Fórmulas y teoremas para el uso de las funciones elípticas. Primera parte

K. Weierstrass/H. Schwarz

Traducción de Leonardo Solanilla
y Gabriel Pareja, 2012

Índice general

CAPÍTULO 1

Teoremas generales concernientes a las funciones analíticas que poseen un teorema de adición algebraico

1.1.

Si una función analítica $\varphi(u)$ del argumento u posee la propiedad de que entre los tres valores del argumento

$$u, \quad v, \quad u+v,$$

correspondientes a los valores de la función

$$\varphi(u), \quad \varphi(v), \quad \varphi(u+v),$$

se satisface una ecuación algebraica, cuyos coeficientes son independientes de u y v, se dice que para esta función se satisface un teorema de adición algebraico, o que esta función posee una teorema de adición algebraico.

Cada función analítica $\varphi(u)$, la cual posee un teorema de adición algebraico, tiene la propiedad de que entre la función y su primera derivada $\varphi'(u)$ con respecto al argumento u se cumple una ecuación algebraica, cuyos coeficientes son independientes del argumento u.

El dominio del argumento de tal función puede, en cada caso, extenderse sobre todos sus valores finitos, sin que la función deje de tener el carácter de función algebraica; puesto que cada función analítica $\varphi(u)$, que posee un teorema de adición algebraico, es raíz de una ecuación algebraica, cuyos coeficientes son una función unívoca del argumento u y para todos los mismos valores finitos la función tiene carácter racional. Así, puede que el argumento de esta función solamente tenga su frontera en el infinito.

Una función analítica $\varphi(u)$, para la cual se cumple una teorema de adición algebraico es, o bien,

I. una función algebraica de u, o bien,

II. si ω es una constante escogida convenientemente, una función algebraica de la función exponencial $e^{u\pi i/\omega}$, o bien,
III. una función algebraica de una función $\mathfrak{p}u = s$, la cual, si con g_2 y g_3 se designan constantes convenientemente escogidas, se puede determinar por medio de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^2 - g_2 s - g_3$$

y la condición $\mathfrak{p}(0) = \infty$.

Los dos primeros casos están contenidos como casos especiales del tercero: el primero, si g_2 y g_3 tienen valor nulo; el segundo, si $g_2^3 - 27g_3^2$ es igual a cero.

1.2.

Entre las funciones analíticas de un argumento u, las cuales poseen un teorema de adición algebarico, sobresalen aquellas que para todos los valores finitos del argumento tienen carácter de enteras o racionales, las cuales, por tanto, son funciones unívocas de su argumento ilimitado y variable.
Todas las funciones analíticas unívocas $\varphi(u)$, que poseen un teorema de adición algebraico, tiene la propiedad de que $\varphi(u+v)$ es expresable racionalmente con los valores $\varphi(u), \varphi(v)$ y los valores de las primeras derivadas $\varphi'(u), \varphi'(v)$.
Si una función analítica $\varphi(u)$ posee la propiedad de que $\varphi(u+v)$ es expresable racionalmente por medio de $\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)$, dicha función es una función unívoca de su argumento ilimitado y variable, la cual, para todos los mencionados valores finitos tienen el carácter de una función entera o de una función racional.
También se verifica el teorema: Si una función analítica univoca $\varphi(u)$ tiene la propiedad de que entre la función y su primera derivada $\varphi'(u)$ se verifica una ecuación algebraica, cuyos coeficientes no dependen del argumento, entonces dicha función posee un teorema de adición algebraico.
Una función analítica unívoca $\varphi(u)$, que posee un teorema de adición algebraico es, o bien,

I. una función racional de u, o bien,
II. una función racional de una función exponencial $e^{u\pi i/\omega}$, o bien,
III. una función racional de una función $\mathfrak{p}u$ y su primera derivada $\mathfrak{p}'u$.

Los dos primeros casos son nuevamente casos especiales comprendidos en el tercero.

1.3.

Cada función analítica unívoca y transcendente, que posee un teorema de adición algebraico es necesariamente una función periódica y, a decir verdad, bien sea simplemente periódica o doblemente periódica.

