



**UNIVERSIDAD DE MEDELLIN**

CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRÁFICO DE BARRAS DESDE LA  
PERSPECTIVA DE LA TEORÍA APOE: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES  
GRADO OCTAVO (13 A 15 AÑOS)

AUTORES:

LUIS FERMÍN CÓRDOBA MOSQUERA

IDI AMÍN ARIAS MORENO

DIRIGIDO POR:

Mg. MARTHA IRENE LONDOÑO

Dra. SOLANGE ROA FUENTES

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN  
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN  
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y  
HUMANAS  
QUIBDÓ

2019

CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DEL GRÁFICO DE BARRAS DESDE LA  
PERSPECTIVA DE LA TEORÍA APOE: UNA EXPERIENCIA CON  
ESTUDIANTES GRADO OCTAVO (13 A 15 AÑOS)

AUTORES:

LUIS FERMÍN CÓRDOBA MOSQUERA

IDI AMÍN ARIAS MORENO

DIRIGIDO POR:

Mg. MARTHA IRENE LONDOÑO

Dra. SOLANGE ROA FUENTES

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

TRABAJO DE MAESTRÍA  
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN  
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN  
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y

HUMANAS

QUIBDÓ

2019

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por sobre todas las cosas, por guiar con sabiduría cada uno de nuestros pasos. por ser la fuente de vida, nuestro proveedor y poner a nuestro lado a la gente correcta todo lo que somos y seremos es gracias a Él

A nuestras amadas madres e hijos, por soportar nuestras faltas de tiempo, por comprender nuestras ausencias y apoyarnos en todas ellas, sinceramente sin ustedes especialmente ustedes madres gracias por sus consejos y sus palabras de aliento pues si no es por ustedes este proyecto no lo hubiéramos culminado.

A nuestros padres, por sus sabios consejos, en esos momentos de angustia y desesperación, sus oraciones hicieron posible este proyecto.

A nuestros estudiantes, por motivarnos a aprender más y por permitirnos aportar desde la matemática al desarrollo de sus pensamientos.

A mis profesores guía, Martha Irene Londoño, Solange Roa Fuentes, Luis Albeiro Zabala Jaramillo, por su entrega y disposición al trabajo realizado, por confiar siempre en nuestras capacidades y guiar nuestras ideas. Gracias a su constante apoyo podemos decir que hemos finalizado con éxito esta etapa. Infinitas gracias para ustedes.

Al doctor Luis Albeiro Zabala Jaramillo (the best Teacher I've ever had), quien fue la persona que nos inspiró y “empujó” a la disciplina de la Didáctica de la Matemática, sus consejos enseñanzas jamás las olvidaremos pues en nosotros formo un carácter de hombres luchadores y pujantes por encima de las adversidades, gracias por querer hacer de nosotros su reflejo, gracias profe por creer en nosotros y plantar esa semilla, que otros

regaron y hoy gracias a usted y su lucha constante ya está germinada.

A los profesores de nuestras instituciones, por creer en nosotros, en especial a Fabio Teolindo Perea, quien hizo que me impregnara de la Didáctica de la Matemática desde el enfoque etno educativo (Idi); a Luis Fadith Palacios Tello, Mirna Pérez palacios, Hugo Eustorgio Córdoba, Luz María Cuesta, Ruby Amparo Gamboa, Judith Ferrer, Transito Barrios, Heidi Bechara, Marisol Mena, Cristian, Mayoral Martínez, José Félix Cuesta, Nubia Medina, Omar Palacios, Dra. Natividad Mosquera Gómez, a todos mil gracias por su apoyo y confianza en que esto se podía lograr y aquí estamos culminando a feliz término este proyecto

## RESUMEN:

En esta investigación se abordó la problemática presentada en estudiantes de Grado Octavo cuando se enfrentan a la construcción y análisis de gráficos estadísticos, con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), desarrollada por Dubinsky. Proponemos una Descomposición Genética (DG) de modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto que permite explicitar aquellas construcciones y mecanismos mentales, que hipotéticamente un estudiante pone de manifiesto, al construir y analizar gráficos estadísticos como objeto. Para mirar la viabilidad de la DG teórica propuesta, utilizamos el ciclo metodológico propio de esta teoría, con el fin de documentar la DG respecto de las construcciones y mecanismos mentales que muestran los estudiantes al construir el objeto en cuestión. Entre los resultados Se destaca la importancia de fomentar la construcción y análisis de gráficos estadísticos en los estudiantes, proponer una unidad didáctica sobre la construcción y análisis de gráficos estadísticos (de barra),

**Palabras claves: APOE, Construcciones Mentales, Descomposición genética, gráficos estadísticos, ciclo metodológico, plano, frecuencia, variables**

## SUMMARY

This article shows the problems presented in eighth grade students when faced with the construction and analysis of statistical graphs, based on the theory APOE (Action, Process, Object and Scheme), developed by Dubinsky. We propose a Genetic Decomposition (DG) of a cognitive model by means of which a student can construct a concept that makes explicit those constructions and mental mechanisms, which hypothetically a student reveals, when constructing and analyzing statistical graphs as an object. To look at the feasibility of the proposed theoretical DG, we use the methodological cycle of this theory, in order to document the DG regarding the constructions and mental mechanisms that students show when constructing the object in question. Among the expected results to encourage the construction and analysis of statistical graphs in students, propose a didactic unit on the construction and analysis of statistical graphs (bar).

Keywords: APOE, Mental Constructions, Genetic Decomposition, statistical graphs, methodological cycle, plane, frequency, variables.

## INTRODUCCIÓN

EL estudio de la enseñanza de la estadística mediante La Didáctica de la Matemática en los establecimientos educativos del departamento del Choco, constituye un esfuerzo multidisciplinario que se caracteriza por poner a la matemática en un lugar central y además por trabajar en base a teorías explícitas. En este sentido se quiere dar respuestas al problema de la enseñanza-aprendizaje de la estadística. En nuestro departamento, cómo en otros lugares del país, no se está indiferente a la presencia de estos problemas en la educación estadística, es más, los resultados de mediciones nacionales (SABER, ICFES) e internacionales (PISA) indican que el problema es global. dentro de la labor como docente he observado cierta dificultad de los estudiantes para comprender, construir y analizar determinados objetos matemáticos (graficas de barra , tablas,) , los estudiantes cometen errores, que permanecen en el tiempo y que son independientes del lugar geográfico y/o cultural, como por ejemplo deducir o analizar información presentada en gráficos o tablas estadísticas de forma incorrecta, hacer conjeturas erróneas entre variables discretas y continuas, más aun pensar que los diagramas estadísticos se elaboran de la misma forma. Por lo anterior esta investigación apunta al estudio del objeto matemático construcción y análisis de gráficos estadísticos.

Esta investigación está situada en la construcción cognitiva del concepto matemático gráficos estadísticos con estudiantes de Educación Básica Secundaria y Media (comprendido entre 13-15 años). El propósito es indagar cómo estudiantes desde 8º, logran construir y analizar gráficos estadísticos. Esta inquietud nace al identificar una serie de fenómenos en la actividad matemática de estudiantes de enseñanza media con respecto a los gráficos estadísticos, entre ellos:

Declaran no conocer los distintos tipos de gráficos estadísticos. En la tabulación de la información repiten los números cuantas veces aparezca. Confunden la idea de variable estadística, con la idea de variable en una ecuación.

En la experiencia docente, se ha podido observar que los fenómenos no solo se presentaban en los estudiantes, sino que algunos docentes también presentan grandes dificultades a la hora de enseñar y evaluar conceptos estadísticos, llevando a que los estudiantes, utilicen solo métodos algorítmicos o simple intuición. Al momento de construir y analizar un gráfico, además los colegios dentro de la planeación se tienen como última unidad la asignatura de estadística.

Para esta investigación, el foco de indagación se centró en la construcción cognitiva de un concepto matemático (construcción y análisis de gráficos estadísticos), para lo cual, se utilizará la teoría APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996), como Marco Teórico, teniendo como principio fundamental, el entender cómo los estudiantes pueden comprender el concepto de gráficos estadísticos su construcción y análisis. “Esta descripción sistemática es presentada mediante una Descomposición Genética que representa un modelo cognitivo donde señalamos un camino mediante el cual los estudiantes pueden construir dicho concepto.”(Roa, 2008, p. 6), La

descomposición genética que se utilizó en este trabajo resulta de la aplicación del ciclo investigación que plantea la teoría, el cual tiene tres componentes como son: el análisis teórico, el diseño e implementación de instrumentos y, el análisis y verificación de datos. Como resultado de nuestro análisis teórico diseñamos una descomposición genética hipotética que nos mostró los caminos por los cuales los estudiantes pueden construir el concepto de (construcción y análisis de gráficos estadísticos); con base en dicho análisis teórico se diseñaron dos instrumentos: una encuesta y una entrevista.

En el **Capítulo 1** se establecen los elementos que dan origen al problema de investigación, para ello se consideran las investigaciones existentes en relación a la construcción y análisis de gráficos estadísticos; a partir de estos antecedentes damos cuenta cómo emergió el objeto, las dificultades que se presentaron y su evolución; estos elementos darán fuerza a la presentación de la problemática de estudio y la pregunta de investigación, siendo esta última expuesta en relación a la teoría APOE más adelante.

En el **Capítulo 2** mostramos los elementos que permitan conectar las distintas definiciones de la construcción y análisis de gráficos estadísticos, Considerando las siguientes acciones:

1. Realizamos un estudio histórico epistemológico de la construcción y análisis de gráficos estadísticos (de barra), enfocándonos en aquellas etapas de la historia mirando las dificultades que se presentaron y su evolución que da cuenta cómo surgió el concepto de gráficos estadísticos.
2. Realizamos indagaciones de la presentación del objeto gráficos estadísticos (de barra) en distintos libros, para documentar las conexiones entre los análisis y construcciones de gráficos estadísticos. Además, presentamos una mirada general de los trabajos existentes desde la didáctica de la matemática, que se relacionan con el análisis y construcción de los gráficos estadísticos.

En el **Capítulo 3** se justificará el Marco Teórico que guiará nuestra investigación. En este caso corresponde a la teoría APOE, teoría cognitiva creada por Dubinsky basado en la epistemología genética de Piaget, cuyo fin es establecer un modelo teórico, Descomposición Genética, en relación a las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir un concepto. Además, se explicita la metodología propia de investigación de APOE y la forma que tiene de llegar al aula mediante el ciclo ACE.

En el **Capítulo 4** damos cuenta la metodología de investigación que da sustento a nuestra investigación, describiendo en mayor profundidad el ciclo de investigación de la teoría APOE en relación a nuestra problemática y La construcción y análisis de gráficos estadísticos (de barra). Se dará a conocer nuestra Descomposición Genética (DG) hipotética de la Del análisis y construcción de gráficos estadísticos y el diseño de los instrumentos (cuestionario) en base a la DG para la recolección de datos. Además, se dan a conocer el tipo de investigación y la elección de la unidad de análisis, etc.

En el **capítulo 5** se presentará el análisis de los datos que fueron recogidos por los estudiantes a través del cuestionario, teniendo como base nuestra Descomposición Genética hipotética. Se mostrarán las respuestas por casos de estudiantes que evidencian las construcciones mentales de la DG, así como de quienes no, y luego un estudio comparativo de los casos, para poder sacar conclusiones finales. Y en relación al primero objetivo específico de investigación.



El **Capítulo 6** corresponde a las conclusiones con base al análisis realizado a partir de la evidencia con sustento teórico obtenido en el capítulo anterior (Capítulo 5). presentamos conclusiones teóricas y reflexiones didácticas, en relación al aporte de nuestra investigación para investigaciones posteriores. Aquí se darán los lineamientos en base a la refinación de la Descomposición Genética, sobre las sugerencias didácticas para el trabajo en el aula con gráficos estadísticos (de barra) en cuanto a su construcción y análisis.

## Índice

CAPÍTULO 1 .....	11
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN .....	11
CAPÍTULO 2 .....	18
ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE CONSTRUCCION Y ANALISIS DE GRAFICOS ESTADISTICOS .....	18
CAPÍTULO 3 .....	24
MARCO TEÓRICO .....	24
CAPÍTULO 4 .....	34
DISEÑO METODOLÓGICO .....	34
CAPÍTULO 5 .....	46
ANÁLISIS DE DATOS .....	46
CAPÍTULO 6 .....	55
CONCLUSIONES .....	55
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	58
ANEXO 1 .....	60
ANEXO 2 .....	63

# CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se presentan las generalidades de la investigación, asociadas con la problemática de estudio que da paso al planteamiento de objetivos centrados en la Construcción y Análisis del Gráfico de barra. Además, algunos trabajos de investigación que se han desarrollado previamente en Didáctica de las Matemáticas sobre el Objeto matemático de estudio, y que son elementos relevantes para la investigación que aquí se propone.

## 1.1 PROBLEMÁTICA

En la actualidad la desmotivación de los alumnos, hacia las distintas áreas del conocimiento es relevante, más exactamente en el área de matemáticas, se prueba que los alumnos no encuentran sentido a los temas centrales, porque no hallan una relación de éstos con su situación. Aunque como ofrece Batanero (2001)

La Estadística es una especialidad en el campo de las matemáticas que ha cobrado apogeo con el avance de la tecnología; además ofrece acompañamiento a muchas ciencias y también es parte de la vida diaria de este planeta globalizado en que vivimos (p. 25).

Desde la Ley General de Educación en Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN), la calidad didáctica se ha planteado como un derecho y un deber por el cual se busca la formación integral de los alumnos, además tenemos la posibilidad de llevar a cabo un paralelo entre ella y los objetivos de la educación (MEN, 1994). Entre otras cosas, el objetivo número 5 argumenta que:

El pleno desarrollo de la personalidad sin más limitaciones que las que imponen los derechos de los demás y el orden jurídico, dentro de un proceso de formación integral, física, psíquica, intelectual, moral, espiritual, social, afectiva, ética, cívica y demás valores humanos. (MEN, 1994, p. 2)

Estos planteamientos parecen no cumplirse cabalmente en las prácticas de aula, debido a que si analizamos los resultados de las PRUEBAS SABER 3º, 5º, 9º, que son aplicadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), el departamento del Choco está entre las últimas posiciones, por esta razón, cabe suponer que: “En las instituciones públicas y privadas la calidad didáctica no es un tema prioritario (...)” (Vanegas y Urrego, 2010, p.23). Ya que en la realidad didáctica es habitual hallar, la imposibilidad de usar el mismo sistema educativo en dos zonas diferentes, ya que el contexto global, regional y local provoca que cambie la herramienta del sistema.

Desde el año 2011 el MEN busca mejorar el desempeño de los alumnos en las pruebas SABER 3º, 5º y 9º, ya que piensan que las falencias vienen desde los grados inferiores. Debido a que en las instituciones educativas se creó una grieta que no facilita entrar a los objetivos propuestos por el MEN, porque los mismos contenidos ya están muy apartados de la atención de los estudiantes; pero cabe acordarse que ellos no eligen los contenidos ni el modo de desarrollarlos, ellos necesitan adquirir ciertas herramientas para afrontar incuestionables realidades, las cuales responsables o no son partícipes. Por esto el MEN implementa el programa Todos a Aprender (PTA), este programa busca capacitar a

maestros de Matemáticas y Lenguaje de la básica primaria, de este modo no estarían desfasados de lo sugerido por organismos nacionales e internacionales (MEN, 2010-2014). Por otro lado, como se ha visualizado en las reuniones, y conversatorio donde los profes dan a conocer sus dificultades para enseñar temas de estadística, ya que el inconveniente nace en la básica primaria, debido a que algunos docentes muestran enormes adversidades en el momento de enseñar y considerar conceptos estadísticos, lo cual se hace de forma tradicionalista: transmisión – recepción, llevando a que los alumnos, en el momento de crear y analizar un gráfico, utilicen solo procedimientos algorítmicos o su intuición. Esto contradice a los Principios y Estándares para la orientación Matemática publicados en el 2000 y traducidos por la Comunidad Andaluza de formación Matemáticas (Thales, 2003).

