



UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA TRIGONOMETRÍA, EN ALGUNOS LIBROS
DE TEXTO, PARA EL GRADO ESCOLAR DÉCIMO.

AUTOR: LUIS GONZALO MUÑOZ HERNÁNDEZ

TRABAJO ESPECIAL DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MEDELLÍN, DICIEMBRE 2013

EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA TRIGONOMETRÍA, EN ALGUNOS LIBROS
DE TEXTO, PARA EL GRADO ESCOLAR DÉCIMO .

AUTOR: LUIS GONZALO MUÑOZ HERNÁNDEZ

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRIGIDO POR
Prof. JAVIER SANTOS SUÁREZ ALFONZO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MEDELLÍN, DICIEMBRE 2013

A Laura, Andrés Felipe y

Juan Pablo

AGRADECIMIENTOS

En el camino recorrido en busca de alcanzar y mejorar mi formación profesional e integral he vivido muchas experiencias y compartido con todo tipo de personas, todas ellas me han aportado enseñanzas y facilitado el aprendizaje, por eso deseo expresarles mi más profundo agradecimiento a todos aquellos que de una forma u otra han contribuido a mi crecimiento personal, pero les agradezco especialmente en su orden:

A Dios Padre Celestial que me lo ha dado todo, especialmente la vida, la salud y una bonita familia para compartirlo y ser feliz.

Al doctor Javier Santos Suárez Alfonzo quien asumió la dirección de este proyecto y con su trabajo y colaboración, iluminó y fortaleció en mí la capacidad de hacer un buen instrumento.

A la Universidad de Medellín (U de M), por brindarme la oportunidad de trabajar, estudiar y seguir creciendo en ella.

A mis maestros José Alberto Rúa y Jorge Alberto Bedoya por todas sus enseñanzas, al doctor Jhony Alexander Villa por haberme acompañado en gran parte de este proyecto, y muy especialmente al profesor Rafael Ángel Álvarez por sus consejos y el apoyo especial y desinteresado en mi cualificación como docente.

A los profesores Diana Guzmán y Horacio Fernández de la facultad de ingeniería financiera de la Universidad de Medellín, y en general, a todos aquellos y aquellas que siempre me animaron a seguir con el proyecto de la maestría.

A mi mamá por su preocupación y apoyo incondicional, a mi esposa Laura y a nuestros hijos Andrés Felipe y Juan Pablo, por su paciencia, colaboración, comprensión y acompañamiento en todo este proceso.

INDICE GENERAL

	Pág.
CAPÍTULO 1	14
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
1.1 La Tecnología y el Currículo de Matemáticas	14
1.2 La Tecnología y la Trigonometría Según el MEN	21
1.2.1 Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Colombia. 1998)	22
1.2.1.1 El Pensamiento Numérico	22
1.2.1.2 El Pensamiento Espacial	22
1.2.1.3 El Pensamiento Aleatorio	23
1.2.1.4 El Pensamiento Métrico	23
1.2.1.5 El Pensamiento Variacional	23
1.2.2 Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006)	23
1.3 El Libro de Texto de Matemática ¿Por qué estudiarlo?	24
1.4 Planteamiento del Problema de Investigación	25
1.5 Objetivo	26
1.5.1 General	26
1.5.2 Específicos	26
1.6 Pregunta de Investigación	26
CAPÍTULO 2	27
2. REFERENTES TEÓRICOS	27
2.1 Seres Humanos-con-Medios en la Producción de Conocimiento Matemático	29
2.1.1 La Noción de Medios	29
2.2 Fundamentos Epistemológicos de Seres Humanos-con-Medios	33
2.3 La Producción de Conocimiento en Relación con los Medios	39
CAPÍTULO 3	41
3. METODOLOGÍA DEL TRABAJO REALIZADO	41

3.1	Enfoque de la Investigación	41
3.2	Método de la Investigación	42
3.2.1	Los Datos	43
3.2.2	El Contexto de los Datos	43
3.2.3	El Conocimiento del Investigador	43
3.2.4	El Objetivo	43
3.2.5	La Inferencia	44
3.2.6	La Validez	44
3.3	La Pertinencia	44
3.3.1	El Proyecto	44
3.3.1.1	Aplicación del Marco de Referencia	45
3.3.1.2	Búsqueda de los Datos Adecuados	46
3.3.1.3	Búsqueda del Conocimiento Contextual	48
3.3.1.4	Desarrollo de Planes para Determinar las Unidades y el Registro	49
3.3.1.4.1	Determinar las Unidades de Contexto	50
3.3.1.4.2	Definir las Unidades de Registro	50
3.3.1.4.3	Establecer las Categorías de Análisis	50
3.3.1.4.4	Determinar las Unidades Sintácticas	51
3.3.1.5	Desarrollo de Instrucciones de Codificación	51
3.3.1.6	Búsqueda de Procedimientos de Análisis Justificados Según el Contexto	52
3.3.1.7	Establecimiento de las Normas de Calidad	52
3.3.2	La Ejecución	53
3.3.3	El Informe	53
CAPÍTULO 4		54
4.	RESULTADOS	54
4.1	LIBROS DE TEXTOS REFERENTES	56
4.1.1	Algebra y Trigonometría	56
4.1.2	Matemática Experimental 10	60
4.1.3	Matemáticas Previas al Cálculo	66

4.1.4	Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica	69
4.1.5	Matemáticas Básicas Con aplicaciones a las Ciencias Económicas y Afines	73
4.1.6	Hipertexto Matemáticas 10	76
4.2	LIBROS DE TEXTO DE LA BASE DE DATOS COLOMBIA APRENDE	80
4.2.1	Conexiones Matemáticas 10	81
4.2.2	Nuevas Matemáticas 10	85
4.2.3	Fórmula 10	88
4.2.4	Misión Matemática 10	92
4.2.5	Código Matemáticas 10	95
4.2.6	Los Caminos del Saber Matemáticas 10	99
	CONCLUSIONES	105
	REFLEXIONES FINALES	107
	APORTES DEL TRABAJO	110
	BIBLIOGRAFÍA	111
	WEBSITE	114

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla N°1. Algunas Investigaciones Sobre la Trigonometría y su Comprensión.	18
Tabla N° 3.1 Ficha Técnica de los Libros de Texto Analizados	48
Tabla N°4.1 Ficha Técnica de los Libros de Texto de Referencia	55
Tabla N°4.1.1 Contenido Trigonométrico de Algebra y Trigonometría	57
Tabla N°4.1.2 Contenido Trigonométrico Matemática Experimental 10	61
Tabla N°4.1.3 Contenido Trigonométrico Matemáticas Previas al Cálculo	67
Tabla N°4.1.4 Contenido Trigonométrico Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica	71
Tabla N°4.1.5 Contenido Trigonométrico Matemáticas Básicas	74
Tabla N°4.1.6 Contenido Trigonométrico Hipertexto Matemáticas 10	77
Tabla N°4.2 Ficha Técnica de los Libros de Texto de la Base de Datos Colombia Aprende	80
Tabla N°4.2.1 Uso de los Pensamientos Matemáticos en Conexiones Matemáticas 10	81
Tabla N°4.2.2 Contenido Trigonométrico Conexiones Matemáticas 10	84
Tabla N°4.2.3 Contenido Trigonométrico Nuevas Matemáticas 10	87
Tabla N°4.2.4 Contenido Trigonométrico Fórmula 10	91
Tabla N°4.2.5 Contenido Trigonométrico Misión Matemática 10	94
Tabla N°4.2.6 Contenido Trigonométrico Código Matemáticas 10	98
Tabla N°4.2.7 Contenido Trigonométrico Los Caminos del Saber Matemáticas 10	102
Tabla N°4.3 Uso de Herramientas Tecnológicas en los Libros de Texto Analizados	104
Tabla N°4.4 Modelo de Ficha Técnica	110

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3.1 Página del Portal Colombia Aprende	46
Figura 4.1 Conversión de Unidades	58
Figura 4.2 Uso de la Calculadora en el Sistema Sexagesimal	59
Figura 4.3 Resolución de Ecuación Trigonométrica	59
Figura 4.4 Preparación Pruebas ICFES	62
Figura 4.5 Programa para Factorizar Polinomios	63
Figura 4.6 Manejo de la Calculadora	63
Figura 4.7 Aplicación LAL en Resolución de Triángulos	64
Figura 4.8 El Caso Ambiguo ALL en Resolución de Triángulos	64
Figura 4.9 Aplicaciones, Conversiones y Operaciones con Ángulos	68
Figura 4.10 Actividad de Cofunciones Trigonométricas	68
Figura 4.11 Actividad Propuesta con Calculadora Graficadora	69
Figura 4.12 Verificación de Identidades con Calculadora Graficadora	70
Figura 4.13 Uso de la Calculadora en Ecuaciones Trigonométricas	70
Figura 4.14 Aplicaciones de la Ley del Coseno	72
Figura 4.15 Uso del Programa Matlab	75
Figura 4.16 Solución de Ecuaciones Trigonométricas en Matlab	75
Figura 4.17 Uso de la Calculadora	76
Figura 4.18 Actividades con Ayuda de la Calculadora	78
Figura 4.19 Prueba de Razonamiento sin Usar Transportador	79
Figura 4.20 Uso de Excel para Graficar Funciones Trigonométricas Inversas	83
Figura 4.21 La Trigonometría en Medicina	85
Figura 4.22 La Trigonometría en la Música	86
Figura 4.23 Uso de la Calculadora Científica	86
Figura 4.24 El Transportador y el Compás, Tecnología Clásica	88
Figura 4.25 Algunos Usos de la Calculadora Científica	89
Figura 4.26 Área del Triángulo en Excel	89

Figura 4.27 Actividades Prueba PISA	90
Figura 4.28 Actividades Prueba ICFES y Prueba TIMSS	90
Figura 4.29 La Calculadora para Hallar el Valor de un Ángulo	92
Figura 4.30 Manejo del Software Winplot	93
Figura 4.31 Trazado de Gráficas con Winplot	93
Figura 4.32 Cálculo de Razones Trigonómicas con Calculadora	95
Figura 4.33 Operaciones con Polinomios con el Programa WIRIS	96
Figura 4.34 Resolución de Ecuaciones con el Programa Derive	96
Figura 4.35 Resolución de Sistemas con Derive 5	97
Figura 4.36 Manejo del Skethpad en la Trigonometría	97
Figura 4.37 Gráfica del Seno con el Programa Geométra	97
Figura 4.38 Cálculo de Algunas Funciones Trigonómicas	99
Figura 4.39 Actividades Sobre Ecuaciones Trigonómicas	99
Figura 4.40 Uso del Programa Microsoft Mathematics	100
Figura 4.41 Resolución de Triángulos con el Programa Microsoft	100
Figura 4.42 Suma de Ángulos con Microsoft	100
Figura 4.43 Solución de Ecuaciones Trigonómicas con Wolframalpha	100
Figura 4.44 La Circunferencia Unitaria con Geogebra	101
Figura 4.45 Construcción de la Gráfica de la Función Seno con Geogebra	101
Figura 4.46 Manejo del Programa Graph	101
Figura 4.47 Algunas Actividades con el Programa Graph	101
Figura 4.48 Mapa Conceptual Temas Trigonómicos en los Libros Analizados	103

**USE OF TECHNOLOGY IN TRIGONOMETRY, IN SOME TEXTBOOKS, FOR
TENTH GRADE SCHOOL.**

ABSTRACT

This work is the result of the analysis on the content of a sample of six (6) math textbooks tenth grade, taken at random from the math library Colombia Learn page, in order to identify the presence and type of uses that they make some technological tools especially chapters or units where they addressed issues trigonometric concepts and also to check the content of these textbooks if it meets the needs of teachers and students and help them improve their teaching and learning level, and therefore, if they comply with the recommendations made by the Ministry of National Education (MEN).

**EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA TRIGONOMETRÍA, EN ALGUNOS
LIBROS DE TEXTO, PARA EL GRADO ESCOLAR DÉCIMO.**

RESUMEN

Este trabajo es producto del análisis sobre el contenido de una muestra compuesta por seis (6) libros de texto de matemáticas del grado décimo, tomada aleatoriamente de la librería de matemáticas de la página Colombia Aprende, con el fin de identificar la presencia y el tipo de usos que en ellos se hacen de algunas herramientas tecnológicas especialmente en los capítulos o unidades donde ellos abordan los conceptos y temas trigonométricos, además para verificar si el contenido de dichos libros de texto si satisface las necesidades de docentes y estudiantes y les ayudan a mejorar sus procesos de enseñanza y nivel de aprendizaje, y por lo tanto, si cumplen con las recomendaciones hechas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

INTRODUCCIÓN

En este proyecto se analiza el uso de la tecnología en algunos libros de texto de matemáticas 10, especialmente en el contenido de las temáticas de la trigonometría, y sabiendo que en todo currículo el libro o texto guía juega un papel importante en la construcción del conocimiento, se quiere investigar si en la muestra tomada el estudio responde positivamente a los siguientes interrogantes:

¿Qué usos se hacen de las tecnologías en estos textos en relación con el desarrollo del pensamiento matemático?

¿Contribuyen las TIC al fortalecimiento de los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría?

¿Sigue siendo relevante la participación del docente en el proceso didáctico a pesar de los nuevos artefactos que van surgiendo y son usados en matemáticas?

Además se realiza el análisis de los libros de texto conociendo algunas ventajas que ofrece la tecnología tales como: brindar a sus usuarios, tanto docentes como estudiantes la posibilidad de trabajar con los objetos matemáticos en diferentes representaciones, dinamizando los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, economizando tiempo en procesos algorítmicos y de cálculo, ampliando su capacidad de análisis cuando les ofrece la oportunidad de transformar un problema en otro, es decir, el uso de las herramientas tecnológicas puede permitir que los individuos comprendan y se apropien mejor de los conceptos matemáticos, luego las TIC contribuyen a mejorar los métodos de enseñanza, por lo tanto, es necesaria la actualización y cualificación docente en el manejo de las nuevas herramientas tecnológicas para ir las incorporando al interior de las aulas y utilizándolas como el medio que les facilite a los alumnos una mejor adquisición de las temáticas trabajadas.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. En el primero se realiza el planteamiento del problema que motivó al estudio realizado, allí se dan argumentos que permiten dimensionar y contextualizar la enseñanza de la trigonometría partiendo de los Lineamientos

Curriculares Colombia 1998 y los Estándares Básicos de Competencias Colombia 2006, y la forma como lo presentan algunos libros de textos de Matemáticas 10, siguiendo las recomendaciones hechas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, para ello se escogió una muestra representativa de la base de datos del portal Colombia Aprende. Así mismo se plantearon los objetivos generales, específicos y la pregunta de investigación que orientan el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo se establecieron los referentes teóricos, los cuales están directamente relacionados con los denominados “Seres Humanos con Medios”, allí se plantearon los fundamentos epistemológicos de esta filosofía y la forma en cómo se relaciona la tecnología y la producción del conocimiento, para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, particularmente en el tema de la Trigonometría.

En el tercer capítulo se explica la metodología utilizada en este trabajo, la cual está fundamentada desde el análisis de contenido realizado a los libros de textos que hacen parte de la muestra seleccionada. Para ello se realiza un recorrido por la técnica del análisis de texto, apoyado en el trabajo sobre el tema que realiza Krippendorff (1990).

En el cuarto capítulo se presenta la forma en que se realizó el análisis de contenido, a la muestra de libros de textos seleccionada. Además de manera ilustrativa se tomaron algunos fragmentos extraídos de los libros de textos analizados, que permiten avalar las explicaciones y el análisis realizado a los mismos.

Finalmente se presentan las conclusiones y reflexiones que surgieron como producto del desarrollo y culminación de este trabajo, adicionalmente se presenta un instrumento para el análisis de contenido, que sirve como orientación a trabajos futuros que se puedan desarrollar desde esta perspectiva.

1.4 Planteamiento del Problema de Investigación

Está fundamentado en la búsqueda e identificación de los usos que se hacen de la tecnología en algunos libros de texto del grado décimo en el campo de la trigonometría y la coherencia de dichos textos matemáticos con lo estipulado por el MEN, tanto desde los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) como desde los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006). Esta investigación se hizo porque al interior de la Educación Matemática se ha puesto en evidencia la importancia de analizar la relevancia del uso de la tecnología en los libros de texto del grado décimo, estos son a grandes rasgos el compendio de las actividades que se generan y se propician en el aula.

Se ha observado que uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planificar sus intervenciones en el aula son los libros de texto; debido a esta situación, se considera que éstos son asumidos como un elemento básico dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dado que orientan y encauzan muchas de las actividades desarrolladas por el estudiante. A causa de ello, desde la didáctica de las matemáticas se ha reflexionado bastante en estudiar los aportes que los libros de texto han tenido en la historia de la Educación Matemática, analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia que estos tienen en el aula y cómo la práctica educativa está determinada por estos manuales dejando huellas como objeto de estudio.

1.5 Objetivo

1.5.1 General

Identificar la presencia y la variedad de usos que se hace de la tecnología en algunos libros de texto de décimo grado, en el contenido de los capítulos o unidades donde se abordan los conceptos y temas trigonométricos.

1.5.2 Específicos

1. Analizar si las Tecnologías de la Información de la Comunicación (TIC), contribuyen al fortalecimiento de los procesos del aprendizaje y la enseñanza de la trigonometría, tanto dentro como fuera del aula.
2. Establecer la relevancia sobre la participación del docente en el proceso didáctico a medida que se van produciendo y perfeccionando nuevos artefactos para el uso de las matemáticas.

1.6 Pregunta de Investigación

¿Qué usos se hacen de las herramientas tecnológicas en los libros de texto de matemáticas del grado décimo, en relación con el desarrollo del pensamiento matemático en la trigonometría?

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación centra su interés en la revisión y observación del contenido de algunos libros de texto de matemáticas del décimo grado, con la necesidad de identificar la variedad de los medios tecnológicos utilizados como herramientas durante los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en la matemática 10, así como en el uso que de ellos se realiza o se hace en el aula y además se reconoció la coherencia de los usos y el desarrollo de la tecnología con las recomendaciones dirigidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a las instituciones educativas desde los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006), frente a los planteamientos teóricos presentados en dichos libros de texto.

En la revisión de la literatura consultada surgieron algunos antecedentes que se pueden clasificar en tres grupos, a saber: algunos investigadores matemáticos, algunos documentos del Ministerio de Educación Nacional (MEN), y algunos libros de texto de matemáticas; con miras a confirmar la existencia, la relación y el uso de la tecnología para mediar los procesos de la enseñanza y el aprendizaje en algunos campos de la trigonometría.

1.1 La Tecnología y el Currículo de Matemáticas

Según Vasco (2006) el Pensamiento Variacional va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra; en ese sentido, proporciona algunas ideas sobre lo que se puede entender por este tipo de pensamiento. Para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el Pensamiento Variacional, este autor establece algunas relaciones entre este pensamiento, la modelación y la tecnología, y puntualiza que muchos problemas matemáticos se pueden esquematizar en varios momentos por medio de la modelación si la tecnología existente lo posibilita y siempre que se tenga acceso a ella.

De acuerdo a los estudios de Blackett y Tall (1991) el aprendizaje de la trigonometría es versátil utilizando programas informáticos; para ello comparan dos grupos de estudiantes que tuvieron una educación diferente. El *grupo experimental* asistía a clases de trigonometría con la ayuda del computador, el cual les permitió explorar las relaciones numéricas y geométricas que se establecen en esta rama de las matemáticas; mientras que el *grupo control* concurría a estas clases utilizando los medios tradicionales (lápiz, papel, regla, transportador,...). Esta investigación produjo los siguientes resultados:

Los jóvenes que participaron en el *grupo experimental* mejoraron más su desempeño académico que aquellos que fueron formados en el *grupo control*, porque se considera que la utilización del computador en clase de trigonometría permite a los estudiantes manipular las imágenes y relacionarlas con un valor numérico, de tal manera, que mejora implícitamente la comprensión del concepto de proporción, y esto les sirve a ellos, para entender con facilidad las relaciones trigonométricas que se generan en el triángulo rectángulo y en la circunferencia trigonométrica.

De igual manera, en los estudios de Orhun (2001) se nota el interés y la preocupación por investigar las falencias que tienen los estudiantes cuando intentan usar la trigonometría para resolver un problema, identificando los errores conceptuales que cometen algunos jóvenes, puesto que esta rama de las matemáticas se caracteriza por ser un producto de técnicas algebraicas, realidades geométricas y relaciones trigonométricas que se reúnen para fortalecer a través del análisis y la interpretación, el desarrollo del pensamiento matemático.

En este orden de ideas, Orhun también considera que la enseñanza de la trigonometría en la Educación Media se limita a calcular sin ninguna suspicacia, el cociente entre las medidas de los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo, para obtener el número real llamado seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante; pero las angustias comienzan cuando los estudiantes que son objeto de estudio, se enfrentan a un problema que muestra la aplicación de esta rama de las matemáticas, porque allí se perciben ciertas dificultades en el hecho de no comprender la lectura del texto, lo que los conlleva a ser poco creativos en el diseño de una representación gráfica y así, poder hallar el valor

numérico con exactitud y sentido de la función trigonométrica que soluciona el problema planteado.

En las investigaciones de Weber (2005) se resalta que la trigonometría plana puede actuar de manera creativa en los estudiantes, porque se considera que es el punto de convergencia entre el razonamiento algebraico, geométrico y gráfico; para evidenciar su estudio seleccionó dos grupos, donde examinó la comprensión de los estudiantes en relación con las funciones trigonométricas.

El primer grupo recibió una instrucción estándar y fue dirigido por un docente que utilizaba la metodología magistral (uso de tiza y tablero), sus estudiantes desarrollaron una comprensión limitada de las funciones trigonométricas, porque les hacía falta entender el papel que juegan las figuras geométricas en el conocimiento de estas funciones, además tuvieron dificultades para operar la función seno. Debido a esta situación, el investigador sugirió cambiar este tipo de instrucción, porque no es suficiente para potenciar la comprensión de las funciones trigonométricas.

El segundo grupo fue orientado por un docente que empleó el paradigma de instrucción experimental, el cual está basado en las teorías actuales del aprendizaje (utilización de las TIC), sus estudiantes lograron demostrar una comprensión profunda de las funciones trigonométricas, porque fueron capaces de recordar y derivar sus propiedades, justificando paso a paso las características que las describen, a saber: la amplitud, el período, su dominio, rango y gráfica.

Posteriormente, Brown (2006) dice que muchos estudiantes tienen una comprensión incompleta o fragmentada de las tres maneras de ver las funciones seno y coseno. Para Brown (2006) muchos estudiantes las asumen como las coordenadas de un punto sobre la circunferencia trigonométrica; para este autor el factor que afecta la comprensión de estos conceptos se debe a la interpretación de los gráficos de las coordenadas, pues no tienen claridad si esta información hay que asumirla como geométrica o numérica combinada, lo

que implica no ver las coordenadas de un punto como números y longitudes dirigidas de los segmentos horizontales y verticales, que unidos conforman puntos de los ejes.

Brown dice que muchos estudiantes ven el Seno y el Coseno como las distancias horizontales y verticales que generan las gráficas de esas coordenadas, por lo tanto, la dificultad de estos estudiantes está en entender el seno y el coseno como coordenadas, lo que conlleva a la carencia de asociar los signos positivos o negativos de las coordenadas (x, y) .

Según Brown otros estudiantes observan el seno y el coseno como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, pero muchos no comprenden que los números racionales pueden ser representados como números y como cocientes, debido a que el seno y el coseno representan un número cuando se está describiendo su trayectoria ya sea como distancia o como coordenada, o como un cociente de dos números utilizando el triángulo rectángulo.

Los estudios de Moore (2010) parten de las investigaciones realizadas por Weber (2005) y Brown (2006) cuando expresan que los estudiantes tienen dificultades para construir comprensiones coherentes de la trigonometría, específicamente de las funciones trigonométricas, dado que en los planes de estudio del área de matemáticas presentan dos formas diferentes de abordar la trigonometría (una que hace referencia al uso de la circunferencia unitaria y la otra que hace alusión a la utilización del triángulo rectángulo) sin establecer ninguna relación entre ellas.

Según Moore, una posible solución a esta falta de coherencia, es implementar en las clases de trigonometría el uso de la tecnología, para ello, el docente se vale del diseño de unos applets dinámicos, los cuales intentan comprometer a los estudiantes en coordinar y debatir con argumentos como varían las medidas de los ángulos, con el propósito de prepararlos para afrontar más adelante las funciones trigonométricas y por consiguiente el uso de los applets en clase de trigonometría puede permitir que los estudiantes mejoren la oportunidad de reflexionar sobre sus conjeturas en relación con los valores y el movimiento generado en las construcciones, además, esta práctica puede posibilitar que algunos jóvenes comprendan

que la medida en radianes de un ángulo también puede definirse como el cociente entre la longitud de arco y la correspondiente longitud de un radio.

INVESTIGADORES	AÑO	OBJETO DE ESTUDIO	CONCLUSIÓN
BLACKETT y TALL	1991	El aprendizaje de la trigonometría utilizando programas informáticos.	El uso del computador en clase de trigonometría les permite a los estudiantes mejorar la comprensión del concepto de proporción.
ORHUN	2001	Las falencias que poseen los estudiantes al usar la trigonometría para resolver problemas.	En la educación media la trigonometría se limita a calcular el cociente entre las medidas de los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.
WEBER	2005	Examinar la comprensión de los estudiantes en relación con las funciones trigonométricas.	Sugiere cambiar la instrucción estándar con la metodología magistral por la instrucción experimental basada en la utilización de las TIC.
BROWN	2006	La comprensión incompleta que tienen muchos estudiantes de las tres maneras de ver los conceptos del Seno y el Coseno.	La dificultad de muchos estudiantes está en entender el seno y el coseno como coordenadas, otros como las razones entre los lados del triángulo rectángulo, y muchos no comprenden que los números racionales pueden ser representados como números y como cocientes.
MOORE	2010	Las dificultades que tienen los estudiantes para construir comprensiones coherentes de las funciones trigonométricas.	Implementar en las clases de trigonometría el uso de la tecnología puede permitir que los estudiantes mejoren la oportunidad de reflexionar sobre sus conjeturas en relación con los valores y el movimiento generado en las construcciones.

Tabla N°1. Algunas Investigaciones Sobre la Trigonometría y su Comprensión.

Haciendo una observación de todas estas investigaciones se puede considerar que el uso de las TIC fortalecen el aprendizaje de la trigonometría, porque la tecnología posibilita en cierto modo el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, facilitando la comprensión conceptual de algunos tópicos de la trigonometría, debido a que el estudiante realiza una interacción constante entre las diferentes formas de representación (i.e. verbal, numérica, gráfica, algebraica y manipulativa) que son empleadas para su estudio.

Es importante considerar que la utilización de las TIC en clase de trigonometría actúan a través del uso de un software de geometría dinámica (SGD), con el propósito de proporcionar herramientas a los estudiantes para que ellos puedan construir y experimentar con objetos manipulables las relaciones geométricas que se producen entre algunos conceptos y propiedades de las razones y/o funciones trigonométricas.

Según Santos Trigo (2001) el uso de la tecnología en la modelación matemática es importantísimo y muy relevante, porque le brinda ayuda a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas, permitiéndoles establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas, porque en este contexto, los jóvenes tienen la oportunidad de mover partes de estas configuraciones y observar las invariantes que se producen en una construcción geométrica, por consiguiente, utilizando los diferentes Software de Geometría Dinámicos (SGD), el estudiante puede crear variaciones específicas y efímeras de sus propias imágenes visuales, las cuales son producto de la exploración y construcción de los conceptos matemáticos, caracterizadas por ser eficientes y dinámicas; sin embargo, ante la diversa variedad de SGD, se hace indispensable, no solo identificar los aspectos positivos que se generan en el estudiante durante la comprensión de los conceptos matemáticos, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que son presentadas formalmente por ellos, como resultado de emplear tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje.

Es bueno señalar que en las últimas décadas el adelanto tecnológico ha contribuido a mejorar y a enriquecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel mundial, porque en el aula el docente siente la necesidad de abrir espacios para que los estudiantes exploren, resuelvan y comuniquen los conceptos matemáticos ya adquiridos, los cuales están expuestos a través de múltiples representaciones, con el propósito de que ellos interactúen, reconstruyan y se apropien de este conocimiento, por lo tanto, lo apliquen en el momento que lo requieran.

Los libros de texto son utilizados en la educación como instrumentos de enseñanza y aprendizaje. Según Rezat (2011) en el aula son los maestros quienes deciden qué libros de

texto usar, cuándo, dónde y cuáles secciones del mismo usar, además el uso de los libros de texto permite y facilita a sus usuarios el aprendizaje por medio de algunas actividades que ellos presentan, a saber: la resolución de las tareas y los problemas, la práctica y ejercitación de los temas matemáticos, lo que promueve la adquisición de nuevos conocimientos.

Según Zhu y Fan (2004) la gran mayoría de la literatura sobre los libros de texto de matemáticas no está basada en métodos empíricos o métodos experimentales, por el contrario, se basa en la discusión, el intercambio de experiencias y la reflexión.

