UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Educación Matemática

Presentada por

JORGE ANDRÉS TORO URIBE

Dirigida por

Carmen Samper de Caicedo

Medellín, mayo de 2014

Nota de aceptación:

____

____

____

____

____

____

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Medellín, 27 de mayo de 2014

Agradecimientos

Al departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín, en especial a los profesores Ana Celi Tamayo y Javier Santos Suárez, por haber hecho posible, de muchos modos, la concreción de este trabajo.

A la profesora Carmen Samper de Caicedo, mi estimadísima tutora, por su paciencia, por su sapiencia y su imprescindible colaboración.

A mis compañeros de la maestría por ser la contraparte vital de la experiencia que compartimos. En particular a John David, Sergio, Ángela, Viviana, Diego y Yuriana por su participación en este estudio, por su disponibilidad y por compartir conmigo sus ideas.

A mi amiga y compañera Milena, por su colaboración desinteresada y por el tiempo dedicado en sus clases al desarrollo de la propuesta.

Al colegio Cooperativo “San Antonio de Prado”, por brindarme el espacio para realizar el trabajo de investigación y a los estudiantes del grado 8°A del año 2013 por su compromiso, dedicación y responsabilidad.

A mi madre y a mi hermana por su incansable apoyo, por sus mil y un enseñanzas, por su ejemplo y porque sin su inapreciable participación nada de esto hubiera sido posible.

Resumen Analítico en Educación-RAE

Tipo de documento: Trabajo de grado de maestría

Acceso al documento: Universidad de Medellín

Título del documento: Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo

Autor: Jorge Andrés Toro Uribe

Publicación: Medellín, 2014, 163 páginas

Unidad patrocinante: Universidad de Medellín

Palabras Clave

Argumentación, actividad demostrativa, experimento de enseñanza, sistemas de geometría dinámica, acciones del profesor.

Descripción

Tesis de grado presentada para optar por el título de Magister en Educación Matemática que propone estudiar la argumentación de estudiantes de grado octavo del Colegio Cooperativo "San Antonio de Prado" cuando realizan actividad demostrativa con el apoyo de sistemas de geometría dinámica, en este caso, Cabri. Una de las razones para realizar un trabajo en esta temática es el interés creciente en la comunidad de educadores matemáticos por incluir la demostración en el currículo de la escuela secundaria; otra es poder ofrecer alternativas didácticas para la enseñanza de la demostración. Los argumentos fueron analizados con el modelo de Toulmin y se identificaron las diferentes acciones del maestro, que facilitaron o no la producción de argumentos**,** usando categorías propuestas por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G), de la Universidad Pedagógica Nacional.

Fuentes

Se retoman diferentes tipos de fuentes: revistas electrónicas e impresas, libros y capítulos de libros, artículos de reportes de investigación, entre otras; la mayoría publicados en las dos últimas décadas. Se destacan los artículos del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional (Æ•G) sobre la actividad demostrativa y cada uno de los procesos que ésta incluye, así como las acciones del profesor; los informes de Paolo Boero, Gila Hanna, Maria Alessandra Mariotti y Víctor Larios sobre la resignificación de la demostración en los currículos; Nicolas Balacheff y su trabajo sobre los procesos de prueba con estudiantes de colegio; publicaciones de Bettina Pedemonte, Nadia Douek, Núria Planas, Genaro de Gamboa y Jorge Fiallo a propósito de la argumentación en la educación matemáticas; y no menos importante las referencias sobre los Sistemas de Geometría Dinámica, por parte de Ángel Gutiérrez y Jean-Marie Laborde.

Contenidos

En términos generales, el trabajo se compone de cinco capítulos. En el primer capítulo se plantea la investigación e incluye cuatro partes: la exposición de antecedentes que sirvieron para obtener una mirada de cómo ha sido abordada la demostración matemática en el aula; la presentación de la problemática de estudio, exponiendo el interés particular y la justificación del mismo; el planteamiento de la investigación y los objetivos del estudio. El segundo capítulo está dedicado a la presentación del marco teórico que fundamenta conceptual y analíticamente la disertación. El tercer capítulo contiene el diseño metodológico con una visión general del tipo de estudio y una descripción detallada del proceso de recolección, procesamiento y análisis de los datos. En el cuarto capítulo se presenta el análisis realizado. En el capítulo cinco se presentan las conclusiones del estudio. Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas y los anexos.

Metodología

La metodología es de corte cualitativo, pues el investigador observa la realidad en el contexto mismo que sucede: el aula de clase. Asimismo, el trabajo es catalogado como un experimento de enseñanza: se elaboró una propuesta de enseñanza orientada desde la actividad demostrativa que favoreciera la argumentación. Luego, la propuesta fue implementada durante un periodo académico, en el cual los estudiantes en equipos colaborativos construyeron y exploraron situaciones en torno a relaciones y objetos geométricos, descubrieron propiedades y formularon conjeturas, con el fin de conformar un sistema teórico que sirviera como referencia para sus argumentos; al finalizar el periodo, se trabajó con solo tres grupos de estudiantes, con el propósito de caracterizar los argumentos que ellos producían, al resolver una serie de tareas, se grabaron y se tomó registro escrito de sus producciones. El material recolectado no fue en algunos casos de la mejor calidad, por lo que fue necesario realizar una serie de entrevistas, con el ánimo de comprender mejor las producciones de los estudiantes. El experimento tiene como paso final el análisis respectivo.

Conclusiones

Al dar una mirada a los resultados de este trabajo, fruto de la implementación de una propuesta de enseñanza, se concluye que los estudiantes avanzaron en la capacidad para argumentar matemáticamente, acción que no había sido parte de la cultura de clase previamente. Del análisis retrospectivo de la actuación del profesor, se concluye que su papel en propiciar el desarrollo de la capacidad de argumentar de los estudiantes no se limita a diseñar tareas que exigen la justificación sino que debe estar presto, en la clase misma, a requerirla cuando ve la oportunidad, indagar para que los estudiantes tengan que producir argumentos, y establecer como norma de la clase justificar cada idea matemática que producen. Es importante usar metodologías diferentes a las tradicionales que ofrezcan formas alternativas para favorecer un mejor aprendizaje y la argumentación, como el uso de la geometría dinámica, con el fin de formar estudiantes críticos, reflexivos y transformadores de su propia realidad.