La elaboración e interpretación de gráficos estadísticos es también miembro sustancial de la cultura estadística a la que cada vez se le dedica más consideración y que Gal (2002) define como la unión de dos competencias relacionadas.

Bertín (1967) recomienda que la lectura de un gráfico empieza con una identificación externa, del tema al que tiene relación el gráfico, por medio de la comprensión del concepto del encabezado y las etiquetas.

De acuerdo con los resultados de las pruebas SABER 3º, 5º, 9º para las dos instituciones educativas donde se realiza la investigación, los alumnos tienen deficiencias en la relación de materiales físicos, diagramas con ideas matemáticas, modelar utilizando lenguaje escrito, oral, preciso, pictórico, gráfico y algebraico, manejar proposiciones o expresiones que contengan símbolos y fórmulas. Esto exhibe cómo en el área de matemáticas los alumnos de estos planteles en los grados 3º, 5º y 9º, están en los escenarios más bajos de desempeño con un 88,7% en insuficiente y en mínimo en los componentes Aleatorio y Geométrico-Métrico. El reporte suministrado por ICFES (2014) evidenció que los alumnos detallan contrariedad en el componente Aleatorio.

La presente investigación se centró en el reconocimiento del avance cognitivo de los alumnos, la posibilidad de estar comunicados usando como sistema un alfabeto o una simbología que se compone de gráficos. Puesto que todos los hechos, elementos, que se expresan son sencillamente datos que se tienen que procesar y organizar transformándolos en información, es ahí donde se hace primordial la utilización de los gráficos estadísticos como estrategias que hacen más fácil la construcción e interpretación de estos datos.

## 1.2 Antecedentes

En este trabajo de investigación ha sido importante la búsqueda de otros estudios relacionados con la construcción y análisis de gráficos estadísticos en especial el Gráfico de Barras, y los diferentes niveles de lectura que demuestran las competencias requeridas para una construcción y lectura crítica de las tablas y gráficos estadísticos.

Diferentes autores proponen que la estadística se valora como una herramienta metodológica que permite analizar la variabilidad de la información presentada en los

diferentes medios de información. Como consecuencia la enseñanza de la estadística se ha incorporado, ya hace unas décadas, en forma generalizada en todos los escenarios académicos (Batanero, 2002). El interés por hacer mejor la formación estadística, se vio reflejado en los decretos de enseñanzas mínimas (MEN, 2006a; 2006b); en los cuáles se incrementan los contenidos que tienen que ser incluidos en los programas de área, en todos los ciclos y escenarios de Educación Primaria. En el cual se incluyen, entre otros contenidos estadísticos, sugiriendo que los alumnos tienen que interpretar elementos significativos de tablas y gráficos simples relativos a fenómenos cercanos para construirlos.

Entre los varios apartes del trabajo anunciado por Arteaga (2008) está el de la creación de tablas y gráficos estadísticos. Sobre esto se asegura que es viable determinar numerosos escenarios de contrariedad en la creación de tablas y gráficos, del cual me buscamos destacar los próximos puntos.

Entre otras cosas, Arteaga (2008) ha propuesto una categorización de los gráficos estadísticos, que podría alcanzar a la creación de tablas, en funcionalidad de su dificultad y los escenarios de lectura que posibilitan la categorización de Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001). En las figuras 1 y 2 se detallan los ejemplos de gráficos producidos por competidores en la exploración, quienes partieron de un catálogo de datos (Arteaga, 2008). Todos los alumnos llevaron a cabo un ensayo consistente en conseguir dos secuencias, una simulada y otra real, al lanzar una moneda 20 ocasiones. A partir de los datos obtenidos se propuso a los estudiantes que realizaran el estudio de dos variables estadísticas (número de caras en cada una de las secuencias), además se pidió a los estudiantes que las representaran. Los gráficos producidos se clasificaron según cuatro categorías, cada una de las cuáles implica un nivel superior de competencia gráfica:

- Representación de datos individuales: Cuando el estudiante sólo incluye en el gráfico un dato o una pequeña parte de los datos (y no el conjunto completo). Esta categoría se puede evidenciar en el ejemplo de la Figura 1.

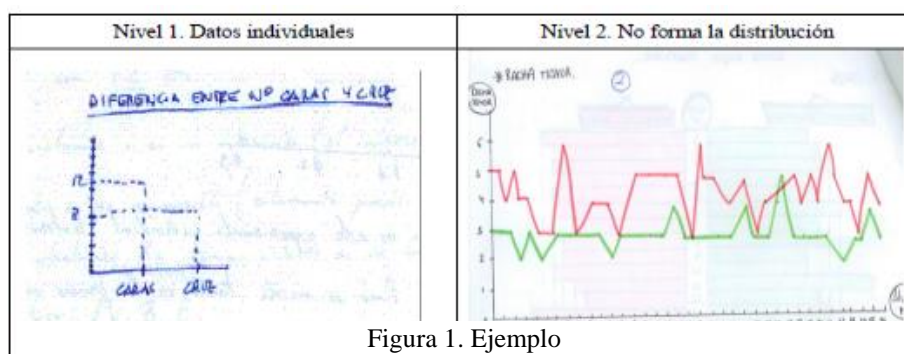


Figura 1. Ejemplo

Representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución: El estudiante representa los datos tal y como los ha recogido, sin llegar a clasificarlos ni calcular la frecuencia de diferentes valores (segundo ejemplo de la Figura 1). En una tabla, sería equivalente a dar un listado de datos desordenados. Es claro que en los gráficos de nivel

1 y 2 sólo se puede hacer una lectura literal de datos pues en este tipo de gráficos no se pueden hacer inferencias en los datos.

Representación de una distribución de datos (primer ejemplo de la Figura 2). El alumno clasifica los datos y calcula la frecuencia de cada valor, llegando a utilizar el concepto de distribución de frecuencias y a representar la distribución. Este tipo de gráfico permite la “lectura entre los datos” en la clasificación de Curcio (1989), es decir, realizar comparaciones y detectar tendencias. Una tabla de frecuencias ordinaria sería un ejemplo de tabla categoría 3.

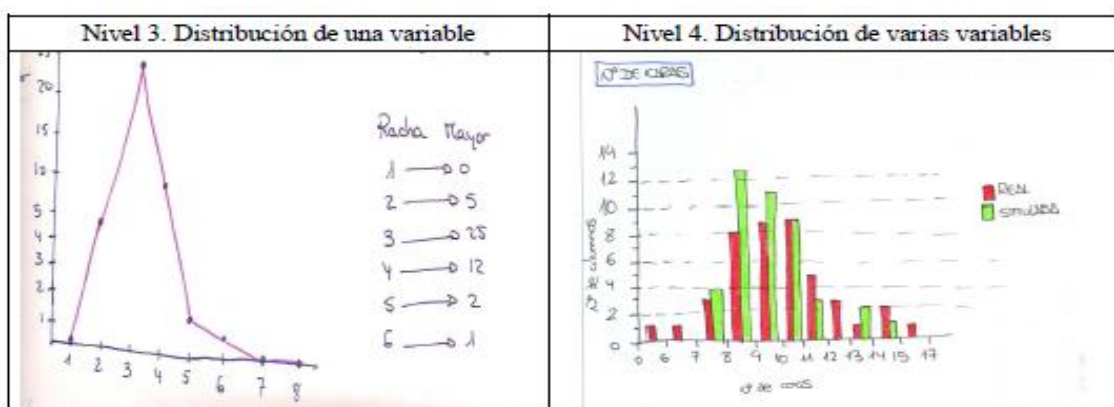


Figura 2. Ejemplo

- La representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico (Segundo ejemplo en la figura 2). Además de formar y representar la distribución de datos, el estudiante es capaz de conjugar más de una variable, como en el segundo gráfico de la figura 2 o en la tabla 1.

Aunque en el trabajo de Arteaga (2008) no todos los participantes llegaron a los niveles 3 y 4 en la construcción del gráfico, los estudiantes logran interpretar correctamente los gráficos construidos para obtener conclusiones sobre el problema planteado. (Arteaga, P; Batanero, C; Cañadas, G; y Contreras, M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *Números*, 76, 55-67).

Arteaga (2009), propone realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras, así como formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. Dicho trabajo fue desarrollado desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS). El análisis de la información le permite al autor concluir que se debe formar a los docentes de básica primaria en esta temática, ya que esto les permitiría abordar este objeto matemático desde un nuevo punto de vista en la educación inicial o preescolar; este trabajo se incluye en la línea de investigación sobre didáctica de la estadística.

Por su parte Vigo (2016) plantea que es necesario centrarse específicamente en la comprensión sobre gráficos estadísticos, abordados desde la perspectiva Semiótica, por

lo tanto, se requiere de muchos procesos interpretativos donde el lector comprende cada uno de sus elementos. Se concluye entonces que en los libros de texto y pruebas de evaluación los estudiantes se enfrentan a actividades que requieren diferente nivel de lectura desde la más simple hasta la más compleja.

De igual manera Díaz (2014) analiza el tipo de gráficos que se propone a los estudiantes, la actividad que se pide al niño, y los niveles de lectura implícitos en dicha actividad. Concluye de su análisis que el gráfico que se usa con mayor frecuencia es el gráfico de barras con poco peso de otros tratados en el currículo.

Los Estándares, proporcionan un norte para agrupar y conservar los esfuerzos tendientes a optimizar la educación matemática. Los cinco primeros Estándares describen los objetivos relativos a contenidos en las áreas (Thales, 2003). Las investigaciones han puesto de manifiesto que los alumnos de los niveles 5-8 suponen que su propio juicio es más meritorio de aceptación que la información que se obtiene de los datos (Hanncock, Kaput y Gold Smith 1992).

El estudio presentado en este capítulo muestra que la construcción y análisis del gráfico de barras es una habilidad compleja, que no se adquiere espontáneamente, pero tampoco parece alcanzarse con la enseñanza.

La presente investigación es relevante en el estudio de la estadística debido a que los gráficos estadísticos están presentes en la vida diaria, tanto en los medios de información como la televisión, la prensa, revistas e Internet, como en los contenidos de diferentes asignaturas y en el trabajo profesional. Por esto, en esta investigación tomamos como referente la teoría APOE, ya que esta permite proponer un modelo cognitivo sobre cómo un estudiante puede construir un concepto o noción matemática. Dicha teoría será presentada con detalle en el capítulo 3, donde como insumo final de esta propuesta se tendrá el diseño y construcción de una unidad didáctica que según Sanmartín (2000) se concibe como “un grupo de actividades estructuradas en torno a unos ejes articuladores para lograr un propósito determinado”

### 1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde la teoría APOE, la implementación y desarrollo de la construcción y Análisis del Gráfico de barras entendidos desde la complejidad de sus interpretaciones.

### 1.4 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las implicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la construcción y Análisis de Gráficos Estadísticos en el grado octavo (13 a 15 años) al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría APOE para el desarrollo de las competencias Matemáticas?

### 1.5 OBJETIVO GENERAL



Analizar las implicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la construcción y Análisis de Gráficos Estadísticos, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría APOE.

## 1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar una Descomposición Genética que describa las estructuras y los mecanismos mentales que debe lograr un estudiante para construir y Analizar Gráficos Estadísticos.
- Implementar actividades de aula para el estudiante de grado octavo (13 a 15 años) que propicien el razonamiento y la argumentación en la práctica estadística a partir de la construcción y el Análisis de Gráficos Estadísticos
- Construir e Implementar de una Unidad Didáctica que incluya la construcción y el Análisis de Gráficos Estadísticos

## 1.8 Discusiones del capítulo

En este capítulo se optó por exponer la problemática de investigación que se sitúa al abordar la construcción y el análisis de grafico estadísticos (de barra), en base al marco teórico en el que se basa esta investigación: La teoría APOE. La pregunta que guía esta investigación es **¿Cuáles son las implicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la construcción y Análisis de Gráficos Estadísticos en el grado octavo (13 a 15 años) al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría APOE para el desarrollo de las competencias Matemáticas?** donde se evidenciaron los problemas de los estudiantes frente a la construcción de gráficos de barra, Presentando la hipótesis y los objetivos de investigación para luego ser descrita en el marco teórico APOE.

La construcción y el análisis de gráficos estadísticos (de barra) no es objeto de enseñanza por parte del maestro en el aula de clase, causa por la cual no se logran las competencias del estudiante para la resolución de problemas donde necesite construir y analizar gráficos estadísticos, después de hecho el análisis se encontró que los estudiantes presentan en un 75 a 85% dificultad para analizar gráficos estadísticos. Estas pruebas permiten que los establecimientos educativos, las secretarías de educación y el Ministerio De educación Nacional y la sociedad en general conozcan las debilidades y fortalezas y, a partir, de las mismas puedan definir planes de mejoramiento en sus respectivos ámbitos de actuación.

Esto se ha venido evidenciando en los resultados Con respecto a las PRUEBAS SABER (son pruebas externas de calidad que se aplican en Colombia a estudiantes de 3°,5°, y 9° grado), las cuales son aplicadas por el ICFES “Este organismo es el encargado de promover la educación superior en Colombia”, y son definidas por el Ministerio de Educación Nacional como pruebas censales en las que se valora las competencias básicas de los alumnos y se analizan los factores que inciden en sus logros.

# CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS DE  
CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DE GRÁFICOS  
ESTADÍSTICOS

Este capítulo está dedicado al análisis Histórico–Epistemológico de la construcción y análisis de gráficos estadísticos donde en primer lugar se realiza un breve recorrido por la historia de la misma, hasta llegar a lo Epistemológico donde se aparece el concepto como tal y sus precursores frente al desarrollo de la construcción y Análisis de Gráficos Estadísticos.

## **2.1 Aspectos Histórico–Epistemológico de la Construcción y Análisis de Gráficos Estadísticos**

El surgimiento de la estadística se da en épocas muy primitivas, y como todas las ciencias, surgió por medio de un desarrollo extenso de avances y evolución, desde la simple recolección de datos hasta la estricta interpretación de los datos que se dan en la actualidad. De esta forma:

El origen de la Estadística data desde los comienzos de la historia y esto se da a conocer a través de crónicas, datos escritos, como de restos arqueológicos, esto es aceptable por cuanto en ese tiempo apenas se estaba formado la sociedad. (Araujo, Martínez, y Flores, 2014, p. 3)

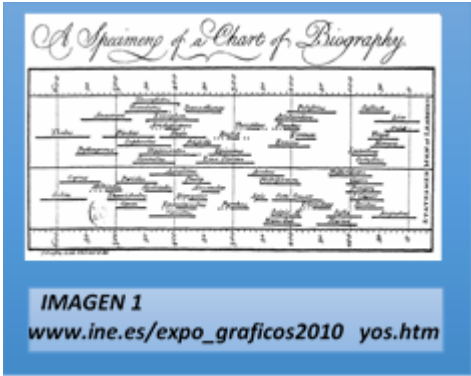
A continuación, un croquis genérico del origen, la historia y la evolución de la estadística, basado en fuentes bibliográficas:

Ruiz (2004) identifica tres grandes etapas en el desarrollo histórico de la estadística:

**2.2 Los Censos:** Desde el momento en que se constituye una autoridad política, la idea de inventariar de una forma más o menos regular la población y las riquezas existentes en el territorio está ligada a la conciencia de soberanía y a los primeros esfuerzos administrativos.