1. Si todos los periodos del argumento de la función se pueden representar como múltiplos enteros positivos o negativos de un único periodo 2ω, la función se llama simplemente periódica. El número 2ω se llama periodo primitivo.
2. Si una función analítica unívoca y periódica no lo es en el sentido explicado y si ella no se reduce a una constante, entonces es (posiblemente de una variedad finita de maneras), elegidos dos periodos 2ω y $2\omega'$ del argumento de la función, de tal suerte que todos los demás periodos se pueden obtener de estos dos por adición y sustracción. En este caso, la función se denomina doblemente periódica y cada sistema de dos periodos $2\omega, 2\omega'$ con la propiedad señalada se llama par de periodos primitivos.

La parte imaginaria del cociente $\omega'/\omega = \tau$ de los dos periodos de un par de periodos primitivos $(2\omega, 2\omega')$ es siempre distinto de cero y, por cierto, puede suponerse, sin que la generalidad de la investigación se restrinja esencialmente en este sentido, que la parte real del cociente $\omega'/\omega i$, la cual en lo que sigue se denotará por $\Re(\omega'/\omega i)$, tiene un valor positivo.

Dos pares de periodos $(2\omega, 2\omega')$ y $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ se llamarán equivalentes, si la totalidad de aquellas cantidades, las cuales se forman por adición y sustracción en múltiplos enteros de los periodos de uno de los pares, coincide con la totalidad de las cantidades formadas manera análoga con los periodos del otro par.

Con ello, para que dos pares de periodos $(2\omega, 2\omega')$ y $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ sean equivalentes, es necesario y suficiente que entre los periódos de ambos pares se verifiquen igualdades de la forma

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega',$$

en las cuales p, q, p', q' denotan números enteros positivos o negativos, o incluso cero, que satisfacen la condición

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Ambas cantidades

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\omega i}\right) \quad \text{y} \quad (pq' - qp')\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

tienen el mismo signo. Mediante adecuada determinación de los números p, q, p', q' puede lograrse siempre que, poniendo las partes reales

$\Re(\tilde{\omega}'/\tilde{\omega}) = \alpha$, $\Re(\tilde{\omega}'/\tilde{\omega}) = \beta$,

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

1.4.

El caso más general de las funciones unívocas analíticas para las que se cumple un teorema de adición algebraico está constituído por las funciónes unívocas doblemente periódicas, las que, para todos los valores finitos del argumento, poseen el carácter de funciones racionales. Dicho argumento tiene así un solo punto esencialmente regular yaciente en el infinito. Estas funciones se llaman, en sentido más amplio, funciones elípticas.

Si en lo siguiente el discurso trata de una función elíptica, se entenderá tácitamente siempre que es una función unívoca elíptica.

Sea $(2\omega, 2\omega')$ un par de periodos primitivos del argumento de una función elíptica, de manera que todos los periodos del argumento de esta función tienen la forma $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, en la cual cada uno de ambos números μ y μ' asumen valores enteros positivos y negativos, comprendido el cero. El valor nulo se agrega solamente en el sentido impropio a los periodos.

Dos valores del argumento se llaman congruentes o incongruentes cuando la diferencia de ellos es un periodo o no lo es, respectivamente.

Un paralelogramo de periodos del argumento u de una función elíptica, para el cual $(2\omega, 2\omega')$ es un par de periodos primitivos, se define analíticamente como la totalidad de los valores que se obtienen por la fórmula

$$u = u_0 + 2t\omega + 2t'\omega',$$

cuando cada una de ambas cantidades variables t, t' asumen todos los valores reales entre 0 y 1 (0 incluído, 1 incluído).

Como grado de una función elíptica se entiende el número que señala cuántas veces esta función se hace infinita en el interior de un paralelogramo de periodos. En este sentido, se cuenta cada punto en el que la función se hace infinita. Así, se indica el ordinal de las ocurrencias de cantidades infinitas en este punto.

No existe ninguna función elíptica de primer grado.

CAPÍTULO 2

Función sigma

2.1. La función $\mathfrak{S}u$

La función analítica más sencilla, que para todos los valores finitos del argumento u posee carácter de una función entera y, además, tiene la propiedad de que para $u = 0$ así como para todos los valores $u = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, congruentes con éste, se hace infinitamente pequeña desde el primer orden, es la función sigma $\mathfrak{S}(u|\omega, \omega') = \mathfrak{S}u$, con par de periodos $(2\omega, 2\omega')$. Esta función se da bajo la forma
(2.1)

$$\mathfrak{S}u = u \prod_w{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \pm \infty \\ w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{excepto } w = 0 \end{array} \right\}$$