En los últimos decenios ha crecido el interés en la comunidad internacional por la investigación de los libros de texto escolares en matemáticas. Durante el mes de Julio de 2004 se celebró en Dinamarca el 10º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-10) el cual dedicó un Grupo de Discusión (DG 14) sobre los libros de texto el primero de su tipo en la historia del ICME.

En Shanghai, China en el mes de octubre de 2011 también se celebró otra importante conferencia internacional sobre los libros de texto de las matemáticas escolares, esta conferencia indica claramente el interés a nivel internacional que muestran los educadores matemáticos por mejorar la calidad del contenido de los libros de texto de las matemáticas escolares, sin embargo, parece que los libros de texto de las matemáticas como materia de estudio en el campo de la investigación en comparación con otros campos de la investigación en Educación Matemática está todavía en su etapa de desarrollo en una fase temprana, es decir, ha sido poco investigado, por lo tanto, es un área importante en la educación, la cual requiere de una pronta y mejor atención.

El objetivo final de toda investigación de carácter educativo es producir conocimientos nuevos que permitan mejorar la educación y beneficien a toda sociedad en general.

1.2 La Tecnología y la Trigonometría Según el MEN

La ley General de Educación 115 de 1994 determina que los centros educativos tienen autonomía para diseñar y desarrollar el currículo, esta misma ley establece que el Ministerio de Educación Nacional (MEN), se responsabiliza de establecer unos lineamientos curriculares generales que los centros deben seguir, también establece que los centros deben formular y registrar un Proyecto Educativo Institucional (PEI).

Se hizo una observación y lectura de algunos documentos del MEN, a saber, los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006), los cuales proporcionan orientaciones frente al currículo del área de matemáticas para que las instituciones educativas acojan críticamente las recomendaciones allí planteadas y mejoren, de alguna manera, los planes de estudio de esta área del conocimiento. En éstos se sugieren algunas formas de cómo es posible tratar en el aula los ejes temáticos que se deben abordar en trigonometría, creando la necesidad de hacer uso de las TIC que van desde la incorporación de la calculadora hasta el diseño e implementación de otras herramientas tecnológicas para facilitar así su comprensión, además se dan algunas indicaciones para que el docente pueda mejorar la forma de desarrollar en los estudiantes las competencias fundamentales del área de matemáticas, que se manifiestan mediante la utilización adecuada de los procesos generales de razonamiento, comunicación, modelación, planteamiento y resolución de problemas; lo cual permite valorar si el estudiante está en *“capacidad de dar significado, interpretar, comunicar, construir, argumentar, proponer y usar el conocimiento matemático en contextos diferentes y no simplemente si muestra destreza para operar y repetir procedimientos para hallar un resultado”* (Colombia, 2000, p. 12).

De acuerdo con lo establecido por el MEN se considera que la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría están vinculados propiamente al fortalecimiento adecuado de los conocimientos básicos (i.e. Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional), los cuales ayudan a desarrollar el pensamiento matemático a través de unos sistemas propios de las matemáticas, que se caracterizan a grandes rasgos por estar relacionados entre sí y, por

ende, actúan de forma conjunta e interdisciplinar, debido a que se complementan mutuamente buscando la formación integral del ser. Por esta razón, se estima que las matemáticas proporcionan al estudiante algunas herramientas que posibilitan la comprensión, explicación, análisis, interpretación y solución de situaciones problema que le plantea el entorno social en el cual se desenvuelve.

1.2.1 Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Colombia. 1998)

Son orientaciones o recomendaciones que hace el MEN a las instituciones educativas para que formulen y establezcan el currículo de matemáticas. Contiene tres **ideas** claves a saber: Los procesos generales (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos reales; comunicar; razonar; formular; comparar y ejercitar procedimientos algorítmicos), los cinco tipos de pensamiento matemático (Numérico, Espacial, Aleatorio, Métrico y Variacional) y las situaciones **problemáticas**.

1.2.1.1 El Pensamiento Numérico

Es aquel pensamiento que comprende los números y sus múltiples relaciones, se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que el usuario tiene la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos. Al Pensamiento Numérico lo soporta el sistema numérico, conformado por un conjunto de símbolos y reglas que permiten construir todos los números válidos.

1.2.1.2 El Pensamiento Espacial

Se define como el conjunto de las ideas y los conceptos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y diversas representaciones materiales, luego el Pensamiento Espacial necesariamente incluye al pensamiento visual y lo soporta el sistema geométrico y de medidas, el cual busca formalizar y potenciar el conocimiento intuitivo que tiene el

estudiante de su realidad espacio-temporal, este sistema le posibilita el desarrollo de destrezas y habilidades.

1.2.1.3 El Pensamiento Aleatorio

Actualmente la estadística aporta métodos para analizar datos, determinar relaciones entre variables, presentar informaciones, hacer predicciones y proporcionar criterios para la toma de decisiones, luego si el Pensamiento Aleatorio lo soportan los sistemas de datos, entonces el Pensamiento Estadístico hace énfasis en el análisis exploratorio de datos y sobre todo en los procesos de razonamiento estadístico.

1.2.1.4 El Pensamiento Métrico

Se añade la consideración sobre la exactitud de la medida, le proporciona a todos los usuarios las herramientas conceptuales y procedimentales para comprender críticamente el mundo que lo rodea, interactuar con él y modificarlo. El Pensamiento Métrico está soportado por el sistema de medidas, las representaciones, magnitudes, números, entre otros.

1.2.1.5 El Pensamiento Variacional

Ayuda a conocer y reconocer los procesos de cambio, el concepto de variable, el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio. El Pensamiento Variacional está soportado por los sistemas algebraicos y los sistemas analíticos.

1.2.2 Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006)

Se supone que los estándares son un medio para desarrollar las competencias, ellos se organizan por tipos de pensamiento matemático pretendiendo aportar a mejorar los niveles de competencia matemática de los estudiantes, es decir, los Estándares Básicos de

Competencias permiten que los estudiantes relacionen algunos pensamientos matemáticos y esto puede mejorar sus posibilidades para formular situaciones problema. Los estándares complementan los objetivos y contenidos y precisan niveles de calidad, a partir de ellos y en el marco de cada proyecto educativo institucional los equipos docentes en las diferentes instituciones educativas determinan y definen los objetivos y metas comunes, también los contenidos temáticos para cada área específica, la información factual y los procesos u otros requisitos indispensables para desarrollar la respectiva competencia, por eso es que los estándares son la guía para el diseño y el desarrollo del currículo.

1.3 El Libro de Texto de Matemática ¿Por qué estudiarlo?

En los últimos años en muchas instituciones educativas colombianas tanto a nivel escolar, como en la secundaria y los primeros años de estudio universitarios, se ha vuelto una constante el encontrar un rendimiento bajo e incipiente en las evaluaciones realizadas a la mayoría de estudiantes, especialmente es alarmante el mal desempeño en los procesos matemáticos, también es preocupante y triste reconocer que en las pruebas nacionales los resultados han mostrado grandes debilidades, vacíos y ausencia de buenas bases en el manejo y conocimiento de las ciencias básicas.

Si bien en Colombia las nuevas generaciones del siglo XXI no tienen la culpa de haber sido orientados equivocadamente por el sistema educativo nacional con su programa de La Promoción Automática, medida esta que sin querer, fue creando en muchos de los jóvenes una generalizada apatía por el estudio, también los condujo indirectamente a rechazar la necesidad real de adquirir conocimientos, de prepararse académicamente bien y lograr una buena formación integral con miras a participar activamente en la vida laboral y a ser útiles en la sociedad.

Pues bien, es la hora y el momento en que especialmente los profesores concedores de estos resultados negativos y sabiendo de la importancia que poseen los libros de texto como instrumentos de enseñanza y aprendizaje, reflexionen, unan esfuerzos y traten de buscar

soluciones aportando cada uno desde el aula el granito de arena que permita promover un cambio positivo en la mentalidad de los estudiantes modernos.

Según Vigotsky (1997) los libros de texto son artefactos que intermedian la relación de los seres humanos con las matemáticas, luego una forma de acercar a los jóvenes a mejorar el gusto e interés por el estudio puede ser utilizando las TIC pues la mayoría de los estudiantes conocen y disfrutan algunas de las nuevas tecnologías, es decir, las diferentes temáticas y conceptos matemáticos adecuadamente implementados en los libros de texto, y en la compañía de los tradicionales artefactos tecnológicos puede ser el camino para que poco a poco los jóvenes se vayan apropiando del conocimiento.

CAPÍTULO II

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan la investigación, los cuales hacen referencia a los elementos conceptuales que proporcionan el estudio de la trigonometría y cómo la tecnología puede ser utilizada para mejorar los procesos de su enseñanza y aprendizaje, también se hace alusión a la noción de medios, se dan a conocer algunos fundamentos epistemológicos de seres-humanos-con-medios y se explica cómo producir el conocimiento matemático en relación con los medios.

Para mejorar los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en el aula se está utilizando un recurso didáctico que consiste en el uso de la modelación. Por eso, Colombia (1998) plantea que:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles (p. 101).

En este sentido, es importante aclarar que los procesos de modelación se refieren a la identificación de las matemáticas en un contexto general, al descubrimiento de relaciones y regularidades, al reconocimiento de aspectos comunes en diferentes situaciones, al hecho de representar una relación a través de una expresión algebraica, a utilizar diferentes modelos para solucionar un problema, de igual manera, se emplea la modelación cuando se trata de esquematizar, formular y visualizar un problema en sus diferentes formas de representación y cuando se hacen generalizaciones de una situación que permita observar la variación y el cambio (Colombia. 1998).

Desde esta perspectiva, la implementación de la modelación en el aula se ve influenciada por la capacidad del docente para identificar o diseñar situaciones del “mundo real” donde intervenga la variación y el cambio, para que el estudiante genere estrategias que le permitan su abordaje y, por ende, producir conocimiento matemático a través de ellos. En este sentido, Villa-Ochoa (2010 b) afirma:

“La modelación matemática ha mostrado ser una herramienta útil en el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y los contextos propios de los estudiantes y las demás ciencias; sin embargo, para que dicho proceso desarrolle tales propósitos, se hace necesario un currículo que esté en coherencia con unos ciertos principios de tipo filosóficos en los cuales el conocimiento matemático se observe como una construcción social en donde el estudiante se hace partícipe, y se apropia de él paso a paso”.

Para el desarrollo de esta investigación es trascendental el proceso de modelación porque en los estudios de Vasco (2006) se considera que: *“los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso”* (p. 140); debido a esta descripción, vale la pena aclarar que para resolver un problema cautivador primero se debe organizar un modelo de la situación inicialmente planteada, donde las variables covarien en forma semejante y esto no se puede hacer sin activar previamente aquello que se denomina Pensamiento Variacional.

A causa de esto, Vasco (2006) propone una forma de esquematizar los problemas en varios momentos, a través del proceso de modelación, ellos son:

- Momento de captación de patrones de variación, es decir, identificar lo que cambia y lo que permanece fijo.
- Momento de creación de un modelo.
- Momento de echar a andar el modelo.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de revisión del modelo (p. 140).

También este autor, expresa que si hay tecnología disponible que posibilite hacerlo, habría incluso otros momentos, que son: “Momento de formulación simbólica; momento de

calcular con esa formulación; momento para comparar los resultados con el proceso modelado y momento de reformulación del modelo” (Vasco, 2006, p. 140).

2.1 Seres Humanos-con-Medios en la Producción de Conocimiento Matemático

2.1.1 La Noción de Medios

Desde hace algún tiempo algunos críticos de la tecnología han visto el avance tecnológico como un factor de alto riesgo de generación de desempleo, es decir, se han visto a las máquinas como “enemigos” de la humanidad, en el sentido que han desplazado en las empresas grandes cantidades de mano de obra y aun siendo parte de los avances científicos, en cierta medida, también limitan el conocimiento de muchos estudiantes porque les facilitan las investigaciones, consultas y trabajos, reduciéndoles la oportunidad de mejorar su aprendizaje, ya que limita sus pensamientos y los priva de realizar cálculos y consultas de una manera más larga, pero más enriquecedora e investigativa.

De todas maneras, desde antes de la invención de la escritura y de tantos medios de comunicación, ya el ser humano como ser racional se empezaba a apropiarse del conocimiento matemático, indiferentemente de la civilización en la que viviera, luego este es independiente del medio.

La tecnología ha evolucionado mucho y rápidamente en los últimos 50 años, pero parece que el desarrollo y aplicación de las herramientas y artefactos tecnológicos no ha sido implementada adecuadamente en la educación.

Estos avances tecnológicos pasando por el uso de la tecnología del lápiz y papel, el ábaco y el computador, han traído nuevas herramientas, como algunos softwares que permiten expresar la información mediante una variada calidad de tablas y gráficos, los cuales facilitan representaciones variadas y dinámicas de los hechos estudiados. Ejemplos muy claros y evidentes del cambio acelerado en la información y cómo se da ampliamente su comunicación debido a la renovación tecnológica, lo podemos observar gracias al concepto

de interfaz y a la variedad de ellos, pasando desde el monitor de video, el teclado y el mouse (ratón), hasta los avances como la tecnología flash y los sensores, el paso del sistema DOS en los computadores, a las nuevas versiones en Windows y Java, y por supuesto a la globalización de la información con el internet.

Actualmente la calidad, la oportunidad y la claridad de la información y la comunicación ha mejorado en todos los campos, incluyendo el educativo, pues la evolución de los medios físicos o virtuales con los que se transmiten los mensajes es enorme, algunos de estos medios son: la televisión, la telefonía convencional y celular, el microondas, los computadores personales, el internet, el intranet y los softwares, de igual manera en las instituciones educativas el personal docente desarrolla procesos de cualificación, se prepara, capacita y actualiza para ofrecer mejor sus servicios.

Según Lupiáñez y Moreno (2001) la forma en la que se aprenden actualmente las matemáticas, ha estado en los últimos años muy influenciada por los avances tecnológicos que le han proporcionado diferentes tipos de herramientas, tales como calculadoras graficadoras (la TI89 y TI92) y los softwares dinámicos que le proporcionan una gama variada de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros que le permiten a los estudiantes explorarlas en formas variadas, y algunas de ellas se convierten en verdaderos retos y desafíos para los estudiantes.

TIC: Se definen como las Tecnologías de la Información y de la Comunicación, es decir, son un conjunto de medios y de herramientas computacionales e informáticas, que procesan, sintetizan, recuperan y presentan la información en variadas representaciones, algunas poseen soportes y canales que les permiten el acceso a la información para darle forma, registrarla, almacenarla y difundirla en contenidos digitalizados.

Actualmente el mundo educativo está muy influenciado por el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (T.I.C.) especialmente en las clases y estudios de matemáticas.

Cada día los centros educativos y los usuarios se ven beneficiados, pues la gran demanda en el mercado permite conseguir tanto las calculadoras científicas y graficadoras como los computadores, a precios realmente bajos o de fácil adquisición.

Según Pedro Gómez (1997) los programas de computador y las herramientas tecnológicas que se han producido hasta hoy para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se pueden clasificar en varios grupos así: Micromundos, sistemas de simulación, sistemas tutoriales, programas de inteligencia artificial, aplicaciones de telemática y calculadoras.

Micromundos: Son sistemas que le permiten explorar al usuario la estructura de un conjunto de objetos matemáticos, las relaciones existentes entre ellos y varias formas de representación suyas. Le facilitan al docente la oportunidad de diseñar situaciones de acuerdo a las necesidades de los alumnos generando cambios en el sistema didáctico que permitan la apertura del conocimiento deseado; son ejemplos de esta categoría el Cabri-Geómetra y el Derive.

Los Sistemas de Simulación: Le permiten analizar situaciones dinámicas al observador quien tiene la opción de modificar algunos de los parámetros establecidos por él, por ejemplo el sistema Math Cars que permite estudiar el movimiento de un automóvil de distintas formas ya sean gráficas, simbólicas o numéricas.

Los Sistemas Tutoriales: En la mayoría de estos el usuario recibe de guía instrucciones y reacciones, las cuales pueden estar muy restringidas por el sistema ya que no dependen de la evolución del conocimiento del sujeto sino que están basadas en una referencia pre-establecida acerca del sujeto.

La Inteligencia Artificial: Es la cuarta categoría de los tipos de tecnología en la educación matemática, muchos intentos con ella que buscaban automatizar el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no tuvieron el éxito esperado, puesto que el funcionamiento del sistema didáctico no depende solo de factores aparentemente estables como el contenido matemático, sino también de factores muy variables de la clase y el

saber, tales como la estructura social o el conocimiento de cada uno de los estudiantes, por lo tanto, no es sencillo modelar programas de cómputo que reconozcan y se adapten a la gran variedad de situaciones presentadas entre el sujeto y el medio.

Las Calculadoras: Son dispositivos de fácil manejo y portabilidad lo que las diferencia de los computadores; se constituyeron en el sexto tipo de utilización de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de los años 70 con el surgimiento de los primeros modelos de poco costo, pero que facilitaban el desarrollo de las operaciones aritméticas básicas. Hoy su evolución nos permite encontrar calculadoras científicas y gráficas, y máquinas capaces de realizar cálculos simbólicos y utilizar programas como el Derive y el Cabri-Geómetra.

Las calculadoras y los computadores son herramientas tecnológicas que desde su invención en el siglo pasado y con su vinculación al campo académico, le han venido permitiendo tanto a los docentes como a los estudiantes obtener informaciones de análisis de datos y cálculos matemáticos de una manera más organizada, rápida y eficiente.

Derive: Es un programa con capacidad de realizar cálculos matemáticos propios de las calculadoras científicas, así como de representar y graficar funciones en dos y tres dimensiones.

Cabri Geometry: Es otro software dinámico utilizado en el estudio de la trigonometría, la geometría analítica y la geometría plana, este permite realizar gran cantidad de construcciones y modelos matemáticos con la ayuda de sus variadas herramientas, que le facilitan al usuario realizar y dibujar todo tipo de líneas, ángulos y figuras geométricas, además transformar las representaciones generadas, así como moverlas, trasladarlas y medir o calcular sus áreas y perímetros, etc.

Geogebra: Este programa puede ser fácilmente accesado y descargado por todos los usuarios que simplemente estén conectados al internet, lo pueden descargar en la página web en el sitio: <http://www.geogebra.org/cms/>, es un software libre de plataformas

múltiples, el cual se puede instalar directamente, es además un software dinámico de matemáticas que permite una mejor interacción entre la geometría, el álgebra, el cálculo y sus usuarios.

El Geogebra es una herramienta que permite mejorar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, la incorporación de este medio informático en el aula puede facilitar la solución de muchos problemas, también permite mejorar la comprensión de los conceptos estudiados, visualizar y modelar mejor y de varias maneras las situaciones analizadas, lo que les permite a los estudiantes el poder ampliar su capacidad de raciocinio y mejorar la toma de decisiones en la solución de problemas.

La tecnología se puede convertir en una poderosa herramienta que ayude tanto al docente como a sus alumnos por ejemplo con la participación de la modelación y sus variadas representaciones de las situaciones y problemas, a ampliar la capacidad para examinar y analizar las mismas desde diferentes ángulos, es decir, les ayude a mejorar las capacidades cognitivas.

2.2 Fundamentos Epistemológicos de Seres Humanos-con-Medios

Indudablemente el docente juega un papel central en el aula en el conjunto de relaciones que se presentan entre los estudiantes, el docente y la tecnología al desarrollar los contenidos matemáticos, pero no se puede mirar a la tecnología como el salvavidas o la adecuada y definitiva solución al problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aunque tampoco se debe ignorar que es cierto que ella promueve nuevas formas didácticas, las cuales aportan a mejorar el aprendizaje de los estudiantes y al crecimiento de la formación de sus maestros, pero en definitiva la enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar.

Enseñar bien no es fácil, es complicado, de igual manera son difíciles y complejos los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, no existe una receta o nadie ha demostrado el teorema de cómo enseñar y hacerlo bien.

Según la autora Alemán de Sánchez, A. (2002) en su obra la Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora, el uso de la computadora tiene las siguientes ventajas al enseñar matemáticas:

- Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.
- Interacción entre el alumno y la máquina.
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante.
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar.
- Permite el desarrollo cognitivo del estudiante.
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno.
- A través de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

Es decir, realmente tanto para los profesores como para los estudiantes el uso de las nuevas tecnologías es importante en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, porque facilita y permite mostrar los procedimientos en detalle, realizar muchos modelos, casos y ejercicios, así como evitar cálculos exageradamente largos y tediosos.

Según David Macías Ferrer (2007), “La creación de Nuevos ambientes de aprendizaje exige situaciones educativas en que se propicie el contacto, el intercambio y la participación de los miembros de un grupo independientemente de la distancia”.

Por lo tanto, el sujeto que aprende en su proceso enseñanza-aprendizaje debe buscar la interacción con otros y con el contenido de enseñanza. La interacción se logra cuánto más próximas están las personas, y se beneficia, si las personas poseen más oportunidades para interactuar, ya que entre mayor sea la interacción entre las personas, más se aficionarán o querrán entre sí, y viceversa.

Así pues, la interactividad es la confrontación directa del estudiante con el contenido de enseñanza, entendida como la relación y el contacto del alumno con sus instrumentos o herramientas de trabajo escolar, siempre debe ser amigable y se caracteriza por la acción recíproca entre dos agentes, el sujeto que aprende y el otro que debe ser material o virtual, es decir, el material de autoaprendizaje o bien una computadora.

El proceso de la interacción del usuario con las herramientas tecnológicas, le permite identificar el tipo de actividades que se debe plantear para practicar y buscar mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, identificando las debilidades y fortalezas que encuentra al trabajar con estas herramientas.

Según Barrera y Santos (2001) la introducción al salón de clases del computador y de los programas o aplicaciones de matemáticas permite que estas se puedan desarrollar en ambientes de búsqueda y reflexión donde los estudiantes logran crear representaciones diferentes de sus tareas y además formular sus propias preguntas o problemas sobre el desarrollo y solución de sus estudios y evaluaciones; estos avances van en contra del trabajo realizado tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas con ejercicios y labores rutinarias que mecanizan al estudiante y en muchos casos lo pueden aislar de la correcta comprensión de los conceptos, de su interpretación y aplicación.

Según Peralta (1994). Desafortunadamente existen un gran número de profesores que le restan importancia a los procesos visuales o al uso de otro tipo de representaciones porque son fieles al trabajo tradicional desarrollando procesos algebraicos, es decir, algunos profesores preocupados por cumplir con los currículos o los planes de estudio diseñados en sus instituciones, privan a sus alumnos de la oportunidad de explorar y conjeturar métodos diferentes para resolver los problemas, y los inducen generalmente a efectuar enormes actividades operativas y cálculos mecánicos que los convierten en especies de robots o autómatas que repiten algoritmos, y no se detienen a reflexionar sobre otras posibles formas de solucionar los problemas.

Según Alfaro (2004) uno de los objetivos principales del profesor en el aula debe ser, que a partir de la información suministrada con la ayuda de las herramientas tecnológicas, los alumnos analicen, critiquen y saquen conclusiones acerca de la información recibida a través de los sistemas de representación de los contenidos, luego, por eso resulta que la evolución del aprendizaje y el mejoramiento del conocimiento, evidentemente en gran parte dependen de la confrontación de los medios a los que son sometidos los estudiantes en el aula por su profesor. A este respecto Camacho & Santos (2004) dicen que como el empleo de las herramientas tecnológicas debe estar orientado a apoyar y contribuir para que el sujeto pueda modificar los sistemas de percepción antiguos y construya adecuadamente representaciones diferentes, y con ellas surja el conocimiento, por tanto, el profesor debe ofrecer a sus estudiantes situaciones diseñadas con las herramientas tecnológicas para que en ellos pueda surgir el conocimiento en el encuentro con el medio.

Para Fuglestad (2004) al trabajar con las herramientas tecnológicas, es necesario conocer las características básicas que ellas poseen, para que tanto el docente como sus alumnos sepan qué es posible realizar con ellas, y aprender a manejarlas, y a identificar cuáles pueden usar para resolver determinado tipo de problema, por ello diseñó un proceso que consta de tres etapas, donde describe como los estudiantes interactúan con las herramientas tecnológicas, y en el cual está presente en todas sus etapas el desarrollo de habilidades matemáticas, ellas son: el conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del artefacto (calculadora o software), el desarrollo de modelos simples y clasificar o juzgar cuáles herramientas tecnológicas de las que disponen son más adecuadas para resolver uno u otro tipo de problema.

Según Rabardel (1999) los instrumentos en la educación cumplen una función muy importante en la enseñanza de los estudiantes, mediante sus acciones son parte activa en la construcción del conocimiento, es decir, los artefactos, las herramientas y los signos contribuyen a la formación de las funciones psíquicas y los conocimientos. Para él un artefacto puede ser material o un sistema simbólico, usado como medio para la acción, por ejemplo: el ábaco, una computadora, los mapas o un programa de GD; el instrumento es una entidad mixta que comprende el artefacto material y los esquemas de uso, o sea para

Rabardel el artefacto relacionado con la acción es un instrumento, y este se convierte en tal, cuando el sujeto se ha apropiado de él y lo ha integrado a su actividad.

Según Borba y Villarreal (2005) en el siglo pasado y en muchos lugares se han investigado los avances tecnológicos en la educación matemática, y desde entonces, se ha creado un debate entre aquellos que abogan por su uso y consideran que los nuevos artefactos y herramientas contribuyen al mejoramiento no sólo de la enseñanza matemática, sino de su aprendizaje, y quienes lo rechazan o se oponen a su empleo e incorporación al trabajo en el aula.

Para Borba y Villarreal el conocimiento se produce por colectivos de los seres-humanos-con-medios, además el pensamiento humano es reorganizado por la influencia de distintos medios de comunicación, como las computadoras y la evolución de sus interfaces, lo que ha producido el incremento en el acceso a ellas, motivado por la visualización, que constituye el cambio principal en la interfaz del ordenador desde que el monitor (la pantalla), se convirtió en un accesorio del computador. En matemáticas el proceso de la visualización se realiza desde hace muchos años creando y materializando las imágenes mentales con la ayuda del lápiz y el papel, o con las nuevas tecnologías, buscando mejorar la enseñanza, facilitar la comprensión y el aprendizaje de las nociones, porque la visualización dentro del proceso modelación puede presentar algunos aspectos particulares, a saber: las imágenes, los dibujos, los diagramas y gráficos, y gracias a estos el sujeto puede realizar la representación de un fenómeno o crear la imagen visual de algo abstracto en su mente.

Visualización: Según la Real Academia Española, “Visualización es acción y efecto de visualizar y éste a su vez significa: representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter”.

Según Borba y Villarreal, los autores Noss y Hoyles (1996) resaltan la importancia de las herramientas o artefactos tecnológicos, y en especial del computador como intermediario del conocimiento; para ellos cuando se relacionan los alumnos con el software “El ordenador proporciona una pantalla en la que los alumnos pueden expresar su pensamiento, y al mismo tiempo nos ofrece la oportunidad de vislumbrar las huellas de su pensamiento”.

Por ello una de las funciones del docente debe ser la de coordinar las experiencias de los alumnos con las enseñanzas académicas tradicionales, y la relación con los diferentes medios de comunicación y sus diferentes representaciones.

Según Santos Trigo (2001) el uso de las computadoras le permite a los estudiantes desarrollar diferentes estrategias para solucionar problemas, lo que les brinda la oportunidad, no solo de formular conjeturas sino también de diseñar y crear otros problemas, es decir, estos medios dinámicos facilitan la creación de modelos o figuras y el visualizarlas, además hasta transformar esas creaciones en tiempo real. Es decir, para él los docentes, estudiantes y usuarios de la matemática pueden realizar construcciones más exactas de una situación o problema estudiado mediante la ayuda del software dinámico, el cual les brinda a diferencia de los bosquejos o representaciones aproximadas de los hechos, una información más confiable para iniciar el análisis o reflexiones del caso en estudio.

La implementación de las nuevas tecnologías al interior de la clase permite la exploración y la visualización de muchas situaciones matemáticas que no se pueden percibir con la aplicación de la tecnología más tradicional como es el lápiz y papel.

La interacción de los estudiantes con las construcciones hechas en los programas de cómputo (Software), les entrega la oportunidad de recibir una buena cantidad de información relevante para la toma de decisiones y para desarrollar una aplicación o resolver un problema en particular. Definitivamente la aparición y la implementación de las nuevas tecnologías son un aporte muy significativo en el proceso de la comprensión de las matemáticas.

2.3 La Producción de Conocimiento en Relación con los Medios

Según Pedro Gómez (1997) la tecnología brinda a los usuarios la posibilidad de trabajar con los objetos matemáticos en variadas representaciones, dinamizando los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es decir, la implementación de las nuevas tecnologías permiten tanto a los profesores como a los alumnos abrir nuevos espacios de

exploración y experimentación que pueden aportar las condiciones apropiadas para la consecución de una mejor comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos. Luego para él la tecnología es un agente didáctico que le permite al docente organizar y diseñar situaciones en las que pueden participar los estudiantes, y en esta interacción con los medios ellos pueden adquirir conocimientos gracias al manejo dinámico de las variadas representaciones de los objetos matemáticos.

También la tecnología le permite al usuario economizar tiempo en los procesos, ampliar la capacidad de análisis, proporcionándole la rápida oportunidad de transformar un problema en otro, es decir, el uso de ella facilita al individuo la oportunidad de ver los objetos matemáticos en formas dinámicas, porque le proporciona múltiples sistemas de representación, mejorando en él no sólo el interés por estudiar las matemáticas sino la capacidad de alcanzar su aprendizaje.