Tabla de contenido

Tablas y figuras

Introducción

“La enseñanza de la matemática involucra procesos complejos que se ofrecen como un amplio campo para la investigación en didáctica de la matemática”

Víctor Larios

Desde la constitución de la matemática en disciplina científica por los griegos, con objetos de estudio propios y métodos de indagación específicos, surgió la preocupación por justificar nuevos resultados, ya no solo en el sentido limitado de verificación empírica sino a partir de la validación deductiva sujeto a un sistema axiomático. Así se sentaron las bases para que la demostración se constituyera en el instrumento de validación por excelencia para la matemática (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006).

En las últimas décadas, la demostración matemática ha despertado un interés creciente en la educación matemática, y no son pocos los autores, tanto de esta disciplina como de las propias matemáticas, que coinciden en señalar a la demostración matemática como uno de los procedimientos más importantes de las matemáticas; el motor que ha permitido el desarrollo de esta ciencia (Ibañes y Ortega, 2005).

La demostración en la comunidad de matemáticos es vista como recurso de validación, medio de comunicación y de ampliación del horizonte conceptual (Camargo, 2010); pero, como señala Balacheff (2000), es preciso tener en cuenta que la demostración no puede ser llevada del mismo modo al aula de clase. Es diferente la percepción y la intencionalidad de un matemático a la de un educador matemático, aunque el objeto de estudio sea el mismo.

Dentro del escenario educativo, argumenta Hanna (2007), la demostración merece un lugar destacado en el programa de estudios, por ser un elemento central de las matemáticas mismas, el método preferido de validación y porque es una valiosa herramienta para promover la comprensión matemática. Por ello, puede constituirse en un recurso didáctico para enseñar matemáticas y la naturaleza del pensamiento matemático. Sin embargo, la enseñanza de la demostración en el nivel básico y medio presenta dificultades que aparentemente son insalvables. El desarrollo del razonamiento deductivo y la comprensión de estructuras axiomáticas son procesos que se encuentran en uno de los estadios más avanzados del pensamiento matemático, por lo que algunas personas podrían suponer que ello queda vetado para el ambiente escolar (Larios y González, 2010).

Cabe agregar que uno de los problemas en educación matemática, está relacionado con la construcción de demostraciones y la comprensión de su utilidad.

> La demostración ha sido uno de los aspectos de la matemática considerado como difícil de enseñar y de aprender. Se reconoce que interpretar, hacer o usar demostraciones es un asunto complejo que depende de una amplia gama de creencias conocimientos, habilidades y condiciones sociales y culturales (Camargo 2010, p. 9).

En efecto, es frecuente escuchar a los profesores de matemáticas de diversos niveles educativos quejarse de las dificultades que tienen sus estudiantes para comprender qué es una demostración y cómo realizarla. Llega a tanto su confusión e incertidumbre sobre cómo abordar la problemática, que deciden reducir la actividad demostrativa en la clase de matemáticas lo más posible (Camargo, Samper y Perry, 2006).

Dentro de las diferentes propuestas para superar el problema de la enseñanza y aprendizaje de la demostración y su inclusión en contextos escolares, ha surgido una en la que se considera la demostración como un producto posible de lo que se denomina actividad demostrativa (Molina, Perry, Samper y Camargo, 2011). Esta involucra el proceso de conjeturación y de justificación. El primero tiene como fin la producción de conjeturas, después de haber realizado acciones de exploración y visualización. El segundo consiste en la búsqueda y organización de las ideas que conformarán una justificación, siendo una forma de esta la demostración, es decir, un argumento de naturaleza deductiva basado en un sistema teórico de referencia.

La presente investigación tiene el propósito de estudiar los argumentos de los estudiantes de un curso de geometría de octavo grado quienes, debido a la metodología de enseñanza y las tareas propuestas por el profesor, participaron en acciones matemáticas asociadas a la actividad demostrativa.

En cuanto a la argumentación en general y la argumentación matemática, conceptos que se detallan en el marco teórico, se toma como base el esquema propuesto por Toulmin

(Pedemonte, 2007) para estudiar los argumentos que producen los estudiantes cuando se enfrentan a resolver problemas planteados dentro del marco de actividad demostrativa.

Además de contribuir con la enseñanza y aprendizaje de la demostración desde la educación básica, esta investigación pretende impulsar innovaciones pedagógicas, específicamente la inclusión del uso de tecnología para el desarrollo de las actividades de clase mostrando evidencia de como esta se convierte en una herramienta eficaz y de gran alcance en la consecución de aprendizajes más duraderos.

1. Planteamiento de la investigación

"Il n'y a pas des problèmes qu'on se pose, il y a des problèmes qui se posent.
Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus"
Henri Poincaré

1.1. Antecedentes

En los últimos años, en el campo de la educación matemática se ha observado un creciente interés por la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración. La mejor referencia que se puede citar para apoyar esta afirmación es la revista electrónica sobre la demostración *"La lettre de la preuve"* editada por Bettina Pedemonte y Maria Alessandra Mariotti (URL, http://www.lettredelapreuve.it/). Este interés parece justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática, el reconocimiento de la importancia de estos en el aula de clases y el bajo nivel en la comprensión y elaboración de demostraciones que muestran los estudiantes.

Así mismo, atendiendo al interés compartido por favorecer la enseñanza y aprendizaje de la demostración, diferentes investigaciones han sido realizadas desde diferentes enfoques e intenciones. Cabe mencionar algunas de ellas.

En primera instancia, a nivel nacional, en los encuentros anuales de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME), es habitual la presentación de estudios sobre el aprendizaje y/o enseñanza de la demostración, o sobre otros aspectos derivados de esta. Se destacan básicamente los trabajos del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual ha dirigido sus esfuerzos a buscar alternativas para que la demostración tenga un papel significativo en la enseñanza, se use para promover la comprensión matemática y ayude a los estudiantes a entender los diferentes papeles de la demostración en las matemáticas (Samper, Camargo y Perry, 2006; Camargo, 2010). De otro lado, están las investigaciones realizadas por el doctor Jorge Enrique Fiallo, profesor de la escuela de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, quien ha liderado, entre otros, un estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en ambientes de geometría dinámica (Fiallo, 2010).