## **2.3 De la Descripción de los Conjuntos a la Aritmética Política:**

Las ideas mercantilistas extrañan una intensificación de esta clase de investigación. Colbert multiplica las investigaciones sobre artículos manufacturados, el comercio y la población: los intendentes del Reino envían a París sus memorias. La escuela inglesa brinda un nuevo avance al sobrepasar la etapa puramente descriptiva. Sus tres primordiales representantes son Graunt, Petty y Halley. El penúltimo es creador de la famosa Aritmética Política. Chaptal, ministro del interior francés, publica en 1801 el primer censo general de población, lleva a cabo los estudios industriales, de las producciones y los cambios, haciéndose sistemáticos durante las dos terceras partes del siglo XIX.



**Joseph Priestley** (1733-1804) que, aunque principalmente fue conocido por sus avances en Química, Fue uno de los primeros en crear gráficos de hechos históricos utilizando la línea del tiempo. Su intención era ofrecer una visión de la Historia más analítica y comprensiva que lo que se venía haciendo hasta la fecha. (Ver imagen 1)

pionero en utilizar el gráfico lineal para representar series temporales de datos. Según



**William Playfair** (1759 – 1823) Fue el inventor del gráfico de barras y de sectores, y además Playfair, un buen gráfico proporciona una explicación más adecuada de los hechos que una mera lista de datos o tablas. (Ver imagen 2)

**Charles Joseph Minard** (1781 – 1880) Ingeniero francés del siglo XIX. En el campo de los gráficos destaca por el empleo de cartogramas, o mapas sobre los que se representan datos estadísticos. (Ver imagen 3)

**Florence Nightingale** (1820 -1910) Es reconocida como una precursora de la estadística social,



Florence Nightingale es la inventora del gráfico de área polar, que utilizó para representar los datos de mortalidad de los soldados del ejército británico en la guerra de Crimea “Representación de las bajas en el ejército británico en la guerra de Crimea, por causa y mes, entre 1854 y 1856. El azul

representa las defunciones por enfermedades infecciosas, el rojo, por heridas de guerra, y el negro por otras causas”. (Araujo, 2014, p. 28.) (Ver imagen 4)



De acuerdo con Murias y Almanzor (1997), Los trabajos de científicos como Laplace, Gauss y Legendre desarrollaron dos conceptos muy usados en el análisis estadístico: la

teoría sobre los errores en la observación, y el método de los mínimos cuadrados. (Murias, Almanzor, y Rodríguez, 1997, p. 148)

Una de los primeros en aplicar de forma rigurosa estas nuevas técnicas estadísticas a las ciencias sociales fue Adolphe Quételet, con la intención de descubrir las leyes naturales que regían ciertos sucesos sociales y demográficos como la tasa de criminalidad o de nupcialidad de una región. (Murias et al, 1997, p. 149).

### 2.3 Estadística y Cálculo de Probabilidades:

El cálculo de probabilidades se incorpora rápidamente como un instrumento de análisis increíblemente poderoso para el estudio de los fenómenos económicos y sociales, generalmente para el estudio de fenómenos (cuyas causas son bastante complicadas para conocerlas completamente y hacer viable su análisis). En este periodo de la historia en pleno siglo XXI. Es de suma importancia a notar que: Las aplicaciones del análisis de gráficos estadísticos en todos los campos operativos; Conducen a una disciplina con contenido propio que han transformado nuestro mundo, aterrizando todos los conocimientos que un individuo debe saber y saber hacer desde el aula hasta llenar todo su entorno social.

actualmente, en la totalidad de los países se crean áreas de trabajo estadístico y otros órganos semejantes que llevan a cabo las estadísticas oficiales del país, entre otras cosas, estadísticas sobre la tasa de paro, índices de costos, actividad económica (producto interior bruto, actividad industrial), estadísticas sobre sanidad y educación, turismo, población



Imagen 6:  
[www.ine.es/expo\\_graficos2010](http://www.ine.es/expo_graficos2010)



etc. “El INE (Instituto Nacional de Estadística), (ver imagen 10 y 11). Además, la Comisión de Estadística

de Naciones Unidas fija el 20 de octubre de 2010 como fecha conmemorativa del primer Día Mundial de la Estadística”. (Araujo, 2014, p.37)

Aunque es complicado dividir la estadística en partes separadas, una división tradicional hasta hace unos años fue distinguir entre estadística descriptiva y estadística inferencial. La estadística descriptiva tiene como fin presentar resúmenes de un grupo de datos y poner de manifiesto sus propiedades, por medio de representaciones gráficas. Los datos se utilizan con fines comparativos, y no se utilizan principios de probabilidad. El interés se enfoca en detallar el grupo de datos.

La estadística inferencial, por el contrario, estudia los resúmenes de datos con referencia a un modelo de tipo probabilístico. Se piensa que el grupo de datos analizados es una muestra de una población, el interés primordial es predecir el accionar de la población, a partir de los resultados de la muestra.

Las habilidades de cálculo y representación gráfica de los ordenadores recientes permiten la obtención de una extensa diversidad de gráficos y cálculos estadísticos de una manera simple, e hicieron viable la aparición de una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el análisis exploratorio de datos, introducido por Tukey. Es una visión intermedia entre la estadística descriptiva y la inferencia.

## 2.4 DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

Desde hace muchos tiempo el hombre sea a enfrentado a muchas dificultades que lo han conducido a buscar diversas maneras de representar cualquier tipo de datos recolectados en situaciones de su diario vivir por consiguiente a medida que fue avanzando el tiempo este fue encontrándole solución a sus inmensas ideas que se le presentaban en la mente para representar sus datos ya que hacían estadística sin saber que era estadística gracias a grandes investigadores y científicos que trabajaron el concepto y las representaciones en gráficos se pudo desarrollar esta ciencia. Definida:

La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un sub campo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos. (Moore, D. S. (1991). Teaching Statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), Statistics for the Twenty-First Century, (pp. 14-25). Mathematical Association of America.)

En nuestros días, la estadística se convirtió en un procedimiento efectivo para detallar con exactitud los valores de datos científicos, académicos, tecnológicos, económicos, sociales, psicológicos, biológicos, físicos, Además nos sirve como instrumento para relacionar y analizar estos datos por medio de un gráfico.

El surgimiento de la estadística se da en épocas muy primitivas, y como todas las ciencias, surgió mediante un proceso largo de desarrollo y evolución, donde se evidencian una **concepción acción** desde hechos de simple recolección de datos y clasificación de los mismos, esto nos deja ver que desde las civilizaciones antiguas, la función principal de los Gobiernos, han sido establecer a través de los censos registros de población, nacimientos, defunciones, impuestos, producción, bienes y servicios, para poseer datos cifrados sobre la población y sus condiciones materiales de existencia. Como hemos podido evidenciar, en las civilizaciones de hace aproximadamente 3.000 años A.C, se han encontrado pruebas sencillas de estadística y representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes y cuevas algunas de estas civilizaciones son los babilónicos, los egipcios, en china para el 2200 a.c griegos y romanos que hacia el año 500 a.c, Realizaron censos para conocer la población existente en aquel momento. Lo interesante fue que, con los romanos, se erigió la figura del censor, cuya misión consistía en controlar el número de habitantes y su distribución. Además, en nuestro recorrido frente a la **concepción proceso** encontramos que, en la Edad Media, en el año 762, Carlomagno ordenó la creación de un registro de todas sus propiedades, así como de los bienes de la iglesia. en el año 1,200 a 1,527, d.c. los Incas en el Perú Establecieron un

procedimiento peculiar para registrar los nacimientos, las defunciones y otros sucesos cuya responsabilidad incumbía a las autoridades públicas. El astrónomo, Edmund Halley (1.656- 1.742) quien presenta la primera tabla de mortalidad que se puede considerar como base de los estudios contemporáneos. En dicho trabajo se intenta establecer el precio de las anualidades a satisfacer a las compañías de seguros, El final de estos siglos XVII y XVIII, llego y la proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Graunt con sus tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603, Joseph Priestley (1733-1804) Desde el punto de vista de la representación gráfica, se destaca por ser uno de los primeros en crear gráficos de hechos históricos, B. Pascal (1.623-1.662) y C. Huygens (1.629-1.695). cabe destacar el gran avance que le hizo al análisis de gráficos estadísticos. Continuando con la línea de tiempo que ha venido marcando esta ruta, Ya frente a la **concepción objeto** la tomamos dese los aportes de William Playfair (1759-1823) Ingeniero mecánico y economista político escocés. Trabajó más de 36 años en el diseño de gráficos estadísticos. Se le considera pionero en el uso del gráfico lineal para representar series temporales, y fue el creador del gráfico circular, de sectores y de barras. Pues aquí es donde aparecen los gráficos de barra como tal, **Florence Nightingale (1820-1910)** Enfermera británica quien inventa el grafico de área polar utilizado para representar los datos de mortalidad de los soldados en la guerra de Crimea, en 1834, nace así la Royal Statistical Society. Que En el momento de su fundación se definió la estadística como "conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes". con el fin de homogeneizar los métodos usados. El primero que aplica de forma rigurosa las nuevas técnicas estadísticas a las ciencias sociales fue Quételet en Bruselas en 1853, Posteriormente en 1885 nace el Instituto Internacional de Estadística (ISI) Su finalidad específica es conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y obtención de resultados, En la actualidad el ISI cuenta con 5 secciones, una de las cuales, la IASE, fundada en 1991, se dedica a la promoción de la Educación Estadística. En este periodo de la historia en pleno siglo XXI. Es de suma importancia a notar que: Las aplicaciones del análisis de gráficos estadísticos en todos los campos operativos; Conducen a una disciplina con contenido propio que han transformado nuestro mundo.

# CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO



En este capítulo se hará una aclaración del Marco Teórico que sustenta esta investigación, este se ajusta a la teoría APOE. Esta es una teoría cognitiva creada por Ed Dubinsky (1991) con base en la epistemología genética de Piaget. Por consiguiente, sus explicaciones son de orden epistemológico. La teoría APOE se utiliza para explicar las dificultades de los alumnos para comprender un concepto y plantear caminos de construcción para su aprendizaje, apoyando la presencia de una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su avance en la mente de un individuo (Piaget, 1970, p. 13; tomado de Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005). Esto facilita detallar un modelo cognitivo llamado Descomposición Genética.

### 3.1 Estructuras y Mecanismos Mentales

La teoría APOE (acrónimo Acción, Proceso, Objeto, Esquema) toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan sobre un objeto de conocimiento. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991a), y Asiala et al. (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas. Esta teoría es una interpretación de la teoría constructivista de Piaget, que es extendida por Dubinsky para nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático:

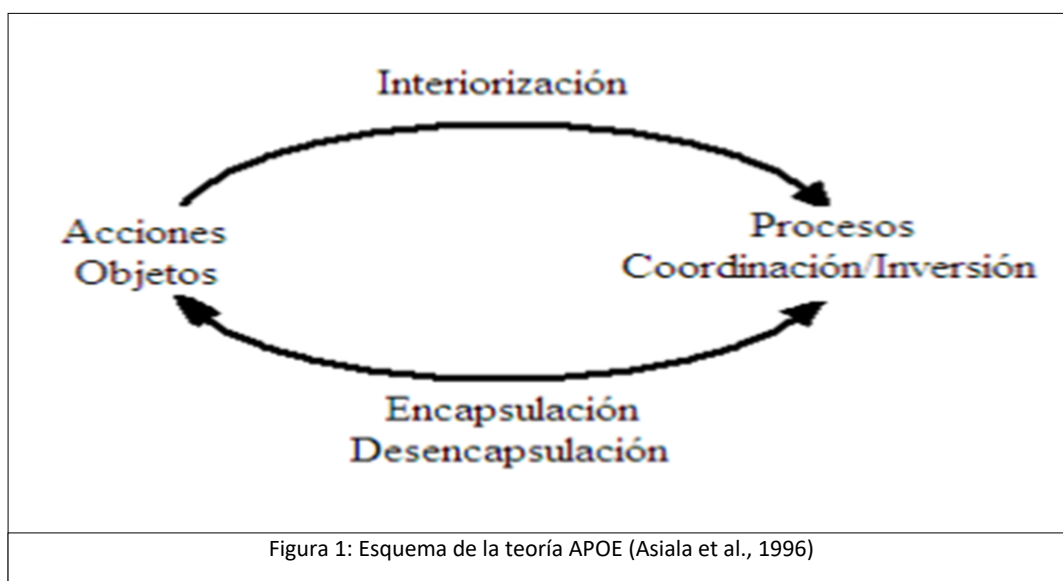
El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 276)

La teoría APOE es un marco teórico que busca describir e interpretar cognitivamente cómo los estudiantes construyen conceptos o nociones matemáticas. APOE define las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas como las estructuras mentales que un estudiante puede lograr para desarrollar su comprensión sobre un concepto matemático; y los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y des encapsulación como medio para lograr dichas estructuras.

El aprendizaje de los estudiantes de un concepto matemático o en particular de gráficos estadísticos, inicia con la aplicación de Acciones sobre Objetos previamente construidos. Las Acciones son externas al estudiante dado que las realiza paso a paso y guiadas por instrucciones que no dependen de él. Arnon, Cottrill, Dubinsky, Martínez, Roa, Trigueros, Weller (2014) mencionan:

Específicamente, el Esquema de un individuo para cierto concepto matemático es la colección individual de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas, los cuales están vinculados por algunos principios generales o relaciones para formar un marco en la mente del individuo que puede ser aplicado en una situación problemática que implica ese concepto (Arnon et al., 2014, p. 28).

En la Figura 1, se representa en general cómo la comprensión de un concepto y/o noción matemática inicia cuando un estudiante aplica Acciones sobre Objetos previamente construidos (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1996). Estas relaciones son definidas por Dubinsky (1991) como un "circular feedback system". La complejidad de las relaciones que un estudiante puede lograr al desarrollar pensamiento matemático depende, desde la perspectiva de la teoría APOE, de las relaciones que logre establecer entre las diferentes estructuras mentales.



Dubinsky y McDonald (2001), mencionan que la coherencia de un Esquema determina cuáles fenómenos están al alcance del estudiante y cuáles no. La experiencia de un estudiante con diferentes situaciones matemáticas asociadas a un concepto, genera la evolución de sus estructuras.