Además la tecnología le brinda a los sujetos tanto al docente como a sus estudiantes la oportunidad de visualizar los conceptos matemáticos y adquirir nuevas bases o ideas para construir el conocimiento matemático, así como en su elaboración y diseño, que generalmente no es un proceso sencillo el de los sistemas computacionales, destinados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pues no sólo requiere de la conceptualización del conocimiento matemático a enseñar, sino de la adecuada combinación de las restricciones tanto didácticas como técnicas.

El uso de los dispositivos y la aplicación de los programas pueden contribuir a mejorar la motivación y el gusto por el estudio y la investigación en el campo matemático, permitiendo entender y visualizar mejor muchos conceptos, superando los logros alcanzados a la fecha por la tradicional tecnología del lápiz y el papel.

Luego la vinculación de los equipos de cómputo en el aula o sitio de estudio, incentivan, promueven e invitan a la apropiación del uso y manejo de un software específico aplicado a un tema de estudio, y así mejora el interés por realizar las actividades, practicar y crear

nuevos problemas o aplicaciones en forma satisfactoria, generando mejores resultados que los ofrecidos por la clase tradicional.

La tecnología es un factor que también brinda la oportunidad de economizar y ganar tiempo en muchos de los procesos realizados en clase de matemáticas, y este tiempo o recurso aprovechado es un beneficio tanto para el profesor como para sus alumnos, pero el uso de la tecnología no reemplaza o sustituye la tarea o función del docente, porque este sigue siendo el líder del grupo y a quien le corresponde decidir el cómo, el cuándo y a qué proceso aplicarle la tecnología, además es quien debe preparar los temas y diseñar las tareas que exijan la aplicación de las herramientas tecnológicas, y ayudar a sus alumnos a mejorar sus habilidades sobre el empleo del software incorporado al proceso de la enseñanza.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA DEL TRABAJO REALIZADO

Este trabajo de investigación sobre el uso de la tecnología en algunos libros de texto de matemáticas del grado décimo en secundaria, tiene su fundamento metodológico en el enfoque cualitativo de investigación y su proceso está basado en la técnica o el método del análisis de contenido, es decir, en este proyecto se realizó una investigación aplicada de tipo descriptivo porque en ella se busca confrontar la teoría con la realidad.

3.1 Enfoque de la Investigación

Este trabajo se basó en el enfoque cualitativo de investigación, el cual busca analizar e interpretar toda la información recogida, organizada, clasificada y comparada sobre algún tema de estudio, en este caso, analiza la coherencia entre las orientaciones derivadas desde la literatura, es decir, las recomendaciones hechas a las instituciones educativas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), emanadas desde los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia. 2006) con el uso de la tecnología en algunos libros de texto de matemáticas de décimo grado, con miras a evaluar la relevancia de la participación de la variedad de tecnologías en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría.

Para realizar este estudio se escogió el enfoque cualitativo de investigación, debido a que el investigador es quien plantea el problema y en este proceso se desarrolla una teoría coherente con los datos, de acuerdo con lo que se observa, puesto que las investigaciones cualitativas van de lo particular a lo general (León, et al. 2011).

Es de anotar, que el enfoque cualitativo de investigación puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen el mundo “visible”, lo transforman y lo convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones,

grabaciones y documentos, porque centrada su atención en el entendimiento del significado de las acciones de los seres humanos y postula que la “realidad” se define a través de las deducciones que los participantes hacen de la investigación con respecto a sus realidades (León et al., 2011).

Por otra parte, en muchos de los estudios cualitativos las hipótesis se generan durante el proceso; los métodos que se utilizan para la recolección de datos se basan en la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, registro de historias de vida,...; su propósito consiste en “reconstruir” la realidad, tal como la observan los actores que intervienen en ella y evalúa el desarrollo natural de los sucesos, porque el investigador no manipula ni estimula la “realidad”.

3.2 Método de la Investigación

El método que se utiliza para desarrollar esta investigación, es el análisis de contenido; es de aclarar, que este método no hace referencia a la situación de observar y analizar el estilo (en términos de características, ilustraciones, encuadernación, facilidad para la comprensión lectora,...) que tienen los libros de texto, sino las ideas expresadas en él; porque según Krippendorff (1990), el análisis de contenido es concebido como una *"técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto"* (p. 28). Además para este autor el análisis de contenido requiere del cumplimiento de ciertas características que posibilitan su estudio, a saber: buscar un significado simbólico a los mensajes; considerar que los mensajes no tienen un solo significado, puesto que su interpretación es cualitativa, y las ideas allí expuestas tratan de apreciar distintos fenómenos de aquellos que son observados, examinar el contexto de los datos y conceptualizarlos de acuerdo a su realidad, y establecer ciertas inferencias que faciliten la toma de decisiones y otorgarles su validez, de tal manera, que vayan más allá de lo descriptivo y genere razonamientos reflexivos que se relacionen con un contexto determinado.

Según el investigador alemán Klaus Krippendorff (1990) el análisis de contenido está considerado como una de las metodologías más importantes de la investigación y cuenta con algunos conceptos necesarios en el momento que se va a realizar una investigación, ellos son: los datos y su contexto, el conocimiento del investigador, su objetivo, inferencia y validez.

3.2.1 Los Datos

En todo análisis de contenido debe quedar claro cuáles datos se analizan y cuál es la población que permite extraer la información. Los datos son elementos básicos y constituyen la superficie que el investigador tiene para tratar de penetrarlos. La comunicación de los datos al investigador es unidireccional, en la medida en la que él es incapaz de manipular la realidad y poco será lo que la pueda influir.

3.2.2 El Contexto de los Datos

En todo análisis debe hacerse explícito el contexto con respecto al cual se analizan los datos (antecedentes, consecuencias,...).

3.2.3 El Conocimiento del Investigador

Como los intereses y conocimientos del investigador delimitan el contexto dentro del cual se harán sus inferencias, es importante que se conozca el origen de los datos y se manifiesten los supuestos acerca de ellos con los cuales se parte.

3.2.4 El Objetivo

En todo análisis de contenido debe mencionarse qué es lo que el investigador quiere conocer.

3.2.5 La Inferencia

Se busca llegar a inferencias aplicables al contexto y que sean apropiadas, es necesario tener evidencias que justifiquen los resultados obtenidos.

3.2.6 La Validez

Sucede porque el análisis de contenido debe ser empíricamente útil y busca hacer una contribución al conocimiento.

Este autor propone que la finalidad de estos conceptos pertenecen a tres tipos, que son: prescriptivo, analítico y metodológico. Krippendorff (1990) argumenta que es prescriptivo en el sentido de que debe guiar la conceptualización y el diseño de los análisis de contenido prácticos en cualquier circunstancia, es analítico en el sentido de que debe facilitar el examen crítico de los resultados del análisis de contenido efectuado por otros, y es metodológico en el sentido de que debe orientar el desarrollo y perfeccionamiento sistemático de los métodos de análisis de contenido (p. 36).

3.3 La Pertinencia

Para desarrollar la técnica del análisis de contenido en un enfoque cualitativo de investigación, Krippendorff (1990) propone tres etapas básicas, que se denominan: proyecto, ejecución e informe.

3.3.1 El Proyecto

Se caracteriza por presentar una red de pasos analíticos mediante los cuales se procesa la información, da cuenta de la manera como se obtienen los datos y lo que se hace con ellos en el transcurso del análisis, además proporciona instrucciones a otras personas acerca de todo lo que deben hacer, si pretenden reproducir los resultados (Krippendorff, 1990, p. 70). Para realizar esta etapa, él plantea las siguientes acciones:

3.3.1.1 Aplicación del Marco de Referencia

En esta acción el investigador debe hallar los puntos de concordancia entre las dos realidades observadas: una que hace alusión a los datos encontrados, en este caso, el tipo de actividades -llámense ejercicios, problemas o situaciones- que proponen algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas; y la otra es lo que se desea conocer, cómo los libros de texto del grado décimo hacen referencia al uso de la tecnología en el estudio de las relaciones trigonométricas.

En esta acción también se necesita tener claridad sobre el objetivo que se pretende alcanzar y señalar la población de estudio; para ello, el investigador reúne los datos de los cuales se puede extraer la información que le sirva para inferir y establecer conclusiones (Krippendorff, 1990, p. 259).

Se debe recordar que en esta investigación el objetivo general es identificar la presencia y el tipo de usos que se hace de la tecnología en algunos libros de texto de décimo grado, al interior o en el contenido de los capítulos o unidades donde se abordan los conceptos y temas trigonométricos, además analizar como las TIC contribuyen al fortalecimiento de los procesos del aprendizaje y de la enseñanza de la trigonometría tanto dentro como fuera del aula, en coherencia con lo que plantea teóricamente el Ministerio de Educación Nacional (MEN) desde los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006) y el contenido presentado en los libros de texto del grado décimo en el campo de la trigonometría. En esta acción la técnica del análisis de contenido se aplicó a una muestra de seis libros a saber: Código Matemáticas 10, Misión Matemática 10, Fórmula 10, Conexiones Matemáticas 10, Nuevas Matemáticas 10 y los Caminos del Saber Matemáticas 10.

3.3.1.2 Búsqueda de los Datos Adecuados

En esta acción el investigador consigue los datos que manifiestan cierto acoplamiento con sus inferencias; sin embargo, es de resaltar que este proceso se puede hacer posterior a lo que inicialmente se había concebido en la investigación.

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta investigación, se utilizaron como unidades físicas algunos libros de texto del grado décimo que poseen en su tabla de contenido el estudio de las relaciones trigonométricas, pues estos se constituyeron en los elementos instrumentales sobre los cuales se procedió a la identificación de categorías y unidades sintácticas, además los Lineamientos Curriculares(Colombia. 1998), los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006) y algunos documentos o artículos que hacen referencia a los estudios e investigaciones que se han desarrollado sobre tecnología y la trigonometría.

La selección de los libros de textos para el grado décimo se hizo atendiendo a los criterios que se referencian a continuación: (i) que aparezcan en el Portal Colombia Aprende (ver figura N°3.1), el cual ha sido diseñado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para que cualquier agente educativo pueda consultar información sobre las diferentes características que poseen los libros de texto que se comercializan en el país para la Educación Básica y Media, (ii) que se tenga evidencias de uso por parte de profesores de Educación Media y, finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna manera, los tópicos de la trigonometría que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.



Figura 3.1 Página del Portal Colombia Aprende

De acuerdo con los criterios establecidos anteriormente, se seleccionaron los siguientes libros de texto del grado décimo:

Código Matemáticas 10: Sus autores presentan una propuesta con ejercicios y problemas resueltos, así como otros por resolver, con el objetivo de buscar potenciar en sus usuarios, lectores y estudiosos las capacidades intelectuales para que construyan conocimiento, desarrollando pensamientos matemáticos en el estudio de la trigonometría tales como el Pensamiento Variacional, el Métrico, Numérico y Espacial.

Misión Matemática 10: Sus autores presentan contenidos de los pensamientos matemáticos y ofrecen talleres que puedan permitir a sus estudiosos el trabajo en equipo, así como trabajar ejercicios de diversos grados de complejidad que les ayuden a desarrollar las competencias básicas de matemáticas a saber: el razonamiento y la argumentación, la comunicación, representación y modelación, el planteamiento y la resolución de problemas. También ofrecen actividades especiales con nuevas tecnologías buscando la conexión de la matemática con el mundo científico y tecnológico.

Fórmula 10: Pretende enfatizar en el desarrollo conceptual, con ejemplos y actividades clasificadas por competencias en función de los procesos de los pensamientos matemáticos. Los autores desean abordar secciones que relacionen las matemáticas con los avances tecnológicos, además implantar pruebas de mejoramiento que familiaricen a sus estudiantes con las pruebas nacionales (ICFES) e internacionales (PISA, TIMSS).

Conexiones matemáticas 10: El autor desea ofrecer actividades o ejercicios que ayuden al estudiante a identificar el nivel de competencia necesario en los procesos de comunicación, resolución de problemas, razonamiento lógico, conversiones y conexiones. Desea presentar los estándares según el tipo de pensamiento matemático para cada unidad.

Los Caminos del Saber Matemáticas 10: Sus autores pretenden ofrecer bloques de actividades que permitan a sus estudiantes desarrollar las competencias interpretativa, argumentativa, propositiva, y los procesos matemáticos, así como otro tipo de actividades

especiales clasificadas por niveles, ellos desean mostrar a sus lectores el uso de diferentes tipos de softwares matemáticos realizando actividades paso por paso.

Nuevas Matemáticas 10: Los autores como resultado de una reflexión pedagógica presentan el contenido matemático relacionando los diferentes pensamientos a saber: Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional, relacionándolos con situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes y plantean metodológicamente los diferentes conceptos trigonométricos y posteriormente una serie de actividades y de pruebas para que los estudiantes puedan fortalecer sus competencias.

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición y Editorial	Unidades que trabajan la Trigonometría
Moreno G, Vladimir	2006	Conexiones Matemáticas 10	Norma	Unidad 1, 2, 3 y 4
Bautista B. Mauricio; Ramírez M. Carlos; Chamorro M. Andrea;	2007	Nuevas Matemáticas Trigonometría – Geometría Analítica – Estadística	Corregida Santillana	Unidad 2, 3, 4 y 5
Galindo V. Elsa; Cely R. Javier	2009	Fórmula Trigonometría y Geometría Analítica 10	Primera Voluntad SA	Unidad 2, 3, 4 y 5
Vergara, Gladys; Rojas C. Carlos; García, Olga	2009	Misión Matemática 10 Trigonometría – Geometría Analítica - Estadística	21 Educar Editores SA	Unidad 2 y 3
Alcaide, Fernando; Calvo Sotero; Donaire Juan Jesús;	2009	Código Matemáticas 10	Primera Ediciones s.m	Lecciones 3, 5 y 6
Buitrago, Lida; Romero, Juan de Jesús;	2013	Los Caminos del Saber Matemáticas 10	Alumno Santillana S.A.	Unidades 2, 3, 4 y 5

Tabla N°3.1 Ficha Técnica de los Libros de Texto Analizados

3.3.1.3 Búsqueda del Conocimiento Contextual

En esta acción es necesario contar con un soporte teórico (teorías, modelos, experiencias, datos representativos,...); una conexión empírica sobre lo que se quiere inferir; ubicar los datos en un contexto y convertirlos en fenómenos, para que con dicha información se cree un puente destinado a expresar inferencias.

De ahora en adelante, se denominan bajo la categoría de tareas todas aquellas formas en que los libros de texto analizados proponen actividades para que los estudiantes profundicen en sus conocimientos, en concordancia con el estudio de las relaciones trigonométricas. Para esta búsqueda se analizaron algunas disposiciones planteadas desde la literatura, las orientaciones emanadas por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006); y se confrontaron estas formas sugeridas para abordar la noción de tecnología y el estudio de las relaciones trigonométricas en los libros de texto seleccionados.

Es de anotar, que cada libro de texto seleccionado se sometió a un análisis por parte del investigador en los cuales se buscó evidencia que permitiera atender a las siguientes preguntas: ¿Sólo se utiliza la tecnología tradicional del lápiz y papel en el estudio de la trigonometría? ¿Cuál es el uso que se hace de las calculadoras en las relaciones trigonométricas? ¿Qué tipo de software utilizan los libros de texto analizados? y otras preguntas fueron emergiendo en la medida que se analizaron los textos.

3.3.1.4 Desarrollo de Planes para Determinar las Unidades y el Registro

En esta acción el investigador determina la manera cómo es posible obtener los datos; establece las unidades de registro, localiza espacialmente dichas unidades, distingue el tipo de distribución de la información en la población estudiada.

Es de anotar, que el diseño de dicho plan tiene que ser minucioso y explícito con el objeto de estudio, porque las unidades de análisis constituyen segmentos del contenido de los mensajes, los cuales son caracterizados para ubicarlos dentro de unas categorías; porque estas unidades surgen de la interacción entre la realidad y el observador. Luego la acción amerita los siguientes pasos: determinar las unidades de contexto, definir las unidades de registro, establecer las categorías de análisis y determinar las unidades sintácticas.

3.3.1.4.1 Determinar las Unidades de Contexto

Aquí el investigador reconoce y explica los símbolos que determinan la interpretación del hecho, además extrae los significados del medio en que se presentan. En esta investigación se tomaron algunos libros de texto del grado décimo que tuvieran en su tabla de contenido el estudio de las relaciones trigonométricas, los cuales se dieron a conocer unos párrafos atrás.

3.3.1.4.2 Definir las Unidades de Registro

Según Krippendorff citando a Holsti: (1969, p. 116) considera que una unidad de registro es “el segmento específico de contenido que se caracteriza al situarlo en una categoría determinada”, en otras palabras, las unidades de registro se asumen como el fragmento de la comunicación que se toma y sirve de base para el desarrollo de una investigación.

De los libros de texto seleccionados se analizaron no solo las tareas resueltas sino también las tareas propuestas y las herramientas o medios tecnológicos utilizados en los ejes temáticos que hagan referencia al estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, la ley del seno y del coseno, y sus respectivas aplicaciones en la resolución de problemas.

3.3.1.4.3 Establecer las Categorías de Análisis

Las categorías son los niveles donde están caracterizadas las unidades de análisis, no obstante, estas deben ser exhaustivas, es decir, comprende todas las posibles subcategorías de lo que se va a codificar, sin embargo, estas subcategorías deben ser mutuamente excluyentes, de tal manera, que una unidad de análisis pueda incurrir en una y sólo una de las subcategorías de cada categoría (Krippendorff, 1990).

En este proyecto se hizo una categorización del conjunto de tareas atendiendo a si obedecían a un contexto al interior de la matemática o si hacen alusión a contextos en otros escenarios (de otras ciencias, la cotidianidad de los estudiantes,...).

3.3.1.4.4 Determinar las Unidades Sintácticas

Estas hacen referencia a las representaciones lingüísticas de palabras, términos, símbolos, frases, enunciados o párrafos, que se extraen del contenido de los mensajes, y que se caracterizan por ser unidades de enumeración, es decir, cuantificación de los datos.

En las tareas planteadas por los libros de textos analizados se encontraron palabras, ideas y expresiones que posibilitaban, según Font (2007) determinar el tipo de contexto al que pertenece dicha tarea, de igual modo, estos términos usados también permiten hacer una nueva clasificación de tareas estáticas y de tareas dinámicas.

Por lo tanto, en la investigación el desarrollo de planes para determinar las unidades y el registro se determinaron con base en el contexto real, y las categorías y las unidades sintácticas se generaron de acuerdo a la revisión de los libros seleccionados para este estudio.

3.3.1.5 Desarrollo de Instrucciones de Codificación

En esta acción el investigador debe tener precaución de que las instrucciones estén basadas en conceptualizaciones declaradas y puestas a prueba; además de revisar en la literatura si existen estudios previos o similares dentro del área en la cual se esté indagando, pues algunas veces se pueden describir nuevos datos, si es así, se retomarán las instrucciones de registros ya existentes y que con alguna modificación puedan ser utilizadas (Solís, 2008).

En este sentido, es pertinente mencionar que se consideraron algunos documentos, estudios e investigaciones que se han realizado sobre la noción de tecnología y la trigonometría, de tal manera, que sus aportes sirvieran como referente conceptual y permitieran establecer

con criticidad una clasificación de las categorías y subcategorías abordadas en este proyecto de investigación.

3.3.1.6 Búsqueda de Procedimientos de Análisis Justificados Según el Contexto

Todo procedimiento analítico, implica ciertos supuestos acerca del contexto de los datos que deben defenderse a partir de lo que se conoce sobre este contexto (Krippendorff, 1990, p. 260). En esta acción el investigador debe considerar el elemento que sensibiliza el fenómeno estudiado y los supuestos implícitos de hecho, porque en ocasiones resulta que el tipo de análisis empleado no es el más adecuado.

Para realizar el análisis de los libros escolares seleccionados se procedió a hacer una revisión de las tablas de contenido de cada uno de ellos, y a determinar la ubicación de la temática de interés en relación con los temas que se abordan previa y posteriormente en el texto.

A continuación se hizo una revisión del contenido de las secciones para identificar las maneras como se presenta el tema de las relaciones trigonométricas, sus ejemplos, demostraciones y secuencias de actividades. Esta primera revisión arrojó en su totalidad, que los libros de texto analizados inician cada temática con una introducción de la misma, para luego explicar las definiciones y propiedades (algunas demostradas) con algunos ejemplos y, finalmente, se da un espacio para ejercicios y problemas de aplicación.

3.3.1.7 Establecimiento de las Normas de Calidad

Según los estudios de Solís (2008) en esta acción es “indispensable contar con altas normas de calidad, las cuales se establecen antes de evaluar el análisis; de acuerdo a este contexto, es importante aclarar que existen dos tipos de normas: las de validez y las de fiabilidad” (p.180).

Las normas de validez se caracterizan porque representan la medida en que los datos son interpretados en forma correcta; es decir, que todo sea creíble por su exactitud. Para lograr validez en un estudio se deben estimar dos elementos, a saber: la medida en que las conclusiones representan efectivamente la realidad; y si las ideas difundidas por los investigadores representan o miden categorías reales.

Las normas de fiabilidad se refieren a la posibilidad de replicar estos estudios, porque al aplicar esta misma técnica a los mismos datos, el resultado deberá ser el mismo, y esto es lo que la convierte en objetiva y reproducible.

3.3.2 La Ejecución

Es una etapa donde se realiza lo planteado en el proyecto, generalmente es aquí donde se encuentran los problemas, porque muchos de ellos no fueron considerados por el investigador; lo recomendable es regresar y modificar el proyecto usando como guía el objetivo general de la investigación.

El proceso de ejecución en esta investigación fue largo y minucioso, porque se realizaron y se analizaron las tareas propuestas en algunos libros de texto del grado décimo sobre el estudio de las relaciones trigonométricas así como los tipos de herramientas tecnológicas utilizados y la forma de hacerlo, es decir cómo se usan y para qué sirven.

3.3.3 El informe

Es la etapa final del análisis de contenido, se caracteriza por presentar una descripción de lo realizado, donde se plasman los motivos por los cuales se efectuó el análisis, el logro alcanzado y, sobre todo, su contribución al área del conocimiento que le corresponda.

En esta investigación está plasmado en los resultados encontrados, las conclusiones tomadas y las reflexiones hechas.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS

En el presente estudio se hizo necesaria una revisión bibliográfica de algunos libros de texto, tanto de la educación media (Matemática Experimental 10, Hipertexto Matemáticas 10) como de la educación superior (Algebra y Trigonometría de Zill, Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica de Swokowski, Matemáticas Previas al Cálculo, y Matemáticas Básicas con Aplicaciones a las Ciencias Económicas y Afines) en los que se desarrollan los contenidos temáticos de la trigonometría.

Estos libros de texto se caracterizan porque, a grandes rasgos, tienen similitudes en cuanto a los ejes temáticos que se deben trabajar en el aula, pero también marcan la diferencia en algunos aspectos metodológicos que se usan para que los estudiantes puedan apropiarse del conocimiento allí impartido.

La selección de estos textos se hizo atendiendo a que son libros que generalmente se referencian por los profesores como bibliografía básica para trabajar el área de matemática en el grado décimo o para abordar algunos cursos de los primeros semestres de universidad, porque están fundamentados desde su época de publicación a las directrices ministeriales y se acoplan de una u otra manera a los planes de estudio organizados y planteados por los establecimientos educativos que brindan este servicio. Esta revisión se hizo, en parte, porque habitualmente los libros de texto son herramientas tecnológicas que pueden ser considerados como mediadores curriculares y son utilizados por el docente de matemáticas y sus estudiantes como el texto guía o de consulta en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría.

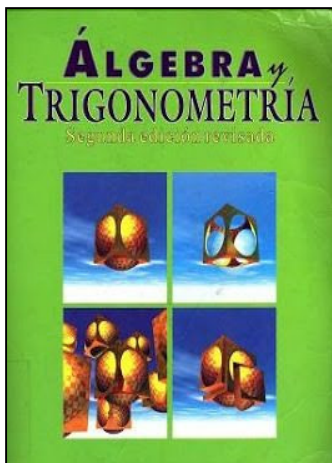
A continuación en la siguiente tabla se muestra una ficha técnica de los libros a los que se hace referencia al comienzo del capítulo.

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición y Editorial	Unidades que trabajan la Trigonometría
Zill, D; Dewar, J	2001	Algebra y Trigonometría	Segunda; Mc Graw – Hill	Capítulos 6 y 7
Uribe, J	2002	Matemática Experimental 10	Segunda; Uros Editores	Unidades 6, 7, 8, 9, 10 y 11
Mejía, F; Álvarez, R; Fernández, H	2005	Matemáticas Previas al Cálculo	Primera; Sello Editorial Universidad de Medellín	Capítulos 8, 9, 10 y 11
Swokoswki, E; Cole, J	2007	Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Undécima; Cengage Learning	Capítulos 6, 7 y 8
Álvarez, R; Fernández, H; Rúa, J	2009	Matemáticas Básicas Con aplicaciones a las Ciencias Económicas y afines	Segunda; Sello Editorial Universidad de Medellín	Capítulo 12
Ramírez, M; Castañeda, N; Joya, A; Gómez, M	2010	Hipertexto, Matemáticas 10	Primera; Santillana SA	Unidades 2, 3, 4 y 5

Tabla N°4.1 Ficha Técnica de los Libros de Texto de Referencia

4.1 LIBROS DE TEXTOS REFERENTES

4.1.1 Algebra y Trigonometría:



El primer texto revisado se llama “*Algebra y Trigonometría*” (Zill y Dewar, 2001), en éste se promueve una serie de ejercicios que incluyen abundantes problemas con preguntas de falso – verdadero, ejercicios de completación y aplicaciones que requieren la construcción e interpretación de gráficas, con la intención de que los estudiantes hagan más sólida la comprensión de los conceptos tratados, realicen algunas prácticas para reforzar sus conocimientos y participen activamente en la solución de problemas.

Los autores son conscientes y partidarios que para la comprensión de los conceptos matemáticos y su aprendizaje, es necesario que los estudiantes observen, analicen y estudien los ejemplos y modelos de los ejercicios realizados en clase, tanto como los que posee el texto guía sobre determinado tema. Una vez realizado este proceso y habiendo hecho una buena cantidad de ejercicios, podrán encontrar una buena forma de aprender matemáticas, la que se logra disciplinadamente haciendo matemáticas.

En este libro se hace un estudio sobre el concepto de ángulo, luego continúan con el estudio de las definiciones de las relaciones trigonométricas para los ángulos agudos en el triángulo rectángulo con los cuales los autores pretenden fomentar el Pensamiento Espacial y el Pensamiento Métrico así como mejorar el razonamiento lógico de los estudiantes y para ello demuestran los siguientes resultados:

- En cualquier triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$ veces la longitud de los catetos.
- En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 30° y 60° , se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa.

- En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 30° y 60° , se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 60° mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la longitud de la hipotenusa.

Posteriormente, este texto continúa con la aplicación de la trigonometría, la cual se genera desde la utilización de los triángulos rectángulos y los triángulos oblicuángulos, donde se caracteriza por presentar un dominio estático, porque para hallar las distancias y ángulos se requería pensar hipotéticamente, puesto que no varían los valores en su desarrollo y, por lo tanto, las medidas encontradas, siempre van a permanecer fijas.

En la tabla N° 4.1.1 se pueden observar las temáticas que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría en este libro de texto:

CAPITULO 6	
Trigonometría del triángulo	
6.1	Ángulos y su medición
6.2	Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos
6.3	Aplicaciones de la trigonometría a triángulos rectángulos
6.4	Funciones trigonométricas de ángulos generales
6.5	Ley del seno
6.6	Ley del coseno
	Conceptos importantes
	Ejercicios de repaso
CAPITULO 7	
Trigonometría analítica	
7.1	Función Circular
7.2	Gráficas de las Funciones Trigonométricas
7.3	Movimiento Armónico: Variaciones de las gráficas de seno y de coseno.
7.4	Identidades Trigonométricas.
7.5	Fórmulas de la Suma y la Diferencia.
7.6	Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio.
7.7	Fórmulas del producto y la suma.
7.8	Ecuaciones Trigonométricas.
7.9	Funciones Trigonométricas Inversas.
7.10	Forma Trigonométrica y raíz N-ésima de números complejos
	Conceptos importantes
	Ejercicios de repaso

Tabla N°4.1.1 Contenido Trigonométrico de Álgebra y Trigonometría

En este contexto vale la pena aclarar, que el uso de las TIC se fundamenta desde la utilización de las calculadoras científicas, puesto que le permite al estudiante hacer gráficas

de funciones polinómicas, racionales y trascendentes, donde se analice el dominio y el rango de una función, el intercepto de la recta o de la curva con el eje y , hallar las raíces de un polinomio, determinar visualmente si la función es creciente o decreciente, observar cuando en una función racional hay una asíntota vertical, horizontal u oblicua, reflexionando sobre la causa que las origina. Desde la sección 6.1 se empieza a observar el uso de la calculadora científica especialmente en las actividades de conversiones de las medidas de los ángulos de grados a radianes o viceversa, estas calculadoras, también pueden ser empleadas para hallar los valores de las relaciones trigonométricas, donde se hace necesario tener en cuenta su programación electrónica, por ejemplo, para utilizarla en la medida de radianes, es indispensable configurarla en radianes, y si los ángulos son medidos en grados hay que colocar la calculadora en el modo de grados, en ambas situaciones antes de efectuar los cálculos, y si los ángulos están dados en grados, minutos y segundos, deben ser convertidos a la forma decimal, además los autores dan instrucciones muy claras y fáciles de seguir (ver figuras 4.1 y 4.2) tanto por el docente como por los estudiantes (página 277).