A nivel de Latinoamérica se destaca el trabajo del mexicano Víctor Larios Osorio, quien en los últimos años ha investigado sobre la construcción del significado de la demostración en contextos escolares, en algunos casos mediados por ambientes de geometría dinámica (Larios, 2006).

A nivel mundial, Mariotti (2006) comenta que en los últimos años, en los encuentros del *Psychology of Mathematics Education* (PME), se han presentado variados informes de investigación en relación a la demostración. Se evidencia un alejamiento de los primeros estudios, centrados en los estudiantes y algunas veces en los maestros, las concepciones de la demostración y en términos generales sobre las dificultades que enfrentan los alumnos en la demostración, hacia estudios recientes en los que investigadores presentan y discuten ideas sobre cómo es posible superar estas dificultades mediante apropiadas intervenciones de enseñanza. Como una tendencia general, es posible observar un cambio en la metodología: han aumentado los informes sobre experimentos de enseñanza.

En términos generales, las investigaciones, según Mariotti (2006), abarcan la identificación de la influencia del currículo sobre el estado de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, análisis de concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar, y experimentos de enseñanza y su efecto en el aprendizaje, entre los cuales están aquellos que tienen en cuenta la naturaleza social de la demostración. Dentro de los últimos estudios se ubican los que han incorporado el uso de programas de geometría dinámica como recurso para crear ambientes favorables para el aprendizaje de la demostración.

Se destacan los estudios de otros investigadores: Nicolás Balacheff, en relación a los procesos de prueba de los alumnos de matemáticas y el papel de la interacción social en la construcción de una prueba (Balacheff, 2000); Raymond Duval y su trabajo sobre las diferencias existentes entre los procesos argumentativos y demostrativos (Duval, 1999); Efraim Fischbein quien recalca los aspectos relacionados con la intuición y su relación con la demostración (Larios, 2006); el equipo de italianos a la cabeza de Paolo Boero, Maria Alessandra Mariotti, Rosella Garutti, entre otros, quienes han estudiado la unidad cognitiva entre los argumentos que presentan los estudiantes cuando exploran situaciones para establecer conjeturas y aquellos que formulan cuando tratan de justificarla (Pedemonte, 2002); y Ángel Gutiérrez, de la Universidad de Valencia, España, quien ha liderado y acompañado variadas investigaciones sobre problemáticas del aprendizaje de la demostración matemática en contextos escolares, algunas de ellas mediadas por sistemas de geometría dinámica (Marrades y Gutiérrez, 2000; Gutiérrez, 2005).

Como puede observarse, es un problema que ha sido estudiado desde diferentes ángulos. En particular el estudio de la argumentación ha venido tomando fuerza dentro de la comunidad de investigadores en educación matemática (Goizueta, 2011; de Gamboa, 2009; Crespo, 2006; Planas y Morera, 2012). Así mismo, Godino y Recio (2001), expresan "los estudios sobre la demostración en educación matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales" (p.406).

Con referencia a lo anterior, Pedemonte (2007) afirma que "la investigación experimental (Boero et al 1996; Garuti et al 1996, 1998; Mariotti 2001) muestra que la demostración es más accesible a los estudiantes si se ha desarrollado una actividad argumentativa para la construcción de una conjetura" (p.25).

El desarrollo temprano de las habilidades argumentativas de los estudiantes se ha convertido en un tema de gran preocupación para los educadores matemáticos por diferentes razones: la necesidad de un primer acercamiento a las habilidades que son relevantes para el proceso de demostración, la exploración, el potencial de la interacción social en el desarrollo del conocimiento y de habilidades matemáticas y la importancia de las habilidades argumentativas en el currículo dirigido a mejorar la autonomía intelectual de los estudiantes (Douek, N. y Pichat., 2003).

Como lo mencionan Samper, Camargo y Leguizamón (2010), siempre ha sido una meta de la matemática escolar que los estudiantes desarrollen pensamiento deductivo. El propósito ha sido que puedan realizar el razonamiento necesario para resolver problemas matemáticos o de la vida diaria, justificar sus ideas matemáticas con argumentos basados en esta disciplina y las cotidianas a partir de otros saberes y no desde sentimientos, y construir demostraciones. El problema ha sido la forma como se ha pretendido que desarrollen esas capacidades. Por ejemplo, desde mediados del siglo pasado hasta los años 70, la influencia de corrientes formalistas de la matemática llevó a que el profesor enseñara la demostración exponiendo paso a paso cada una en el tablero, siendo el estudiante simplemente un observador. Con ello, se esperaba que fueran capaces de construir una demostración como lo hace un matemático. Los estudiantes simplemente trataban de imitar al profesor pues no comprendían como construirla ni para qué se hacía esa tarea. Según los autores citados, tanto estudiantes como profesores se frustraban al no ver resultados positivos, lo cual llevó a que se fuera suprimiendo la demostración del currículo escolar. La geometría que se enseñaba era solamente identificar figuras, clasificarlas y encontrar área y volumen. Con este tratamiento, se quitó a los “alumnos la posibilidad de disponer de una herramienta eficaz y confiable para desarrollar el razonamiento” (Samper et al., 2010).

No obstante, en las últimas décadas, investigadores en educación matemática se han cuestionado por la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, así como del rol del descubrimiento y la justificación en clase de matemáticas. Han centrado su interés en cómo a través de los procesos que estos involucran como la exploración, la conjeturación, la prueba y la demostración, puede promoverse la construcción de los conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades como la observación, la argumentación y el análisis (Larios, 2006).

Sin embargo, pese a los esfuerzos realizados por diferentes grupos de investigación y comunidades académicas de diferentes universidades alrededor del mundo, no se ve aun el impacto en la enseñanza de la geometría en la educación básica y media; no se ha transformado la manera como se enseña la geometría (Samper et al., 2010); es decir, no se han generado ambientes de aprendizaje que favorezcan el aprender a demostrar.