Un Esquema A puede ser tematizado en un Objeto (una estructura estática), de manera que pueda ser asimilado por un Esquema B. La asimilación de un Objeto (resultado de la encapsulación de un Proceso y la tematización de un Esquema) genera una reestructuración a partir del mecanismo de acomodación del Esquema B, gracias a las nuevas relaciones que es posible establecer con el Objeto asimilado. (Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal. Formación Universitaria, 10(4), 15-32)

La tematización permite que todos los elementos que para un estudiante constituyen el Esquema de un fragmento específico de la matemática, se pongan juntos en una estructura estática. El grado de evolución de los Esquemas puede establecerse mediante la tríada Intra, Inter y Trans (Parraguez y Oktaç, 2012; Valdivia y Parraguez, 2014; Arnon et al., 2014; Parraguez, 2015). Un elemento importante en esta teoría para interpretar la construcción de un fragmento de conocimiento matemático de gráficos estadísticos, o noción matemática de la construcción y análisis de los mismos, es la Descomposición Genética, que se define como un modelo hipotético que describe en detalle las estructuras

y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta investigación, interesa el diseño de una Descomposición Genética modelada a través de Esquemas cognitivos que describan la construcción y evolución del conocimiento de los estudiantes frente a la construcción y análisis de gráficos estadísticos. Maharaj expone:

Una persona no aprende conceptos matemáticos directamente. Él individuo aplica estructuras mentales para dar sentido a un concepto (Piaget, 1964). El aprendizaje se facilita si el individuo posee estructuras mentales adecuadas para un concepto matemático determinado. Si las estructuras mentales apropiadas no están presentes, entonces el aprendizaje del concepto es casi imposible. (Maharaj, 2010, p. 42)

Según Campero (2010), la teoría APOE ha demostrado su eficiencia en trabajos de investigación en la que el investigador requiere comparar las dificultades de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer.

Mena (2011) se expone que una de las ventajas principales de tomar como referente teórico a la teoría APOE es que:

Considera un ciclo de investigación que permite integrar bien las evidencias empíricas en los diseños de investigación y en las propuestas didácticas, y aun en la corrección de los diseños iniciales: a la postre, una buena manera de ir enfrentando el aspecto epistemológico global. (Mena, 2011, p. 76)

Desde este marco teórico se propone una diferencia entre la concepción y el concepto, particularmente Mc Donald et al;(2000) mencionan que:

La distinción entre la concepción y el concepto está dada en que la primera es Intra personal (es decir, es la idea que el individuo tiene para comprender), y la segunda es comunal (es decir, un concepto es el resultado de un acuerdo hecho por la comunidad de matemáticos) (Mc Donald et al; 2000, p.82)

La teoría APOE para la construcción del conocimiento matemático pasa por tres estructuras básicas: Acciones, Procesos y Objetos, las cuales no son secuenciales necesariamente. A continuación, mostramos una descripción de estos mecanismos de construcción de conocimiento matemático:

**Acción:** Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones (Asiala et al., 1996). Si el sujeto solo es capaz de trabajar sobre un objeto en base a estímulos externos, decimos que está operando a concepción acción. “Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento” (Dubinsky, 1996, p. 34).

En el caso de los gráficos estadísticos, o noción matemática de la construcción y análisis de los mismos, un estudiante se encuentra en concepción Acción cuando realiza

representación de datos individuales, y sólo incluye en el gráfico un dato o una pequeña parte de los datos (y no el conjunto completo). Si el estudiante comienza a hacer transformaciones de las representaciones por sí mismo se considera que está interiorizando la Acción en un Proceso.

Proceso: Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. “Un individuo que tiene una concepción de proceso de una construcción cuando puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso invertir los pasos de la construcción sin realizar dichos pasos” (Asiala et al., 1996, p. 10). Lo anterior quiere decir que esencialmente el individuo realiza la misma construcción enteramente en su mente, y la realiza sin la necesidad de recorrer todos los pasos específicos, es decir, puede reflexionar sobre él sin realizar acciones específicas.

En el caso de los gráficos estadísticos, o noción matemática de la construcción y análisis de los mismos, cuando un individuo reflexiona sobre la representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución se puede afirmar que evidencia una concepción Proceso, pues el estudiante es capaz de representar los datos tal y como los ha recogido, sin llegar a clasificarlos ni calcular la frecuencia de diferentes valores.

Objeto: se especifican en el espacio donde el aprendiz reflexiona sobre las operaciones utilizadas en un proceso, cuando es capaz de ver el concepto matemático en conjunto como un todo y realizar las construcciones (ya sean acciones o procesos), que pueden actuar sobre él, entonces está pensando en este proceso como un Objeto. En este momento se dice que el proceso ha sido encapsulado en objeto. Cuando el Objeto no ha sido manipulado completamente por el aprendiz, puede darse un mecanismo de reversión, es decir “el mecanismo de encapsulación le permite al aprendiz volver al proceso que originó el Objeto, en este la coordinación cumple un papel fundamental para la construcción de otros objetos” (Asiala et al., 1996, p. 11).

Un individuo tiene una concepción objeto de un concepto si él puede desencapsular el concepto de vuelta al proceso subyacente y construir transformaciones que pueden ser aplicadas al objeto. (Dubinsky et al., 2005, p. 5)

Referente a la concepción Objeto de los gráficos estadísticos, o noción matemática de la construcción y análisis de los mismos, se puede evidenciar que un estudiante ha logrado esta estructura cuando puede responder correctamente a preguntas como las siguientes: ¿cómo representar la distribución de un conjunto de datos? ¿Qué niveles de lectura gráfica presentan nuestros estudiantes? Y logra ir más allá de la representación de una distribución de datos, adquiriendo competencias para el análisis y construcción de los mismos. El estudiante clasifica los datos y calcula la frecuencia de cada valor, llegando a aplicar el concepto de distribución de frecuencias y a representar la distribución.

Esquemas: es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se asumen como la interacción de los mecanismos, caracterizados por ser dinámicos y por

permitir una reconstrucción continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las prácticas de aula con relación a la matemática escolar.

La coherencia de un esquema está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (objeto) y / o se utilizan como una estructura dinámica que asimila otros objetos relacionados o esquemas. (Arnon et al., 2014, p.25).

El esquema está siempre en evolución, y puede llegar a considerarse como un nuevo objeto, al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Tematizar es una manera para la construcción de objetos, alternativa a la encapsulación de procesos, por tanto, puede hacer luego acciones sobre el esquema. (Mena, 2011, p.81)

Cabe agregar un ejemplo de la concepción esquema de los gráficos estadísticos, o noción matemática de la construcción y análisis de los mismos, este puede evidenciarse cuando a un estudiante evoluciona frente a la Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico. Además de formar y representar la distribución de datos, el estudiante puede de conjugar más de una variable.

Los 5 tipos de mecanismos de abstracción reflexiva que menciona Dubinsky son: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión. Por medio de estas se originan las construcciones mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; los cuales dan el nombre a la teoría (Gamboa, 2013).

- ✓ Interiorización: Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así, mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso.
- ✓ Coordinación: Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo, dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.
- ✓ Encapsulación: Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática).
- ✓ Generalización: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este

mecanismo, los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.

- ✓ **Reversión:** Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Consiste básicamente en pensar un proceso a la inversa, no necesariamente en el sentido de deshacer, pero sí como medio de la construcción de un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original.

Hay muchos casos en que es esencial volver desde un Objeto al Proceso que lo forma. Según APOE la des encapsulación de un objeto solo puede realizarse des encapsulando el objeto, es decir volviendo al proceso que fue encapsulado para construir ese objeto (Mena, 2011, tomado de Gamboa 2013). “Se considera que el mecanismo de encapsulación es el más importante para la construcción del conocimiento matemático, pero, también, que es el más difícil de lograr: puede dilatarse mucho o incluso no ocurrir” (Ibíd., p.81).

En resumen, el paso por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de dos maneras distintas. La primera es por medio de acciones, las cuales se interiorizan en procesos, que se pueden coordinar con otros procesos y/o revertir en otro proceso. Un proceso se encapsula en un objeto. Otra forma es por medio de la des encapsulación de objetos; es decir, un objeto se puede des encapsular en el proceso que lo generó, de esta manera dicho proceso se puede coordinar con otros (los cuales se pueden haber generado ya sea por interiorización y/o des encapsulación) generando nuevos procesos que se pueden encapsular en un objeto distinto del que se inició por des encapsulación (Gamboa, 2013).

### 3.2 Ciclo de investigación

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación que integra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

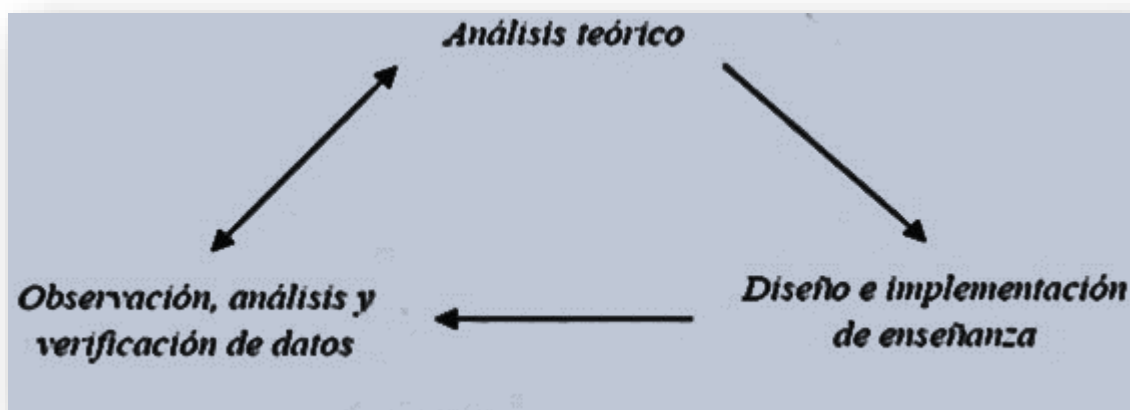


Figura 2 Ciclo de investigación (Asiala et al.1996)

La investigación se inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar correspondiente a los gráficos estadísticos (construcción y análisis), esto da lugar a una descomposición genética preliminar la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede hacer un sujeto para la comprensión del concepto, el análisis impulsa al diseño y aplicación de enseñanza el cual a través de distintas actividades promuevan las construcciones mentales requeridas por el análisis, la recopilación y análisis de datos por su parte es una componente que retroalimenta al análisis hipotético inicial la veces que sea necesario.

**3.2.1. Análisis teórico:** Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto de gráficos estadísticos teniendo en cuenta su construcción y análisis de los mismos, el cual es la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Donde se considera el análisis de los libros de texto y la experiencia del investigador y los resultados de estudios previos, para determinar un posible camino viable para la construcción del concepto, a dicho camino se le considera una descomposición genética preliminar del concepto de gráficos estadísticos (construcción y análisis), la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que una persona puede hacer en la construcción de un concepto matemático.

Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Estos planteamientos promueven la reflexión sobre qué es comprender un concepto determinado y las implicaciones que tiene en la forma como los estudiantes pueden concebirlo. Va mucho más allá de la repetición mecánica de algoritmos o la supuesta construcción de un concepto aislado.

El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética del concepto que determine un camino viable en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Cabe mencionar que no hay una única descomposición genética del concepto, ya que dependen de los caminos de construcción y las estructuras mentales previas del individuo (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto gráficos estadísticos teniendo en cuenta su construcción y análisis de los mismos.

**3.2.2. Diseño e implementación de enseñanza:** Estas se sustentan expresamente en el análisis teórico inicial, y su objetivo es ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas. Actividades y ejercicios diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos. En Roa-Fuentes y Oktaç (2012), se mencionan aspectos como el tiempo, cantidad de integrantes del grupo de investigación necesarios para los seguimientos, como variables que han generado la realización de investigaciones que pasan de la primera a la tercera componente, entre las que se encuentran: Parraguez (2009), Parraguez & Oktaç (2010), Roa-Fuentes (2008), Pérez (2012) y Roa-Fuentes y Oktaç (2012). En nuestro caso particular, luego del diseño de la descomposición genética hipotética, se diseñará un

Cuestionario basado en las construcciones mentales explicitadas en ella, para analizar cómo los individuos han construido y/o están construyendo (Roa-Fuentes y Okaç 2012).

### 3.2.3. El ciclo ACE

Dubinsky junto al grupo RUMEC han provisto a la teoría APOE de un ciclo de enseñanza llamado ACE (ACE teaching cycle: Activities, Class discusión and Excercises): se trata de reemplazar las lecciones con métodos interactivos, constructivos y con aprendizaje colaborativo, en la traducción al español: (A) actividades que enfrentan al estudiante a nuevas situaciones o informaciones, donde el trabajo colaborativo es parte importante de ellas; posteriormente se prosigue con discusiones en clases (C), donde nuevamente interviene el trabajo colaborativo con el fin de una mejor asimilación y acomodación; y por último se les entrega a los estudiantes una serie de ejercicios (E) buscando el reforzamiento y posible extensión de sus ideas (Ver Figura 3).

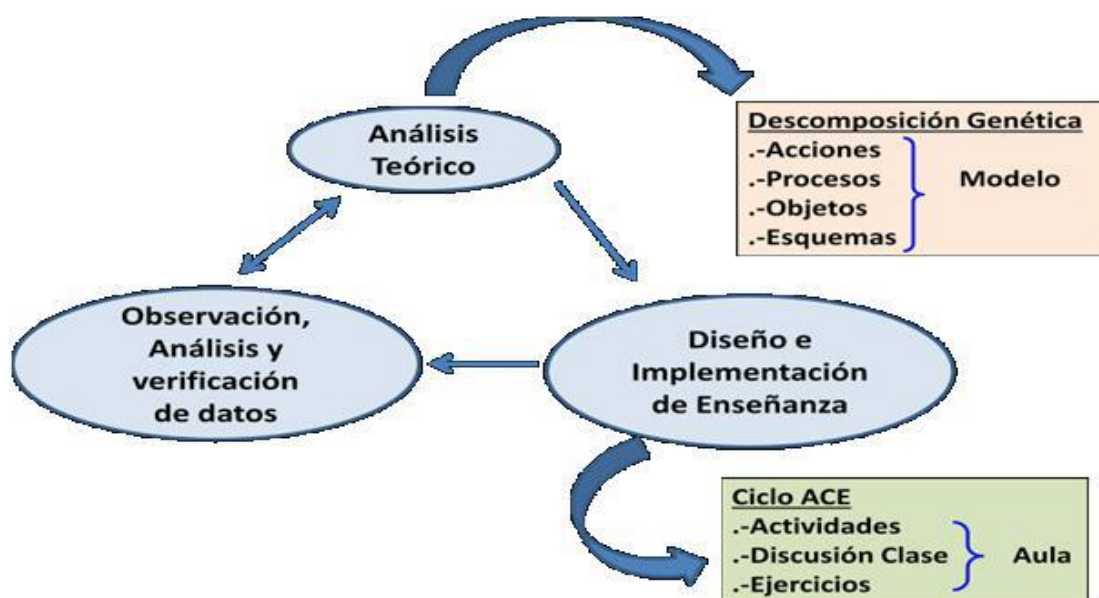


Figura 3.: Ciclo ACE como herramienta de enseñanza de la teoría APOE

**3.2.6. Recopilación y análisis de los datos:** La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en la teoría APOE, ya que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis. El propósito del análisis de datos es responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto de que se trata? Diferentes tipos de instrumentos se pueden utilizar para indagar sobre estas preguntas, depende mucho del objetivo de la investigación, éstos pueden incluir cuestionarios por escrito entrevistas Semi-estructuradas (audio y/o grabadas en vídeo) (Mendoza, Roa-Fuentes, Rodríguez, 2015).