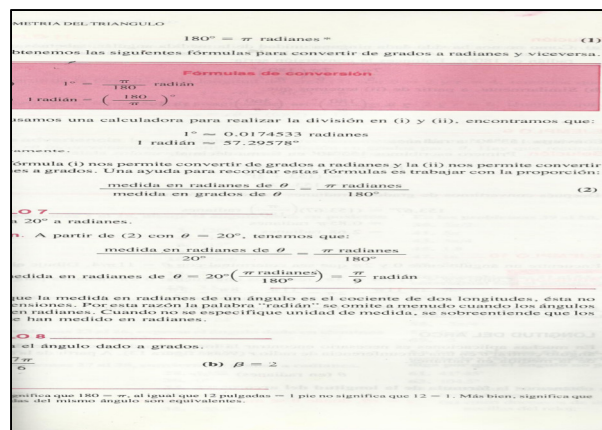


Figura 4.1 Conversión de Unidades

Los autores también alertan a los estudiantes sobre el uso correcto de la calculadora, recordándoles que para asegurar la exactitud al utilizar dicho artefacto tecnológico deben evitar escribir los resultados intermedios, y por lo tanto, hacer todos los cálculos en la calculadora, es decir, la calculadora opera internamente con ocho o más dígitos, por lo tanto, para aprovechar su capacidad y exactitud al realizar los cálculos, los valores computados de las funciones trigonométricas deben ser guardados en la memoria de la calculadora y retenidos para su uso posterior (páginas 286 y 287).

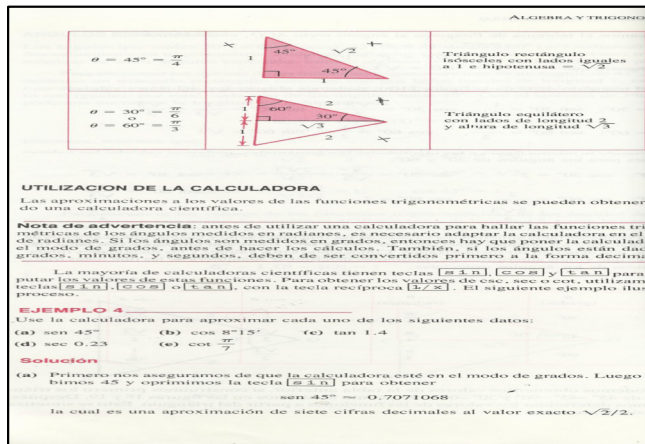


Figura 4.2 Uso de la Calculadora en el Sistema Sexagesimal

Por otro lado, en este libro se expresan las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas, lo que permite analizar con propiedad si una igualdad es una identidad, la cual deberán probar, y para ello recomiendan una serie de procedimientos que facilitan el proceso a seguir, en caso de que un ejercicio no sea una identidad invitan al estudiante a que encuentre un contraejemplo, que es el valor de un ángulo para el cual no se cumple la igualdad. Para resolver una ecuación trigonométrica (ver figura 4.3), se deben aplicar adecuadamente las identidades y las propiedades del álgebra con el objeto de escribir la ecuación en términos de una sola variable, para luego hallar los valores de los ángulos que satisfacen la ecuación.

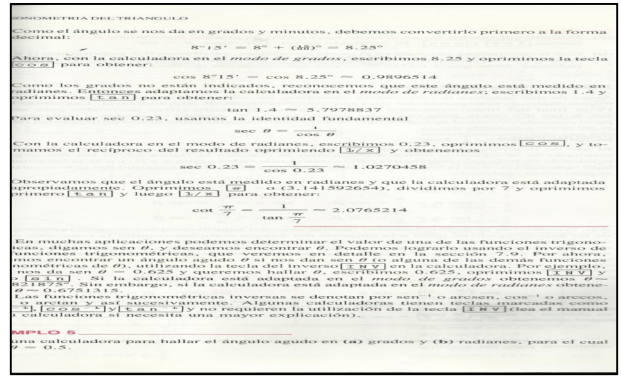
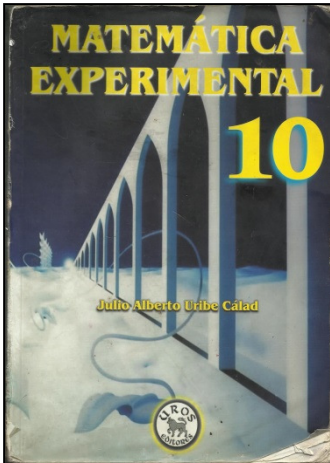


Figura 4.3 Resolución de Ecuación Trigonométrica

4.1.2 Matemática Experimental 10:



Antes de hacer mención a las temáticas propias de la trigonometría que aparecen en este libro de texto es importante nombrar los conceptos matemáticos que se desarrollan previamente, porque sirven de entrada preliminar para entender y comprender mejor dichas temáticas. Al inicio del libro aparece una descripción de los distintos conjuntos numéricos; luego, para hacer generalizaciones, se presentan los elementos básicos del álgebra, que constituyen una revisión general de los conceptos y operaciones algebraicas básicas aprendidas en años anteriores; seguidamente se trabaja con las desigualdades e inecuaciones, cuyo propósito está fundamentado desde el hecho de proponer soluciones a problemas relacionados con desigualdades lineales, cuadráticas y racionales, representando los intervalos en la recta numérica.

Posteriormente se dan pautas para que los estudiantes aprendan a reconocer los elementos que caracterizan a una relación definida en los números reales y que permiten su representación gráfica, después se abordan los conceptos de línea recta y circunferencia y se finaliza con el hecho de reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática, que aparentemente se utiliza para modelar situaciones de la vida cotidiana.

En este segundo libro observado se percibe otra manera de abordar los conceptos propios de la trigonometría, porque la metodología aquí expuesta permite que el estudiante sea el actor principal de su proceso de aprendizaje, con el propósito de que construya y descubra por sí mismo las nociones y las relaciones existentes que se generan en esta rama de las matemáticas. Para poder alcanzar esto, cada unidad del libro está encabezada por un cuadro que contiene los logros específicos que se desean adquirir con sus respectivos indicadores acordes a la parte cognitiva, procedimental y actitudinal del estudiante, además trae un taller de comprensión lectora, que está fundamentado desde una breve reseña histórica sobre hechos y personajes que tuvieron una incidencia en la elaboración de dicho concepto; el trabajo a realizar se desarrolla a través de unas experiencias concretas, las cuales buscan que el estudiante pueda mejorar sus conocimientos.

Los contenidos que se desarrollan en este libro de texto en relación a la trigonometría se evidencian en la siguiente tabla:

<p>UNIDAD 6: LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS</p> <p>6.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (1)</p> <p>6.2 Conceptos Básicos de la Trigonometría</p> <p>6.2.1 Ángulo</p> <p>6.2.2 Ángulo en Posición Normal</p> <p>6.2.3 Radianes y Arcos de Circunferencia</p> <p>6.2.4 Relación entre Grados y Radianes</p> <p>6.3 La Función Circular</p> <p>6.4 Las Funciones Seno y Coseno</p> <p>6.5 La Función Tangente</p> <p>6.6 Definición de Seno, Coseno y Tangente en Circunferencias de Radio Distinto de 1</p> <p>6.7 Signos de las Funciones Trigonómicas</p> <p>6.8 Las Funciones Trigonómicas en el Triángulo Rectángulo</p> <p>Taller de la Unidad 6</p> <p>Prepárate para las Pruebas del ICFES</p> <p>UNIDAD 7: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO</p> <p>7.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (2)</p> <p>7.2 Funciones Trigonómicas de 30°, 45°, 60°</p> <p>7.2.1 Funciones Trigonómicas de 60°</p> <p>7.2.2 Funciones Trigonómicas de 30°</p> <p>7.2.3 Funciones Trigonómicas de 45°</p> <p>7.3 Funciones Trigonómicas de Cualquier Ángulo</p> <p>7.4 Funciones Trigonómicas de Ángulos Negativos</p> <p>7.5 Las Seis Funciones Trigonómicas</p> <p>Taller de la Unidad 7</p> <p>Prepárate para las Pruebas del ICFES</p> <p>UNIDAD 8: IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS</p> <p>8.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (3)</p> <p>8.2 Relaciones entre las Funciones Trigonómicas</p> <p>8.3 Identidades Trigonómicas</p> <p>8.4 ¿Cómo Probar una Identidad?</p> <p>8.5 Ecuaciones Trigonómicas</p>	<p>UNIDAD 9: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS</p> <p>9.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (4)</p> <p>9.2 Fórmulas de Suma y Resta de Ángulos</p> <p>9.3 Funciones de Ángulo Doble y Ángulo Mitad</p> <p>9.3.1 Funciones de Ángulo Doble</p> <p>9.3.2 Funciones de Ángulo Mitad</p> <p>9.4 Identidades de Producto y Suma (Opcional)</p> <p>Resumen de las Identidades</p> <p>9.5 Ejercicios Resueltos</p> <p>Taller de la Unidad 9</p> <p>Prepárate para las Pruebas del ICFES</p> <p>UNIDAD 10: GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS</p> <p>10.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (5)</p> <p>10.2 Introducción</p> <p>10.3 Funciones Periódicas</p> <p>10.4 Variación y Gráfica de la Función Seno</p> <p>10.5 Variación y Gráfica de la Función Coseno</p> <p>10.6 Amplitud, Periodo y Desfasamiento de las Funciones Seno y Coseno</p> <p>10.7 Las Gráficas de las Otras Cuatro Funciones Trigonómicas</p> <p>Taller de la Unidad 10</p> <p>Prepárate para las Pruebas del ICFES</p> <p>UNIDAD 11: APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA</p> <p>11.1 Comprensión de Lectura: Historia de la Trigonometría (6)</p> <p>11.2 Introducción</p> <p>11.3 Aplicaciones que Originan Triángulos Rectángulos</p> <p>11.4 Aplicaciones que Originan Triángulos Oblicuángulos</p> <p>Proyecto N°7: Programa para Resolver Triángulos</p> <p>Taller de la Unidad 11</p> <p>Prepárate para las Pruebas del ICFES</p>
--	--

Tabla N°4.1.2 Contenido Trigonómico
Matemática Experimental 10

Al terminar cada unidad aparece un taller de repaso con ejercicios y problemas para observar, valorar y registrar qué tanto aprendieron los estudiantes, también en esta parte

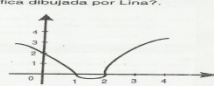
hay un simulacro, que consta de una serie de preguntas de selección múltiple con única respuesta, el cual tiene como propósito sensibilizar a los estudiantes capacitándolos y proporcionándoles las bases adecuadas para la evaluación de pruebas externas ICFES (ver figura 4.4); y en la parte final del texto se han incluido todas las respuestas de los ejercicios planteados, estas le sirven de guía al estudiante en su proceso de formación, además todas las respuestas que ofrece este libro de texto en las actividades de la trigonometría son correctas lo que le brinda mucha seguridad y confianza al estudiante en su proceso de aprendizaje, porque cuando alguna de las respuestas ofrecidas al estudiante en la sección de respuestas es incorrecta puede crear cierto grado de inseguridad y desconfianza en dicho proceso.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL I.C.F.E.S.

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA VÁLIDA.
 En estas preguntas, usted puede encontrar dos opciones válidas; pero debe seleccionar solo una; aquella considere relación, de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones dadas de la situación problemática planteada.

1. Sea f una función de variable real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5}$. Los valores que no puede tomar la variable independiente x en dicha función son:
 -2 y 3 porque estos valores anulan el numerador y el denominador de la expresión.
 -2, 3 y -3 porque estos son los ceros de la función.
 -2 porque este es un intercepto con el eje y .
 3 y -3 porque para ellos el denominador se anula.

2. Un grupo de estudiantes se les pide que dibujen la gráfica de la función definida por $y = 3x - x^2 - 2$. Lina dibujó la siguiente gráfica. ¿Es correcta la gráfica dibujada por Lina?
 Sí, porque el punto $(2, 0)$ pertenece a la gráfica y $f(2) = 0$.
 No, porque la gráfica no corresponde a una parábola y la ecuación de f , sí.
 Sí, porque los puntos $(1, 0)$ y $(2, 0)$ son los interceptos con el eje x .
 No, porque el signo de la mayor potencia f es negativo y, por tanto, su representación gráfica debe abrir hacia abajo.



3. a 5. se responden con base en la siguiente información:
 Dientes de un fondo de empleados, Juan debe cobrar una cuota fija de afiliación a cada socio, C , por cada venta de artículos que haga a un socio, más hacerse un descuento del 20% y cobrarse el IVA. Para hacer más manejable su labor administrativa, Juan decide relacionar toda la información anterior en la siguiente función: $f(x) = C + x - \frac{1}{5}x + \frac{2}{25}x$.

Esta función, la x y la C representan, respectivamente:
 Número de artículos que vende Juan y el costo de un artículo.
 Cualquier cantidad de dinero y costo de un artículo.
 Cualquier cantidad de dinero y cuota de afiliación.
 Costo de un artículo que vende Juan y cuota de afiliación.

La función podemos deducir que un socio del fondo que no adquiere artículos no paga nada. Esta relación es:
 Verdadera, porque al asignar a la variable x el valor cero, el resultado obtenido es cero.
 Falsa, porque en la fórmula hay un valor definido para cada precio de cada artículo, y en este caso el valor del artículo es cero.

373

Figura 4.4 Preparación Pruebas ICFES

El desarrollo del taller o ejercicios propuestos al final de cada unidad didáctica permite al usuario ejercitar los procesos del conocimiento, utilizar algunas de las herramientas tecnológicas disponibles y apropiadas en la temática, tales como las tradicionales del lápiz y papel para realizar operaciones y ejercicios algebraicos, demostrar identidades trigonométricas, resolver ecuaciones trigonométricas, y utilizar calculadoras científicas (ver figura 4.5), para hallar el valor de algunas funciones trigonométricas dadas o el valor del ángulo correspondiente a la relación trigonométrica indicada, de igual manera el texto trabaja las calculadoras gráficas Hewelet Packard en el trazado de las curvas trigonométricas y para hallar los ceros o raíces de un polinomio (páginas 34 y 35).

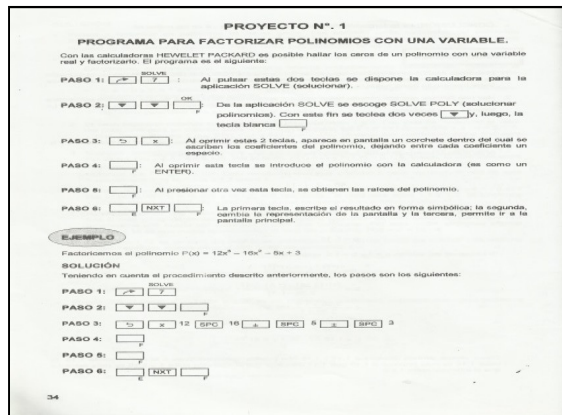


Figura 4.5 Programa para Factorizar Polinomios

Este texto da orientaciones paso a paso de cómo hacer un buen uso de la calculadora (páginas 289 y 290) para realizar cálculos gráficos y complejos, un ejemplo de tal afirmación se muestra en la figura 4.6.

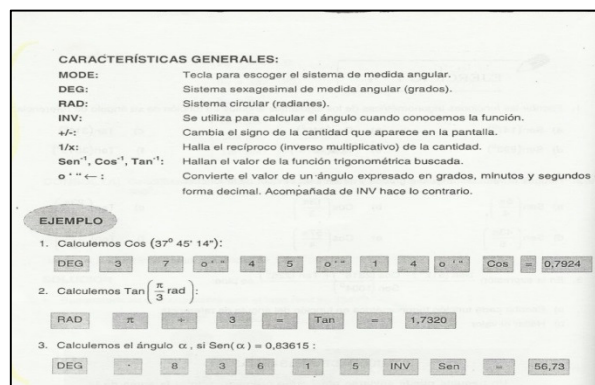


Figura 4.6 Manejo de la Calculadora

Desde este punto de vista, el camino a seguir se ve proyectado en primer lugar con la presentación del concepto de ángulo, su medida y uso, a través de la relación directa entre grados, radianes y revoluciones; luego define el significado de un punto trigonométrico, para poder introducir el concepto de función circular en términos de seno, coseno y tangente, ya que se consideran básicas para el estudio de las funciones periódicas, las cuales desde su representación gráfica nos permiten modelar algunos fenómenos; después se establecen las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en una circunferencia unitaria y no unitaria, que se hacen importantes para abordar los signos de dichas funciones, además allí se presentan algunas identidades que involucran los ángulos de referencia en

los cuatro cuadrantes; posteriormente se trabajan las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

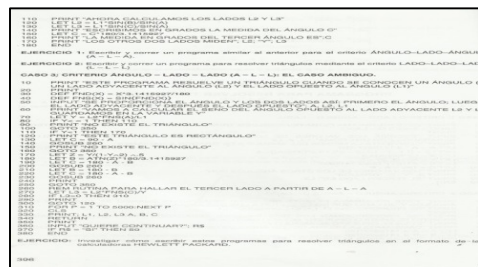
Para solucionar un problema donde se evidencie la aplicación de la trigonometría, es necesario recurrir a la gráfica de triángulos rectángulos o de triángulos oblicuángulos; por ejemplo en el primer caso, algunas veces implica determinar la altura o la distancia que hay de un objeto con respecto al otro, para ello es necesario emplear el teorema de Pitágoras o hacer uso de las definiciones establecidas por las relaciones trigonométricas generadas en un triángulo rectángulo y generalmente requieren de la ayuda de la tecnología específicamente de la calculadora científica para calcular el valor de un ángulo dado, o pueden hacer uso de una calculadora graficadora para realizar la construcción gráfica que indica el texto.

En el segundo caso se emplean los triángulos acutángulos y obtusángulos; para resolver estos problemas se requiere de dos teoremas fundamentales, que son la ley del seno y la ley del coseno. La primera, se utiliza cuando en un triángulo se conocen dos ángulos y un lado (ALA), o cuando se tienen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LAL), y la segunda se emplea cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (LAL), o cuando se conocen los tres lados (LLL). Este libro de texto presenta un programa escrito en lenguaje Basic (páginas 395 y 396) para resolver triángulos. En las figuras 4.7 y 4.8 podemos notar el uso del lenguaje de programación Basic en un proyecto para la resolución de problemas referidos a triángulos.



```
PROGRAMA PARA RESOLVER TRIANGULOS.  
RESOLUCION DE TRIANGULOS CON DOS LADOS Y EL ANGULO ENTRE ELLOS.  
Caso 1: CENITRO LADO - LADO - ANGULO  
Caso 2: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 3: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 4: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 5: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 6: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 7: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 8: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 9: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 10: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.
```

Figura 4.7 Aplicación LAL en Resolución de Triángulos



```
PROGRAMA PARA RESOLVER TRIANGULOS.  
RESOLUCION DE TRIANGULOS CON DOS LADOS Y EL ANGULO ENTRE ELLOS.  
Caso 1: CENITRO LADO - LADO - ANGULO  
Caso 2: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 3: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 4: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 5: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 6: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 7: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 8: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 9: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.  
Caso 10: CENITRO ANGULO - LADO - LADO (A - L - L): EL CASO AMBIGUO.
```

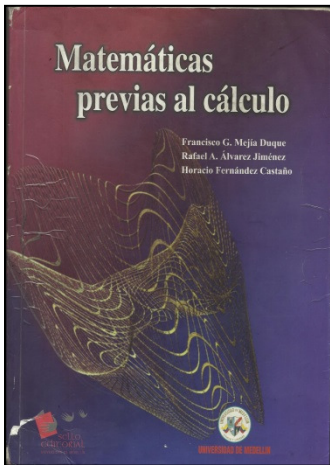
Figura 4.8 El Caso Ambiguo ALL en Resolución de Triángulos

Según la observación realizada es importante destacar, que este texto utiliza la tecnología mediante el uso de las calculadoras científicas y graficadoras, las cuales permiten graficar

funciones polinómicas, racionales y además presenta un programa para dibujar funciones por tramos (páginas 231, 232, 233, 234 y 235), dichas calculadoras también pueden ser empleadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden (2×2) y (3×3) , y son útiles para hallar las raíces de un polinomio y hacer conversiones directas entre unidades.

Como podemos observar este libro de texto puede ser un instrumento útil para facilitar el proceso de aprendizaje de los conceptos propios de la trigonometría, porque en él se plantean actividades para que los estudiantes de alguna manera propicien la exploración, reflexión, construcción y apropiación de los conceptos abordados en dichas actividades, permitiendo que los jóvenes adquieran una destreza operativa, un manejo adecuado de las temáticas, hagan oportunamente interpretaciones de gráficas, obtengan y solucionen a partir de supuestos cualquier dificultad que se les presente, es decir, el libro de texto Matemática Experimental 10 si cumple con los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

4.1.3 Matemáticas Previas al Cálculo:



El tercer libro analizado es editado por el Sello Editorial Universidad de Medellín “*Matemáticas previas al cálculo*” (Mejía, Álvarez y Fernández, 2005), el cual presenta una cadena de conceptos matemáticos, que van desde la resolución de ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado, con sus respectivas aplicaciones; los diferentes tipos de relaciones y funciones, y termina con sus últimos cuatro capítulos dedicados a la trigonometría.

Este texto se caracteriza por presentar en todos sus capítulos ejercicios de aplicación a la geometría, a la economía, a las finanzas y a otras situaciones orientadas desde la vida cotidiana del estudiante. Los temas planteados ofrecen algunas ilustraciones como ejemplos que le permiten a los estudiantes hacerse a una mejor comprensión de los conceptos, los ejercicios propuestos tienen la intención que sus usuarios puedan mejorar las habilidades y destrezas matemáticas, y así fortalecer sus conocimientos algebraicos previos al cálculo; el texto también trae las respuestas de todos los ejercicios pares planteados y una bibliografía complementaria que puede llegar a ser de gran utilidad, en cualquier momento.

Por otra parte, en el capítulo 11 llamado “Aplicación de la trigonometría”, se expresa que esta rama de las matemáticas estudia las relaciones existentes entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triángulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, de tal manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Para resolver problemas donde se requiere la construcción de un triángulo rectángulo es importante tener en cuenta la definición de las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y el concepto de ángulo de elevación y ángulo de depresión; mientras que para la solución de triángulos oblicuángulos es necesario tener presente que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y de acuerdo a los datos proporcionados por el problema se emplea la ley del seno o la ley del coseno.

Las temáticas desarrolladas por este libro en relación a la trigonometría se muestran en la siguiente tabla de contenido:

<p>CAPITULO 8 . Elementos de Trigonometría Plana</p> <p>8.1 Ángulos</p> <p>8.2 Razones trigonométricas</p> <p>8.3 Funciones trigonométricas de ángulos</p> <p>8.4 Cofunciones trigonométricas</p> <p>CAPITULO 10. Funciones Trigonómicas de más de un Ángulo</p> <p>A. Funciones e Identidades para la suma de ángulos</p> <p>B. Funciones e Identidades para la diferencia de ángulos</p> <p>C. Funciones trigonométricas de un ángulo en términos de las del ángulo medio</p> <p>D. Funciones trigonométricas del ángulo medio</p> <p>E. Fórmulas para expresar la suma y diferencia de dos funciones trigonométricas en términos del producto de las mismas</p> <p>F. Fórmulas para expresar el producto de dos funciones trigonométricas en términos de la suma de las mismas</p> <p>G. Identidades trigonométricas con funciones de más de un ángulo</p> <p>H. Ecuaciones trigonométricas con funciones de más de un ángulo</p> <p>I. Relaciones trigonométricas inversas</p> <p>J. Funciones trigonométricas inversas</p> <p>K. Gráfica de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas</p> <p>L. Identidades trigonométricas inversas</p> <p>M. Ecuaciones con funciones trigonométricas</p>	<p>CAPITULO 9. Identidades y Ecuaciones Trigonometría</p> <p>7 Identidades Fundamentales</p> <p>8 Identidades Trigonómicas</p> <p>9 Ecuaciones Trigonómicas</p> <p>CAPITULO 11. Aplicaciones de la Trigonometría</p> <p>A. Solución de triángulos rectángulos</p> <p>B. Solución de triángulos oblicuángulos Ley del Seno y Ley del Coseno</p>
--	--

Tabla N°4.1.3 Contenido Trigonómico Matemáticas Previas al Cálculo

Este texto utiliza el criterio de razón entre los lados de un triángulo rectángulo para explicar cómo es posible obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo y muestra como a partir de un ángulo en posición normal se generan las funciones trigonométricas, para que el estudiante encuentre a través de fórmulas, los valores que se originan en cada relación, igualmente sucede lo mismo con los problemas que requieren de la construcción de triángulos oblicuángulos, para aplicar la ley del seno y la ley del coseno. En este libro, también se percibió que poco se trabajan estas temáticas utilizando herramientas de tecnología diferentes a la calculadora científica, es decir, como objetos o artefactos tecnológicos se presentan implícitos el uso del mismo texto, el uso tradicional del lápiz y

papel al desarrollar muchas de las actividades algebraicas y operativas propias de la trigonometría plana especialmente con ejercicios que tienen que ver con ángulos y con los valores de las razones trigonométricas de estos según el cuadrante (ver figuras 4.9 y 4.10).

382 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA PLANA

EJERCICIOS 8.1

- 1) Encontrar un ángulo negativo que tenga el mismo lado terminal, de cada uno de los ángulos, -85° , -135° , -200° , -650°
- 2) Determinar un ángulo positivo que tenga el mismo lado terminal, de cada uno de los ángulos 85° , 5° , 148° , 215° y 343°
- 3) Expresar los siguientes ángulos en radianes: 30° , 90° , 120° , 270° , 330° , 81° , -36°
- 4) ¿Cuántos radianes hay en cada ángulo de un triángulo equilátero? ¿Cuántos hay interiores de un hexágono regular?
- 5) La velocidad del perímetro de una rueda es de 75 pies por segundo. Encontrar la velocidad angular, en radianes por segundo, si la rueda tiene 8 pies de diámetro.
- 6) ¿Cuál es el radio de una circunferencia cuyo ángulo central tiene un valor de sector correspondiente es de 48 pulgadas cuadradas?
- 7) Uno de los vértices de un triángulo equilátero está colocado en el centro de un círculo de radio 5 pulgadas y los otros dos vértices están colocados sobre su perímetro. Encontrar la longitud del arco y también la longitud de la cuerda entre los dos vértices del triángulo.
- 8) La Tierra gira alrededor de su propio eje una vez en 24 horas. Usando como radio 3960 millas, encontrar la velocidad de un punto sobre el ecuador terrestre en pies por hora. Encontrar la velocidad angular con que gira la Tierra, en radianes por hora.
- 9) Escribir una expresión general para todos los ángulos cuyos lados inicial y terminal son los de 120° .
- 10) Tomando el eje positivo de las x como lado inicial, construir los ángulos de 300° . Considerar un punto sobre el lado terminal de cada uno de los ángulos dados que $r = 2a$. Encontrar las coordenadas rectangulares de dicho punto para cada ángulo.

Aplicando valores numéricos de las funciones trigonométricas de ángulos típicos, cada una de las siguientes relaciones

11) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$	12) $\sin^2 225^\circ + \cos^2 225^\circ = 1$
13) $\sec^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ = 1$	14) $\csc^2 \frac{5\pi}{6} - \cot^2 \frac{5\pi}{6} = 1$
15) $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 90^\circ$	16) $\cos 120^\circ \cos 60^\circ + \sin 120^\circ \sin 60^\circ = \cos 60^\circ$

Figura 4.9 Aplicaciones, Conversiones y Operaciones con Ángulos

MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO 387

El ángulo dado y el que define la cofunción deben ser complementarios, es decir, la suma debe ser 90° .

$\sec(90^\circ - 18^\circ 33') = \sec 71^\circ 27'$

$\csc\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \csc\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)$

Suponiendo que se cumple la relación $\sin(35^\circ + \beta) = \cos(\beta - 15^\circ)$, hallar el ángulo β .