1.2. Problemática de estudio

El Colegio Cooperativo "San Antonio de Prado" (Ver consentimiento informado en Anexo 4), colegio no oficial ubicado en el corregimiento de San Antonio de Prado de la ciudad de Medellín, propone en su plan de estudios, particularmente en la asignatura de geometría de octavo grado, el tema de la congruencia de triángulos, y busca, por primera vez, que el estudiante construya demostraciones, usando herramientas conceptuales dadas en el mismo curso y en años anteriores. El curso se dicta de la manera tradicional, siendo el maestro quien provee la teoría (teoremas, definiciones, axiomas) que considera pertinente e ilustrando con ejemplos cómo demostrar. Los ejercicios que se proponen son de la misma naturaleza: a partir de datos dados demostrar una propiedad. La tarea del estudiante consiste en construir demostraciones de afirmaciones provistas por el profesor, plasmando el proceso en un esquema de dos columnas. En la primera se escriben afirmaciones y en la segunda, al frente, el elemento teórico que permite concluirlas. Sin embargo, el proceso no ha colmado las expectativas de maestros y estudiantes; los maestros aducen a la dificultad de enseñar un tema difícil y aseguran que el estudiante no aprende a demostrar ni aprende geometría; los estudiantes no logran aprender ni comprender el sentido de un proceso que consideran complejo. En relación a la problemática planteada, ha sido tema de discusión por parte de los docentes de la institución, la conveniencia de incluir una temática que no ha generado los resultados esperados.

Partiendo de una problemática que se ha podido confirmar desde la propia experiencia profesional y también con base en la constatación de las lecturas realizadas, el panorama de la problemática se puede formular del siguiente modo: Muchos alumnos tienen dificultades para aprender a construir demostraciones de teoremas matemáticos. Aunque las causas de esta dificultad pueden ser muchas, tiene sentido pensar que algunas de estas se remontan a posibles dificultades en la argumentación. De acuerdo con este supuesto, se plantea una investigación enfocada a estudiar la argumentación de los estudiantes de octavo grado quienes han vivido una experiencia de enseñanza que pretende favorecer dicha argumentación.

Se considera de especial importancia esta problemática, ya que además de tener interés desde el punto de vista de la investigación en didáctica de las matemáticas, tiene una fuerte relevancia social; a propósito de esto, de Gamboa, Planas y Edo (2010) señalan como un objetivo de la educación es formar ciudadanos críticos y reflexivos, comprometidos y capaces de razonar. Para ello es esencial el trabajo de la argumentación, dado su papel dentro del pensamiento matemático; los estudiantes deben aprender a reconocer y desarrollar argumentos que permitan la adquisición progresiva de conocimiento.

Parece que hay un consenso general sobre el hecho de que el desarrollo de la demostración constituye un objetivo importante en la educación matemática, por lo que existe una tendencia general hacia la inclusión del tema de la demostración en el plan de estudios (Mariotti, 2006). En particular, los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* de Estados Unidos (NCTM) publicados en 2000, revaloraron la demostración en el currículo de matemáticas proponiendo recomendaciones para desarrollar habilidades relacionadas con la demostración desde el principio de la escuela primaria.

El NCTM (2003) indica que una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación. Al mismo tiempo, asegura que para entender las matemáticas es necesario ser capaz de razonar.

> Desarrollando ideas, explorando fenómenos, justificando resultados y usando conjeturas matemáticas en todas las áreas de contenidos y, con diferentes expectativas de complejidad, en todos los niveles, los estudiantes deberían ver que las matemáticas tienen sentido […] Razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos […] Los alumnos necesitan múltiples oportunidades para formular conjeturas, y contextos de aprendizaje ricos y atractivos […], pueden aprender a razonar a través de la discusión de las argumentaciones de sus compañeros. (NCTM, 2003, p.59-61)

En el caso colombiano, el Ministerio de Educación Nacional a partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), ubican al razonamiento como un proceso general, presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes. Tiene que ver, entre otras cosas, con justificar las estrategias y los procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, proponer contraejemplos, usar hechos conocidos y utilizar argumentos propios para exponer ideas. Además, para favorecer el desarrollo del razonamiento en el aula, se debe crear un ambiente que sitúe el pensamiento crítico como base del proceso de enseñanza y así propiciar un ambiente que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas.

Boero (2007) advierte como los viejos modelos de enseñanza, aquellos basados fundamentalmente en el aprendizaje a partir de la observación e imitación de las demostraciones como están escritas en los libros de texto, no se ajustan a las necesidades actuales de estudiantes y profesores. Además, estas formas de enseñar mostraron su ineficacia en el intento para que los estudiantes entendieran el papel de la demostración en las matemáticas y para que ellos desarrollaran habilidades relacionadas con la producción de conjeturas y la construcción de demostraciones. Tal ineficacia fue una de las razones para eliminar la enseñanza de la demostración o para reducir su importancia en los programas de enseñanza secundaria en algunos países. Por lo tanto, se necesitan enfoques totalmente nuevos.

La exploración matemática de situaciones, la búsqueda de conjeturas y la construcción de justificaciones son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y puedan potenciar su competencia demostrativa y argumentativa. Su desarrollo debe comenzar en la educación básica. Se debe promover un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos de argumentación y justificación sean actividades cotidianas de la clase de matemáticas (NCTM, 2003).

De otro lado, los ambientes virtuales y en especial los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), se convierten en una alternativa para potencializar los argumentos de los estudiantes y realizar actividad demostrativa en la clase de matemáticas. A propósito de lo anterior, Camargo, Samper y Perry (2006) señalan como los SGD ayudan a los estudiantes a hacer construcciones, mediciones y comprobar propiedades. Todo ello brinda la posibilidad de realizar exploraciones, con el objetivo de entender la situación propuesta en un problema, descubrir propiedades, formular y verificar conjeturas, estudiar la dependencia entre propiedades y disponer de herramientas para desarrollar ideas útiles para justificar los descubrimientos.

En el orden de las ideas anteriores, los SGD favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre verificar y justificar por medio de argumentos teóricos. Conduce además a analizar de manera diferente los procesos involucrados en la actividad de demostrar, pues proporcionan a los estudiantes posibilidades de acceso a justificaciones a través de la mediación semiótica, organizada por el profesor, con el uso de estas herramientas (Laborde, 2000). Además, a diferencia de los materiales tradicionales, como señala Gutiérrez (2005), los SGD brindan la posibilidad de realizar experimentaciones que permiten plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que se puedan abordar la resolución de los problemas planteados.