En relación a las construcciones y mecanismos mentales, que se hacen necesarios para la construcción de un concepto, se explica la metodología propia de la teoría APOE y la forma en que se puede llegar al aula de clases mediante el ciclo ACE, para el desarrollo



de las actividades y la adquisición de las competencias en la construcción y análisis de gráficos estadísticos.

### 3.3 La Descomposición Genética

Una Descomposición Genética (DG) está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para comprender/construir un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas. La teoría APOE trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción. Asiala et al., (1996, p. 7), define la descomposición genética del concepto como “conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo”. La DG pone en relieve las construcciones cognitivas que pueden ser necesarias para el aprendizaje de un concepto. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma que se pueden ir estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto, para favorecer la construcción de las relaciones entre estas acciones, procesos y objetos (Salgado, 2007). La DG comienza por el análisis de las construcciones que hace un individuo cuando aprende un concepto matemático en términos de lo que es observable. Se construye como una primera aproximación para modelar el aprendizaje de algún concepto matemático, se utiliza como base teórica para elaborar materiales que se emplean en el aula, pues debe ser sometida a prueba con los individuos en situación de clase (Ibíd.)

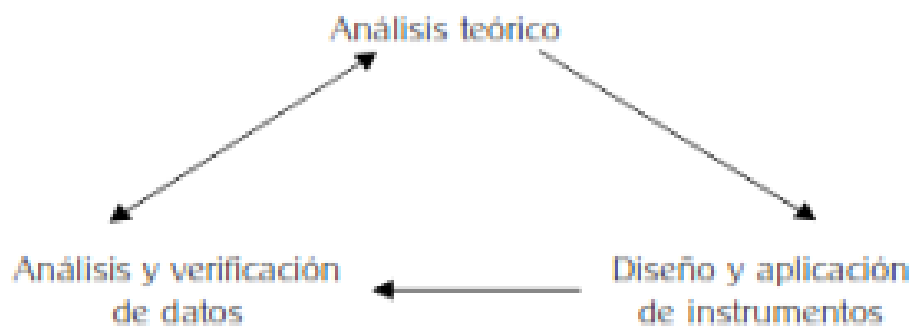
Una DG es una vía para aprender/construir conscientemente un concepto matemático por parte del individuo, pensando que la DG de un concepto no es única; y que “pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio” (Trigueros, 2005, p. 8). Es posible que distintas DG coexistan para un mismo concepto, pero es importante que cualquier descomposición genética del concepto matemático sea un instrumento que describa efectivamente las observaciones de los trabajos de los estudiantes (Trigueros y Oktac, 2005).

Teoría APOE, como marco teórico y también metodológico da las bases para el análisis teórico, el diseño e implementación de actividades, la observación y valoración que se realiza a cualquier contenido matemático, buscando entender cómo las matemáticas pueden ser aprendidas desde las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento; a través de las cuales las estructuras lógico matemáticas, se desarrollan en la mente del individuo desde la reflexión y la toma de conciencia en la necesidad de aprender. Sin duda alguna esta teoría reúne elementos necesarios para desarrollar un proceso investigativo que pueda arrojar resultados contundentes, que conlleven a dar solución a los problemas que presente el estudiante en su proceso de enseñanza aprendizaje.

# CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

El paradigma metodológico es cualitativo, con enfoque descriptivo-interpretativo. Se basa en el paradigma de la teoría APOE, descrito en el capítulo anterior. Esta investigación está situada en el paradigma hermenéutico o interpretativo, el método empleado es el estudio de Casos (Stake, 2010); las técnicas de recolección de datos son cualitativas (aplicación de cuestionario, diseño e implementación de una secuencia didáctica y entrevista en profundidad). Estos instrumentos permiten obtener información relevante y en profundidad acerca de las estructuras y mecanismos mentales que evidencian los estudiantes respecto a la construcción y el de gráficos estadísticos (diagramas de barra y diagramas de línea).



*Figura 4* Ciclo metodológico de investigación de la teoría APOE (Asiala et al, 1996)

#### 4.1 Análisis Teórico.

En esta investigación se tomó en cuenta para la formulación de la descomposición gética trabajos relevantes en Didáctica de las Matemáticas sobre la construcción y análisis de gráficos estadísticos, el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores.

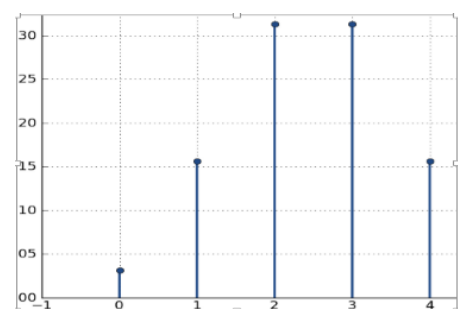
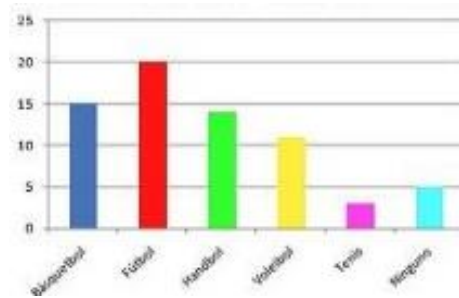
Para empezar, se describen las nociones o conceptos matemáticos que debe tener previamente un estudiante para iniciar la construcción y el análisis de gráficos estadísticos. Posteriormente se propone la descomposición genética hipotética que da paso al diseño y desarrollo de la segunda componente del ciclo de investigación.

##### 4.1.1. Conceptos y nociones matemáticas previas.

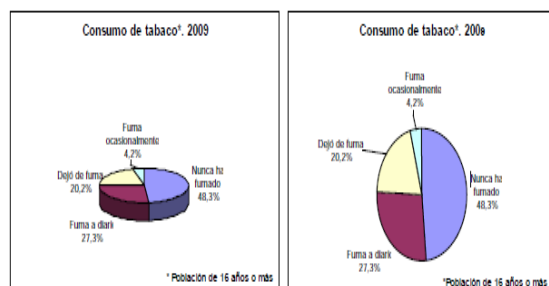
El tratamiento que se propone realizar a los temas de construcción y análisis de gráficos estadístico en la básica secundaria es de tipo descriptivo. Se pretende la comprensión de los procesos y mecanismos para la inferencia estadística, Ya que la estadística, se usa como herramienta para el estudio de ciertos fenómenos, donde se realiza un análisis a partir de informaciones obtenidas y desde allí tomar decisiones que permitan el normal desarrollo de la actividad humana. De ahí que los conceptos y nociones matemáticas previas se refieren a los siguientes contenidos

- ✓ Datos: Son los valores cualitativos o cuantitativos mediante los cuales se miden las características de los objetos, o fenómenos a estudiar.
- ✓ Población: Es el conjunto Formado por todos los elementos que existen para el estudio de un determinado fenómeno.

- ✓ Muestra: Es un subconjunto que tomamos de la población para determinar el estudio del fenómeno o también para realizar las observaciones.
- ✓ Variables o carácter estadístico: Es la cualidad o Propiedad del elemento de la población que se analiza en el estudio estadístico.
- ✓ Variables discretas: Este tipo de variables numéricas resulta de conteos y están asociadas a números enteros por ello solo pueden tomar un numero finito de valores numéricos, por ejemplo, número de personas que habitan en una comunidad, número de hermanos en una familia; el número de personas que opinaron favorablemente de un candidato.
- ✓ tabla estadística: Es un cuadro que se usa para organizar, clasificar y resumir datos relevantes que se ha recolectado, su uso permite registrar, ordenar y resumir los resultados cuantitativos recolectados de alguna variable investigada.
- ✓ Porcentaje: Es la proporción de una cantidad de datos específicos, con respecto al total de esos datos.
- ✓ plano
- ✓ Semi plano
- ✓ frecuencia absoluta ( $f_i$ ): Es el número total de veces que aparece el dato ( $x_i$ ) u ocurre un cierto suceso.
- ✓ frecuencia relativa ( $h_i$ ): Es la proporción resultante de dividir la frecuencia absoluta entre el número total de datos.
- ✓ Frecuencia Acumulada ( $F_i$ ): Es la suma de todas las frecuencias absolutas correspondientes a los valores anteriores a ( $x_i$ ) y a la suya propia.
- ✓ diagramas o gráficos estadísticos: Es un dibujo utilizado para representar la información recolectada, que tienen entre otras funciones: Hacer visibles los datos que representa. Mostrar los posibles cambios de esos datos en el tiempo y en el espacio. Evidenciar las relaciones que pueden existir en los datos que representa. Sistematizar y sintetizar los datos.
- ✓ diagramas de barras: también conocido como diagrama de columna, el cual está conformado por barras rectangulares de longitudes proporcionales a los valores representados Se utiliza para comparar las frecuencias o los valores de distintas categorías o grupos. Las barras pueden ser tanto verticales como horizontales.
- ✓ diagramas de línea: Un gráfico de líneas es una herramienta eficaz para la visualización de tendencias de datos a lo largo del tiempo y por lo tanto el tipo de gráfico más adecuado para series temporales. Al diseñar el gráfico, se puede ajustar las escalas para la mejor transmisión del mensaje.



- ✓ diagrama circular: Un gráfico circular o de sectores se puede utilizar para mostrar la distribución porcentual de una variable, pero sólo se puede mostrar un pequeño número de categorías, por lo general no superior a seis. Es eficaz para visualizar la importancia relativa de una categoría sobre un total.



#### 4.1.2. Descomposición genética hipotética.

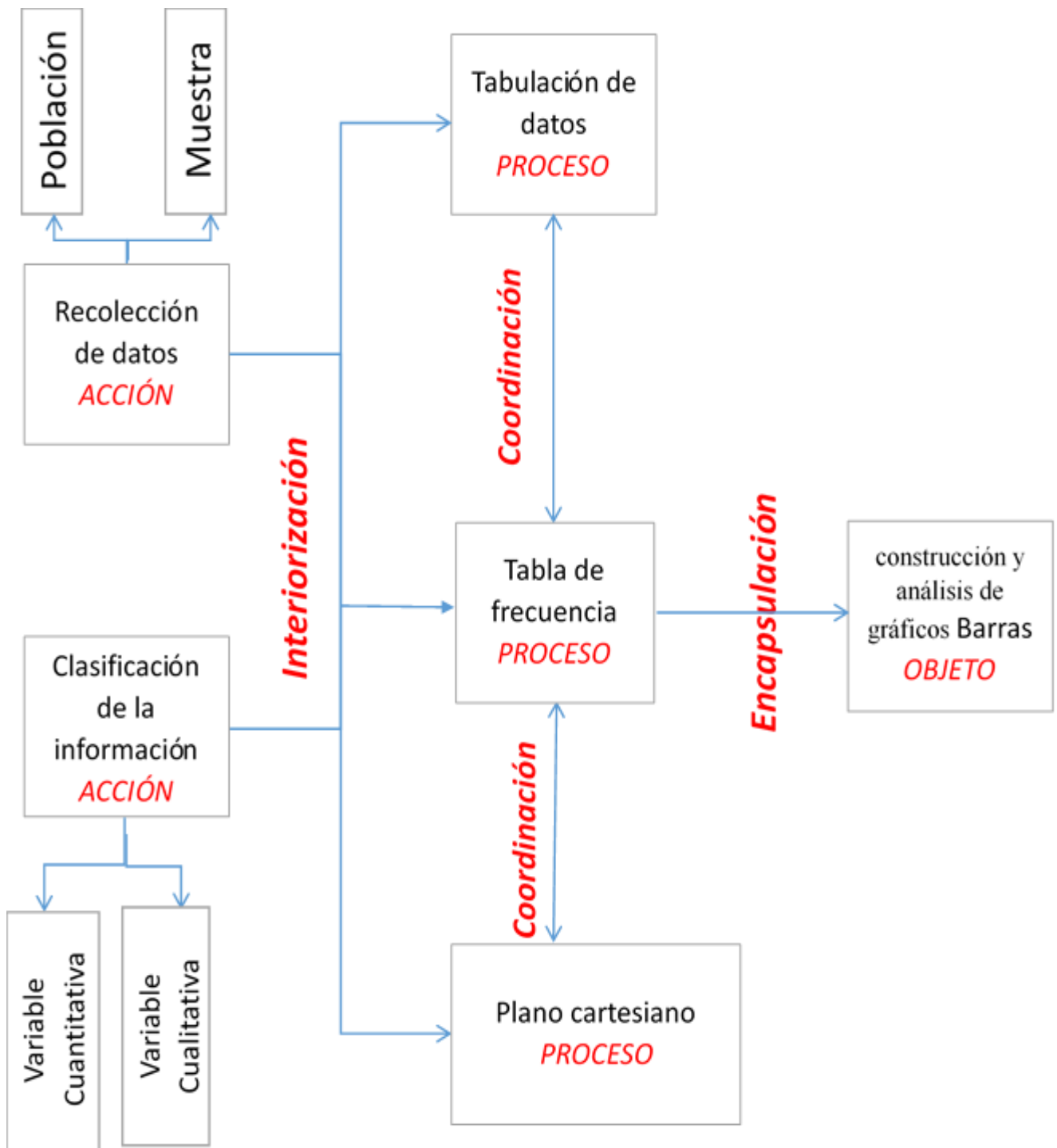
La Descomposición Genética hipotética de la construcción y análisis de gráficos estadísticos que hemos construido se basa en los antecedentes de esta investigación, los aspectos históricos epistemológicos señalados en el capítulo 2 y la experiencia docente de los profesores investigadores.