en la cual la cantidad w, que aparece en el producto infinito, asume todos los valores abarcados en la expresión $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, con excepción* del valor $w = 0$. En este sentido, se supone, siempre para lo que sigue, que la parte real de la cantidad $\omega'/\omega i$ tiene un valor distindo de cero y, por cierto, positivo.
De la definición de arriba se desprende que $\mathfrak{S}(-u) = -\mathfrak{S}(u)$, esto es, la función $\mathfrak{S}(u)$ es, por tanto, una función impar del argumento u.
Se verifican además las igualdades

$$(2.2) \qquad \mathfrak{S}(0) = 0, \quad \mathfrak{S}'(0) = i, \quad \mathfrak{S}''(u) = 0, \quad \mathfrak{S}'''(u) = 0.$$

La función $\mathfrak{S}(u)$ es representable mediante una serie de potencias de la cantidad u con exponentes enteros positivos. Dicha serie es convergente para todos los valores finitos de u.
Los coeficientes de los términos individuales de esta serie son funciones enteras de dos cantidades g_2 y g_3, las cuales están determinadas por las

---

*A esta excepción hace referencia el acento o apóstrofo ($'$) que aparece en la fórmula del producto (o de una sumatoria).

igualdades

$$(2.3)\qquad g_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

También en estas igualdades la cantidad w asume todos los valores abarcados en la expresión $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, con excepción del valor $w = 0$. Las cantidades g_2, g_3 se llaman los invariantes de la función $\mathfrak{S}$ considerada:

$$(2.4)\qquad \mathfrak{S}u = \mathfrak{S}(u|\omega, \omega') = \mathfrak{S}(u; g_2, g_3).$$

Si se denota con m a alguna cantidad real o compleja distinta de cero, se cumple la igualdad
(2.5)

$$\mathfrak{S}(u|\omega, \omega') = \mathfrak{S}(u; g_2, g_3) = m\mathfrak{S}\left(\frac{u}{m}\middle|\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = m\mathfrak{S}\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right).$$

Para todos los valores finitos del argumento u y de los invariantes g_2 y g_3, la función $\mathfrak{S}(u; g_2, g_3)$ (de las tres cantidades variables no acotadas consideradas u, g_2, g_3) posee el carácter de una función entera.
Resulta entonces que
(2.6)

$$\mathfrak{S}u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} - \cdots$$

La función $\mathfrak{S}(u; g_2, g_3)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$(2.7)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} = 12\ g_3\ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_2} + \frac{2}{3}\ g_2^2\ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_3} - \frac{1}{12}\ g_2\ u^2\ \mathfrak{S},$$

de la cual se obtiene
(2.8)

$$\mathfrak{S}u = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \left(\frac{1}{2}\ g_2\right)^{\mathfrak{m}} (2g_3)^{\mathfrak{n}}\ \frac{u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}}{(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1)!} \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n} = 0, 1, 2, 3, \cdots \infty)$$

cuando se pone, para la evaluación de los coeficientes enteros $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, la fórmula de recursión

$$(2.9)\quad a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 3(\mathfrak{m}+1)a_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + \frac{16}{3}(\mathfrak{n}+1)a_{\mathfrak{m}-2,\mathfrak{n}+1} - \frac{1}{3}(2\mathfrak{m}+3\mathfrak{n}-1)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}.$$

Al coeficiente $a_{0,0}$ corresponde el valor 1. Por el contrario, a aquellos coeficientes para los que uno de los dos índices tiene un valor negativo, se le atribuye el valor 0.
Los valores de los coeficientes $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ para los cuales la suma $4\mathfrak{m} + 6\mathfrak{n} + 1$ no sobrepasa el número 35, se incluyen en la tabla siguiente.

$u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$
u^1	0	0	$+1$
u^5	1	0	-1
u^7	0	1	-3
u^9	2	0	-9
u^{11}	1	1	-18
u^{13}	0	2	-54
	3	0	$+69$
u^{15}	2	1	$+513$
u^{17}	4	0	$+321$
	1	2	$+4968$
u^{19}	0	3	$+14904$
	3	1	$+33588$
u^{21}	2	2	$+257580$
	5	0	$+160839$
u^{23}	1	3	$+502200$
	4	1	$+2808945$
u^{25}	0	4	$+1506600$
	3	2	$+20019960$
	4	1	$+1416951$
u^{27}	2	3	$+162100440$
	5	1	-41843142
u^{29}	1	4	$+796330440$
	4	2	-376375410
	7	0	-388946691
u^{31}	0	5	$+2388991320$
	3	3	-9465715080
	6	1	-6519779667
u^{33}	2	4	-144916218720
	5	2	-210469286736
	8	0	$+25514578881$
u^{35}	1	5	-1289959784640
	4	3	-4582619446320
	7	1	-485174610648