Como están relacionadas dos cofunciones, sus ángulos respectivos son complementarios, es decir,

$$35^\circ + \beta + \beta - 15^\circ = 90^\circ, \text{ entonces } \beta = 35^\circ$$

Comprobar que $\csc 12^\circ + \sec 78^\circ = 2 \csc 12^\circ$

Se sabe que $\sec 78^\circ = \csc(90^\circ - 78^\circ) = \csc 12^\circ$

Esta relación en $\csc 12^\circ + \sec 78^\circ = 2 \csc 12^\circ$, se tiene

$$\csc 12^\circ + \csc 12^\circ = 2 \csc 12^\circ = 2 \csc 12^\circ$$

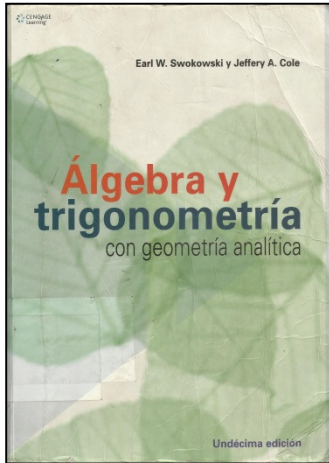
Las funciones de ángulos múltiples o submúltiplos del número π . A continuación se estudian las funciones de estos ángulos en términos del ángulo agudo y positivo α . El método que se sigue es construir los ángulos, hallar sus funciones y luego relacionarlas entre sí. El concepto geométrico de semejanza de triángulos rectángulos.

El ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Si α es agudo y positivo, entonces el ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ necesariamente está localizado en el primer cuadrante. En efecto:

Figura 4.10 Actividad de Cofunciones Trigonómicas

4.1.4 Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica:



El cuarto libro revisado se llama “*Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*” (Swokowski y Cole, 2007), se caracteriza por mostrar ejercicios y problemas que al inicio cuentan con un grado de dificultad mínimo; no obstante, es de aclarar que estos progresan gradualmente hasta plantear situaciones más difíciles, muchos de ellos contienen la visualización de gráficas, lo que proporciona claridad en el uso de definiciones, leyes y teoremas, pero otros ejercicios requieren que los jóvenes encuentren un “modelo matemático” para los datos dados, en

los ejercicios resueltos las explicaciones suelen ser minuciosas, bien detalladas y presentan cierto grado de similitud a los problemas propuestos para que los estudiantes los resuelvan.

Es de anotar, que este texto también trae como aporte al trabajo didáctico (ver figuras 4.11 y 4.12), abundantes ilustraciones, tablas explicativas y de resumen; numerosos ejemplos, explicaciones paso a paso, ejercicios de análisis, ejemplos y ejercicios para usar la calculadora graficadora con pantallas para la TI-83 Plus y la TI-86 (páginas 404, 405, 406, 415, 416, 451, 452, 453, 499, 503, 514, 515, 516 y 528).

Ejercicios de análisis del capítulo 6 499

Un trazo de coche flota en un lago. La altura del centro del coche en el tiempo t por $h(t) = 12 + \cos 3t$, en donde $3t$ segundos.

(a) Describe el movimiento del coche para $0 \leq t \leq 2$.
 (b) ¿Durante qué intervalos se eleva el coche?

S DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 6

3 en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$ para $\alpha = 1.5$, precisión de las gráficas y la capacidad de bits de precisión de su calculadora gráfica estándar no ocurre para $\alpha = 4.5$, sigue a que se presenta.

4 sea θ en tu calculadora, tal que $\cos \theta = 0.5$. Ahora antes oves puede usar la misma calculadora, y luego encuentra θ .

5 sea de soluciones de la ecuación $\sin x + \cos 2x + \cos 3x = \pi$.

6 relaciones entre funciones periódicas, funciones inversas. Con estas relaciones en el caso para que las funciones termino inversas.

7 sea x y $y_0 = \tan x$ en $[-0.1, 0.1]$ por una tabla de valores para estas tres funciones valores positivos (del orden de 10^{-6} a conclusión puedes obtener a parte de tabla?

8 sea de carreras. En la figura se muestra las circular de 2 km de diámetro. Todas las en 5 y corren en dirección con de manecillas de un reloj. Aproximada, a finales, las coordenadas del punto en el carreras terminan en relación a un sistema rectangular, con origen en el centro el eje x positivo.

Ejercicio 7

(a) Una carrera de velocidad de 2 km de largo.
 (b) Una carrera de resistencia de 500 km de largo.

7 Coordenadas de pista de carreras. Trabaja el ejercicio 6 para la pista que se muestra en la figura, si el origen del sistema de coordenadas rectangulares está en el centro de la pista y x está en el eje x negativo.

8 Hélice de motor de fuera de borda. Un motor de fuera de borda, de 90 hp a plena potencia, hará girar su hélice a 3000 rpm.

(a) Encuentra la rapidez angular ω de la hélice en radianes por segundo.
 (b) El centro de una hélice de 10 pulgadas de diámetro está ubicado 18 pulgadas bajo la superficie del agua. Expresa la profundidad $D(t) = a \cos(\omega t + c) + d$ de un punto en el borde de una pala de hélice como función del tiempo t , donde t está en segundos. Imagina que el punto está inicialmente a una profundidad de 23 pulgadas.
 (c) Gráficamente, determina el número de veces que gira la hélice en 0.12 segundos.

Figura 4.11 Actividad Propuesta con Calculadora Graficadora

7.1 Verificación de identidades trigonométricas 503

La gráfica de la Figura 1 proporciona sistema gráfico o la comprobación del ejemplo 1. Se nota de la gráfica (con modo de ventanas y de puntos) de:

$$Y_1 = 1/\cos(X) - \cos(X) \quad Y_2 = \sin(X) \tan(X)$$

Figura 1

Los valores de Y_1 y Y_2 en la Figura 2 también proporcionan sistema gráfico a la comprobación. Es posible que haya pequeñas discrepancias en los valores, como se indica en el ejemplo resuelto.

(1) Grafica $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 1$, como se muestra en las Figuras 3 y 4. Esto permite ver la gráfica de Y_3 desplazada una unidad hacia arriba. 3 en sobre Y_1 .

Figura 3

(2) Grafica $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 1$, como se muestra en las Figuras 5 y 6. Si la identidad proporciona un verdadero círculo $Y_1 = Y_2$ es cero, de modo que la gráfica de Y_3 será la gráfica de la resta y -1 con función donde Y_1 o Y_2 están indefinidas.

Figura 5

Figura 6

Figura 4.12 Verificación de Identidades con Calculadora Graficadora

En las aplicaciones enumera los pasos del procedimiento utilizado para hallar la solución del ejercicio planteado, ayudan a resolver problemas de manera sistemática, también posee las gráficas de las funciones trigonométricas y sus funciones inversas, y en forma tabulada presenta los valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales sobre una circunferencia unitaria.

Según su tabla de contenido, se podrá observar que es importante resaltar las secciones 6.7, 8.1 y 8.2, porque mencionan la solución de problemas aplicados a la trigonometría, utilizando el triángulo rectángulo y los triángulos oblicuángulos. En éste estudio se determinó que para poder resolver los problemas planteados en la sección 6.7 se espera que todos los estudiantes sepan hallar los valores de las relaciones trigonométricas y los ángulos usando la calculadora científica (ver figura 4.13).

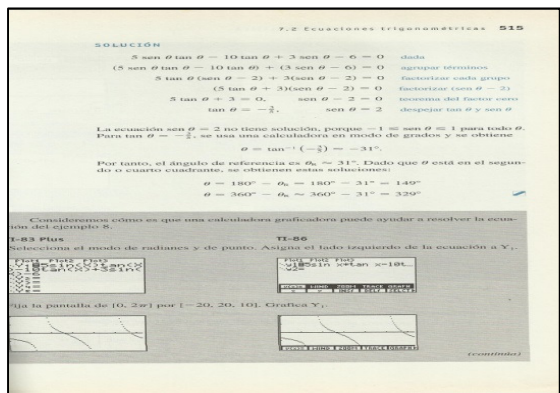


Figura 4.13 Uso de la Calculadora en Ecuaciones Trigonómicas

Las temáticas que se desarrollan en este libro de texto en relación a la trigonometría se pueden observar en la siguiente tabla de contenido:

CAPITULO 6	
Funciones Trigonómicas de Números Reales	
6.1	Ángulos
6.2	Funciones trigonométricas de ángulos
6.3	Funciones trigonométricas de números reales

Tabla N°4.1.4 Contenido Trigonómico Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica

Por otra lado, en las secciones 8.1 y 8.2 se plantean problemas que para ser resueltos, requieren de la aplicación de la ley del seno o la ley del coseno (ver figura 4.14), teniendo en cuenta los datos dados, por ejemplo, la primera se utiliza cuando se conocen los dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA) o cuando se tienen los dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA); mientras la segunda se utiliza cuando se conocen los dos

lados y un ángulo comprendido entre ellos (LAL) o cuando se tiene los tres lados (LLL), (páginas 586, 587, 588 y 589).

Se considera que algunas de las dificultades que presentan los estudiantes para resolver esta clase de problemas, radican en el hecho de no efectuar una adecuada comprensión de lectura y, por lo tanto, no elaboran una relación directa entre las diferentes formas de representación, pues, algunos de ellos no conciben cómo pasar los datos expresados en el problema a una representación gráfica o a un lenguaje matemático más formal, tampoco tienen en cuenta el concepto de proporcionalidad para hacer los dibujos a escala; también muchos de los errores que ellos cometen, están fundamentados en el hecho de no identificar con claridad las relaciones allí expuestas, y si logran reconocer el tipo de relación que se origina en el problema algunas veces se les dificulta resolverla satisfactoriamente.

8.2 Ley de los cosenos 583

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)}\right) = 48.2^\circ \approx 48^\circ$$

sustituir y simplificar
calcular β

En este punto de la solución podemos encontrar γ usando la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Pero si α o β se calculó erróneamente, entonces γ estará incorrecto. También podemos calcular γ y luego comprobar que la suma de los tres ángulos sea 180° . Así,

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ por lo que } \gamma = \cos^{-1} \frac{90^2 + 70^2 - 40^2}{2(90)(70)} \approx 25^\circ.$$

Observemos que $\alpha + \beta + \gamma = 107^\circ + 48^\circ + 25^\circ = 180^\circ$.

EJEMPLO 3 Calcular las diagonales de un paralelogramo
Un paralelogramo tiene lados de longitud de 30 cm y 70 cm y uno de los ángulos mide 65° . Calcula la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano.

SOLUCIÓN En la figura 3 se ilustra el paralelogramo $ABCD$ con sus diagonales AC y BD . Al usar el triángulo ABC con $\angle ABC = 65^\circ$, podemos calcular AC como sigue:

$$(AC)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70) \cos 65^\circ$$

ley de los cosenos
calcular
tomar la raíz cuadrada

$$AC \approx \sqrt{4025} \approx 63 \text{ cm}$$

Análogamente, si usamos el triángulo BAD y $\angle BAD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, podemos calcular BD como sigue:

$$(BD)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70) \cos 115^\circ \approx 7575$$

ley de los cosenos
tomar la raíz cuadrada

$$BD \approx \sqrt{7575} \approx 87 \text{ cm}$$

EJEMPLO 4 Hallar la longitud de un cable
Un poste vertical de 40 pies de altura está en una cuesta que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcula la longitud mínima de cable que llegará de la parte superior del poste a un punto a 72 pies cuesta abajo medido desde la base del poste.

SOLUCIÓN El trazo de la figura 4 representa los datos dados. Deseamos encontrar AC . Refiriéndonos a la figura vemos que

$$\angle ABD = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ \text{ y } \angle ABC = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ.$$

Si utilizamos el triángulo ABC , podemos calcular AC como sigue:

$$(AC)^2 = 72^2 + 40^2 - 2(72)(40) \cos 107^\circ \approx 8468$$

ley de los cosenos
sacar la raíz cuadrada

$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ pies}$$

Con la ley de los cosenos podemos derivar una fórmula para encontrar el área de un triángulo. Demostremos primero un resultado preliminar.

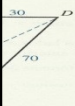
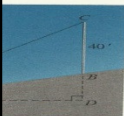
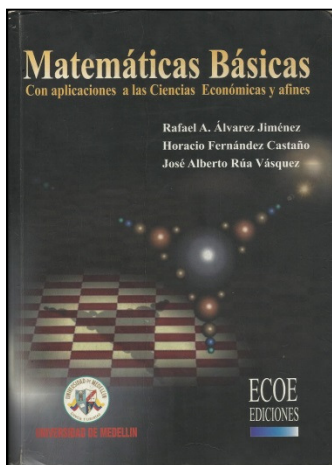



Figura 4.14 Aplicaciones de la Ley del Coseno

4.1.5 Matemáticas Básicas Con aplicaciones a las Ciencias Económicas y Afines:



El quinto libro analizado se denomina “*Matemáticas Básicas Con aplicaciones a las Ciencias Económicas y Afines*” (Álvarez, Fernández y Rúa, 2009), está constituido por doce capítulos, los primeros cinco de ellos hacen referencia a un repaso y revisión de los conceptos de conjuntos numéricos, teoría de conjuntos, y las operaciones algebraicas básicas trabajadas en el bachillerato. En los siguientes capítulos se trabajan ecuaciones e inecuaciones de una variable, se repasan los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se practican la modelación y solución de aplicaciones con una o varias incógnitas.

Antes de iniciar con el capítulo dedicado a la trigonometría se hace un estudio detallado de la forma de resolver las fracciones parciales, así como se recuerda en forma breve el uso y manejo de los operadores factorial, sumatoria y productoria; el texto presenta algunas aplicaciones de la vida cotidiana con las funciones exponencial y logarítmicas, también exhibe situaciones de la vida laboral y deportiva mediante problemas de lógica, expuestos gráficamente en diagramas de Venn y en forma analítica mediante el uso de las fórmulas para el número de elementos de dos o tres conjuntos no vacíos. El último capítulo de este texto es llamado “Elementos de trigonometría”, el cual es analizado más adelante.

También es de anotar, que en este libro, todos sus capítulos incluyen problemas de aplicación que tienen que ver con la formación de estudiantes iniciando estudios de ingeniería o áreas económicas, y al final de cada capítulo hay una sección donde aparecen las instrucciones para realizar ejercicios empleando el programa Matlab, que simplifica los procesos operativos y permite desarrollar la capacidad de análisis de los resultados, tratando de optimizar los procesos de cálculo cuando se cuenta con la habilidad en el manejo del software y el computador.

En la tabla 4.1.5 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

CAPITULO 12

Elementos de Trigonometría

- 12.1. Elementos previos
- 12.2. Funciones trigonométricas o circulares
- 12.3. Funciones trigonométricas de ángulos especiales
- 12.4. Gráficas de las funciones trigonométricas
- 12.5. Identidades fundamentales
- 12.6. Identidades trigonométricas
- 12.7. Funciones trigonométricas inversas
- 12.8. Ecuaciones trigonométricas
- 12.9. Aplicación de la trigonometría
- 12.10. MATLAB

Tabla N°4.1.5 Contenido Trigonométrico Matemáticas Básicas

Partiendo del análisis realizado este texto elabora un tratamiento básico de la trigonometría porque sus autores comienzan explicando algunas definiciones: ángulo y sus medidas utilizadas, luego describen cómo desde el criterio de razón entre los lados de un triángulo rectángulo se obtienen lo que ellos llaman funciones trigonométricas, que no pasan de ser los llamados números seno, coseno y tangente. Además hacen referencias a las funciones trigonométricas para ángulos notables, de igual manera realizan el desarrollo de los procesos de las identidades trigonométricas, las ecuaciones y por último las aplicaciones para la ley del seno y la ley del coseno. Cabe anotar que el tratamiento dado en este texto a las funciones trigonométricas es superficial y no se profundiza mucho en el tema, sino que trata de resolver las situaciones planteadas de forma mecánica y así obtener los valores en cada relación.

El texto Matemáticas Básicas utiliza el software matemático Matlab (ver figuras 4.15 y 4.16) para resolver ecuaciones trigonométricas utilizando la función solve (páginas 469, 470).

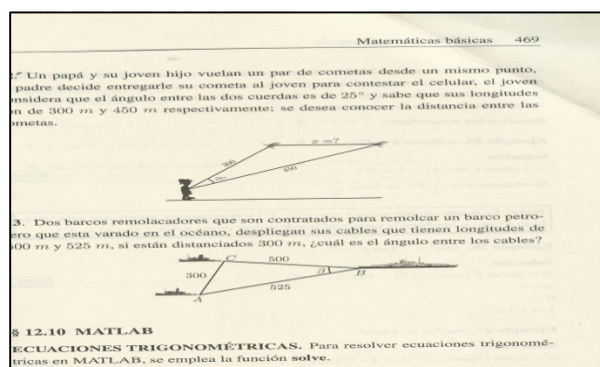


Figura 4.15 Uso del Programa Matlab

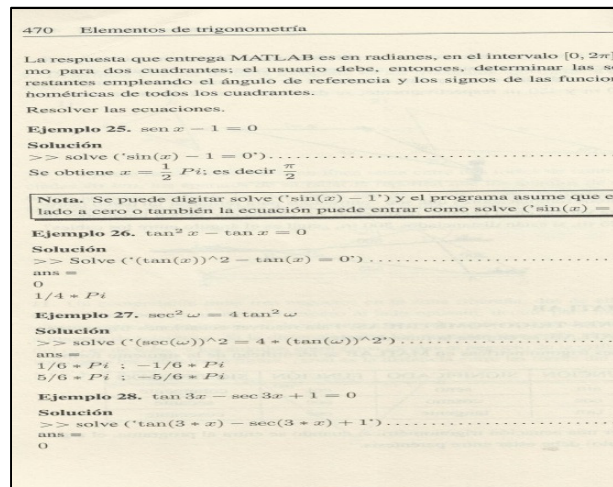


Figura 4.16 Solución de Ecuaciones Trigonómicas en Matlab

Matemáticas Básicas con aplicaciones a las Ciencias Económicas y Afines, está orientado en su contenido preferiblemente como su nombre lo indica a los estudiantes de las facultades de carreras económico-administrativas, este texto plantea ejemplos ilustrados que le permiten a los lectores y estudiantes la comprensión de los conceptos estudiados con el profesor en el aula, también posee en cada capítulo una sección de ejercicios propuestos con el objetivo principal que los estudiantes puedan consolidar la parte conceptual, y adquirir la destreza o habilidad necesaria para desarrollar las operaciones y aplicaciones planteadas.

4.1.6 Hipertexto Matemáticas 10:



El sexto libro de referencia analizado es llamado por la Editorial Santillana “*Hipertexto, Matemáticas 10*”, este se convierte en una herramienta tecnológica básica que con su ayuda facilita a los estudiantes la adquisición de habilidades y destrezas, permitiéndoles fortalecer en cada pensamiento matemático (Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio, Variacional), los procesos generales de razonamiento, comunicación, modelación, planteamiento y resolución de problemas.

Este libro de texto propone al iniciar cada unidad una serie de lecturas, para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, también recomiendan hacer uso de las TIC para que los estudiantes observen que el objeto a conocer presenta diferentes formas de ser tratado, para ello, presenta una serie de hipervínculos para que los estudiantes del grado 10° amplíen, profundicen y comprendan los ámbitos conceptuales trabajados en clase; en el desarrollo de las temáticas se encuentran ejemplos resueltos (ver figura 4.17) que explican el procedimiento que se debe realizar para obtener un resultado adecuado (páginas 70, 71, 103 y 105).

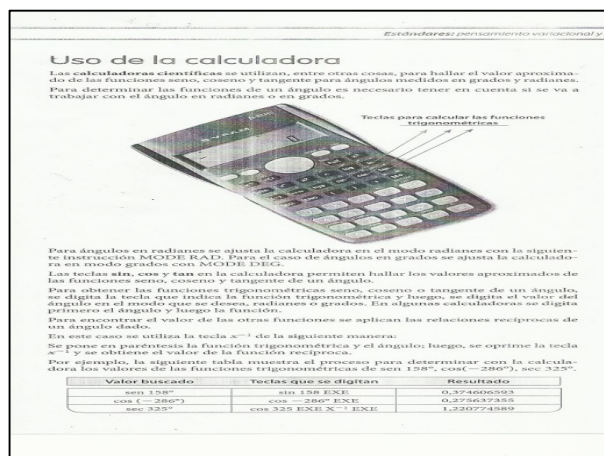


Figura 4.17 Uso de la Calculadora

En la siguiente tabla de contenido se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

UNIDAD 2. Funciones Trigonómicas

Ángulos

Ángulo en posición normal
Medición de ángulos en el mismo sistema
Sexagésima
Ángulos coterminales
Medición de ángulos en el sistema cíclico
Longitud de arco
Área de sector circular
Velocidad angular
Velocidad lineal

Triángulos

Teorema de Pitágoras

Funciones Trigonómicas

Circunferencia unitaria
Puntos de la circunferencia unitaria
Definición de las funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales
Relaciones recíprocas
Identidades recíprocas
Funciones pares e impares
Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo
Valores de las razones trigonométricas para ángulos 30° , 45° y 60° .
Razones trigonométricas para el ángulo de 45°
Funciones trigonométricas de ángulos complementarios-cofunciones
Ángulos de referencia
Funciones trigonométricas de ángulo coterminales
Uso de la calculadora
Problemas de aplicación
Y esto que aprendí, ¿Para qué me sirve?
La función seno en la fibra óptica

UNIDAD 3. Gráficas de las funciones trigonométricas

Líneas trigonométricas

Líneas trigonométricas para ángulos ubicados en otros cuadrantes

Gráfica de las funciones trigonométricas

Gráfica de la función seno ($y = \text{sen } x$)
Gráfica de la función coseno ($y = \text{cos } x$)
Gráfica de la función tangente ($y = \text{tan } x$)
Gráfica de la función cotangente ($y = \text{cot } x$)
Gráfica de la función secante ($y = \text{sec } x$)
Gráfica de la función cosecante ($y = \text{csc } x$)

Análisis y elaboración de gráficas

Traslación de funciones
Reflexión de funciones
Comprensión y alargamiento
Amplitud
Período
Desfase o desplazamiento de fase
Funciones trigonométricas inversas
Función Arcoseno
Función Arcocoseno
Función Arcotangente

Función Arcocotangente

Función Arcosecante

Función Arcocosecante

Operaciones con funciones trigonométricas inversas

Y esto que aprendí, ¿Para qué me sirve?

La función seno en la corriente eléctrica

Competencias laborales

UNIDAD 4. Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Solución de triángulos rectángulos

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen un lado y un ángulo

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen dos lados

Ángulo de elevación y ángulo de depresión

Solución de Triángulos Oblicuángulos

Ley de Seno

Ley de Coseno

Área de un triángulo

Vectores

Y esto que aprendí, ¿Para qué me sirve?

Triángulos Oblicuángulos en el diseño de puentes innovadores

UNIDAD 5. Trigonometría Analítica

Identidades Trigonómicas

Relaciones recíprocas

Relaciones que son razón de dos funciones

Identidades pitagóricas

Expresión de una función en términos de las otras cinco

Simplificación de expresiones trigonométricas

Demostración de una identidad trigonométrica

Identidades para la suma de ángulos

Identidades trigonométricas para ángulos dobles

Identidades trigonométricas para ángulos medios

Transformación de productos en sumas o diferencias

Transformación de sumas o diferencias en productos

Ecuaciones trigonométricas

Solución de ecuaciones trigonométricas de la forma $f(x) = k$

Ecuaciones trigonométricas lineales

Ecuaciones trigonométricas cuadráticas

Ecuaciones trigonométricas con identidades fundamentales

Ecuaciones trigonométricas con identidades para ángulos dobles y medios

Ecuaciones trigonométricas en funciones trigonométricas inversas

Y esto que aprendí, ¿Para qué me sirve?

Trigonometría en la dirección de un carro

Tabla N°4.1.6 Contenido Trigonómico
Hipertexto Matemáticas 10

Es de anotar, que este libro al finalizar cada unidad, trae un resumen de las temáticas trabajadas (ver figura 4.18), también presenta un taller que pretende ayudar al estudiante a

reforzar los conocimientos aprendidos y además prepararlo para presentar las respectivas evaluaciones.

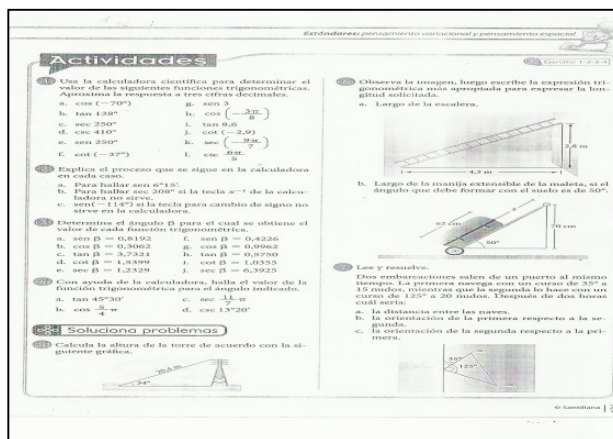


Figura 4.18 Actividades con Ayuda de la Calculadora

Es de resaltar que este libro de texto inicia con una presentación de “repasso” del concepto función y sus propiedades, luego presenta las diferentes formas de representar una función, explica el procedimiento que se utiliza para hallar el dominio y el rango de una función, también aquí se hace claridad en los conceptos de función creciente, decreciente o constante y se finaliza este trabajo con la clasificación de las funciones polinómicas y trascendentales. Con estos conceptos matemáticos que se desarrollan preliminarmente se espera que sirvan como punto de partida para entender y comprender mejor todo lo referente a la trigonometría.

En Hipertexto Matemáticas 10, se puede considerar que los conceptos básicos de la trigonometría se fundamentan en la clasificación de los ángulos, su medida y uso, los cuales permiten enfatizar en los criterios de semejanza de triángulos y se finaliza con la práctica del teorema de Pitágoras; todos estos elementos tienen la intención de que el estudiante conozca y maneje la noción de proporcionalidad (ver figura 4.19), porque en ella se cimientan las razones trigonométricas; luego se realiza un estudio detallado de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y su aplicación a través del planteamiento y resolución de problemas.



Figura 4.19 Prueba de Razonamiento sin Usar Transportador

Posteriormente se definen las funciones trigonométricas como una clase de las funciones circulares, aquí también se manejan los valores de ángulos notables y ángulos especiales, para continuar con algunas relaciones entre los ángulos de referencia, los signos de las coordenadas de los ángulos y la representación gráfica de algunas funciones trigonométricas; después se plantean problemas que involucran la aplicación de la ley del seno y la ley del coseno, en los cuales se requiere la construcción gráfica o mental de los triángulos obtusángulos para encontrar su solución; finalmente se resuelven identidades y ecuaciones trigonométricas fundamentales.

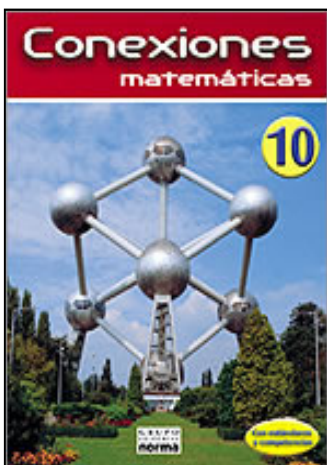
Según las temáticas observadas al interior de su tabla de contenido, se pueden identificar dos orientaciones fundamentales para abordar en el aula la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría; por un lado está, la trigonometría plana, que se ocupa de las figuras contenidas en el plano, haciendo mención a la resolución de triángulos, con el propósito de determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos; y por el otro lado está la trigonometría analítica, que hace referencia a los procesos algebraicos, donde se explican los ámbitos conceptuales que van desde la simplificación y factorización de expresiones trigonométricas hasta la solución de ecuaciones donde intervienen las funciones trigonométricas para determinados ángulos.

4.2 LIBROS DE TEXTO DE LA BASE DE DATOS COLOMBIA APRENDE

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición y Editorial	Unidades que trabajan la Trigonometría
Moreno G, Vladimir	2006	Conexiones Matemáticas 10	Norma	Unidad 1, 2, 3 y 4
Bautista B. Mauricio; Ramírez M. Carlos; Chamorro M. Andrea; Romero R. Juan; Torres S. Wilson	2007	Nuevas Matemáticas 10 Trigonometría – Geometría Analítica – Estadística	Corregida Santillana	Unidad 2, 3, 4 y 5
Galindo V. Elsa; Cely R. Javier	2009	Fórmula Trigonometría y Geometría Analítica 10	Primera Voluntad SA	Unidad 2, 3, 4 y 5
Vergara, Gladys; Rojas C. Carlos; García, Olga	2009	Misión Matemática 10 Trigonometría – Geometría Analítica - Estadística	21 Educar Editores SA	Unidad 2 y 3
Alcaide, Fernando; Calvo Sotero; Donaire Juan Jesús; Hernández Joaquín; Moreno María; Cerrano Esteban; Vizmanos José	2009	Código Matemáticas 10	Primera Ediciones s.m	Lecciones 3, 5 y 6
Buitrago, Lida; Romero, Juan de Jesús; Ortiz, Ludwig; Gamboa, Jeinsson; Morales Dorys; Castaño, José; Jiménez, Juan.	2012	Los Caminos del Saber Matemáticas 10	Alumno Santillana S.A.	Unidades 2, 3, 4 y 5

Tabla N°4.2 Ficha Técnica de los Libros de Texto de la Base de Datos Colombia Aprende

4.2.1 Conexiones Matemáticas 10:



Es un texto donde su autor muestra los pensamientos matemáticos Espacial, Numérico, Variacional y Métrico en buena forma, especialmente en el campo de la trigonometría. Desarrolla el Pensamiento Espacial relacionando las partes de un triángulo rectángulo mediante razones, aplicando estas razones trigonométricas en la solución de problemas, también representando y caracterizando las distintas funciones trigonométricas e identificando las diversas funciones de cada razón trigonométrica mediante propiedades geométricas. Para

hacer crecer el Pensamiento Variacional enseña a interpretar la periodicidad de las funciones trigonométricas en los problemas de aplicación, aplicando las funciones trigonométricas en la modelación de problemas elementales, invita a identificar las características analíticas necesarias para que una función tenga inversa. Promueve el Pensamiento Métrico usando razones trigonométricas en triángulos rectángulos para determinar medidas de longitudes y de ángulos, además estableciendo identidades entre distintas razones trigonométricas. Cumple con los estándares del Pensamiento Numérico mediante la simplificación de expresiones que contienen funciones trigonométricas y aplicando identidades trigonométricas en la solución de problemas.