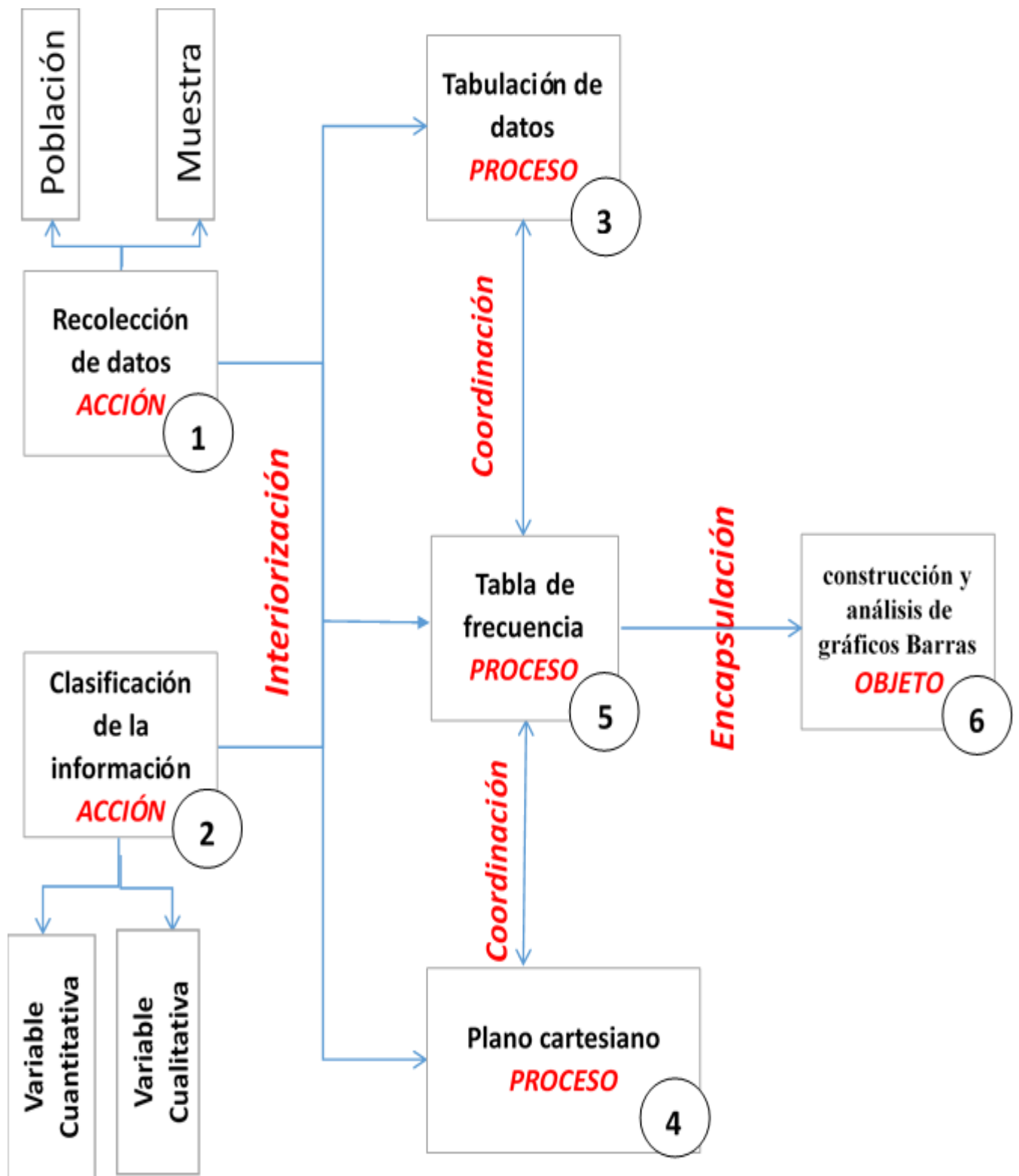
Inicialmente se consideró que un estudiante comienza aplicando Acciones sobre algunos conceptos básicos de estadística, en particular la recolección de datos y la clasificación de la información (población y muestra, variables y los tipos de variables estadísticas), dichas Acciones mediante el mecanismo de la interiorización que está asociada con la idea de identificar la población, la variable y el tipo de variable que corresponden a dicho estudio, lo cual daría paso a la construcción Proceso, relacionado con la tabulación de datos y el plano cartesiano.

El mecanismo de abstracción reflexiva de la interiorización es la actividad cognitiva que tiene el alumno para relacionar los elementos de una población con su variable, y los datos para realizar conteos, lo cual es posible a través de los registros en tablas.

El primer Proceso tabulación de datos se puede coordinar con un segundo Proceso referente a el plano cartesiano, los cuales establecerán los fundamentos para la construcción de tablas de recolección de datos, dando paso al Proceso tablas de frecuencia, este proceso nos permite reconocer los elementos, características y tipos de frecuencia (absoluta, acumulada y la relativa), como también las diversas representaciones gráficas para cada tipo de frecuencia.

Mediante el mecanismo mental de la encapsulación, este último Proceso nos da una concepción Objeto construcción y análisis de gráficos estadísticos (barra),





**Instrucciones:** El presente cuestionario está relacionado con la construcción y análisis de gráficos estadísticos (barras), los cuales se han venido abordando de manera progresiva en el área de matemática.

Teniendo en cuenta los conceptos aprendidos, en las situaciones presentadas a continuación Responde en forma clara, a cada uno de los interrogantes

### **Situación 1**

1. En el municipio del alto Baudó se realizó un estudio sobre el número de hijos por familia escogiendo para el estudio a 70 familias del mismo entorno

a. Considerando lo anterior:

i. ¿Qué tipo de variable es la presentada en la situación anterior?

Opción 1: Cuantitativa discreta

Opción 2: cuantitativa y discreta

ii. ¿Cuál será el carácter estadístico o variable de la información suministrada?

Número de hijos

b. Identifique la población.

Opción 1: La población es el municipio del alto Baudó

Opción 2: alto Baudó

i. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

Opción 1: 70

ii. Según la situación dada la muestra está representada por

Opción 1: 70 familias

### **Situación 2**

2. Se desea saber las edades de los estudiantes de los grados 11A, 11B, 11C, de la Institución Educativa Antonio Angles, para ello se les pregunta a 50 estudiantes que cursan grado 11° y los resultados fueron:

16,17,20,16,15,17,22,20,16,16,15,16,15,17,17,20,16,18,19,15,14,18,14,16,16,17,18,20,16,17,16,17,19,18,18,16,16,17,20,18,15,16,16,15,15,18,19,16,20,17.

a. De la anterior situación determine la variable y el tipo de variable.



Opción 1: la variable serían las edades y el tipo de variable cuantitativa discreta

- i. Haz el conteo de los datos y tabula los datos

Opción 1: organizar los datos de menor a mayor en una tabla, y realizar el conteo

- ii. representa la información en una tabla de frecuencia

Opción 1: construir un esquema para consignar los datos obtenidos en el conteo y determinar las frecuencias para los datos suministrados

- b. Construye el gráfico de barra y de línea para la frecuencia absoluta.

Opción 1: dibujar un semiplano ubicando en su eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias, trazando los gráficos para hacer corresponder a cada variable su frecuencia

- i. Haga un análisis de los gráficos construidos.

Opción 1: hacer una comparación entre las variables y sus frecuencias

#### 4.1.6. Justificación del cuestionario en relación a la DG

Con base en la DG hipotética de la Construcción y análisis de gráficos estadísticos. Se construyó este cuestionario Para observar la viabilidad de la DG, donde cada interrogante debe mostrar una construcción mental de los estudiantes a través de sus respuestas, por ello cada pregunta del cuestionario está relacionada con una sección de la DG con base en la construcción que ha demostrado el estudiante.

**Situación 1 del cuestionario:** (Esta situación está subdividida en 4 preguntas)

1. En el municipio del Alto Baudó se realizó un estudio sobre el número de hijos por familia escogiendo para el estudio a 70 familias del mismo entorno
  - a. **Pregunta 1.a.i y a.ii:** Considerando lo anterior:
    - i. ¿Qué tipo de variable es la presentada en la situación anterior?
    - ii. ¿Cuál será el carácter estadístico o variable de la información suministrada?

El estudiante debería evidenciar una **concepción acción** de variable y tipos de variable, ya que para responder solo debe aludir a conceptos previos de clasificación de la información sobre variable y sus diversos tipos para dar respuesta a los interrogantes.

La imagen 4.2, muestra el sector de la Descomposición Genética que se relaciona con las preguntas 1. a. i y a.ii



Imagen 4.2: Pregunta 1.a.i y a.ii en la Descomposición Genética

**Pregunta 1. b. i y b.ii)**

- i. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?
- ii. Según la situación dada la muestra está representada por

Aquí el estudiante nuevamente debe dar cuenta de esas estructuras mentales previas frente a los conceptos de población, y muestra para poder dar respuesta a los interrogantes planteados

La imagen 4.3, muestra el sector de la Descomposición Genética que se relaciona con las preguntas **1. b. i y b.ii**

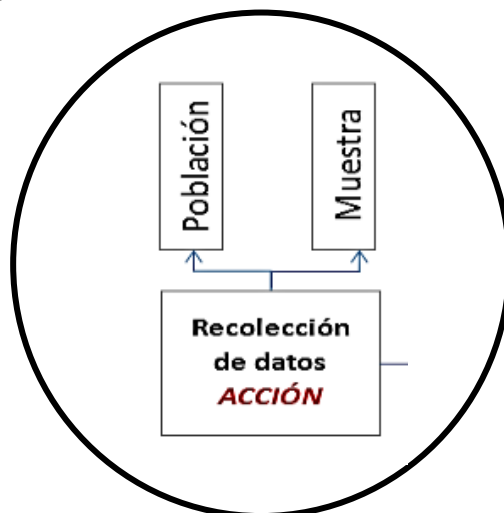


Imagen 4.3: Pregunta **1. b. i y b.ii** en la Descomposición Genética

**Situación 2 del cuestionario:** (Esta situación está subdividida en 3 preguntas)

2. Se desea saber las edades de los estudiantes de los grados 11A, 11B, 11C, de la Institución Educativa Antonio Angles, para ello se les pregunta a 50 estudiantes que cursan grado 11° y los resultados fueron:

16,17,19,16,18,17,16,18,16,16,15,16,15,17,17,15,16,18,17,15,16,18,16,16,16,17,18,15,16,17,16,17,16,18,18,16,16,17,15,18,15,16,16,15,15,18,16,16,15,17.

**Pregunta 2.a.i)**

- i. Haz el conteo de los datos y tabula los datos

En esta pregunta el estudiante mostrará una concepción **proceso** si logra registrar y contabilizar los datos en una tabla, para esto es necesario que se logra al interiorizar los aspectos estadísticos como los datos, la muestra y variables, ya que, para tabular la información dada, debe tener clara la idea de conteo y ordenamiento de datos.

La imagen 4.4, muestra el sector de la Descomposición Genética que se relaciona con las preguntas **2.a.i**

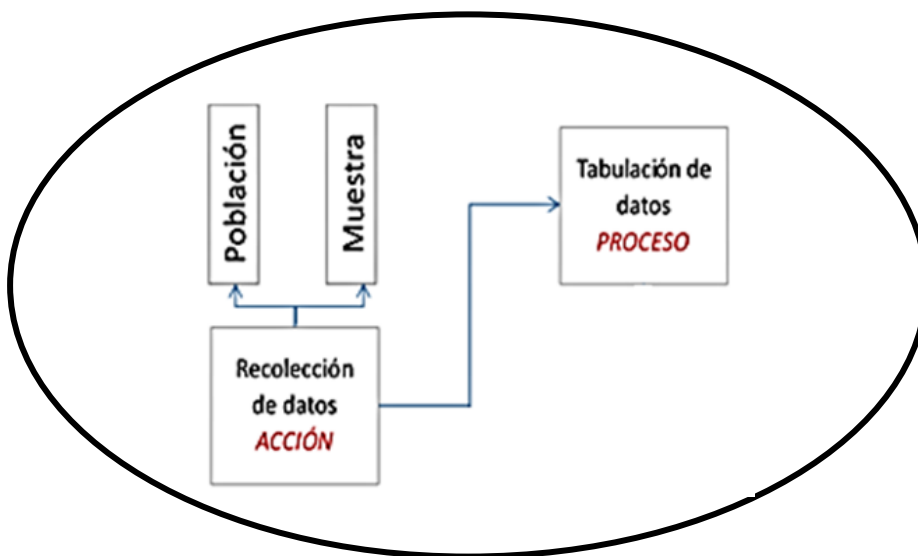


Imagen 4.4: Pregunta **2.a.i** en la Descomposición Genética

**Pregunta 2.a.i.i)**

- ii. representa la información en una tabla de frecuencia

En esta pregunta el estudiante debe evidenciar la construcción **proceso** de elaboración y construcción de tablas de frecuencia que se logra al coordinar los dos procesos necesarios (3) tabulación de datos (4) concepto de proporcionalidad y tipos de proporción, ya que para la construcción y elaboración de tablas de frecuencia debe tener clara la idea de lo que es una tabulación, un conteo y una frecuencia o sus diversos tipos de frecuencia y la variación proporcional que poseen los datos a tabular.

Si un estudiante no consigue elaborar y construir una tabla de frecuencia, es evidente que no ha *coordinado* los dos procesos necesarios para establecer la noción de tablas de frecuencia.

La imagen 4.5, muestra el sector de la Descomposición Genética que se relaciona con las preguntas **2.a.i.i)**

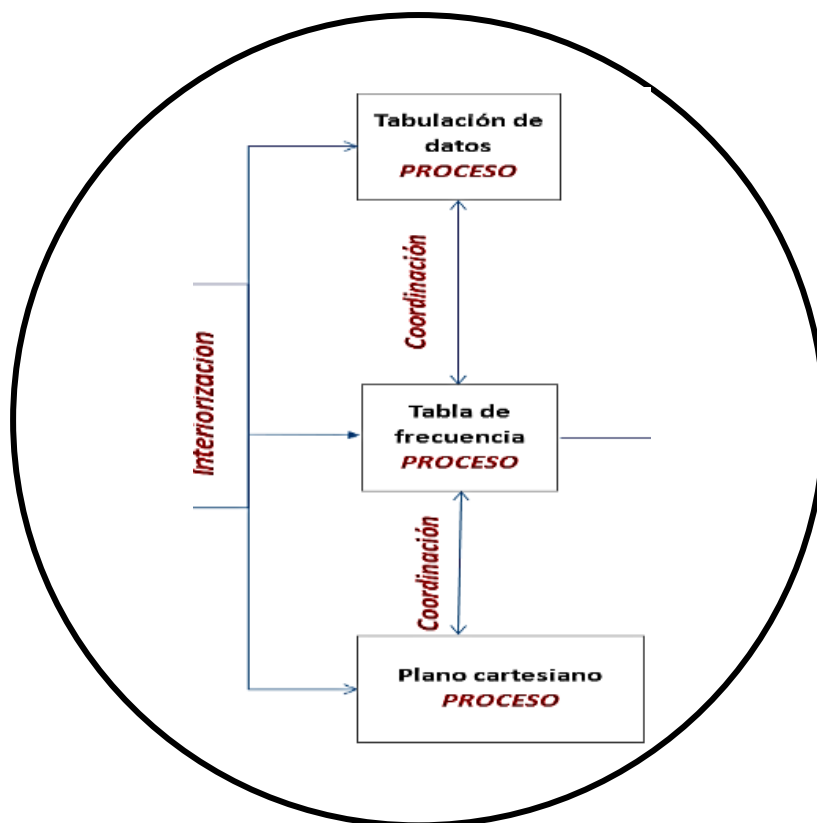


Imagen 4.5: Pregunta **2.a.i.i)** en la Descomposición Genética

### Pregunta 2.b Y 2.b.i)

- b. Construye el gráfico de barra para la frecuencia absoluta.
  - i. Haga un análisis del gráfico construido.