1.3. Pregunta de investigación y objetivos

La problemática expresada en el apartado anterior lleva a considerar una cuestión principal de investigación, que se enuncia brevemente del siguiente modo:

¿Cómo promueven la argumentación de los estudiantes de octavo grado el uso de sistemas de geometría dinámica en clase y la actividad demostrativa?

Para dar respuesta a la pregunta anterior se ha propuesto realizar esta investigación, teniendo en cuenta los siguientes objetivos.

Objetivo General

- Analizar los argumentos de los estudiantes de octavo grado del Colegio Cooperativo “San Antonio de Prado”, cuando realizan actividad demostrativa con el apoyo de sistemas de geometría dinámica.

Objetivos Específicos

- Caracterizar los argumentos de los estudiantes cuando están resolviendo problemas con y sin el uso de Sistemas de Geometría Dinámica.

- Identificar las acciones del maestro que facilitan o no la producción de argumentos por los estudiantes.

- Elaborar una propuesta de enseñanza apoyada en el uso de Sistemas de Geometría Dinámica para favorecer la actividad demostrativa en el aula.

2. Referentes Teóricos

"Uno de los principales objetivos de la matemática, cuando se enseña correctamente, es el de despertar en el discípulo la fe en la razón, su confianza en la verdad de lo que ha sido demostrado y en el valor de la demostración"

Bertrand Russell

2.1. Enseñanza y aprendizaje de la geometría

A continuación se presentan algunas ideas importantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría de octavo grado que se han tenido en cuenta para el diseño de la propuesta de enseñanza. Como se verá más adelante, en esta no se abarcó toda la geometría que se enseña en grado octavo, sino que se centró en una parte de esta: conceptos básicos de geometría euclidiana y congruencia de triángulos. Esta reducción se hizo por varias razones: la necesidad de delimitar el tema para poder desarrollarlo en un tiempo razonable para la experimentación; ser el contenido de un periodo lectivo del curso; como dentro de los objetivos se busca propiciar el desarrollo de la actividad demostrativa, se quería ofrecer los elementos necesarios para que los estudiantes pudieran argumentar con base a estos, ya que se tiene la convicción de que la geometría es un espacio propicio para desarrollar estos procesos; y por las dificultades que existen para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración dentro de la misma geometría.

La propuesta de enseñanza se basa en cuatro ejes fundamentales:

1. Conceptual: Relativo al aprendizaje de los conceptos y propiedades de la matemática. En este caso puntual, la geometría.

2. Curricular: Relativo a los contenidos matemáticos sugeridos en los currículos oficiales y abordados dentro del plan de estudios del colegio donde se lleva a cabo la propuesta.

3. Metodológico: Relativo al uso de un enfoque para la enseñanza de la geometría, que incluye el uso de SGD, en particular Cabri, como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado.

4. Formativo: Relativo al objetivo de mejorar las habilidades argumentativas de los estudiantes para fomentar el camino hacia la demostración matemática.

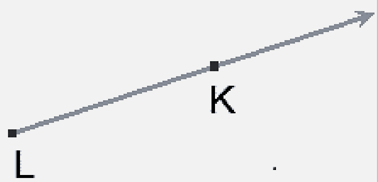
En los siguientes párrafos se presenta una reflexión sobre los principales aspectos de cada eje.

2.1.1. El papel de la geometría

González y Larios (2012) expresan la necesidad de enseñar la geometría en la escuela, incluso desde los primeros años, para que ésta pueda desempeñar su papel en la vida cotidiana. Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida, porque permite ubicarse en el espacio físico, calcular distancias, distinguir formas, pero sobre todo permite desarrollar pensamiento lógico-deductivo. Estos autores comentan como, el estudio de la matemática en la secundaria, busca que el estudiante desarrolle un nivel de conocimiento que le permita entender, resolver situaciones matemáticas y expresarse con un lenguaje matemático. Para conseguirlo, se necesita propiciar en la clase un ambiente en el cual el estudiante formule y valide conjeturas, plantee preguntas, adquiera las herramientas y los conocimientos matemáticos necesarios para utilizar procedimientos apropiados para resolver problemas y, al mismo tiempo, comunique, analice e interprete ideas y procedimientos de solución.

Para González y Larios (2012) una parte importante del estudio de la geometría, aunque también de las matemáticas en general, es lo que se percibe por medio de la vista, es decir, el proceso de visualización, el cual está relacionado con la interpretación y la construcción de representaciones de los objetos geométricos. Por medio de la visualización, los estudiantes pueden aprehender las figuras geométricas a partir de dibujos en papel o representaciones en la pantalla de un computador, ya que les es posible estudiar los objetos geométricos (no sólo verlos). De otro lado, estos investigadores indican que, a diferencia de otras ciencias, en las matemáticas los objetos estudiados son de naturaleza abstracta, y por ende requieren representaciones de manera permanente, las cuales han sido indispensables para su estudio. En este sentido, se considera la noción de registros de representación semiótica que se refieren a ciertas clases de representaciones. En el caso particular de la geometría, y más específicamente de este trabajo, se manejan básicamente tres registros de representación semiótica: el lenguaje natural, el gráfico y el simbólico. Por ejemplo, cuando se habla del objeto rayo tendría una serie de representaciones (Tabla 2.1) de acuerdo a los registros de representación semiótica.

Tabla 2.1 Representación semiótica del objeto rayo

Lenguaje natural	Gráfico	Simbólico
El rayo $\boldsymbol{LK}$ es el conjunto de todos los puntos del $\overline{\boldsymbol{LK}}$ junto con todos los demás puntos de la $\overleftrightarrow{\boldsymbol{LK}}$, tal que $\boldsymbol{K}$ está entre cualquiera de esos puntos y $\boldsymbol{L}$. El punto $\boldsymbol{L}$ es el origen del rayo $\boldsymbol{LK}$.		$\overrightarrow{LK}$

2.1.2. El uso de sistemas de geometría dinámica (SGD)

El uso de la tecnología es un elemento común y unificador de las ideas expuestas en el apartado anterior, pues es una herramienta que permite la posibilidad de visualizar, explorar, analizar, plantear conjeturas acerca de las relaciones y propiedades observadas, y construir demostraciones (Fiallo, 2010). Según los principios del NCTM (2003), cuando los estudiantes disponen de estas herramientas tecnológicas, pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas. Los SGD amplían la serie de problemas asequibles a los estudiantes, y los capacita para ejecutar procedimientos rutinarios con rapidez y seguridad, permitiéndoles disponer de más tiempo para desarrollar conceptos.