TIPO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO	¿CÓMO LO MUESTRA EL LIBRO DE TEXTO?
Pensamiento Espacial	<ul style="list-style-type: none"> • Relaciona las partes de un triángulo mediante razones. • Aplica las razones trigonométricas en la solución de problemas
Pensamiento Variacional	<ul style="list-style-type: none"> • Enseña e interpreta la periodicidad de las funciones trigonométricas en la modelación de problemas. • Identifica las características necesarias para que una función tenga inversa.
Pensamiento Métrico	<ul style="list-style-type: none"> • Usa razones trigonométricas en triángulos rectángulos para determinar medidas de longitudes y de ángulos. • Establece identidades entre distintas razones trigonométricas.
Pensamiento Numérico	<ul style="list-style-type: none"> • Simplifica expresiones que contienen funciones trigonométricas. • Aplica identidades trigonométricas en la solución de problemas.

Tabla N°4.2.1 Uso de los Pensamientos Matemáticos en Conexiones Matemáticas 10

El texto Conexiones Matemáticas 10 presenta procesos bien definidos tanto para las conexiones, la comunicación, el razonamiento lógico y la resolución de problemas. En las

conexiones muestra el teorema de Pitágoras como medio para determinar las longitudes desconocidas en el triángulo y poder calcular el valor de las diferentes razones trigonométricas y establece relaciones y diferencias entre estas, además modela situaciones mediante funciones trigonométricas inversas así como establece relaciones entre ecuaciones algebraicas y trigonométricas, también simplifica expresiones utilizando identidades trigonométricas.

En los procesos de comunicación expresa un lenguaje matemático en situaciones que involucran funciones trigonométricas inversas, establece relaciones entre dos expresiones trigonométricas, también permite encontrar soluciones de ecuaciones y las expresa de diferente manera. En las secciones de razonamiento lógico se argumentan algebraica y geoméricamente propiedades de las funciones trigonométricas inversas, explica y justifica los pasos para establecer la demostración de una identidad y encontrar los valores que verifican una igualdad, en general argumenta algebraica y geoméricamente las propiedades de las funciones trigonométricas. En el proceso de la resolución de problemas involucra ciclos de repetición de un fenómeno mediante las funciones trigonométricas, se propone trazar la gráfica de algunas funciones en las diferentes actividades, e invita a utilizar una calculadora o el computador, para resolver problemas que involucren razones trigonométricas, propone estrategias para la solución de problemas trigonométricos, muestra cómo aplicar las leyes de seno y coseno en la resolución de problemas, propone estrategias en la solución de problemas trigonométricos cuya incógnita sea un ángulo.

En las actividades o talleres de competencias invita a la resolución de problemas, al trabajo en grupo, a realizar cálculos con o sin la ayuda de la calculadora, a realizar conversiones, a prepararse para las pruebas ICFES. Invita al usuario a encontrar los valores exactos de algunas funciones inversas con y sin el uso de la calculadora. Además indica, enseña o recuerda el proceso para encontrar la función trigonométrica inversa con la calculadora, así: coloca la calculadora en modo radianes (RAD) o grados (DEG), según sea el caso, por ejemplo para hallar $\text{sen}^{-1}(0,31)$ se realizan los siguientes pasos: teclear

SHIFT SEN . 3 1

y en la pantalla de la calculadora aparecerá: 0.315193 en radianes, o aparecerá 18.05923 en grados (página 49).

Enseña que en el programa Excel se dispone del botón fx (ver figura 4.20) el cual permite acceder a una librería de funciones (página 54); dentro de esta librería esta la categoría de matemáticas y trigonométricas, esta posee las funciones ACOS, ASEN y ATAN. Y muestra cómo utilizar estas funciones para construir las gráficas de las funciones trigonométricas inversas: $Sen^{-1}(x)$, $Cos^{-1}(x)$, $Tan^{-1}(x)$.

Para avanzar más

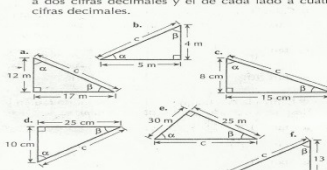
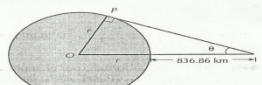
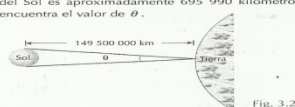
- En el programa Excel se dispone del botón fx , el cual permite acceder a una librería de funciones; dentro de esta librería está la categoría de Matemáticas y trigonométricas, en esta categoría se encuentran las funciones ACOS, ASEN Y ATAN. Utiliza estas funciones para construir las gráficas de las funciones trigonométricas inversas: $sen^{-1}(x)$, $cos^{-1}(x)$, $tan^{-1}(x)$.
- Utilizando triángulos rectángulos, evalúa.
 - $sen\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$
 - $cos\left(\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$
 - $sec\left(\tan^{-1}\frac{8}{3}\right)$
 - $cot\left(\tan^{-1}\frac{x}{x+1}\right)$
- Establece el valor de verdad de las proposiciones. Justifica.
 - El dominio de $y = \tan^{-1}x$ es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - La función arcotangente es par.
 - La función arcotangente es creciente.
 - $\tan^{-1}(\tan x) = x$ para todo valor x .
 - La función $y = \tan^{-1}x$ toma un valor máximo.
 - Si $0 < x < \pi$, entonces la inversa de $\tan x$ es $\tan^{-1}x$.
- Teniendo en cuenta el cuadrante indicado, halla el valor de θ . Expresa las respuestas en radianes y grados, y redondea a cuatro cifras decimales.
 - $\tan \theta = -0.5$; cuarto cuadrante.
 - $\tan \theta = 10$; tercer cuadrante.
 - $\tan \theta = -0.356$; segundo cuadrante.
 - $\tan \theta = 0.53$; segundo cuadrante.
- Busca un número θ en $\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$, tal que $\tan \theta = -\frac{1}{10}$.
- Demuestra que $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$.
(Sugerencia: recuerda que la función $y = \tan x$ es una función impar).
- Halla los lados y ángulos desconocidos de cada triángulo rectángulo. Redondea el valor de cada ángulo a dos cifras decimales y el de cada lado a cuatro cifras decimales.
 
- Un satélite orbita la Tierra a una altura de 836.86 kilómetros. El ángulo θ para un punto P sobre el horizonte es aproximadamente 63.15° . Utiliza esos datos para encontrar un valor aproximado del radio de la Tierra. Justifica.
 
- El Sol está aproximadamente a 149 500 000 kilómetros de la Tierra. Desde un punto sobre la Tierra, el diámetro del Sol subtende un ángulo θ . Si el radio del Sol es aproximadamente 695 990 kilómetros, encuentra el valor de θ .
 

Figura 4.20 Uso de Excel para Graficar Funciones Trigonómicas Inversas

En la tabla N° 4.2.2 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría en libro de texto Conexiones Matemáticas 10:

Unidad 1

Pensamientos Espacial y Métrico
Razones Trigonómicas

Tema 1

Ángulos y sistemas de medición
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 2

Distancia entre puntos
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 3

Razones trigonométricas
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 4

Identidades trigonométricas fundamentales
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 5

Aplicaciones elementales
Taller de competencias
Para avanzar más
Evaluación de competencias

Unidad 2

Pensamientos Espacial y Variacional
Funciones trigonométricas

Tema 1

Funciones circulares
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 2

Ángulos de referencia
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 3

Gráficas de las funciones $\sin\theta$ y $\cos\theta$
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 4

Gráficas de las funciones $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$
Taller de competencias
Para avanzar más
Evaluación de competencias
Prueba ICFES

Unidad 3

Pensamientos Espacial y Variacional
Funciones Trigonómicas Inversas

Tema 1

Concepto de función inversa
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 2

Inversa del seno
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 3

Inversa del coseno
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 4

Inversa de la tangente
Taller de competencias
Para avanzar más
Evaluación de competencias

Unidad 4

Pensamientos Numérico y Variacional
Identidades y Ecuaciones

Tema 1

Identidades
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 2

Funciones para adición y multiplicación de ángulos
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 3

Ecuaciones trigonométricas
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 4

Identidades para adiciones y multiplicaciones
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 5

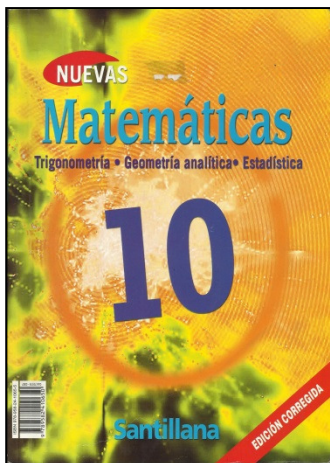
Trasformaciones
Taller de competencias
Para avanzar más

Tema 6

Ley de senos y ley de cosenos
Taller de competencias
Para avanzar más
Evaluación de competencias
Prueba ICFES

Tabla N°4.2.2 Contenido Trigonómico
Conexiones Matemáticas 10

4.2.2 Nuevas Matemáticas 10:



Este desarrolla los contenidos propios del área de la trigonometría, de acuerdo con los estándares de matemáticas y los lineamientos curriculares propuestos por el MEN. En cada sección propone un bloque de ejercicios de verificación de los conocimientos con tres temáticas, a saber: solución de problemas, la matemática herramienta para otras ciencias, y prueba ICFES.

- En la solución de problemas se presentan estrategias para el planteamiento y la solución de situaciones problemáticas (páginas 40, 42, 43, 64, 65, 66, 90, 92, 93, 105, 125, 128, 129).

- En la relación de la matemática como herramienta para otras ciencias, presenta lecturas de contextos cotidianos (ver figuras 4.21 y 4.22) donde se ve la matemática realmente como el medio fundamental para el desarrollo de la sociedad, la tecnología, las artes, los deportes, etc. (páginas 67, 68, 94, 95, 96, 106 y 107).

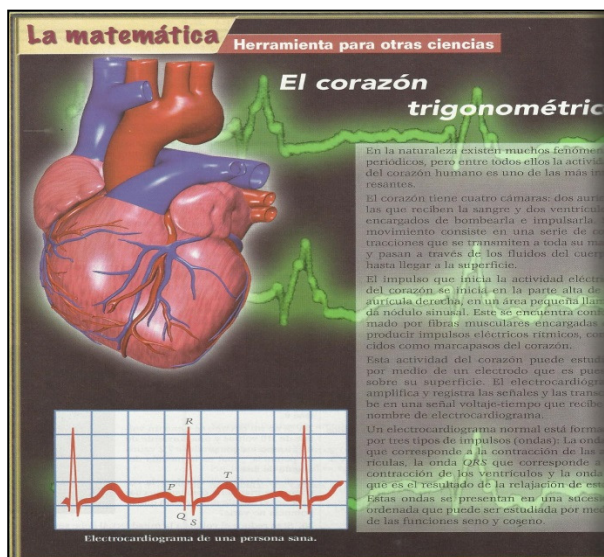


Figura 4.21 La Trigonometría en Medicina

- Propone preguntas tipo selección múltiple enfocadas en el núcleo común y en la profundización de la prueba de matemáticas planteada por el ICFES (108, 109, 110, 117 y 118).

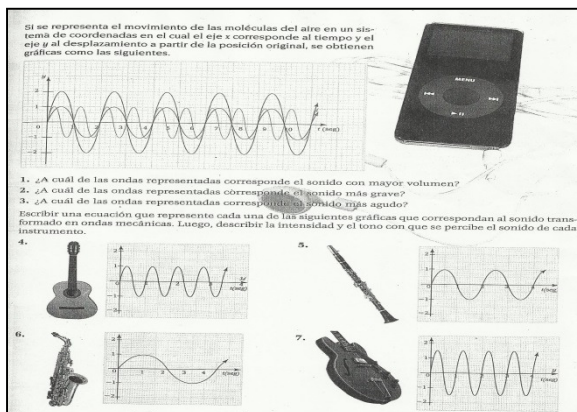


Figura 4.22 La Trigonometría en la Música

El dispositivo o herramienta tecnológica que más utiliza este libro de texto es la calculadora, para encontrar a través de su uso el valor aproximado de las diferentes funciones trigonométricas. Enseña y da instrucciones sobre el manejo de la calculadora (ver figura 4.23), recordándole al usuario y estudiantes que para encontrar y determinar los valores aproximados de las funciones trigonométricas inversas en grado sexagesimales, la calculadora debe estar en modo DEG, y como los valores de las funciones trigonométricas inversas son números reales correspondientes a ángulos medidos en radianes, recuerda que por ello es necesario trabajar con la calculadora en modo RAD (páginas 63, 71 y 103).

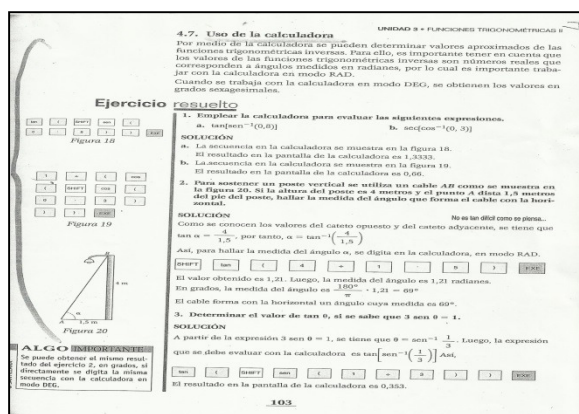


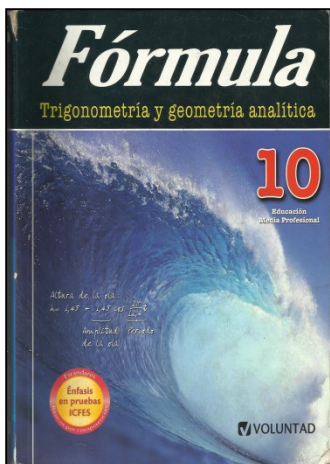
Figura 4.23 Uso de la Calculadora Científica

En la tabla 4.2.3 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p>Unidad 2. Funciones trigonométricas I</p> <p>Tema 1. Conceptos previos</p> <ol style="list-style-type: none"> Ángulos Ángulos sobre el plano cartesiano Medición de ángulos Longitud de arco Velocidad angular y velocidad lineal Triángulos <ul style="list-style-type: none"> Tras las huellas Comparaciones <p>Tema 2. Funciones trigonométricas</p> <ol style="list-style-type: none"> Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal Signo de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal Funciones trigonométricas de los ángulos Cuadrantales <p>Tema 3. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo</p> <ol style="list-style-type: none"> Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo Razones trigonométricas para 30°, 45° y 60° Ángulos complementarios <p>Tema 4. Reducción de ángulos al primer cuadrante</p> <ol style="list-style-type: none"> Ángulos de referencia Funciones trigonométricas de ángulos Coterminales Valor numérico de expresiones que involucran funciones trigonométricas <p>Tema 5. Problemas de aplicación</p> <ul style="list-style-type: none"> Distancia a la Tierra desde una nave espacial Ley de Snell <p>Unidad 3. Funciones trigonométricas II</p> <p>Tema 1. La circunferencia unitaria</p> <ol style="list-style-type: none"> Definición de circunferencia unitaria Funciones trigonométricas definidas en la circunferencia unitaria Líneas trigonométricas. <p>Tema 2. Gráficas de las funciones trigonométricas</p> <ol style="list-style-type: none"> Gráfica de la función seno ($y = \text{sen } x$) Gráfica de la función coseno ($y = \text{cos } x$) Gráfica de la función tangente ($y = \text{tan } x$) Gráfica de la función cotangente ($y = \text{cot } x$) Gráfica de la función secante ($y = \text{sec } x$) Gráfica de la función cosecante ($y = \text{csc } x$) <p>Análisis y elaboración de gráficas</p> <ol style="list-style-type: none"> Traslación de funciones Reflexión de funciones Amplitud Período Desfase <ul style="list-style-type: none"> La matemática del sonido <p>Tema 4. Funciones trigonométricas inversas</p> <ol style="list-style-type: none"> Función arcoseno Función arcocoseno Función arcotangente Función arcocotangente Función arcosecante 	<ol style="list-style-type: none"> Función arcosecante Uso de la calculadora Operaciones con funciones trigonométricas inversas El corazón trigonométrico Núcleo común <p>Unidad 4. Aplicaciones de las funciones trigonométricas</p> <p>Tema 1. Resolución de triángulos rectángulos</p> <ol style="list-style-type: none"> Resolución de triángulo rectángulos Ángulos de elevación y de depresión <p>Tema 2. Resolución de triángulos oblicuángulos</p> <ol style="list-style-type: none"> Teorema o ley del seno Teorema o ley del coseno Área de un triángulo <p>Tema 3. Vectores</p> <ol style="list-style-type: none"> Componentes de un vector Suma de vectores Vector velocidad Vector fuerza <ul style="list-style-type: none"> Los satélites artificiales <p>Unidad 5. Trigonometría analítica</p> <p>Tema 1. Estudio algebraico de las funciones trigonométricas</p> <ol style="list-style-type: none"> Operaciones algebraicas con funciones trigonométricas Factorización de expresiones con funciones trigonométricas Simplificación <ul style="list-style-type: none"> Tema 2. Identidades trigonométricas I <ol style="list-style-type: none"> Definición Identificación fundamental Formas de expresar una función trigonométrica en términos de las otras cinco funciones Simplificación de expresiones Trigonométricas Tema 3. Identidades trigonométricas II <ol style="list-style-type: none"> Demostración de una identidad Identidades para la suma y la diferencia de ángulos Identidades para ángulos dobles y ángulos medios Identidades que simplifican la ciencia Tema 4. Ecuaciones trigonométricas <ol style="list-style-type: none"> Ideas preliminares Ecuaciones trigonométricas Ecuaciones trigonométricas con identidades Ecuaciones trigonométricas con identidades para ángulos dobles y ángulos medios Ecuaciones trigonométricas con funciones inversas La naturaleza trigonométrica Núcleo común
---	---

Tabla N°4.2.3 Contenido Trigonométrico Nuevas Matemáticas 10

4.2.3 Fórmula 10:



En el contexto de la trigonometría el libro de texto Fórmula 10 desarrolla los diferentes pensamientos matemáticos a los que se refiere el documento más reciente del Ministerio de Educación Nacional (MEN) acerca de los estándares básicos, buscando mejorar los procesos de razonamiento, comunicación, modelación, solución de problemas y procedimientos matemáticos.

El texto enfatiza en el desarrollo conceptual, ejemplos y actividades clasificadas por competencias en función de los procesos de pensamientos, cada unidad posee una sección de aplicaciones donde se ven los usos de la Trigonometría en la vida práctica en diferentes escenarios. En sus actividades operativas utiliza las tecnologías tradicionales, el lápiz y papel además usa medios o herramientas como el compás y el transportador (ver figura 4.24), para trazar ángulos y construir triángulos especiales (página 30).

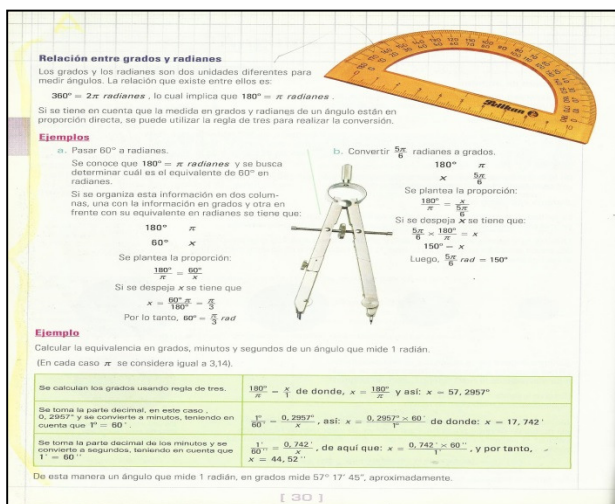


Figura 4.24 El Transportador y el Compás, Tecnología Clásica

También utiliza la calculadora científica para realizar operaciones y cálculos de funciones trigonométricas en grados y en radianes (ver figura 4.25), con lo que muestra la necesidad

de utilizar la calculadora porque sin ella, habría que recurrir al uso de tablas las cuales poseen algunas limitaciones, aunque tiene secciones que abordan diferentes hechos que relacionan las matemáticas con los avances tecnológicos (ver figura 4.26) por ejemplo muestra como calcular el área de un triángulo utilizando Excel (página 46 y 102).



Figura 4.25 Algunos Usos de la Calculadora Científica

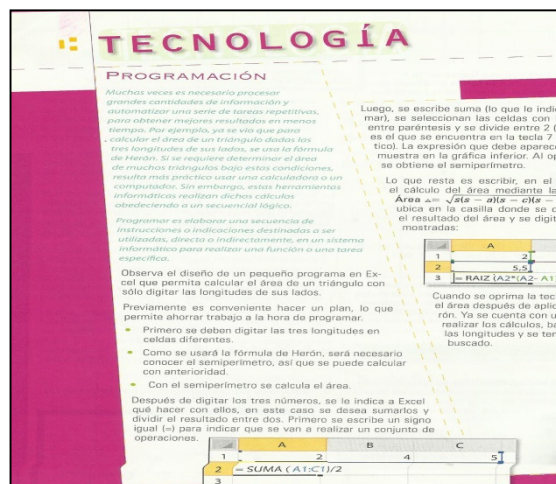


Figura 4.26 Área del Triángulo en Excel

También posee secciones de repaso, afianzamiento y problemas adicionales, además tiene pruebas de mejoramiento (ver figuras 4.27 y 4.28) y evaluación con las cuales se pretenden identificar las dificultades y los logros no superados por los estudiantes, a la vez que

familiariza a estos con las pruebas nacionales (ICFES) y pruebas internacionales (PISA, TIMSS) (Páginas 24, 25, 104, 105, 148, 149). Posee un solucionario donde muestra las respuestas de algunos de los ejercicios y problemas propuestos.

Pruebas de mejoramiento

Prueba PISA

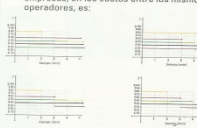
Contesta las preguntas 1 al 8 de acuerdo con la siguiente información.

En tres empresas de telefonía celular se tienen las tarifas por minuto* que muestra cada cartel:

Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
Tarifa al mismo operador \$ 40 el minuto.	Tarifa al mismo operador \$ 60 el minuto y después del tercero, \$ 30.	Tarifa al mismo operador \$ 50 al minuto y después del cuarto, \$ 30.
Tarifa a otro operador \$ 80 los dos primeros minutos y desde el tercero, \$ 90.	Tarifa a otro operador \$ 70 el minuto.	Tarifa a otro operador \$ 50 los tres primeros minutos y desde el cuarto, \$ 30.


*Minuto o fracción.

- Si se hace una llamada de cinco minutos entre teléfonos del mismo operador, la empresa en la que sale más costosa dicha llamada es:
 - a. 1
 - b. 2
 - c. 3
 - d. En todas vale lo mismo.
- Si se comparan las tarifas de las empresas con una llamada entre teléfonos del mismo operador, con una duración de tres minutos, es correcto afirmar que:
 - a. El minuto sale más barato en la empresa 3 que en la 1.
 - b. El minuto es más caro en la empresa 3 que en la 2.
 - c. El minuto más barato es el de la empresa 2.
 - d. El minuto más barato es el de la empresa 3.
- Si se hacen llamadas entre teléfonos de empresas diferentes, el minuto más barato está en la empresa:
 - a. 1
 - b. 2
 - c. 3
 - d. En todas vale lo mismo.
- Hacer una llamada de un cuarto de hora entre operadores distintos en la empresa 3 cuesta:
 - a. \$ 750
 - b. \$ 450
 - c. \$ 960
 - d. \$ 510
- Una persona tiene \$ 210. De la cantidad de minutos que puede hablar en cada empresa, entre teléfonos de operadores distintos, es incorrecto afirmar que:
 - a. Es la misma en las empresas 1 y 2.
 - b. Es mayor en la empresa 3 que en las otras dos.
 - c. En la empresa 3 se puede hablar el doble de minutos que en la empresa 1.
 - d. Es menor en la empresa 2 que en la 3.
- La gráfica que describe de mejor manera el comportamiento de las tarifas de las tres empresas, en los costos entre los mismos operadores, es:



- Si x representa la cantidad de minutos que se hablan ($x < 3$), la función por tramos $t_1(x)$ que corresponde a la tarifa de la empresa 1 para llamadas entre operadores distintos es:
 - a. $t_1(x) = \begin{cases} 50x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 150 + 30x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 - b. $t_1(x) = \begin{cases} 50x, & \text{si } x < 3 \\ 150 + 30x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 - c. $t_1(x) = \begin{cases} 50x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 150 + 30x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 - d. $t_1(x) = \begin{cases} 50x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 150 + 30x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
- Si x representa la cantidad de minutos que se hablan ($x \geq 3$), la función por tramos $t_2(x)$ que corresponde a la tarifa de la empresa 2 para llamadas entre teléfonos del mismo operador es:
 - a. $t_2(x) = \begin{cases} 60x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 180 + 30x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 - b. $t_2(x) = \begin{cases} 60x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 180 + 30x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
 - c. $t_2(x) = \begin{cases} 60x, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 180 + 30x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
 - d. $t_2(x) = \begin{cases} 60x, & \text{si } 0 < x < 2 \\ 180 + 30x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Las ventas en miles de millones de pesos de las empresas a lo largo del primer año, se presentan en la gráfica.



- Los meses en los cuales las empresas 1 y 3 obtuvieron la misma cantidad de dinero en ventas, fueron:
 - a. Enero y agosto.
 - b. Agosto y junio.
 - c. Agosto y marzo.
 - d. Enero y marzo.
- Respecto de las ventas de las tres empresas, es correcto afirmar que:
 - a. En ningún momento del año alcanzaron los seis mil millones de pesos.
 - b. Mes a mes fueron creciendo.
 - c. Todas tuvieron su mayor crecimiento en el mes de diciembre.
 - d. En el primer semestre la empresa 1 fue la que tuvo menos ventas.
- Después del primer trimestre, con la intención de mejorar las ventas, una compañía de publicidad realizó una propuesta a las tres empresas y se comprometió a subir las ventas en más de 1 500 millones de pesos de un mes a otro. Según esto, es correcto afirmar que:
 - a. Las tres empresas rechazaron la propuesta.
 - b. La empresa 1 la aceptó.
 - c. La empresa 3 la aceptó.
 - d. La empresa 2 la aceptó.

[24]

Figura 4.27 Actividades Prueba PISA


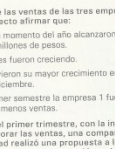
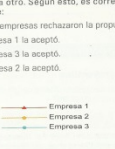
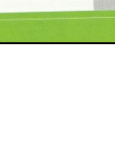
Pruebas de mejoramiento

Prueba ICFES

Contesta las preguntas 1 al 8 de acuerdo con la siguiente información.

La pantalla de una sala de teatro mide 22 pies de alto y está colocada a 10 pies por encima del piso que es plano. La primera hilera de asientos está a siete pies de pantalla y las hileras están separadas 3 pies unas de otras. Una persona decide sentarse en la hilera donde tiene la máxima visión, es decir donde se maximiza el ángulo θ , formado al mirar la parte superior e inferior de la pantalla. Supóngase que los ojos están a 4 pies por arriba del piso y la persona se sienta a una distancia x de la pantalla.

- La gráfica que más se aproxima a la situación anterior es:






- La afirmación correcta es:
 - a. El ángulo θ tiene la misma medida sin importar la hilera donde se sienta la persona.
 - b. La medida del ángulo θ aumenta a medida que la pantalla está más lejana de la hilera.
 - c. La medida del ángulo θ disminuye a medida que la pantalla está más lejana de la hilera.
 - d. La medida del ángulo θ aumenta y luego disminuye a medida que la pantalla está más lejana de la hilera.
- La parte superior de la pantalla está a una altura con respecto del suelo de:
 - a. Entre 30 y 40 pies.
 - b. Entre 20 y 30 pies.
 - c. Mayor de 40 pies.
 - d. Entre 13 y 20 pies.
- Si una persona se ubica en una hilera en donde la distancia a la pared es mayor que la longitud del suelo a la parte más alta de la pantalla, entonces se debe ubicar por lo menos en la hilera:
 - a. Nueve
 - b. Diez
 - c. Siete
 - d. Ocho
- Para que se forme un triángulo rectángulo entre la visual de la persona, la parte más alta y la parte más baja de la pantalla, una posibilidad es que:
 - a. La persona se sienta en la última hilera.
 - b. La persona se ponga de pie.
 - c. El suelo esté inclinado.
 - d. La persona se sienta en la primera hilera.