En estas preguntas el estudiante debe evidenciar la construcción y análisis de gráficos estadísticos como **objeto.**, esto será posible Si el estudiante fue capaz de coordinar dos procesos (3) tabulación de datos, (4) plano cartesiano, características y elementos, generando un nuevo **proceso** definido como: tabla de frecuencia. Lo anterior es un proceso complejo, pues el mecanismo de *encapsulación* para la construcción y análisis de gráficos estadísticos como **objeto**, está condicionado a dos situaciones: (1) evidenciar la **construcción objeto** de los gráficos estadísticos (barra), (2) evidenciar la **construcción objeto** del análisis de gráficos estadísticos (barra)

La imagen 4.6, muestra el sector de la Descomposición Genética que se relaciona con las preguntas **2.b Y 2.b.i)**

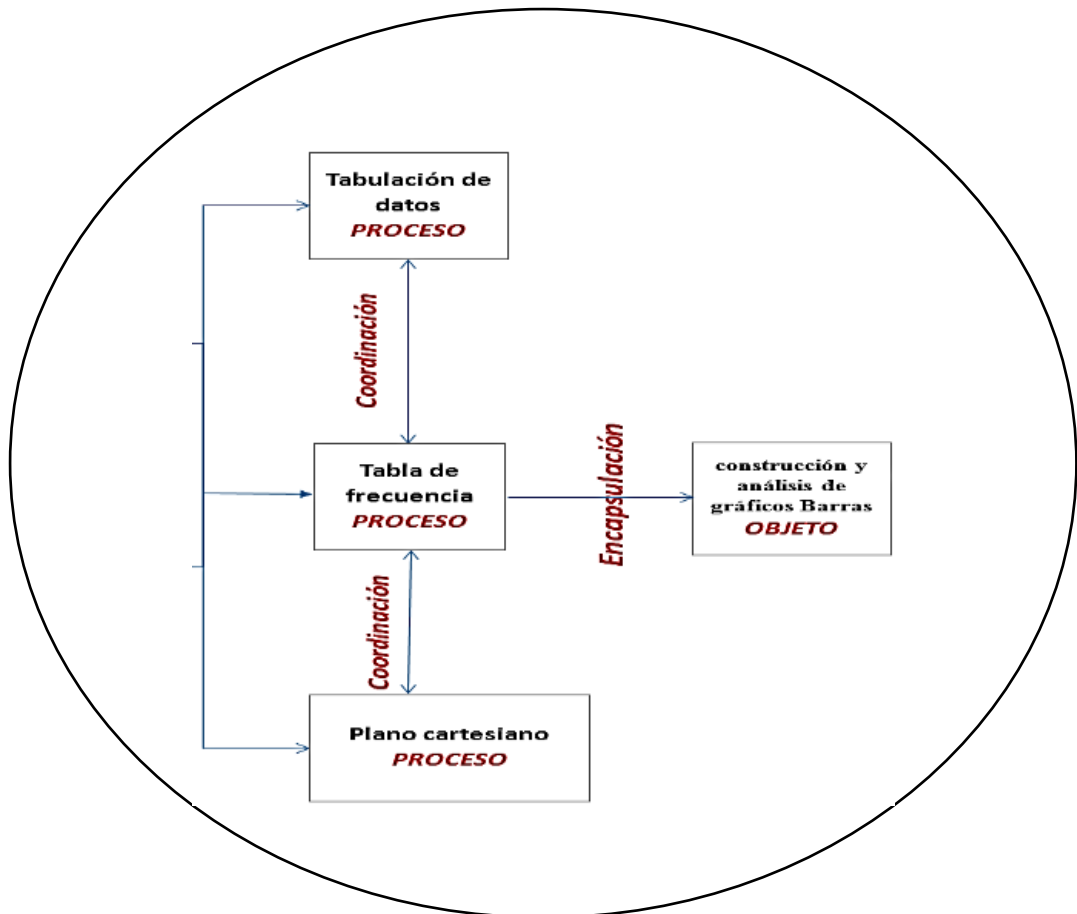


Imagen 4.6: Pregunta **2.b Y 2.b.i** en la Descomposición Genética

# CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presentará la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE: el análisis y verificación de datos obtenidos tras la aplicación del cuestionario construido a partir de la DG hipotética.

El tipo de investigación que se ha realizado, es una investigación cualitativa orientada a establecer cómo los estudiantes construyen un nuevo concepto matemático; La investigación corresponde en un estudio de casos (en particular nos referiremos al estudio de caso múltiple el cual nos permite hacer gran cantidad de comparaciones pese a la cantidad de individuos involucrados en el estudio).

### 5.1. El estudio de casos

Un estudio de casos se define como: “una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real (...). Una investigación de estudio de caso trata exitosamente con una situación técnicamente distintiva en la cual hay muchas más variables de interés que datos observacionales; y, como resultado, se basa en múltiples fuentes de evidencia, con datos que deben converger en un estilo de triangulación; y, también como resultado, se beneficia del desarrollo previo de proposiciones teóricas que guían la recolección y el análisis de datos.” (Yin, 1994; p. 13). Este tipo estudio es considerado como un método de investigación que facilita la búsqueda de respuestas respecto del cómo o del porqué de los hechos, ya que se centra en el análisis profundo de uno o varios casos específicos (Yacuzzi, 2005).

#### 5.1.2. Análisis y Verificación de los datos

Esta componente lleva al análisis de los datos empíricos obtenidos en la etapa anterior (diseño y aplicación de instrumentos). Los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario son analizados desde la DG hipotética, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. En general el análisis tiene que ser dado con nitidez, es decir, ejemplos de estudiantes quienes parecen comprender esto y otros que no lo hacen, y luego discutir que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la Descomposición Genética. Solamente entonces se puede llegar a la conclusión de que los datos soportan esta construcción mental particular en la DG. Esto lleva a una reformulación de la DG y a la determinación de una versión refinada de la descomposición genética para este ciclo, que sin duda aún podrá ser mejorada mediante la repetición de este ciclo.

#### 5.1.3. Resultados del cuestionario

A continuación, se realizará un análisis pregunta a pregunta de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario construido en base a la DG hipotética y de acuerdo a cada caso mencionado en el capítulo anterior. En el análisis de las preguntas **E1** hará referencia al estudiante 1, **E2** al estudiante 2 y así sucesivamente en cada uno de los casos. El análisis se efectuará contrastando con las respuestas esperadas del análisis a priori, con

lo cual se analizarán las respuestas en torno a las construcciones mentales acción, proceso, objeto explicitadas en la DG

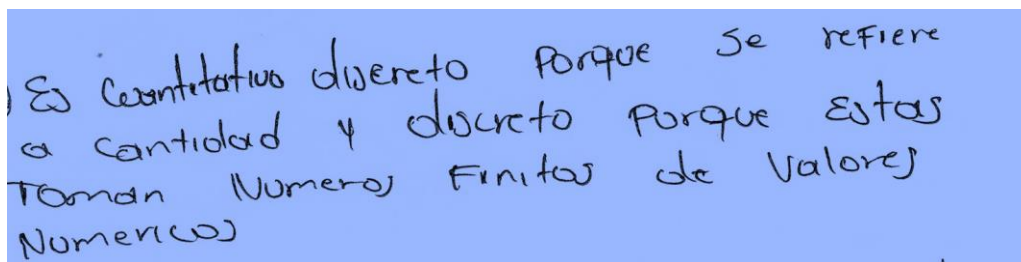
#### 5.1.4. Resultados del Caso 1

##### Pregunta 1.a.i y 1.a.ii

Todos los estudiantes de este caso (**E1, E2, E3, E4, E5**), muestran la concepción **Acción**, es decir logran responder a los interrogantes frente a la situación planteada, incluso algunos en sus argumentos utilizan directamente las definiciones de variable y tipos de variables para responder, lo que indica que muestran una interiorización de esos conceptos matemáticos.

Esto no quiere decir que el estudiante haya construido el objeto. Es clara la presencia de distintas estrategias para justificar sus respuestas. A continuación, presentamos algunas de las respuestas.

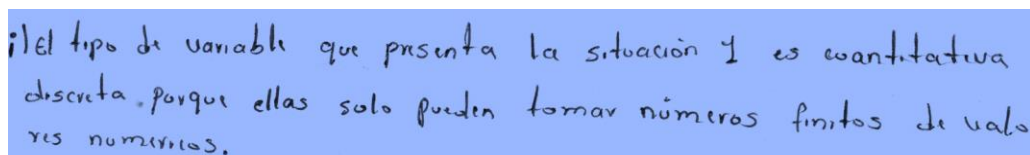
Los estudiantes **E1, E3, E4, E5** presentan argumentos desde el concepto de los tipos de variable, y lo justifica



Es cuantitativo discreto porque se refiere a cantidad y discreto porque estas toman números finitos de valores numericos

Figura 5.1: respuesta de **E1, E3, E4, E5** a la pregunta 1.a.i

**E2** responde aplicando los conceptos de variable y tipos de variable, dejando explicita la variable discreta, sin explicar lo cuantitativo como los estudiantes 1 y 3.

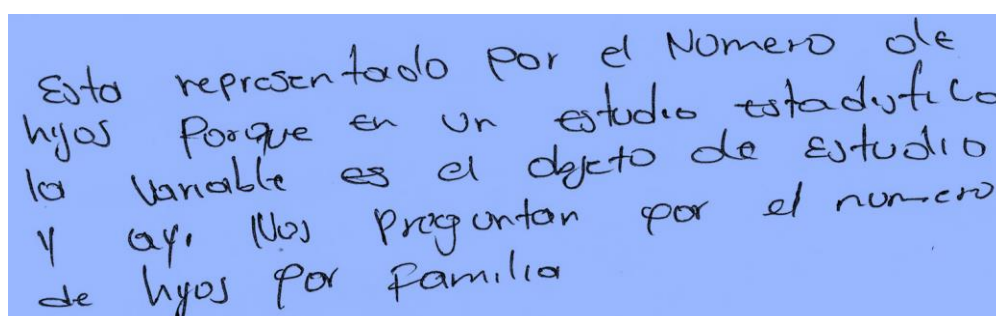


El tipo de variable que presenta la situación 1 es cuantitativa discreta, porque ellas solo pueden tomar números finitos de valores numericos.

Figura 5.2: respuesta de **E2** a pregunta 1.a.i

##### Pregunta 1.a.ii

Los estudiantes **E1, E3, E4, E5** presentan argumentos desde el concepto de variable, y lo justifica



Esto representado por el número de hijos porque en un estudio estadístico la variable es el objeto de estudio y así nos preguntan por el número de hijos por familia



Figura 5.3: respuesta de **E1, E3, E4, E5** a la pregunta 1.a.i.i

**E2** responde aplicando los conceptos de variable

La variable de la situación 1 esta representada por el número de hijos, ya que en estadística el objeto de estudio es la variable

Figura 5.4: respuesta de **E2** a la pregunta 1.a.i.i

### Pregunta 1.b, 1.b.i y 1.b.i.i

En estas preguntas los estudiantes tendrían que identificar: la población, la muestra y el tamaño de la muestra; con base en nuestro a priori podemos considerar que todos están en una concepción acción, ya que recurren al mecanismo de abstracción reflexiva para dar respuesta a los cuestionamientos, A continuación, presentamos algunas de las respuestas.

Los estudiantes **E1, E3, E5** presentan argumentos desde el concepto de población, muestra y lo justifican

la población es el municipio del alto baudo por ser el lugar donde se realiza el estudio

Figura 5.5: respuesta de **E1, E3, E5** a la pregunta 1.b

**E2** y **E4** responden según la definición de población

basado en lo que aprendi sobre población que es un conjunto finito o infinito de personas u objetos la población seria el municipio del alto baudo

Figura 5.6: respuesta de **E2, E4**, a la pregunta 1.b

Los estudiantes **E1, E3, E5** responden a los cuestionamientos sin argumentación

El tamaño de la muestra es 70  
la muestra son 70 familias del Municipio del alto baudo

Figura 5.7: respuesta de **E1, E3, E5** a las preguntas 1.b.i y 1.b.i.i

**E2** y **E4** responden y argumentan

el tamaño de la muestra es 70 y la muestra son 70 familias ~~(y por parte de la población)~~ pues la muestra es una parte o porción de la población

Figura 5.8: respuesta de E2, E4 a las preguntas 1.b.i y 1.b.ii

**Pregunta 2.**

El objetivo de esta pregunta es diagnosticar en los estudiantes el tipo de construcción mental referente al aspecto tabular. Las preguntas 2.a.i y 2.a.ii están relacionadas con la construcción proceso 3 y 5.

**Pregunta 2.a.i**

Los estudiantes E1, E3, E5 responden correctamente la pregunta 2.a, i es decir completan la tabla que corresponde al conteo donde se muestra como utilizaron diferentes marcas para poder registrar la información en una tabla.

#	conteo	
15	□ □	10
16	□ □ □ □ □	20
17	□ □	10
18	□ □	9
19	1	1
$\Sigma$	$\Sigma$	50

Los estudiantes E2, E4, responden correctamente la pregunta 2.a, i es decir completan la tabla que corresponde a al conteo sin la necesidad de hacer marcas

X?		conteo
15	□ □	10
16	□ □ □ □ □	20
17	□ □	10
18	□ □	9
19	1	1
$\Sigma$	$\Sigma$	50

Figura 5.10: respuesta de E2, E4, a la pregunta 2.a, i

Lo anterior evidencia que estos estudiantes tienen los elementos para construir el proceso (3)

**Pregunta 2.a.ii**

En esta pregunta los estudiantes son sometidos a una situación relacionada con el aspecto geométrico de las tablas de frecuencia. En la primera pregunta 2.a, i se le presentan datos los cuales él debe tabular y hacer su conteo, en donde puede recurrir a diversas formas de marcado de los datos y estructuras para el conteo y, basado en los datos obtenidos del deben construir la tabla de frecuencia.

$x_i$	$E_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i\%$
75	70	70	$\frac{70}{50} = 0,2$	$0,2 \times 100\% = 20\%$
76	20	30	$\frac{20}{50} = 0,4$	$0,4 \times 100\% = 40\%$
77	70	40	$\frac{70}{50} = 0,2$	$0,2 \times 100\% = 20\%$
78	9	49	$\frac{9}{50} = 0,18$	$0,18 \times 100\% = 18\%$
79	1	50	$\frac{1}{50} = 0,02$	$0,02 \times 100\% = 2\%$
$\Sigma$	50	—	7	100%

Figura 5.11: respuesta de E1, E2, y E5 a la pregunta 2.a.i.i estos estudiantes tuvieron respuestas similares en cuanto a la construcción de la tabla de frecuencia logrando evidenciar que tienen los mecanismos para la construcción del proceso 5

$x_i$	$E_i$	$F_i$	$h_i$
75	70	70	$\frac{70}{50} = 0,2$
76	20	30	$\frac{20}{50} = 0,4$
77	70	40	$\frac{70}{50} = 0,2$
78	9	49	$\frac{9}{50} = 0,18$
79	1	50	$\frac{1}{50} = 0,02$
$\Sigma$	50	—	7

Figura 5.12: respuesta de E3, y E4 estos estudiantes a pesar de tener ciertas herramientas para la construcción del proceso 5 se les nota cierta dificultad para sacar la frecuencia porcentual.

Pregunta 2.b Y 2.b.i)

Esta pregunta es fundamental en el cuestionario, porque apunta directamente a una de las anomalías detectadas, y que dieron origen a esta investigación. Por medio de ésta, se pretende establecer qué concepción tienen los estudiantes sobre la construcción y análisis de gráficos estadísticos (de barra), a partir de una situación dada.