CUADRO 1. Representación de la función $\mathfrak{S}u$ en producto infinito simple

2.2. Representación de la función $\mathfrak{S}u$ en producto infinito simple

Para valores numéricos finitos de $\Re(\omega'/i\omega)$, resulta

$$\mathfrak{S}u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{u\pi}{2\omega}. \tag{2.10}$$

Luego se tiene, si en la conformación del producto infinito $\prod_n$ se asignan todos los valores enteros positivos al numero n, la ecuación

$$\sin\frac{u\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\omega}u\prod_n\left(1-\frac{u}{2n\omega}\right)e^{\frac{u}{2n\omega}}\prod_n\left(1+\frac{u}{2n\omega}\right)e^{-\frac{u}{2n\omega}}. \tag{2.11}$$

Con ayuda de la función seno es posible representar la función $\mathfrak{S}u$ de una manera distinta como un producto infinito simple.
Para abreviar, en lo que sigue se usarán las notaciones

$$\frac{u}{2\omega} = v, \quad e^{v\pi i} = z; \quad \frac{\omega'}{\omega} = \tau, \quad e^{\tau\pi i} = h. \tag{2.12}$$

Cuando se decida que la potencia h^m se toma para cada valor del exponente m, se escribirá $e^{m\tau\pi i}$. En lo que sigue, la determinación referente al signo de la cantidad $\Re(\omega'/i\omega)$ es el negativo de la parte real de la cantidad $\tau\pi i$. El valor absoluto de la cantidad h es, así, menor que 1. Entre los usos de estas notaciones, está

$$\mathfrak{S}u = \frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\cdot e^{\frac{1}{6}v^2\pi^2}\prod_n\left\{\frac{\sin(n\tau-v)\cdot\sin(n\tau+v)}{\sin^2 n\tau\pi}e^{\frac{v^2\pi^2}{\sin^2 n\tau\pi}}\right\}. \tag{2.13}$$

Si η designa la cantidad

$$\eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6}+\sum_n\frac{1}{\sin^2 n\tau\pi}\right\},$$

se tiene además

$$\mathfrak{S}u = e^{2\eta\omega v^2}\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\left(1-\frac{\sin^2 v\tau}{\sin^2 n\tau\pi}\right). \tag{2.14}$$

Además, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(2.15)\quad \mathfrak{S}u &= e^{2\eta\omega v^2}\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\frac{\sin(n\tau-v)\pi}{\sin n\tau\pi}e^{-v\pi i}\prod_n\frac{\sin(n\tau+v)\pi}{\sin n\tau\pi}e^{v\pi i}\\
(2.16)\quad &= e^{2\eta\omega v^2}\frac{2\omega}{\pi}\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^{-2}}{1-h^{2n}}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^2}{1-h^{2n}}\\
(2.17)\quad &= e^{2\eta\omega v^2}\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\frac{1-h^{2n}\cos 2v\tau+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}.\\
(2.18)\quad 2\eta\omega &= \pi^2\left[\frac{1}{6}-\sum_n\frac{4h^{2n}}{(1-h^{2n})^2}\right].
\end{aligned}$$

2.3. Cambio de la función $\mathfrak{S}u$ en un periodo

Entre $\mathfrak{S}(u)$ y $\mathfrak{S}(u \pm 2\omega)$ se verifica la igualdad

$$\mathfrak{S}(u \pm 2\omega) = -e^{\pm 2\eta(u\pm\omega)}\mathfrak{S}(u), \tag{2.19}$$

de la cual resulta $\eta = \mathfrak{S}'(\omega)/\mathfrak{S}(\omega)$. Bajo la permutación del par de periodos $(2\omega, 2\omega')$ con el par de periodos $(2\omega', -2\omega)$, la función $\mathfrak{S}u$ permanece sin cambio y en consecuencia resulta las siguientes ecuaciones análogas a las anteriores

$$\mathfrak{S}(u \pm 2\omega') = -e^{\pm 2\eta'(u\pm\omega')}\mathfrak{S}(u), \quad \eta' = \frac{\mathfrak{S}'(\omega')}{\mathfrak{S}(\omega')}. \tag{2.20}$$