Prueba TIMSS

- Supón que se forma un triángulo isósceles entre la visual de la persona, la parte más alta y la parte más baja de la pantalla, cuyos lados congruentes tienen medida k . Una igualdad que es falsa es:
 - a. $\sin\left(\frac{180^\circ - \theta}{2}\right) = \frac{k}{11}$
 - b. $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{11}{k}$
 - c. $\cos \theta = \frac{2k}{11}$
 - d. $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{k}{11}$
- En un teatro las hileras de sillas están inclinadas un ángulo de 25° respecto de la horizontal, y cada fila está separada 3 pies de la siguiente. La distancia que separa a una persona que se ubica en la octava fila de la pantalla, está dada por la expresión:
 - a. $21 \text{sen } 25^\circ + 7$
 - b. $21 \text{cos } 25^\circ$
 - c. $21 \text{cos } 25^\circ + 7$
 - d. $24 \text{sen } 25^\circ$

Responde las preguntas 9 al 11 de acuerdo con la siguiente información.

Se desea inscribir un triángulo en un semicírculo de radio igual a 5 cm, como se muestra en la figura.



- La altura equivale a:
 - a. $\frac{25}{\sin \theta}$
 - b. $\frac{25}{\cos \theta}$
 - c. $\frac{25}{\csc \theta}$
 - d. $\frac{25}{\sec \theta}$
- La base equivale a:
 - a. $\frac{10}{\sin \theta}$
 - b. $\frac{10}{\cos \theta}$
 - c. $\frac{10}{\csc \theta}$
 - d. $\frac{10}{\sec \theta}$
- Una expresión que no corresponde al área del triángulo es:
 - a. $25 \text{sen}(\theta/2)$
 - b. $\frac{50}{\sec \theta \csc \theta}$
 - c. $25 \text{cos}(\theta/2)$
 - d. $50 \tan \theta - 50 \text{sen}^2 \theta \tan \theta$

[148]

[149]

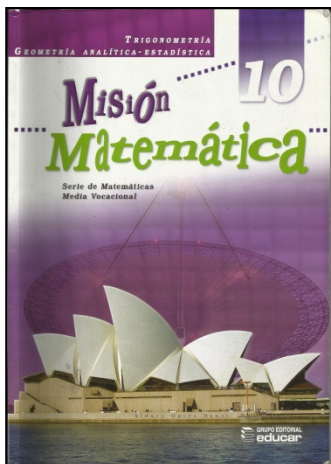
Figura 4.28 Actividades Prueba ICFES y Prueba TIMSS

En la tabla 4.2.4 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p>Unidad 2. Funciones trigonométricas</p> <p>Marco histórico Aplicaciones reales Ángulos Funciones trigonométricas Ángulos cuadrantes Trigonometría del triángulo rectángulo Cofunciones Reducción de ángulos al primer cuadrante Problemas de aplicación Tecnología Resumen y refuerzo Pruebas de mejoramiento</p> <p>Unidad 3. Gráficas de las funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas</p> <p>Aplicaciones reales Funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria Líneas trigonométricas Gráfica de la función seno Gráfica de la función coseno Gráfica de la función tangente Gráfica de la función cotangente Gráfica de la función secante Gráfica de la función cosecante Principios de graficación: amplitud, período, desfase Funciones inversas Funciones trigonométricas inversas Operaciones con funciones trigonométricas inversas Tecnología Resumen y refuerzo Pruebas de mejoramiento</p> <p>Unidad 4. Aplicación de las funciones trigonométricas</p> <p>Marco histórico Aplicaciones reales Resolución de triángulos rectángulos Ley del seno Ley del coseno Área de un triángulo Vectores y trigonometría Tecnología Resumen y refuerzo Pruebas de mejoramiento</p>	<p>Unidad 5. Identidades y ecuaciones trigonométricas</p> <p>Marco histórico Aplicaciones reales Concepto de identidad e identidades fundamentales Expresión de una función en términos de las otras Simplificación de expresiones trigonométricas Demostración de identidades Identidades para la suma de ángulos Identidades para la diferencia de ángulos Identidades para ángulos dobles y medios Transformación de productos en sumas y diferencias Ecuaciones de primer y segundo grado Solución de ecuaciones trigonométricas Ecuaciones trigonométricas e identidades fundamentales Ecuaciones trigonométricas con ángulos dobles y medios y ecuaciones trigonométricas cuadráticas Ecuaciones trigonométricas con funciones trigonométricas inversas Sistemas de ecuaciones trigonométricas Forma trigonométrica para los números complejos Operaciones con números complejos Tecnología Resumen y refuerzo Pruebas de mejoramiento</p>
---	---

Tabla N°4.2.4 Contenido Trigonométrico

4.2.4 Misión Matemática 10:



El texto entrega un contenido en el área de la trigonometría que realmente promueve e invita a los estudiantes y a sus lectores al análisis de situaciones, a establecer relaciones, deducir consecuencias, identificar y resolver problemas, estimula a la construcción y el desarrollo de herramientas las cuales facilitan el trabajo en equipo y la participación crítica en la toma de decisiones para formar su propio conocimiento matemático. Presenta secciones especiales como algunas actividades prácticas en las cuales se relacionan saberes y objetos matemáticos con el uso de las nuevas tecnologías de la ciencia y la información a saber: la calculadora, el computador, las páginas WEB, etc., mediante las cuales logra efectivamente conectar el conocimiento matemático con el desarrollo de la tecnología.

Presenta a sus estudiantes la forma de construir los ángulos con la ayuda de las tecnologías tradicionales del lápiz y papel, la regla, el transportador y el compás, además enseña a sus usuarios el uso adecuado para encontrar el valor del ángulo m , dada la razón que le corresponde, así $\text{Sen } m = \frac{2}{5}$, por lo tanto, se digita en la calculadora:



Enseña al usuario los comandos que posee la calculadora y en el orden que los debe digitar (ver figura 4.29), para realizar el cálculo de las funciones trigonométricas de un ángulo dado en grados o en radianes, o el ángulo al que corresponde el valor de una razón dada, mediante el uso de la calculadora a través de las funciones trigonométricas inversas (páginas 50, 51, 62,66 y 117).

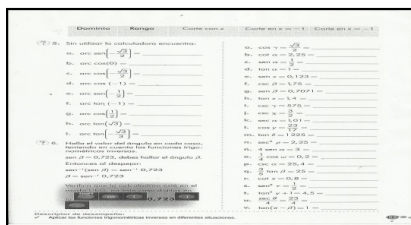


Figura 4.29 La Calculadora para Hallar el Valor de un Ángulo

El texto utiliza y recomienda el software Winplot (ver figuras 4.30 y 4.31), para hacer las gráficas de las funciones trigonométricas, dicho programa es gratuito y puede ser descargado en la página de su autor Rick Parris. <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.htm/>, del departamento de matemáticas de la academia Philips Exeter (páginas 137, 138 y 139).

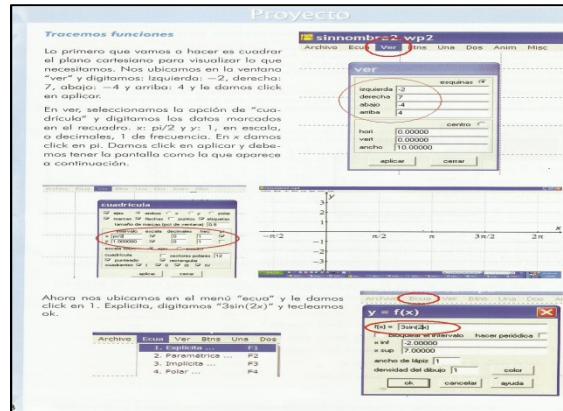


Figura 4.30 Manejo del Software Winplot

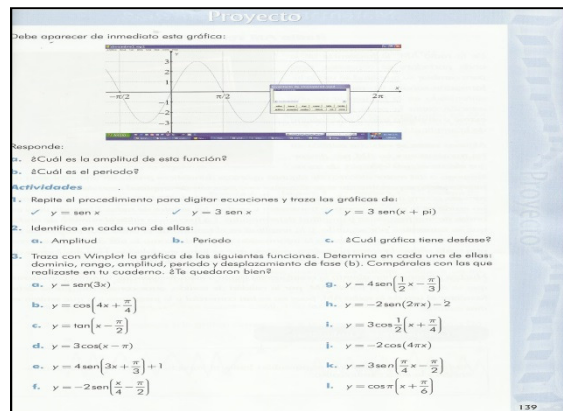


Figura 4.31 Trazado de Gráficas con Winplot

Este libro de texto en cada unidad aborda los contenidos de los cinco pensamientos matemáticos, propone actividades y talleres con ejercicios de diferente nivel de complejidad cuya práctica y resolución permita en los estudiantes y usuarios mejorar el desempeño y desarrollo de las competencias básicas en matemáticas. En todo contexto utiliza láminas, fotografías y dibujos, todos ellos vinculados con datos e información real para que el estudiante logre activar preconcepciones y desarrollar las habilidades de

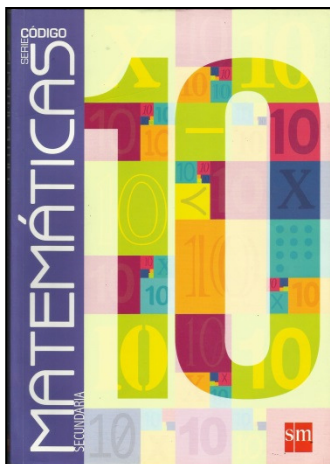
comprensión de texto e imagen (Páginas 58, 59, 60, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 85, 87, 88, 92, 93, 103, 104, 106, 107, 117, 118 y 120).

En la tabla N° 4.2.5 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p>Unidad 2. El mundo de la aviación y la aeronáutica</p> <p>RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Estándar: Exploro la función circular y reconozco las funciones trigonométricas, construyo sus gráficas en el plano cartesiano y deduzco sus propiedades principales Ángulos Rincón de la historia: Sistema sexagesimal en Egipto Triángulos rectángulos y razones trigonométricas Rincón de la historia: Origen de la trigonometría Función circular y ángulos notables Rincón de la historia: Lazare Carnot Función seno y coseno Gráfica de las demás funciones trigonométricas Transformación de coordenadas LEY DEL SENO Y EL COSENO Estándar: Aplico la ley del seno y coseno para formular y resolver algunos problemas Ley del seno Ley del coseno TÉCNICAS DE CONTEO Estándar: Uso las diferentes técnicas de conteo para determinar el número de disposiciones de un arreglo. Técnicas de conteo Proyecto: Salida pedagógica Matemática recreativa: Cine matemático: Pi el orden del caos Prueba de unidad</p> <p>Unidad 3. Arte y matemáticas</p> <p>IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Estándar: Identifico las identidades trigonométricas fundamentales y deduzco otras identidades a partir de ellas. Identidades trigonométricas Identidades de la suma y la resta de ángulos TRANSFORMACIONES E INVERSA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Estándar: Reconozco las transformaciones especiales de las funciones trigonométricas identifico las inversas de las funciones trigonométricas, construyo sus gráficas en el plano cartesiano y deduzco sus propiedades principales. Transformaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas</p>	<p>Rincón de la historia: James Clerk Maxwell y Heinrich Hertz Funciones trigonométricas inversas ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS Estándar: Resuelvo ecuaciones trigonométricas empleando herramientas algebraicas e identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas VECTORES Y NÚMEROS COMPLEJOS Estándar: Utilizo los vectores y los números complejos en su notación trigonométrica para formular y resolver algunas situaciones Vectores en \mathbb{R}^2 Operaciones algebraicas con vectores Forma trigonométrica de los números complejos Rincón de la historia: Jean Baptiste Joseph Fourier DISTRIBUCIONES DE PROPABILIDAD DISCRETAS Estándar: Identifico y calculo la media, varianza y desviación estándar de una distribución de probabilidad discreta. Distribuciones de probabilidad discretas Proyecto: Gráficas funciones trigonométricas con Winplot Matemática ciudadana: Radio AM versus FM Prueba de unidad</p>
--	---

Tabla N°4.2.5 Contenido Trigonométrico

4.2.5 Código Matemáticas 10:



También este libro de texto desarrolla una propuesta pedagógica fundamentada en el aprendizaje significativo y en el desarrollo de las competencias y habilidades del pensamiento, sustentadas en los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006) de matemáticas publicados por el MEN. En cada lección propone talleres de ejercicios donde plantea situaciones y actividades matemáticas para ejercitar y confirmar el nivel de comprensión y aprendizaje desarrollado por medio de los temas estudiados en

el aula y fuera de ella.

Como medios y herramientas tecnológicas además del mismo texto promueve el uso de la calculadora científica para calcular las razones trigonométricas inversas Sen^{-1} , Cos^{-1} , y Tan^{-1} (ver figura 4.32), muestra como hallar el ángulo al que corresponde una determinada razón (páginas 62, 64, 65, 110 y 112).

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Las razones trigonométricas son expresiones matemáticas que relacionan medidas de ángulos y de distancias. Se utilizan en muchas situaciones, como, por ejemplo, en los problemas topográficos: cálculo de alturas de montañas, edificios de ríos, etc. Los tres triángulos rectángulos de la derecha son semejantes entre sí. Por lo tanto, entre sus lados se cumplen, entre otras, la siguiente relación de proporcionalidad directa:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''}$$

Esta relación define un número que varía en función del ángulo agudo que se considere, pero solo de los ángulos, que son los mismos para los tres triángulos. Dependiendo de esta propiedad, se definen las razones trigonométricas de un ángulo agudo, considerando los cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo construido sobre el ángulo considerado.

Sea el triángulo rectángulo de la figura:

El seno del ángulo agudo C es la razón entre las longitudes del cateto opuesto al mismo y de la hipotenusa:

$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

El coseno del ángulo agudo C es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y de la hipotenusa:

$$\text{cos } C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

La tangente del ángulo C es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y del adyacente:

$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Razones inversas

Con el fin de simplificar notaciones y cálculos, en algunas ocasiones se utilizan las razones trigonométricas inversas: cosecante, secante y cotangente, en el sentido de la división. Vienen definidas por las relaciones siguientes:

$$\text{cosec } C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen } C}$$

$$\text{sec } C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{cos } C}$$

$$\text{cotg } C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg } C}$$

EJERCICIO RESUELTO

• Calcule el seno, el coseno y la tangente de 45° .

Se dibuja un cuadrado de lado a y se considera uno de los triángulos rectángulos que se forman al dibujar por su diagonal d . Por el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, y aplicando las definiciones de las razones trigonométricas del ángulo $B = 45^\circ$ se tiene:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{a} = 1$$

EJERCICIOS PROPOSTOS

- Calcule las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ABC tales que:
 - $\angle C = 90^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm
 - $\angle C = 90^\circ$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm
- Calcule la cosecante, la secante y la cotangente del ángulo de mayor amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, respectivamente.
- Calcule las razones trigonométricas de 30° y de 60° . Para ello, tome un triángulo equilátero de lado a y divídalo en dos por una de sus alturas.

Figura 4.32 Cálculo de Razones Trigonómicas con

Este libro de texto utiliza y enseña la forma de acceder al novedoso programa de algebra computacional llamado Wiris a través de la página web <http://www.wiris.com> (páginas 84, 85). El Wiris es una calculadora en la red la cual ofrece servicios a las comunidades

educativas, permitiéndoles realizar muchas operaciones y cálculos matemáticos, (ver figura 4.33), sus autores recomiendan el no abusar en el uso de este porque ello puede reducir e impedir el desarrollo y la capacidad de hacer cálculos y operaciones por medio de los métodos prácticos u operativos, y además porque no se puede utilizar en los exámenes.

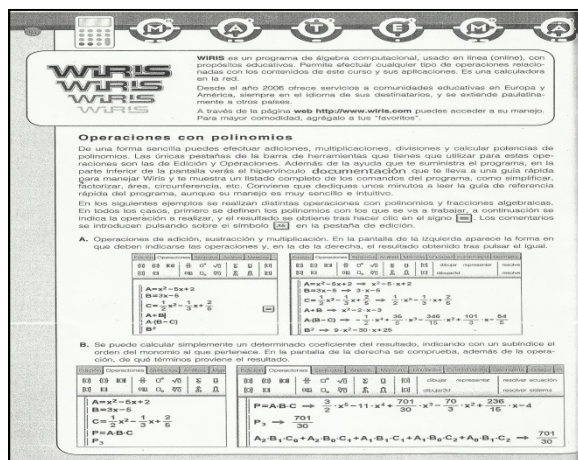


Figura 4.33 Operaciones con Polinomios con el Programa WRIS

El libro de texto también enseña cómo utilizar el programa Derive 5 para resolver ecuaciones de diferentes tipos, tales como: Polinómicas, con radicales, exponenciales, logarítmicas, y sistemas de ecuaciones de orden dos por dos y tres por tres, (ver figuras 4.34 y 4.35), dicho programa utiliza por defecto los cálculos aritméticos exactos, manipulando fácilmente expresiones tanto racionales como irracionales (páginas 86 y 87).

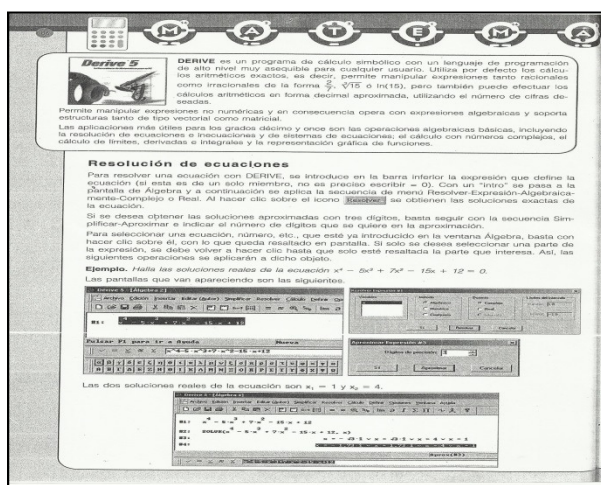


Figura 4.34 Resolución de Ecuaciones con el Programa Derive

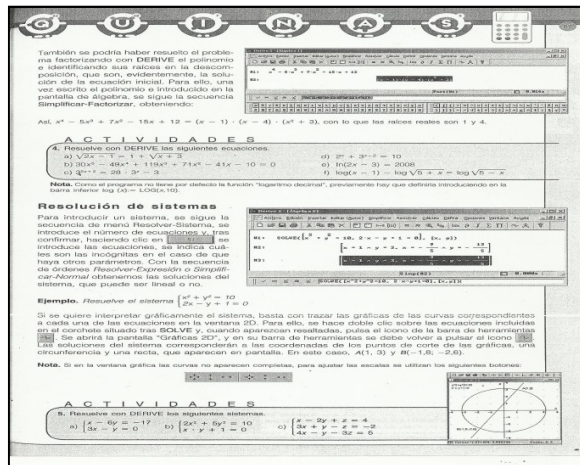


Figura 4.35 Resolución de Sistemas con Derive 5

Además este libro de texto presenta como herramienta tecnológica para realizar cálculos de algunas operaciones matemáticas y para construir gráficas de las funciones trigonométricas el software Sketchpad o Geométrica (ver figuras 4.36 y 4.37), el cual es un programa de geometría dinámica desarrollado por Iván Sutherland como tesis doctoral del Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT), este software es actualmente de distribución comercial y es usado a nivel mundial en diferentes instituciones educativas como medio de apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje para mejorar la comprensión de conceptos tanto de geometría como de trigonometría y en la modelación de aplicaciones o problemas trigonométricos (páginas 152, 153, 154 y 155).

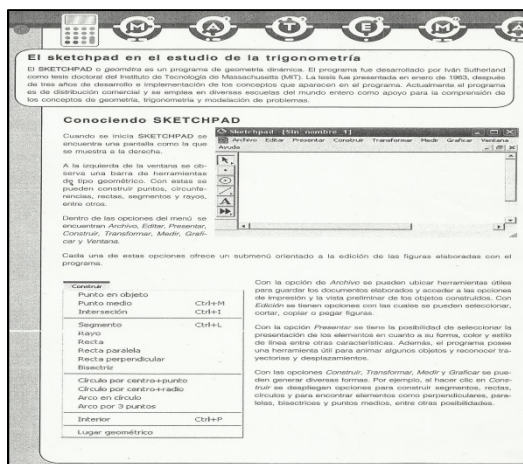


Figura 4.36 Manejo del Sketchpad en la Trigonometría

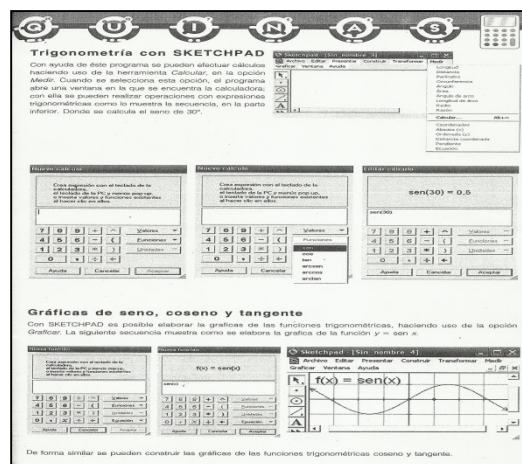


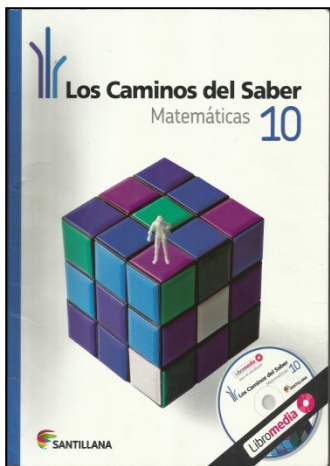
Figura 4.37 Gráfica del Seno con el Programa Geométrica

En la tabla 4.2.6 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p>3. Pensamientos espacial y métrico Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo</p> <p>6 Medida de ángulos. El radián 7 Razones trigonométricas de un ángulo agudo 8 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera 9 Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas 10 Relaciones entre las razones trigonométricas 11 Identidades trigonométricas para la adición y la sustracción 12 Identidades trigonométricas para el ángulo doble y el ángulo medio 13 Transformación de sumas en productos</p> <p>Conexión: Pensamiento Estadístico</p> <p>14 Medidas de tendencia central</p> <p>Ejercicios resueltos Actividades Organiza tus ideas Matemáticas en La topografía</p> <p>5. Pensamiento Variacional Funciones trigonométricas</p> <p>7 Función seno 8 Función coseno 9 Gráficas de funciones sinusoidales 10 Función tangente 11 Función cotangente 12 Función secante 13 Función cosecante</p> <p>Conexión: Pensamiento estadístico</p> <p>14 Medidas de posición 15 Aplicaciones de la estadística unidimensional</p> <p>Ejercicios resueltos Actividades Organiza tus ideas Matemáticas en la física</p>	<p>7. Pensamiento espacial y métrico Vectores</p> <p>8 Vectores fijos en \mathbb{R}^2 9 Vectores libres en \mathbb{R}^2 10 Operaciones con vectores. Dependencia lineal 11 Base canónica. Coordenadas de un vector 12 Operaciones de vectores con coordenadas. Módulo y argumento 13 Puntos y vectores. Sistema de referencia euclídeo 14 Producto escalar de dos vectores. Ángulo entre vectores</p> <p>Conexión: Pensamiento estadístico</p> <p>15 Diagrama de dispersión 16 Covarianza</p> <p>Ejercicios resueltos Actividades Organiza tus ideas Matemáticas en los deportes náuticos</p>
--	--

Tabla N°4.2.6 Contenido Trigonométrico
Código Matemáticas 10

4.2.6 Los Caminos del Saber Matemáticas 10:



Este libro de texto presenta sobre los estándares en las unidades relacionadas (2, 3, 4) con las funciones trigonométricas la aplicación de los pensamientos matemáticos a saber: Variacional, Espacial, Métrico y Numérico. Ejercita el razonamiento mediante el uso de la calculadora (ver figuras 4.38 y 4.39), para hallar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos dados, además para calcular el valor del ángulo de una razón trigonométrica normal o inversa, para realizar operaciones básicas en el desarrollo de múltiples

aplicaciones y problemas, así como en la verificación de los resultados de algunas operaciones básicas (páginas 49, 56, 57, 70, 78, 79, 82, 83, 118, 119, 163, 166, 186, 200 y 201).

Afianzo COMPETENCIAS Interpretar • Argumentar • Ejercitar • Medir • Resolver problemas

1. Relaciona las expresiones de la columna de la izquierda con su equivalente en la columna de la derecha.

31. $1 - \sec^2 \beta$	a. -1
32. $\sec \beta \cdot \cos \beta$	b. $\sec^2 \beta$
33. $\tan^2 \beta - \sec^2 \beta$	c. $\cos^2 \beta$
34. $\tan \beta + \cot \beta$	d. 1
35. $1 - \cos^2 \beta$	e. $\sec \beta \cdot \csc \beta$

2. Utiliza las identidades pitagóricas para transformar las expresiones dadas en otras equivalentes.

36. $(\cos x + \cos x)^2$	39. $(\tan x + 1)^2$
37. $(\cot x + 1)^2$	40. $(\cos x + \sec x)^2$
38. $(1 - \tan x)^2$	41. $(\sec x - \csc x)^2$

3. Completa la siguiente tabla expresando la función indicada en términos de las funciones seno, coseno y tangente según corresponda.

Función	sen θ	cos θ	tan θ
sen θ	sen θ	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	
tan θ	$\frac{\pm \text{sen } \theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}$	$\frac{\pm \text{sen } \theta}{\cos \theta}$	tan θ
csc θ	$\frac{1}{\text{sen } \theta}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	
sec θ	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	
cot θ		$\pm \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	

4. Calcula el valor de cada función. Para ello utiliza la información de cada función.

43. $\tan \theta$ si $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$	47. $\cot \theta$ si $\cos \theta = \frac{3}{7}$
44. $\sec \theta$ si $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$	48. $\text{sen } \theta$ si $\tan \theta = 5$
45. $\text{sen } \theta$ si $\sec \theta = \sqrt{2}$	49. $\cos \theta$ si $\cot \theta = 3$
46. $\cos \theta$ si $\text{sen } \theta = \frac{1}{5}$	50. $\csc \theta$ si $\text{sen } \theta = \frac{2}{4}$

5. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa y justifica tu respuesta.

51. Si $\cos x = \frac{2}{3}$, entonces $\text{sen } x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. ()

52. $\cot x + \frac{1}{\cot x} = \sec^2 x$ para todo valor de x . ()

53. Si $\tan x = 4$, entonces, el ángulo x está en el tercer cuadrante. ()

54. $\text{sen}^2(15^\circ) + \cos^2(75^\circ) = 1$ ()

6. Expresa cada función en términos de $\text{sen } x$ y $\cos x$. Luego, simplifica.

55. $\frac{\cos x}{\csc x \cot x}$
56. $\text{sen } x + \csc x - \tan x$
57. $\csc x (\text{sen } x + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x})$

7. Determina el valor de la función trigonométrica utilizando las identidades pitagóricas.

58. Si $\text{sen } x = 0,82$, calcula $\cos x$

59. Si $\sec x = 2,5$, calcula $\tan x$

60. Si $\cos x = -0,1$, calcula $\tan x$

61. Si $\tan x = 0,52$, calcula $\sec x$

62. Si $\cot x = 2,5$, calcula $\csc x$

8. Encuentra el valor solicitado con base en el siguiente triángulo rectángulo y la información dada en cada caso.

63. Si el área del triángulo es $3,5 \text{ m}^2$, calcula el valor de $\frac{a^2}{\cos C} + \frac{b^2}{\cos A}$

64. Si en el triángulo ABC se cumple que $\tan A = \text{sen } A = B$ encuentra el valor de $\cos C - \cot C$.

Figura 4.38 Cálculo de Algunas Funciones Trigonómicas

Estándares Pensamientos numérico y variacional

Ecuaciones trigonométricas

Encuentra dos soluciones para cada ecuación en el intervalo $[0, 180^\circ]$.

357. $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$

358. $\text{sen}(x + \frac{\pi}{12}) - \frac{1}{2} = 0$

359. $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = 0$

360. $\tan^2 x - 1 = 0$

361. $2 \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen } x$

362. $\cos x + \text{sen } x = 1$

Usa las identidades fundamentales para solucionar cada ecuación.

363. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

364. $6(1 - \text{sen}^2 x) + 5 \cos x + 1 = 0$

365. $\text{sen } 2x \cos x + \cos 2x \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Encuentra la expresión que representa el perímetro y el área del rectángulo. Luego, resuelve.

366. $2 \text{sen } x + 3$

367. Determina el área del rectángulo, si el perímetro del rectángulo es $11,5 \text{ m}$.

Encuentra todas las soluciones β para la ecuación en el intervalo $[0, \pi]$.

368. $\text{sen } 2\beta \cdot (\csc 2\beta - 2) = 0$

369. $\text{sen } 4\beta \cos \beta = \text{sen } \beta \cos 4\beta$

370. $\tan 2\beta + \tan \beta = 1 - \tan 2\beta \tan \beta$

Determina la solución de cada ecuación.