Gutiérrez (2005) indica que el uso de los SGD para la enseñanza de la geometría se generalizó a comienzos de los años 80 con la aparición de Logo. La segunda revolución se produjo unos años después con la aparición del software de geometría dinámica Cabri en 1988. Desde entonces, numerosas investigaciones en todo el mundo se han dedicado a explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría. Dentro de esta agenda de investigación, una línea especialmente importante es la dedicada a analizar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en contextos de sistemas de geometría dinámica.

Cabri ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas en un contexto que tiene correspondencia con la geometría euclidiana. Dentro de las características que diferencian una aproximación a la geometría utilizando este software, a comparación con la tecnología de papel y lápiz, según Larios (2006) son: la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros, la de construir lugares geométricos, pero, más que nada, lo que caracteriza a Cabri es la transformación continua de figuras en tiempo real con la herramienta arrastre. El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos, preservándose las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Con esta opción igualmente, exponen Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), una imagen en la pantalla se puede transformar en innumerables imágenes, asociadas a la figura inicial y, que a la vez, permiten estudiar las propiedades invariantes y las que sufren modificaciones.

Respecto a la mediación de un SGD en el aprendizaje de la demostración, Mariotti (citada por Fiallo, 2010) plantea que las construcciones geométricas tienen un significado teórico. Es decir, las herramientas y reglas de su uso tienen una contraparte en los axiomas y los teoremas de un sistema teórico de la geometría euclidiana, de tal forma que cualquier construcción obedece a un teorema o postulado específico. Dentro de un sistema de este tipo, los elementos teóricos hacen válida la exactitud de la construcción. La relación entre las partes de la figura producida por la construcción se puede expresar como un hecho geométrico que se convierte, si es validado, en un teorema relativo a la figura geométrica representada.

De otro lado, Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2013) muestran cómo Cabri es un artefacto (objeto material o simbólico creado por el hombre con fines específicos) que puede incidir en el aprendizaje. No obstante, para ello debe constituirse en un instrumento para quien aprende. En esta línea, Rabardel (citado por Perry et al., 2013) sostiene que para hacer de un artefacto un instrumento se requieren dos procesos: la instrumentalización o reconocimiento progresivo de las diferentes posibilidades, limitaciones y componentes del artefacto; y la instrumentación o uso autónomo para construir y explorar. Como ejemplo para diferenciar estos procesos, se pueden considerar cuatro tareas propuestas en la Actividad 1 de la propuesta enseñanza (Ver Anexo 1).

Figura 2.1 Tareas que permiten diferenciar instrumentación e instrumentalización

1. Construir un punto y nombrarlo A. Arrastrar el punto.

2. Construir una recta l tal que A no pertenece a la recta. Describir cómo la construyeron.

3. Construir un punto B en la recta l y arrastrarlo. ¿Notan alguna diferencia de lo que sucedió con el punto A? Describan en qué consiste la diferencia. ¿Qué propiedad geométrica entre puntos y rectas se puede deducir de la experiencia anterior?

12. Ahora, construyan dos segmentos que se intersecan en sus puntos medios y se mantenga esa propiedad bajo el arrastre.

Como se puede observar en la figura 2.1, las tareas 1, 2 y 3 promueven la instrumentalización, pues buscan que el estudiante reconozca lo que se puede construir cuando se usa Cabri y que las características de los objetos dependen de cómo fue construido. En cambio la tarea 12, requiere conocer las herramientas para establecer una estrategia para representar la situación. Lograr resolver la tarea, construyendo por ejemplo dos diámetros de una circunferencia, o un segmento, su punto medio y luego un diámetro de una circunferencia de cualquier radio con centro el punto medio, es ejemplo de instrumentación.

2.2. La demostración matemática

Como indica Larios (2006), podría decirse que la demostración matemática está constituida por una serie de argumentos que tienen, tanto en su contenido como en su estructura, particularidades muy específicas. Según Godino y Recio (2001), la palabra demostración es utilizada en distintos contextos y con diversos sentidos; en algunos casos estos diversos sentidos se reconocen mediante el uso de términos tales como explicación, argumentación, prueba, entre otros. En todos ellos se pueda reconocer una idea común: la de justificar o validar una afirmación aportando razones o argumentos; sin embargo, las diferencias en los tipos de situaciones en que se usan, sus rasgos característicos y los recursos puestos en juego en cada caso pueden ser diferentes.

Godino y Recio (2001) identifican básicamente cuatro contextos institucionales en los cuales se maneja la demostración: el de los matemáticos profesionales, que es donde se construye la ciencia matemática y que sirve como referencia a las demás comunidades que la utilizan; el de los utilizadores del saber matemático en las ciencias experimentales, en donde aparecen prácticas argumentativas empíricas, inductivas, analógicas, entre otras, que llevan a concluir que si algo es verdadero en algunos casos entonces es verdadero en el conjunto o, por lo menos, lo será siempre y cuando las circunstancias sean similares; el de la vida cotidiana, en donde se suelen utilizar argumentaciones informales; y el del salón de clase correspondiente a los estudiantes que se aproximan a la adquisición del saber matemático. En este trabajo se hace referencia a la demostración en el ámbito de la educación matemática, es decir, ubicada en el salón de clase con estudiantes que están aprendiendo a justificar sus ideas.

La palabra demostración es generalmente interpretada en relación a un proceso y a un producto; en palabras de Camargo (2010), se debería usar la expresión demostración matemática, para referirse al producto. En particular, en este trabajo se asume la demostración matemática como

> Un discurso que respeta ciertas reglas, fundamentado en un sistema teórico de referencia, mediante el cual se da validez a un enunciado al interior del sistema. Para ello, se establece una cadena deductiva de afirmaciones que lleva del antecedente del enunciado (de tipo condicional) al consecuente de este (Camargo, 2010, p.48).