Para el cambio del argumento en un periodo cualquiera vale la igualdad

$$\mathfrak{S}(u \pm 2p\omega + 2q\omega') = (-1)^{pq+p+q}e^{\pm 2(p\eta+q\eta')(u+p\omega+q\omega')}\mathfrak{S}(u), \tag{2.21}$$

o bien, poniendo $p\omega + q\omega' = \tilde{\omega}$, $p\eta + q\eta' = \tilde{\eta}$,

$$\mathfrak{S}(u \pm 2\tilde{\omega}) = \mp e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\mathfrak{S}(u), \tag{2.22}$$

donde el signo superior o el inferior se emplean según la cantidad $\mathfrak{S}(\omega')$ sea distinta de cero, o sea igual a cero.
Entre las cuatro cantidades $\omega, \omega', \eta, \eta'$ se verifica bien la relación

$$\eta\omega' - \omega\eta' = +\frac{1}{2}\pi i, \tag{2.23}$$

cuando $\Re(\omega'/\omega i)$ tiene un valor positivo; o bien

$$\eta\omega' - \omega\eta' = -\frac{1}{2}\pi i, \tag{2.24}$$

cuando, contrariamente a la suposición aceptada, $\Re(\omega'/\omega i)$ tiene un valor negativo.

2.4. La función $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$

Para la función $\frac{d}{du}\log\mathfrak{S}(u) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$, la cual se puede abreviar como $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$, se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u \pm 2\omega) &= \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) \pm 2\eta, \\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u \pm 2\omega') &= \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) \pm 2\eta', \\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u \pm 2\tilde{\omega}) &= \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) \pm 2\tilde{\eta}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Si se pone $\omega + \omega' = \omega''$, $\eta + \eta' = \eta''$, resulta

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega) = \eta, \quad \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega') = \eta', \quad \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega'') = \eta''. \tag{2.26}$$

Para la vecindad del valor $u = 0$ vale el desarrollo en series

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) = \frac{1}{u} + * - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7}u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}u^9 - \cdots, \tag{2.27}$$

mientras que las expresiones

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) = \frac{1}{u} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) \left(\begin{array}{c} w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{excepto } w = 0 \end{array}\right) \tag{2.28}$$

$$= \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi}{2\omega}\{\cot\frac{u\pi}{2\omega} + \sum_n \left(\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right) + \sum_n \left(\cot\frac{\pi}{2\omega}(u + 2n\omega') + i\right)\} \tag{2.29}$$

$$= \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} + \sum_n \frac{2h^{2n}z^{-2}}{1 - h^{2n}z^{-2}} - \sum_n \frac{2h^{2n}z^2}{1 - h^{2n}z^2}\right\} \tag{2.30}$$

tienen validez para todos los valores finitos del argumento u.

CAPÍTULO 3

Función "pe"

3.1. La función $\wp u$

La función "pe", $\wp u = \wp(u|\omega,\omega') = \wp(u; g_2, g_3)$, esta relacionada con la función sigma $\mathfrak{S}u$ por medio de la igualdad

$$\wp u = -\frac{d^2}{du^2}\log\mathfrak{S}u = \frac{(\mathfrak{S}'u)^2 - \mathfrak{S}u\mathfrak{S}''u}{\mathfrak{S}^2 u}. \tag{3.1}$$

Por esto resulta que $\wp(-u) = \wp(u)$. Ademas, se verifican las igualdades

$$\begin{aligned}
\wp u &= \frac{1}{u^2} + {\sum_w}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} + \frac{1}{w^2}\right) \left(\begin{array}{c} w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{excepto } w = 0\end{array}\right) && (3.2)\\
&= -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} + \sum_n \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u-2\eta\omega')} && (3.3)\\
&+ \sum_n \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u+2\eta\omega')}\}\\
&= -\frac{\eta}{\omega} - \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \{\frac{1}{(z-z^{-1})^2} + \sum_n \frac{h^{2n}z^{-2}}{(1-h^{2n}z^{-2})^2} && (3.4)\\
&+ \sum_n \frac{h^{2n}z^2}{(1+h^{2n}z^2)^2}\}\\
\wp(u|\omega,\omega') &= \wp(u; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}|\frac{\omega}{m},\frac{\omega'}{m}\right) && (3.5)\\
&= \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^4 g_3\right).
\end{aligned}$$

