por otro lado, es indispensable que el docente vivencie un proceso de *empoderamiento* (proceso que vive el individuo en colectivo y que tiene como objetivo principal generar una actitud de liderazgo, confianza y autonomía que se traduzca en una mejora en el desempeño profesional al hacerse dueño del saber que enseña) para poder lograr modificaciones en su práctica y en consecuencia lograr potenciar el aprendizaje de sus estudiantes basado en procesos de construcción social del conocimiento (Reyes-Gasperini, 2011).

Finalmente, con los argumentos planteados en las actividades, se puede observar cómo el estudiante articula la matemática escolar con la matemática del cotidiano, potenciando el razonamiento proporcional considerado como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia y lograr que los estudiantes reflexionen sobre sus propios conocimientos.

REFERENCIAS

Camelo, F. y Mancera, G. (2006). *El currículo desarrollado en torno a la proporcionalidad: un estudio cualitativo realizado en secundaria*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Manizales, Colombia.

Cantoral, R. Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. (2006) Socioepistemología y Representación: Algunos Elementos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial, 83-102. Distrito Federal, México.*

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología y Matemáticas. *Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. IPN. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21.*

Castaño, N. (2014). *Dificultades En La Enseñanza De Las Operaciones Con Números Racionales En La Educación Secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Manizales. Manizales, Colombia.

Castro, I. y Díaz, L. (2010). Pensamiento proporcional. Una mirada Socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 889-908.*

Ceballos (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso Matemático Escolar. Un estudio Socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), 7-38.*

Daza, J. (2014). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante. *Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452. 414-444.*

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de Exhaución. *Revista ISSN 1131-7787 (33), 101-129.*

González, P. (2003). *La historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática.*

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de Matemáticas. *Revista EMA, 7(1), 3-42.*

Holguín, C. (2012). *Razonamiento Proporcional*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Jaramillo, L. (2012). *La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento Matemático.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica pensamiento y gestión 20, 165-193.*

Martínez, S., Muñoz, J., Oller, A. y Ortega, T. (2017). *Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2° ESO.*

Ministerio de Educación Nacional (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá: Mineducación. Disponible en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_m_g7.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2012). Cuadernillo de pruebas saber 11°. Bogotá: Mineducación. Disponible en https://www.google.com.co/search?q=cuadernillo+de+pruebas+saber+11+2012

Ministerio de Educación Nacional (2014). Cuadernillo de pruebas saber 11°. Bogotá: Mineducación. Disponible en https://orientacion.universia.net.co/imgs2011/imagenes/cuadernill-2016_11_03_145738.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). Vamos a aprender. Matemáticas 7° libro del estudiante. Bogotá: Mineducación.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). *Propuesta Metodológica para la Investigación Socioepistemológica.*

Morales, A. y Rosas, L. (2016). Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Pálvulos. El caso del polígono. *Estudios pedagógicos (Valdivia) 42 (2), 247-267.*

Nolasco, H. y Velázquez, S. (2013). Análisis histórico y epistemológico del concepto de semejanza. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 427- 435.*

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA 8 (2), 157-182.*

Obando, G. (2011-2012). *Sistemas de prácticas asociadas a las razones, la proporción y la proporcionalidad: el caso de las configuraciones epistémicas en algunos grados de la educación básica.* Proyecto de Tesis Doctoral (sin publicar). Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17 (1), 59-81.* Recuperado: https://www.researchgate.net/publication/261177150_Ensenanza_y_aprendizaje_de_la_Razon_la_Proporcion_y_la_Proporcionalidad_Un_estado_del_arte

Oller, A. y Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (3), 317-338.*

Parra, F., Ávila, R. y Ávila J. (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade L. y Fernández F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*. "una empresa docente", Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia.

Pezoa, M. (2012). *La Práctica De Modelación Al Curriculum Escolar Chileno. Una Propuesta Desde La Socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Puerto, Y. (2011). *Unidad didáctica para la construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, México.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2012). El empoderamiento docente desde la teoría Socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1783-1792.*

Reyes-Gasperini, D. (2013). *Transversalidad de la proporcionalidad.* México: Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V. (IEPSA).

Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. y Cantoral, R. (2014). Cuando una crece, la otra decrece… ¿Proporcionalidad inversa o directa? *Revista Premisa 16 (62), 1-15.*

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación 2 (11), 155-176.*

Rico, L. (1995). *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.* Granada: Universidad de Granada.

Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9 (2), 299-324.*

Salazar, M. y Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 207-216.*

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (1).*

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Barcelona: Marfil.

Sepúlveda, K. y Lezama, J. (2015). Un estudio Socioepistemológico de la epistemología de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento matemático. *XIV Conferencia Latinoamericana de Educación Matemática.*

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica.* Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

Shield, Malcolm y Dole, Shelley (2002). *Investigación de las representaciones de libros de texto de razón y proporción.*

Gómez, K., Silva, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27 (25), 1457-1464.*

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de investigación en ciencias 3 (1), 51-58.*

Zabala, L. (2015). *Construcciones y Mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes.* Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso-Chile.