Se entiende como actividad demostrativa a

> La realización de acciones que conforman dos procesos, no necesariamente independientes. El primero consta de acciones relativas a la producción de una conjetura; ellas generalmente incluyen la exploración de una situación geométrica para buscar regularidades (usualmente con el uso de un programa de geometría dinámica), la formulación de conjeturas y su verificación de manera empírica. Las acciones del segundo proceso se concentran en la búsqueda y organización de las ideas que conformarán una justificación, siendo una forma de esta la demostración (Molina, Perry, Samper y Camargo, 2011, p.74).

La figura 2.1 tomada de Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) presenta una descripción esquemática de la actividad demostrativa, donde se pueden apreciar la relación y los elementos que intervienen en los procesos de conjeturación y justificación.

Figura 2.2 Descripción de la Actividad Demostrativa

Para dar precisión y claridad se definen los elementos que conforman la actividad demostrativa, tomando como referencia a Perry et al. (2013):

Conjeturación. Este proceso tiene como finalidad la formulación de conjeturas, es decir, enunciados producto de la observación, que expresan resultados considerados como generales y posiblemente ciertos, que se deben tratar de demostrar dentro de un sistema teórico establecido. Dentro de este proceso se encuentran acciones como: detectar propiedades y verificarlas si se llega a expresar duda; formular la conjetura, es decir expresar en términos matemáticos y como un enunciado general lo que se ha descubierto; y corroborarla, es decir, examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles. Además, Camargo

(2010) señala que las conjeturas deben expresarse de la forma si…entonces, formato propio de un enunciado condicional y expresar en ella las condiciones exigidas en la construcción y exploración (antecedente) y el resultado de dichas condiciones (consecuente).

Justificación. Este proceso tiene como propósito la construcción de una justificación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de un sistema teórico de conocimiento. Las acciones propias de este proceso son: seleccionar entre diferentes elementos conocidos, sean teóricos o empíricos, los que podrían sustentar la afirmación; organizarlos de manera deductiva y, finalmente, formular la justificación.

La visualización, exploración y otras acciones heurísticas apoyan los procesos de conjeturación y justificación. De un lado, con el término exploración se hace referencia a una actividad experimental, relacionada con el uso de estrategias para buscar regularidades en una figura que se puedan generalizar. En particular, Perry et al. (2013) usan la expresión 'exploración dinámica', para referirse a aquellas exploraciones que se logran a partir de transformaciones continuas de las representaciones de figuras geométricas: puede llevarse a cabo tomando medidas, calculando o haciendo construcciones (auxiliares, para enriquecer la figura; de referencia, para comparar; de casos, para llegar a un resultado por ensayo y error), con la intención de detectar invariantes. Finalmente, no puede haber actividad demostrativa sin razonamiento que movilice las ideas y acciones y sin la argumentación asociada, razón por la cual estas acciones aparecen en el diagrama. Precisamente ellas son las que enlazan un proceso con otro.

2.3. La argumentación y su relación con la demostración

Douek (1999) expone que a pesar de la distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración matemática formal, estas tienen aspectos en común, como procesos y como productos. A propósito de esto, Fiallo (2010) comenta que el estudio de las relaciones entre argumentación y demostración se ha llevado a cabo desde diferentes puntos de vista, los cuales están relacionados con el significado que cada investigador le da a cada uno de estos términos. Algunas investigaciones muestran la divergencia que existe entre los procesos de argumentación y de demostración (Duval, 2007; Balacheff, 2000), mientras que otras (Boero y otros, 1996, 2007; Douek, 2003, Pedemonte, 2002, 2007) han resaltado la estrecha relación entre estos dos procesos y han propuesto la hipótesis de que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de esta. Este trabajo de investigación comparte esta última hipótesis.

Pedemonte (2007) señala que las diferencias entre conjetura y teorema pueden ayudar a distinguir las relaciones entre argumentación y demostración. Para Mariotti (citada por Pedemonte 2007) un teorema es un esquema ternario compuesto por una afirmación, una demostración y una teoría matemática (sistema de principios y reglas); esa teoría matemática permite la construcción de una demostración, de manera que la afirmación sea validada. Por otro lado, la conjetura está también compuesta por tres elementos: una afirmación, una argumentación y un sistema de concepciones (Pedemonte, 2007); el argumento está relacionado con la conjetura si contribuye en su construcción o en su justificación.

En la educación matemática no existe una definición común de argumentación, señala Pedemonte (2007), a pesar de que se trata de una de las actividades más recurrentes en la clase. Es importante entonces antes de proceder, establecer lo que se puede considerar por argumentación. El Diccionario de la Real Academia Española considera que el argumento es “el razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a otro de aquello que se afirma o se niega”; y por argumentación entiende que es la “acción de probar o poner argumentos”. De otro lado, en la retórica antigua, la argumentación era vista como un discurso para convencer a los demás (D´Amore, 2006). Para Perelman (1997) la argumentación es la forma de convencer a un determinado auditorio mediante criterios racionales. Balacheff (1987) entiende por argumentación cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación. Así mismo, Boero, Douek y Ferrari (2002) definen la argumentación tanto para el proceso que produce un discurso lógicamente conectado (pero no necesariamente deductivo), así como para su producto, es decir, una argumentación consiste en "argumentos" lógicamente conectados. Bajo la concepción que se enmarca este trabajo, la argumentación es admitida como la formulación de argumentos (enunciados de estructura ternaria con relaciones particulares, datos y conclusión, y una general, garantía) para apoyar una idea (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013).

Ahora bien, la necesidad de hablar de argumentación en matemáticas, señala Fiallo (2010), se deriva de la necesidad de caracterizar los procesos no demostrativos desarrollados durante la resolución de un problema, tales como los procesos de exploración, descubrimiento y construcción de una conjetura. Los procesos de justificación de un enunciado no se convierten siempre en una demostración.

2.4. Modelo de Toulmin

En la literatura educativa el modelo de Toulmin se ha utilizado tanto para el análisis y la documentación de argumentos como para estudiar el progreso del aprendizaje en el salón de clases (Fiallo, 2010). En este trabajo, este modelo se utiliza para comparar y analizar la estructura de las argumentaciones presentadas por un grupo de estudiantes cuando realizan actividad demostrativa.