En la vecindad del valor $u = 0$ se cumple el desarrollo en series

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{2^2\cdot 5}u^2 + \frac{g_3}{2^2\cdot 7}u^4 + \frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}u^6 + \frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^8 + \cdots \tag{3.6}$$

y, a decir verdad, se verifica que

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + c_2u^2 + c_3u^4 + \cdots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \cdots, \tag{3.7}$$

cuando λ sea mayor a 3, con la fórmula recursiva

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu}, \quad (\nu = 2, 3, \cdots, \lambda-2) \tag{3.8}$$

La función $\wp u$ es una función doblemente periódica cuyos argumentos $(2\omega, 2\omega')$ constituyen un par de periodos primitivos, la cual –dentro de cada paralelogramo de periodos– es solamente infinita en los puntos donde el valor de los argumentos es congruente con el valor nulo y, por cierto, el orden de los infinitos es igual a dos.
La función $\wp u$ es así una función elíptica de segundo grado. Para la vecindad el valor $u = 0$ se expresa en series de potencias progresivas de del argumento como

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots \tag{3.9}$$

Se nota que $1/u^2$ es el único término con exponente negativo, mientras que el término constante de este desarrollo tiene valor nulo.
Por las propiedades citadas, la función $\wp u$ queda determinada de manera inequívoca. Entre todas las funciones doblemente periódicas, la función $\wp u$ es en verdad la mas sencilla posible. La función $\wp u$ es una función par del argumento u.
La primera derivada $\wp' u$ de la función $\wp u$ es una función elíptica de tercer grado, la cual es infinitamente grande solamente para los valores del argumento congruentes con el valor nulo. Además, es impar.
Resulta que

$$\wp'(-u) = -\wp'(u), \tag{3.10}$$

$$\wp' u = -2\sum_w \frac{1}{(u-w)^3} \quad (w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'). \tag{3.11}$$

De la última ecuación se sigue para $u = \omega, \omega', \omega''$, que

$$\wp'(\omega) = 0, \quad \wp'(\omega') = 0, \quad \wp'(\omega'') = 0. \tag{3.12}$$

En la vecindad del valor $u = 0$ se cumple el desarrollo en series

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + * + \frac{g_2}{2\cdot 5}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \frac{g_2^2}{2^3\cdot 5^2}u^5 + \frac{3g_2g_3}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^7 + \cdots \tag{3.13}$$

Entre la función $\wp u$ y su primera derivada $\wp' u$ se verifica la igualdad

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3, \tag{3.14}$$

de la cual resultan

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2, \quad \wp''' u = 12\wp u\wp' u. \tag{3.15}$$

Todas las derivadas de la función $\wp u$, cuyo orden sea par, son funciones enteras de $\wp u$.

Las tres cantidades

$$(3.16) \qquad \wp\omega = e_1, \quad \wp\omega'' = 2_2, \quad \wp\omega' = e_3$$

son distintas entre ellas cuando los dos periodos $2\omega, 2\omega'$ –primitivos– tienen valor finito. Ademas, se tiene que
(3.17)

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega'')(\wp u - \wp\omega') = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3).$$

De aquí se desprenden las ecuaciones

$$(3.18) \qquad \begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 &= -\frac{1}{2}\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) = -\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned}$$

La cantidad

$$(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2 = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27g_3^2\right)$$

la designaremos con el signo G.

3.2. Caso especial

El caso especial en el que la parte real de la cantidad $\frac{\omega'}{\omega i}$ sea infinitamente grande, cuando que 2ω tenga valor finito distinto de cero, las dos cantidades e_2 y e_3 serán iguales entre ellas. Bajo esta suposición se cumplen las igualdades siguientes

$$\begin{aligned} (3.19) \qquad \wp u &= \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\cdot u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2}, \\ (3.20) \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 &= \frac{9g_3}{2g_2},\ e_1 = \frac{3g_3}{g_2},\ e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2},\ g_2^3 - 27g_3^2 = 0, \\ (3.21)\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) &= \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{u\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u,\ 2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6}, \\ \mathfrak{S}u &= e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}. \end{aligned}$$