371. $\arcsen(2x^2 - 1) = \arcsen 1$

372. $\arccos 2x = \arcsen 2x$

Figura 4.39 Actividades Sobre Ecuaciones Trigonómicas

Enseña la forma y el procedimiento para construir un Goniómetro, el cual es un instrumento que permite medir el ángulo que forma un elemento con respecto a una superficie horizontal (página 85). También enseña a resolver triángulos a partir de algunas medidas dadas utilizando el programa Microsoft Mathematics (ver figuras 4.40 y 4.41), y

descargándolo libremente en: www.microsoft.com/download/en/details.aspx?id515702.
(Páginas 154 y 155).

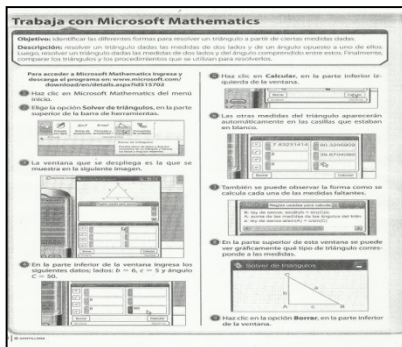


Figura 4.40 Uso del Programa Microsoft Mathematics

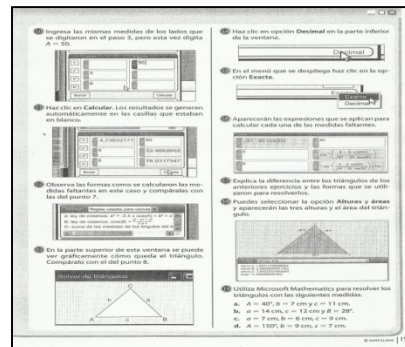


Figura 4.41 Resolución de Triángulos con el Programa Microsoft

El libro de texto los Caminos del Saber Matemáticas 10 le ofrece a los estudiantes gran variedad de recursos y digitales con la posibilidad de adquirir y mejorar sus conocimientos y el aprendizaje necesarios para desarrollar satisfactoriamente las competencias y apropiarse de las habilidades que les ayude a enfrentar con fortaleza y seguridad a los retos del futuro, este libro de texto desarrolla las diferentes temáticas acompañadas de numerosos ejercicios propuestos y resueltos, muchos de estos con una explicación paso a paso.

También enseña y muestra cómo acceder al programa o software Microsoft Mathematics en www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math (páginas 206 y 207), para resolver expresiones trigonométricas relacionadas con suma de ángulos, ángulos medios y ángulos dobles, así como para solucionar ecuaciones trigonométricas (ver figuras 4.42 y 4.43).

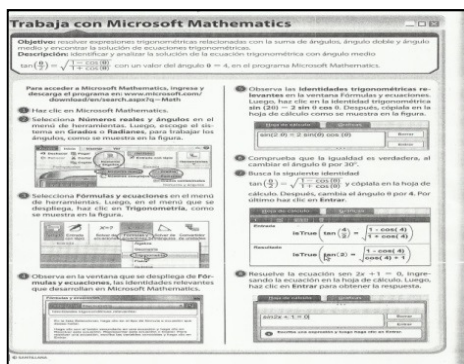


Figura 4.42 Suma de Ángulos con Microsoft

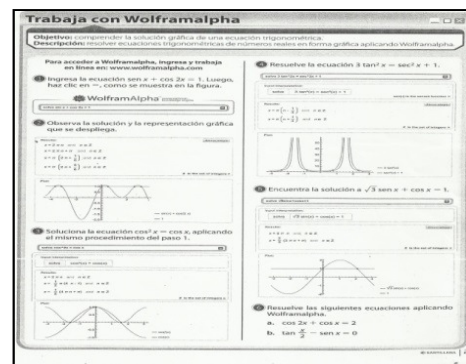


Figura 4.43 Solución de Ecuaciones Trigonómicas con WolframAlpha

Mediante el programa Wolframalpha resuelve ecuaciones trigonométricas de números reales en forma gráfica ayudando a comprender su solución gráfica, se ingresa gratuitamente en línea así: www.wolframalpha.com. El texto también trabaja con el software geogebra (ver figuras 4.44 y 4.45), que es un aplicación dinámica muy útil para realizar ejercicios gráficos, el cual se puede descargar gratuitamente ingresando a la página www.geogebra.org/cms/es, allí enseña paso a paso como construir la gráfica de la función seno, utilizando herramientas del geogebra como el deslizador (páginas 86 y 87).

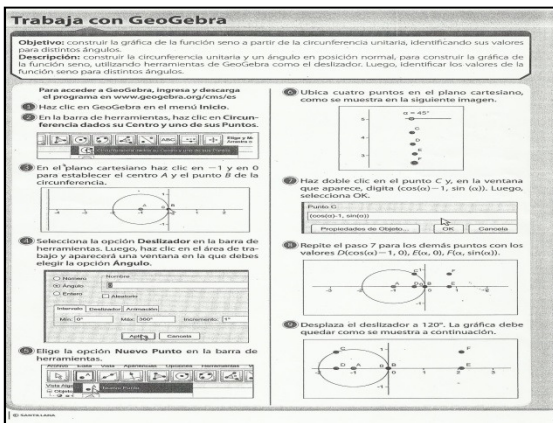


Figura 4.44 La Circunferencia Unitaria con Geogebra

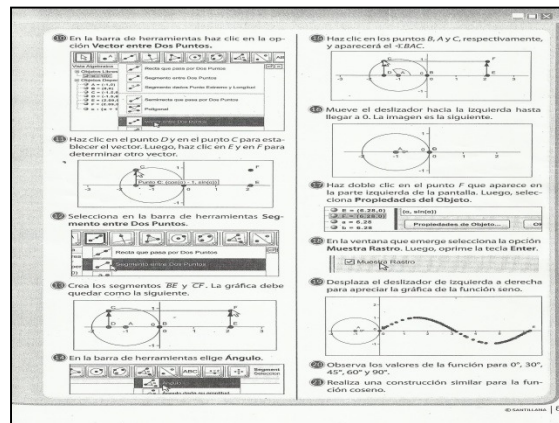


Figura 4.45 Construcción de la Gráfica de la Función Seno con Geogebra

Los Caminos del Saber presenta ejercicios desarrollados donde realiza y representa gráficas de las funciones trigonométricas trabajando con el software Graph (ver figuras 4.46 y 4.47), y enseña cómo acceder a este programa y descargarlo en forma gratuita rápida y sencilla así: <http://gratis.portalprogramas.com/>, (páginas 120 y 121).

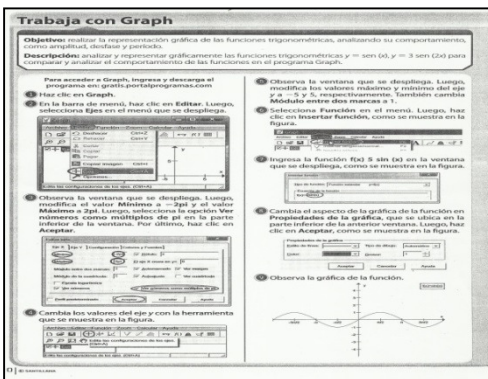


Figura 4.46 Manejo del Programa Graph

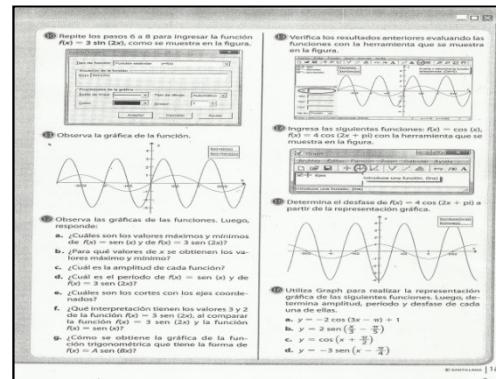


Figura 4.47 Algunas Actividades con el Programa Graph

En la tabla 4.2.7 se pueden observar los ejes temáticos que se proponen para trabajar la enseñanza y al aprendizaje de la trigonometría:

<p>Unidad 2. Funciones trigonométricas</p> <p>Ángulos Ángulo en posición normal o canónica de ángulos Medición de ángulos en el sistema sexagesimal Ángulos coterminal Ángulos especiales Medición de ángulos o en radianes Longitud de arco Área de sector circular Movimiento circular</p> <p>Triángulos Clasificación de triángulos Propiedades de los triángulos Teorema de Pitágoras</p> <p>Funciones trigonométricas Circunferencia unitaria Definición de las funciones trigonométricas Funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo Problemas de aplicación</p> <p>Ejercicios para repasar Problemas para repasar Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve? Trabaja con Geogebra</p> <p>Unidad 3. Gráficas de las funciones trigonométricas</p> <p>Líneas trigonométricas Gráfica de las funciones trigonométricas Gráfica de la función <i>seno</i> ($y = \sin x$) Gráfica de la función <i>coseno</i> ($y = \cos x$) Gráfica de la función <i>tangente</i> ($y = \tan x$) Gráfica de la función cotangente ($y = \cot x$) Gráfica de la función <i>secante</i> ($y = \sec x$) Gráfica de la función <i>cosecante</i> ($y = \csc x$)</p> <p>Análisis de gráficas Traslación de funciones Reflexión de funciones Comprensión y alargamiento Amplitud Período Desfase</p> <p>Funciones trigonométricas inversas Ejercicios para repasar</p>	<p>Problemas para repasar Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve? Trabaja con Graph</p> <p>Unidad 4. Aplicaciones de las funciones trigonométricas</p> <p>Solución de triángulos rectángulos Resolución de un triángulo cuando se conocen la medida de un lado y la de un ángulo Resolución de un triángulo cuando se conocen las medidas de dos lados Ángulo de elevación y ángulo de depresión</p> <p>Solución de triángulos no rectángulos Ley de seno Ley de coseno Área de un triángulo</p> <p>Vectores Vector velocidad Vector fuerza</p> <p>Ejercicios para repasar Problemas para repasar Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve? Trabaja con Microsoft Mathematics Trigonometría de la tierra y del espacio</p> <p>Unidad 5. Trigonometría analítica</p> <p>Identidades trigonométricas Definición de identidades trigonométricas Identidades fundamentales Expresiones que se obtienen a partir de las identidades fundamentales Demostración de una identidad trigonométrica Identidades para la diferencia de dos ángulos Identidades para ángulos dobles Identidades trigonométricas para ángulos medios Transformación de productos en sumas o diferencias</p> <p>Ecuaciones trigonométricas Ecuaciones trigonométricas de la forma $f(x) = k$ Ecuaciones trigonométricas lineales Ecuaciones trigonométricas en forma factorizada Ecuaciones trigonométricas con identidades Ecuaciones trigonométricas con identidad para ángulos dobles y medios Ecuaciones trigonométricas con funciones inversas</p> <p>Ejercicios para repasar Problemas para repasar Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve? Trabaja con Microsoft Mathematics Trabaja con Wolframalpha</p>
---	--

Tabla N°4.2.7 Contenido Trigonométrico
Los Caminos del Saber Matemáticas 10

El siguiente mapa conceptual (ver figura 4.48) tiene que ver con las temáticas que en forma resumida presentan los libros de texto analizados.

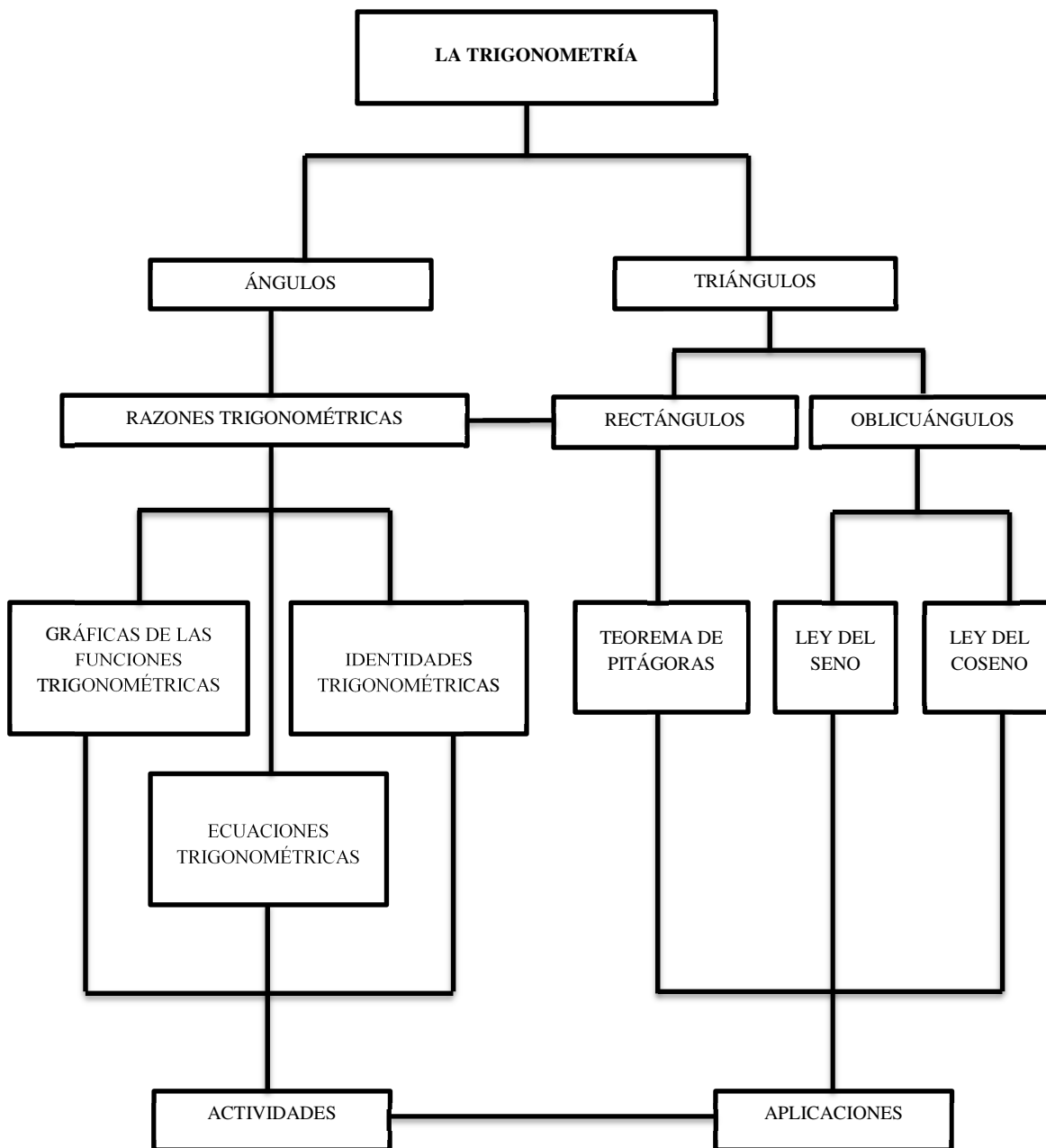


Figura 4.48 Mapa Conceptual Temas Trigonométricos en los Libros Analizados

El uso de las herramientas tecnológicas, tales como calculadoras científicas y software dinámicos, se pueden observar en el desarrollo de las actividades resueltas y propuestas, de igual manera en las aplicaciones, haciendo énfasis de la necesidad del uso de estos dispositivos en los enunciados de los ejercicios o actividades para que los estudiantes puedan trabajar y mejorar sus competencias.

En la tabla N° 4.3, podemos observar a manera de resumen las diferentes herramientas tecnológicas utilizadas en los libros de textos correspondientes a la librería de matemáticas de la página Colombia Aprende.

NOMBRE DEL LIBRO DE TEXTO	HERRAMIENTA TECNOLÓGICA UTILIZADA			
	LÁPIZ Y PAPEL	REGLA, COMPÁS Y TRANSPORTADOR	CALCULADORA CIENTÍFICA	COMPUTADOR
Conexiones matemáticas 10	Si	Si	Si	Si Derive Excel
Nuevas matemáticas 10	Si	Si	Si	No
Fórmula 10	Si	Si	Si	Si Excel
Misión matemática 10	Si	Si Goniómetro	Si	Si Winplot
Código matemáticas 10	Si	Si	Si	Si Derive Wiris Sketchpad o Geométra
Los Caminos del Saber Matemáticas 10	Si	Si Goniómetro	Si	Si Geogebra Graph Microsoft Mathematics Wolframalpha

Tabla N°4.3 Uso de Herramientas Tecnológicas en los Libros de Texto Analizados

CONCLUSIONES

El análisis de las tareas y actividades presentadas y propuestas por algunos autores sobre el estudio y desarrollo del contenido de la trigonometría en algunos libros de texto utilizados en el grado décimo y primeros semestres universitarios evidencia la relación de los avances tecnológicos y la forma en la que el uso de algunas herramientas tecnológicas, tales como: calculadoras científicas, programas de cómputo, tablas de fórmulas logarítmicas y trigonométricas, entre otras, han sido incorporadas en el campo de la educación matemática, lo que permite establecer las siguientes conclusiones:

- ✓ Todos los libros de texto de Matemáticas 10 analizados en la investigación, poseen en sus contenidos la temática de la trigonometría siguiendo las recomendaciones de Los Lineamientos Curriculares (Colombia. 2008) del Ministerio de Educación Nacional, ellos presentan talleres y ejercicios apropiados para el trabajo individual de sus lectores y especialmente de los estudiantes que cursan décimo grado, además la mayoría de aquellos contemplan actividades encaminadas al trabajo en grupo.
- ✓ Los contenidos de trigonometría en todos los libros de texto analizados sin excepción están desarrollados cumpliendo con Los Estándares Básicos de Competencias (Colombia. 2006) sugeridos por el MEN para el área de matemáticas y ellos si promueven el desarrollo integrado de los pensamientos matemáticos a saber: Pensamiento Numérico, Pensamiento Espacial, Pensamiento Métrico, Pensamiento Variacional y el Pensamiento Aleatorio, permitiendo establecer conexiones entre ellos.
- ✓ Los libros analizados coinciden en presentar o proponer después de cada explicación conceptual una serie de variadas actividades, algunas resueltas y otras propuestas, con ejercicios que poseen diferentes categorías de complejidad, los cuales permiten desarrollar las competencias básicas en matemáticas como son: el razonamiento, la argumentación, la comunicación, la representación y modelación, así como el planteamiento y la resolución de problemas.
- ✓ Los libros de texto de matemáticas 10 trabajados en la investigación, tienen enfocados los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

especialmente en la formación integral de los estudiantes, para que ellos desarrollen sus habilidades, tanto en la proposición como en la solución de problemas, dentro de un aprendizaje significativo y constructivo, es decir, pretenden potenciar a nivel individual y grupal su capacidad intelectual para que apliquen mejor los pensamientos matemáticos en la construcción del conocimiento.

- ✓ Las TIC definitivamente sirven de apoyo y son de gran ayuda para los estudiantes y el mismo docente durante los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, en especial con el estudio de las relaciones trigonométricas; todos los libros de texto utilizan la calculadora científica para procesar la información, realizando cálculos, verificando resultados, haciendo conversiones o representándola en forma algebraica y gráfica, algunos promueven la exploración y ampliación de sus conocimientos con la ayuda del computador trabajando con softwares matemáticos de fácil acceso y manejo, para que la modelación les permita visualizar mejor los ejercicios estudiados.
- ✓ El Sketchpad o Geométra y el Geogebra son softwares dinámicos que se pueden implementar en la trigonometría al trabajar con aplicaciones que originan triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos, especialmente para realizar construcciones y modelaciones, esta puede ser una buena estrategia metodológica que le permita a los docentes incrementar la motivación individual y grupal de sus estudiantes en clase y fuera de ella, además para que estos se vean invitados a estudiar y resolver situaciones problemas haciendo la modelación adecuada, la cual les permitirá obtener una mejor visualización e interpretación de los conceptos matemáticos, y tomar mejores decisiones para resolver las dificultades encontradas.

REFLEXIONES FINALES

Como consecuencia de todo este trabajo de análisis de textos y revisión del marco teórico referencial, se ha podido establecer algunas reflexiones que el docente muy bien podría tener en cuenta cuando decida optar por alguna metodología de trabajo en el aula, que incluya alguna herramienta tecnológica en la que se use el computador y esta conlleve implícita alguna aplicación o software dinámico.

- ❖ Algunas herramientas tecnológicas pueden ser instrumentos utilizados para desarrollar el pensamiento matemático en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos trigonométricos aplicados en diferentes actividades como: la resolución de problemas, la verificación de resultados y el cálculo de operaciones matemáticas, la conversión de unidades, la modelación y construcción gráfica.
- ❖ Definitivamente la evolución de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC), y su implementación en la educación matemática es un aporte muy significativo en los procesos de la enseñanza y la comprensión de las matemáticas y se constituyen en una poderosa herramienta que puede ayudar tanto al docente como a sus alumnos a mejorar las capacidades cognitivas permitiéndoles entender y visualizar mejor muchos conceptos, ampliando en ellos su capacidad para examinar y analizar los mismos desde diferentes ángulos, superando los logros alcanzados a la fecha por la tradicional tecnología del lápiz y el papel.
- ❖ Algunos avances tecnológicos pueden perjudicar de cierta forma el desarrollo del conocimiento de los estudiantes, en la medida en que les facilitan las investigaciones, consultas y trabajos, reduciéndoles la oportunidad de mejorar su aprendizaje, ya que pueden limitar sus pensamientos, privarlos de realizar cálculos manuales y consultas largas, las cuales pueden resultar ser más enriquecedoras e intelectualmente lucrativas.
- ❖ Las calculadoras son máquinas o instrumentos formados por dispositivos llamados operadores, las cuales realizan una o más funciones, su empleo se impone en todas las situaciones que ameritan realizar cálculos rápidos y complejos, y además

permiten optimizar los procesos matemáticos siempre y cuando el usuario posea la habilidad necesaria en su manejo; la calculadora científica permite obtener el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con una mejor aproximación a la que ofrecían las tablas elaboradas para ángulos positivos, por ello estas han sido desplazadas o dejadas casi obsoletas y en el olvido.

- ❖ Así como la buena empatía entre maestro y alumno crea situaciones de confianza, y mejora las condiciones para el desarrollo del trabajo en el aula, de forma similar, es posible que la vinculación de los equipos de cómputo en el sitio de estudio, incentiven, promuevan e inviten a la apropiación del uso y manejo de un software específico aplicado a un tema de estudio, y así mejore el interés tanto para el docente como para sus alumnos por realizar las actividades, practicar y crear nuevos problemas o aplicaciones en forma satisfactoria, generando mejores resultados que los ofrecidos por la clase tradicional.
- ❖ Cuando la tecnología está presente, indudablemente el docente juega un papel central en el proceso didáctico, pero no se puede mirar a la tecnología como el salvavidas o la adecuada y definitiva solución al problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tampoco se debe ignorar que ella promueve nuevas formas didácticas, las cuales aportan a mejorar el aprendizaje de los estudiantes y al crecimiento de la formación de sus maestros, pero en definitiva en un 100% la enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar.
- ❖ El proceso de la interacción del usuario con las herramientas tecnológicas en matemáticas, le permite a este realizar el razonamiento necesario e identificar el tipo de actividades que se debe plantear para practicar y buscar mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos conociendo e identificando las debilidades y fortalezas que encuentra al trabajar con dichos artefactos.
- ❖ La introducción al salón de clases del computador y de los programas o aplicaciones de matemáticas puede permitir que estas se puedan desarrollar en ambientes de búsqueda y reflexión donde tanto profesores como estudiantes logren crear representaciones diferentes de las tareas, y además formular sus propias preguntas e idear problemas sobre el desarrollo y solución de sus estudios y evaluaciones; por lo tanto, el uso e implementación de las nuevas tecnologías al interior de la clase

permite la exploración y la visualización de muchas situaciones matemáticas que no se pueden percibir con la aplicación de la tecnología más tradicional como es el lápiz y papel.

- ❖ La tecnología es un factor que brinda la oportunidad de economizar y ganar tiempo en muchos de los procesos realizados en clase de matemáticas, este tiempo o recurso aprovechado es un beneficio tanto para el profesor como para sus alumnos, pero el uso de la tecnología no reemplaza o sustituye la tarea o función del docente, porque este sigue siendo el líder del grupo y a quien le corresponde decidir el cómo, el cuándo y a qué proceso aplicarle la tecnología, preparar los temas y diseñar las tareas que exijan la aplicación de las nuevas herramientas tecnológicas, y además instruir y ayudar a sus alumnos a mejorar sus habilidades sobre el empleo del software.
- ❖ Los docentes, especialmente los profesionales de la enseñanza de las matemáticas estamos invitados a conocer y apropiarnos del uso, manejo y aplicación de las nuevas tecnologías para estar preparados a trabajar en clase las situaciones y problemas que aparecen en los libros de texto tradicionales, con la calidad y seguridad que motive a los estudiantes a trabajar con el docente en una forma más dinámica, apoyados por las herramientas tecnológicas disponibles; de esta manera, el trabajo en equipo puede ayudar a mejorar el proceso del aprendizaje de los educandos, pues las nuevas representaciones les darán otras formas de percibir y visualizar los conceptos, es decir, mejorar la comprensión de los temas estudiados en el aula.

APORTES DEL TRABAJO

En este proceso de revisión bibliográfica y análisis de contenido realizado a los libros de textos, se construyó un instrumento que puede servir a trabajos y estudios de investigaciones en esta dirección, claro está partiendo de elementos tales como: los Lineamientos Curriculares (Colombia. 1998) y Estándares Básicos de Competencias (Colombia 2006), así como también otros referidos al Pensamiento Variacional, Pensamiento Numérico, Pensamiento Espacial y Pensamiento Métrico.

FICHA TECNICA DEL LIBRO	Lineamientos Curriculares Colombia 1998	Pensamiento Variacional:
Autor:		Pensamiento Numérico
Título:	Estándares Básicos de Competencias Colombia 2006	Pensamiento Espacial
Editorial y Edición		Pensamiento Métrico
Año y País	Softwares Dinámicos	Aplicaciones Tecnológicas
Unidad Temática	Calculadora Científica	Otros

Tabla N°4.4 Modelo de Ficha Técnica

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez Jiménez, R., Fernández Castaño, H., & Rúa Vásquez, J. A. (2009). *Matemáticas básicas con aplicaciones a las ciencias económicas y afines*. Medellín: Ecoe Ediciones Ltda.

Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *The Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV, 1*, 144 - 151.

Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.

Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. *Proceeding of the 30th PME International Conference, 1*, 1 - 228.

Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.

Colombia. MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10(2)*, 427 - 442.

Galindo Vega, E., & Cely Ruiz, J. A. (2009). *Fórmula 10*. Bogotá: Voluntad.

Ramirez, M; Castañeda, N; Joya, A; Gomez, M. (2010). *Hipertexto, Matemáticas 10*. Bogotá. Santillana SA

Bautista B. Mauricio. (2007). *Nuevas Matemáticas Trigonometría – Geometría Analítica – Estadística*. Bogotá. Santillana SA

Romero, Juan de Jesus. (2003). *Los Caminos del Saber Matemáticas 10*. Bogotá. Santillana S.A.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós.

León Rivera, M. L., Carpio García, Z. S., Cuadros Morales, I., & Romero Carvajal, G. (2011). Importancia de los enfoques cuantitativos y cualitativos de Investigación en Ciencias Sociales. *La Universidad del Valle de México*, 1 - 11.

Mejía Duque, F., Álvarez Jiménez, R., & Fernández Castaño, H. (2005). *Matemáticas previas al cálculo*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Moore, K. C. (2010). Trigonometry, Technology and Didactic Objects. 5, 1480 - 1488.

Moreno Gutiérrez, V. (2006). *Conexiones Matemáticas 10*. Bogotá: Norma.

Orhun, N. (2001). Student's Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry. *The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference New Ideas in Mathematics Education*, 208 - 211.

Santos Trigo, L. (2001 a). El uso de software dinámico en el desarrollo de significados y conexiones en el aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia Internacional sobre el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas* (págs. 59 - 69). Morelia - México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Solís Valdespino, B. E. (2008). La técnica del análisis de contenido y su aplicación en los planes de estudio de bibliotecología en México, para determinar la presencia de la formación de usuarios. En P. Hernández Salazar, *Métodos cualitativos para estudiar a los usuarios de la información* (págs. 167 - 212). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Sotero Calvo, F. A., Donaire, J. J., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., & Vizmanos, J. R. (2009). *Código Matemáticas 10*. Bogotá: Grupo sm.

Swokowski, E., & Cole, J. (2007). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Learning.

Uribe Calad, J. (2002). *Matemáticas experimental 10*. Santa fe de Bogotá: Uros Editores.

Vasco Uribe, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vergara, G., Rojas, C. R., & García, O. E. (2009). *Misión Matemática 10*. Bogotá. D. C: Grupo Editorial Educar.

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*, Vol 17(3), 91 - 112.

Zill, D., & Dewar, J. (2001). *Álgebra y trigonometría*. Santa fe de Bogotá: McGraw - Hill.

WEB SITE

Disponible el 08/12/2013 en: <http://www.geogebra.org/cms/>

No Disponible el 09/12/2013 en: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.htm/>

Disponible el 09/12/2013 en: <http://www.wiris.com>

Disponible el 09/12/2013 en: www.microsoft.com/download/en/details.aspx?id515702

Disponible el 09/12/2013 en: www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

Disponible el 09/12/2013 en: www.wolframalpha.com

Disponible el 09/12/2013 en: <http://gratis.portalprogramas.com/>