Los estudiantes **E1, E2, E3, E4, E5**, evidencian la construcción de este objeto, pues sus respuestas tanto para **2.b** como **2.b.i** son acertadas, es decir establecen la relación variable y frecuencia, Según las conclusiones (**2.b.i**) y como todos los estudiantes del caso responden correctamente a la pregunta **2.b**, de construir la grafica

### Pregunta 2.b Y 2.b.i

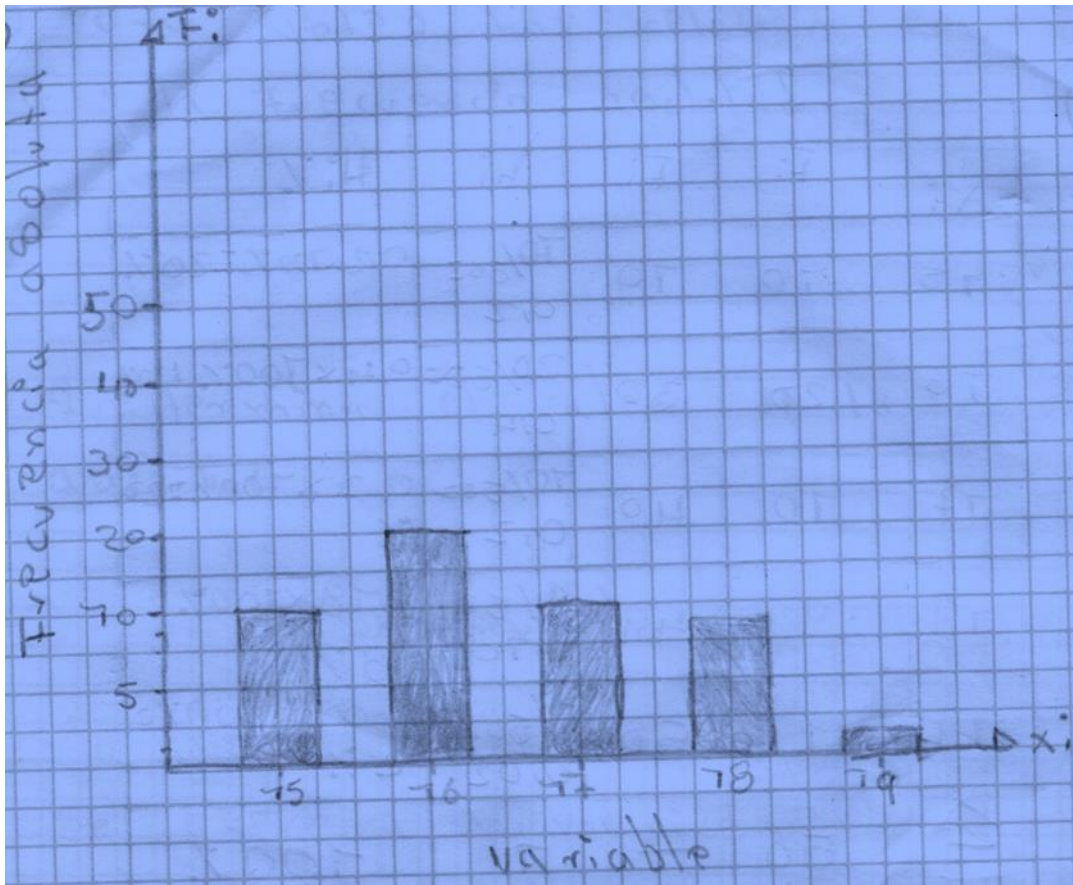


Figura 5.13: respuesta de Los estudiantes **E1, E2, E3, y E4** a la pregunta 2.b esto evidencia que los estudiantes tienen una concepción objeto, para construir el grafico de barra.

conclusiones  
 El grafico puedo observar que  
 solo un estudiante tiene 19 años  
 que hay mas estudiantes de 16 que de  
 15 pues es la barra mas alta

Figura 5.14: respuesta de Los estudiantes **E1**, **E2**, **E3**, y **E4** a la pregunta 2.b.i sus respuestas fueron muy similares y en forma oral cuando se socializo el cuestionario hubo muchos más aportes frente a este análisis

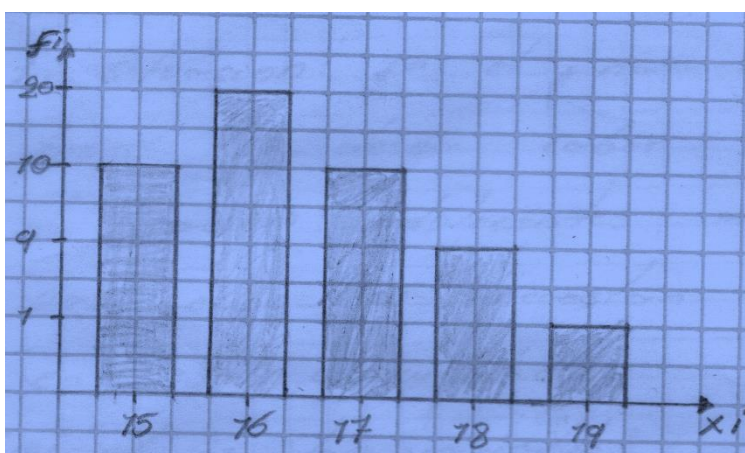


Figura 5.15: respuesta de **E5** a la pregunta 2.b que es un poco diferente al grafico presentado por **E1**, **E2**, **E3**, **E4**, ya que este suprime el nombre de variable y frecuencia pues para él no es necesario si las tiene representadas por  $X_i$ (variable) y  $F_i$  (frecuencia) igual tiene concepción objeto

En el grafico 15 x 17 tienen  
 los mismos 10 estudiantes

Figura 5.16: respuesta de **E5** a la pregunta 2.b.i el cual hizo más aportes, pero el que más se entendía era este, claro que oral mente fue muy precisa en sus respuestas

**TABLA 5.1: RESUMEN CASO 1**

Estudiantes Cuestionario	CONSTRUCCIONES MENTALES EVIDENCIADAS POR LOS ESTUDIANTES				
	E1	E2	E3	E4	E5
P1.a.i	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)
P1.a.ii	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)	Concepción acción (2)
P1.b.i	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)
P1.b.ii	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)	Concepción acción (1)
P2.a.i	interioriza acción (1) en Proceso (3)	interioriza acción (1) en Proceso (3)	interioriza acción (1) en Proceso (3)	interioriza acción (1) en Proceso (3)	interioriza acción (1) en Proceso (3)
P2.a.ii	Coordina procesos (3) y (4) en Proceso (5)	Coordina procesos (3) y (4) en Proceso (5)	Coordina procesos (3) y (4) en Proceso (5)	Coordina procesos (3) y (4) en Proceso (5)	Coordina procesos (3) y (4) en Proceso (5)
P2.b.	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)
P2.b.i	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)	Encapsula Proceso (5) en Objeto (6)

# CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

## 6.1 Conclusiones en base a la DG

Del análisis de los datos evidenciamos que las construcciones mentales expuestas en la Descomposición Genética hipotética son viables, es decir fueron evidenciadas por los estudiantes en cada caso estudiado, Pese a evidenciar la construcción en cada AHE (aspecto histórico epistemológico), los datos indican que no existe una dificultad para coordinarlos, y además que existen construcciones que se evidencian en un aspecto, y la misma construcción se evidencia en otro aspecto.

Además se puede concluir que el aspecto predominante es el aritmético en cuanto a la recolección y el conteo de los datos para la tabulación, los estudiantes llegan a la construcción de tablas de frecuencia, estableciendo relaciones entre la concepción geométrica y aritmética, logrando con ello la asimilación del Objeto gráficos estadísticos (de barra) de tal manera es relacionado con otros procesos, pues según nuestra DG, el objeto gráficos estadísticos (de barra) es una construcción previa necesaria para llegar a construir el objeto construcción y análisis de los gráficos de barra.

En cuanto a las construcciones mentales que se pueden agregar para refinar nuestra DG, se puede mostrar un proceso que indique la tabulación, con el fin de que el estudiante tenga clara las condiciones necesarias para la construcción de una tabla de frecuencia. Finalmente, los datos evidenciaron la eficacia de nuestra DG, y en esta se presentan los AHE, y cada uno de estos aspectos muestra una colección de acciones, procesos y objetos, e incluso otros esquemas implícitos, lo que da fuerza a considerar como un esquema a cada uno de estos AHE (aspecto histórico epistemológico), pensando esto como esa estructura coherente que expone la teoría APOE. En base a lo anterior, La importancia de la noción de esquema en el análisis y construcción de gráficos de estadísticos (de barra), viene dada por el desenvolvimiento del concepto en AHE y cómo los estudiantes interactúan para tematizar el análisis y construcción de gráficos de estadísticos (de barra), concepto que engloba todo el trabajo previo, es decir, si un estudiante ha logrado tematizar el análisis y construcción de gráficos estadísticos (de barra), quiere decir que comprende totalmente el objeto.

## Conclusiones en relación a la pregunta de investigación

Los datos recogidos y analizados nos entregaron evidencias acerca del análisis y construcción de gráficos de estadísticos (de barra), las formas de construir los gráficos de barra se enfocaron en un aspecto aritmético, lo que nos dio indicios, que los estudiantes al tener bien construidas las estructuras previas necesarias, construyen muchas de las estructuras mentales (acción, proceso y objetos), en el caso del análisis y construcción de gráficos estadísticos (de barra), se vieron resultados muy similares, pues los estudiantes evidenciaban la misma construcción mental en distintos aspectos.

El ciclo de investigación de la teoría APOE se puede repetir en reiteradas ocasiones, Esto llevara a que cada vez se puedan especificar de mejor manera las construcciones y mecanismos mentales necesarios para analizar y construir gráficos de barra, este ciclo se lleva a cabo utilizando la componente del diseño e implementación de la enseñanza, es decir el ciclo ACE, mediante el diseño de actividades de aula que permitan evidenciar la viabilidad de la DG.

De acuerdo con la noción de esquema, y el analizar a que esquema recurre un estudiante al enfrentarse a una situación, se concluyó que con los datos obtenidos los estudiantes



podieron llegar a validar la concepción proceso de nuestra DG, en ella se presentan los AHE, y cada uno de estos aspectos muestra una colección de acciones, procesos y objetos que dan cuenta que las construcciones mentales expuestas en la Descomposición Genética hipotética son viables, es decir fueron evidenciadas por los estudiantes en las dos situaciones estudiadas, enfatizamos que, en la mayoría de las construcciones y análisis de los gráficos (de barra) que construyeron los estudiantes, tienen elementos que obedecen a la definición formal de los conceptos: frecuencia, variable, puntos, segmentos, Perpendicularidad, paralelismo, y plano cartesiano, entre otros. También se observó que, al detallar los gráficos construidos por los estudiantes y sus respectivos análisis, La mayoría de estos (los estudiantes) mostraban evidencias de la comprensión estructural de los conceptos (proporcionalidad y plano cartesiano).

Lo descrito en el párrafo anterior, se ve reflejado en las construcciones que establecen los estudiantes en el plano cartesiano y la relación que guarda la variable con la frecuencia al graficarlas. En relación a la situación 2, evidenciamos que los estudiantes que comprenden el plano como un lugar geométrico, presentan mayores posibilidades de alcanzar la construcción y análisis profundo del concepto de gráficos estadísticos (de barra).

En conclusión, queremos resaltar que las evidencias con fundamento teórico, proporcionadas por los resultados de la investigación, contribuyen al desarrollo de la teoría APOE. Además, La importancia de la investigación en cuanto a la noción de esquema en la construcción y análisis de gráficos estadísticos (de barra), viene dada por el desarrollo del concepto en su AHE y cómo interactúan para llegar a la tematización, es decir, si un estudiante ha logrado tematizar la construcción y el análisis de los gráficos estadísticos (de barra), quiere decir que comprende completamente el objeto.

Los objetivos específicos se abordan a lo largo de la investigación desde el inicio con la caracterización de las estructuras y mecanismos mentales que se evidencian en el proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis y construcción de gráficos estadísticos (de barra), siendo el insumo para el diseño de la Descomposición Genética del análisis y construcción de gráficos estadísticos, que fundamenta la Unidad Didáctica, ratificando la importancia del reconocimiento de las estructuras y mecanismos mentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, contextualizando las prácticas de aula en actividades que propician las competencias matemáticas.

La DG validada por medio de los datos obtenidos en el cuestionario y en el recorrido histórico epistemológico del análisis y construcción de gráficos estadísticos (de barra). permite vislumbrar la manera cómo se desarrolla mentalmente el concepto del análisis y construcción de gráficos estadísticos (de barra) en un estudiante.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, P. (2009). Análisis de Gráficos Estadísticos Elaborados en un Proyecto de Análisis de Datos. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Granada.

Arnon, I. Cottrill, J. Dubinsky, E. Martínez, O. Roa, D. Trigueros, M. y Weller, K. (2014) Teoría APOE: Un marco para la investigación y el plan de estudios. Desarrollo en materia de enseñanza de la matemática. Ed. Springer Science+Business Media Nueva York.

(Arteaga, P; Batanero, C; Cañadas, G; y Contreras, M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *Números*, 76, 55-67.)

Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95-120). Universidad de Alicante.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dos siglos de gráficos estadísticos Recuperado octubre 20 de 2016 [http://www.ine.es/expo\\_graficos2010/expogra\\_inicio.htm](http://www.ine.es/expo_graficos2010/expogra_inicio.htm)

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics, in L. P. Steffe (ed.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, New York: Springer-Verlag. pp. 160-220.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2(2)

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*, Bogotá: Magisterio.

MEN (2006) *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Roa, S. (2009). Construcción de una descomposición genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 13 (1)

Romero Villafranca, Rafael y Zúñica Ramajo, Luisa Rosa. (2005) Métodos estadísticos en ingeniería. Recuperado octubre 20 de 2016 de <http://www.gestiopolis.com/historia-de-la-estadistica/>

Roa-Fuentes, S. y **Oktaç, A.** (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199 – 232.

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias*. Barcelona: Marfil.

Stake, R. (2010). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid: Morata.

Trigueros M. y Oktaç, A. (2005). La Thèorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume 10, 157-176.

Vásquez, C. Parraguez, M. (2014). Construcciones Mentales para el Aprendizaje del Concepto de Probabilidad: Un Estudio de Caso. *Revista Educación Matemática*. 26 (3), 37-74.

# ANEXO 1

## CUESTIONARIO:

### Construcción y análisis de gráficos estadísticos

Nombre: \_\_\_\_\_ grado \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** El presente cuestionario está relacionado con la construcción y análisis de gráficos estadísticos (barra), los cuales se han venido abordando de manera progresiva en el área de matemática.

Teniendo en cuenta los conceptos aprendidos, en las situaciones presentadas a continuación Responde en forma clara, a cada uno de los interrogantes

#### Situación 1

3. En el municipio del alto Baudó se realizó un estudio sobre el número de hijos por familia escogiendo para el estudio a 70 familias del mismo entorno
  - c. Considerando lo anterior:
    - iii. ¿Qué tipo de variable es la presentada en la situación anterior?
    - iv. ¿Cuál será el carácter estadístico o variable de la información suministrada?
  - d. Identifique la población.
    - iii. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?
    - iv. Según la situación dada la muestra está representada por \_\_\_\_\_

#### Situación 2

4. Se desea saber las edades de los estudiantes de los grados 11A, 11B, 11C, de la Institución Educativa Antonio Angles, para ello se les pregunta a 50 estudiantes que cursan grado 11° y los resultados fueron:  
  
16,17,19,16,18,17,16,18,16,16,15,16,15,17,17,15,16,18,17,15,16,18,16,16,16,17,  
18,15,16,17,16,17,16,18,18,16,16,17,15,18,15,16,16,15,15,18,16,16,15,17.
  - c. De la anterior situación determine la variable y el tipo de variable.

- iii. Haz el conteo de los datos y tabula los datos
  - iv. representa la información en una tabla de frecuencia
- d. Construye el grafico de barra para la frecuencia absoluta.
- ii. Haga un análisis del gráfico construido.

En estos anexos estará incluido la UNIDAD DIDÁTICA que ustedes presentaran al final del trabajo de investigación, al igual que las evidencias tomadas en el transcurso de la investigación

## ANEXO 2