Si tanto 2ω como $2\omega'$ toman valores infinitamente grandes, mientras $\Re(\frac{\omega'}{\omega i})$ es distinto de cero, las tres cantidades e_1, e_2, e_3 son iguales entre ellas y se obtiene

$$(3.22) \quad \wp u = \frac{1}{u^2},\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) = \frac{1}{u},\ \mathfrak{S}u = u;\ e_1 = e_2 = e_3 = 0,\ g_2 = 0,\ g_3 = 0.$$

3.3. Teorema de adición de la función $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$

Entre la función $\wp u$ y la función $\mathfrak{S}u$ se verifica la identidad

$$\wp u - \wp v = -\frac{\mathfrak{S}(u+v)\mathfrak{S}(u-v)}{\mathfrak{S}^2 u \mathfrak{S}^2 v}. \tag{3.23}$$

De ella resulta, por medio de diferenciación logarítmica,

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u+v) + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-v) - 2\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) &= \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}, && (3.24) \\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u+v) - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-v) - 2\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(v) &= \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}. && (3.25) \end{aligned}$$

Por ende se sigue el teorema de adición

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u+v) &= \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}, && (3.26) \\ \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-v) &= \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}. && (3.27) \end{aligned}$$

3.4. Teorema de adición de la función $\wp u$

Mediante diferenciación resulta, a partir del teorema de adición de la función $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$, el teorema de adicion de la función $\wp u$:

$$\begin{aligned} \wp(u \pm v) &= \wp u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right) = \wp v \mp \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right) && (3.28) \\ &= \wp u + \frac{(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2)(\wp v - \wp u) + 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 \mp \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2} && (3.29) \\ &= \wp v + \frac{(6\wp^2 v - \frac{1}{2}g_2)(\wp u - \wp v) + 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 \mp \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}, && (3.30) \\ &= \frac{2(\wp u \wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3 \mp \wp' u \wp' v)}{2(\wp u - \wp v)^2} && (3.31) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right]^2 - \wp u - \wp v. && (3.32) \end{aligned}$$

De estas fórmulas se logran las que siguen:

$$\frac{1}{\wp(u \pm v)} = \frac{2(\wp u\wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3 \mp \wp' u\wp' v)}{2(\wp u\wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(\wp u + \wp v)}, \tag{3.33}$$

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2(\wp u\wp v - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2} \tag{3.34}$$

$$= 2\wp u - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log(\wp u - \wp v) \tag{3.35}$$

$$= 2\wp v - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\log(\wp u - \wp v),$$

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = -\frac{\wp' u\wp' v}{(\wp u - \wp v)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log(\wp u - \wp v), \tag{3.36}$$

$$\wp(u+v)\cdot\wp(u-v) = \frac{(\wp u\wp v + \frac{1}{4}g_2)^2 + g_3(\wp u + \wp v)}{(\wp u - \wp v)^2}, \tag{3.37}$$

$$\wp'(u \pm v) = \left(\frac{(\wp' v)^2}{(\wp v - \wp u)^3} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' v}{(\wp v - \wp u)^2}\right)\wp' u \pm \left(\frac{(\wp' u)^2}{(\wp u - \wp v)^3} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{(\wp u - \wp v)^2}\right)\wp' v, \tag{3.38}$$

$$4(\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v)) = \left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 = \left(\frac{\wp'(u+v) + \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)}\right)^2 \tag{3.39}$$

$$\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{-\wp'(u+v) - \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)}, \tag{3.40}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.41}$$

$$\wp(2u) = \frac{(\wp^2 + (1/4)g_2)^2 + 2g_3\wp u}{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3} \tag{3.42}$$

$$= \wp u - \frac{1}{4}\frac{d^2}{du^2}\log\wp' u \tag{3.43}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{d}{du}\log\wp' u\right)^2 - 2\wp u. \tag{3.44}$$

Por integración resulta de lo anterior las siguientes fórmulas importantes:

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2u) = 2\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) + \frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{\wp' u}, \quad \frac{\mathfrak{S}(2u)}{\mathfrak{S}^4 u} = -\wp' u, \tag{3.45}$$

$$\mathfrak{S}(2u) = \mathfrak{S}^4 u\,\frac{d^3}{du^3}\log\mathfrak{S}u = 2\mathfrak{S}u(\mathfrak{S}' u)^3 - 3\mathfrak{S}^2 u\mathfrak{S}' u\mathfrak{S}'' u + \mathfrak{S}^3 u\mathfrak{S}''' u.$$