2.4.1. Estructura de un argumento

Toulmin (2007) considera que las argumentaciones cotidianas no siguen el clásico modelo riguroso del silogismo y crea uno adecuado para analizar cualquier tipo de argumentación en el marco de los discursos sociales: conversación, periódico, televisión, radio, prensa escrita, entrevista, interacción docente alumno, médico-paciente, abogado-cliente. Considera que un "argumento" es una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que parte de una evidencia y llega al establecimiento de una aserción. El movimiento de la evidencia a la aserción es la mayor prueba de que la línea argumental se ha realizado con efectividad. La garantía permite la conexión.

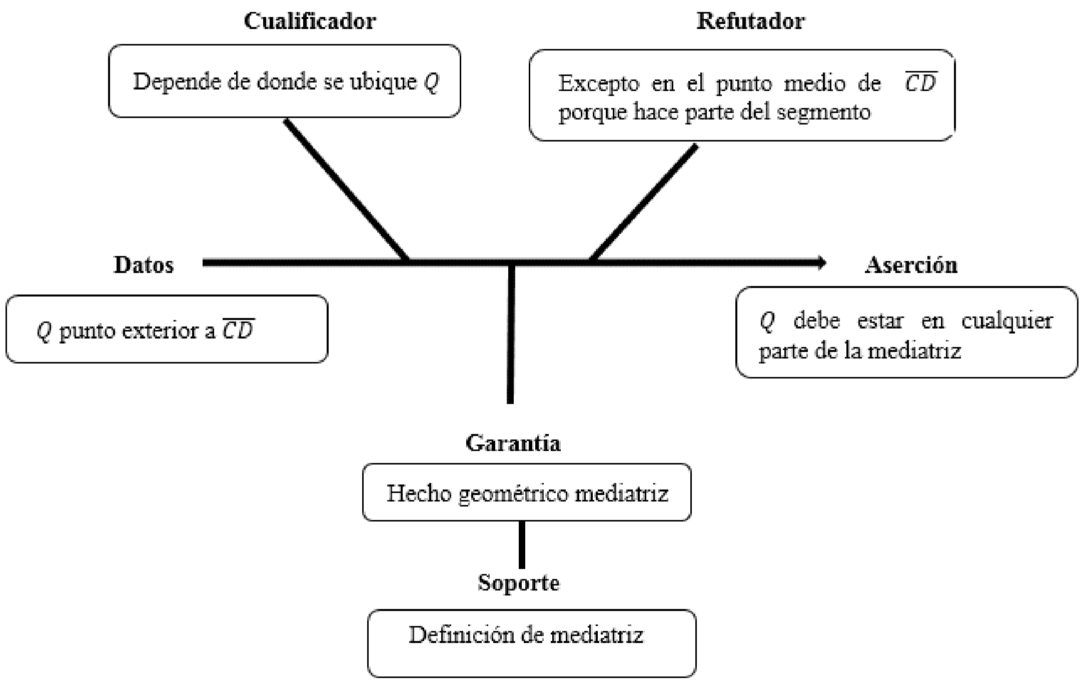
De Gamboa (2009) indica como el esquema propuesto por Toulmin proporciona una herramienta valiosa para analizar la argumentación de los estudiantes desde una perspectiva formal; incluso Pedemonte (2007) muestra cómo este modelo permite comparar la estructura de un argumento y la estructura del correspondiente paso en la demostración.

En particular, el modelo de Toulmin, según Sardà y Sanmartí (2000) se basa en un esquema de argumentación, compuesto por:

- **Datos:** evidencias, hechos, informaciones o ejemplos, utilizados para justificar y validar la aserción.
- **Aserción:** el enunciado conclusión.
- **Garantía:** razones (reglas, principios,...) que conecta los datos con la aserción, es decir, indica como la aserción se obtiene de los datos.
- **Calificadores modales:** aportan comentarios implícitos (quizá, probablemente, algunas veces, la mayoría, etc.) de la justificación; son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación.
- **Soporte:** respaldos que permiten asegurar la justificación.
- **Refutadores:** aportan comentarios implícitos, señalando las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

La figura 2.3 muestra los elementos del modelo Toulmin en un posible argumento al problema 10 de la Actividad 1 (Ver anexo 1). En el cual se pregunta las posibles posiciones de un punto Q que no pertenece al $\overline{CD}$ de tal manera que su distancia a cada extremo del segmento sea igual.

Figura 2.3 Esquema de un argumento en el modelo Toulmin



2.4.2. Análisis estructural por medio del modelo de Toulmin

La conexión lógica entre los enunciados en una argumentación, aduce Pedemonte (2007), difiere de la conexión lógica en una demostración. Cada paso de una demostración puede ser descrito como un paso deductivo, pero la estructura de la argumentación no siempre obedece a una estructura deductiva, sino que puede estar compuesta de pasos de diferente naturaleza, tales como pasos abductivos o pasos inductivos.

Pedemonte (citada por Fiallo, 2010) menciona tres tipos de argumentación:

Argumentación deductiva: tiene la misma forma que la demostración deductiva pero con algunos aspectos diferentes. La demostración deductiva utiliza los objetos de manera formal, recurriendo a una teoría matemática; en cambio, la argumentación deductiva puede utilizar el lenguaje natural y puede no estar apoyada por una teoría matemática. Por ende, es aceptado el hecho de que las deducciones puedan ser falsas. En un paso deductivo en el modelo Toulmin, la aserción se deduce a partir de los datos y la garantía, elementos determinados de antemano.

Argumentación inductiva: a diferencia de la deducción que parte de lo general para concluir casos específicos, el proceso inductivo parte de la observación o de la recolección de ciertos hechos o datos para concluir una regla. La inducción conduce a la construcción de nuevos conocimientos, a partir de la observación de casos particulares que se generalizan en un conjunto de casos. Los datos recogidos o los hechos observados se comparan el uno con el otro con el fin de determinar sus relaciones mutuas para poder abstraer una regla general. Algunas de las herramientas de la inducción son la generalización, la particularización y la analogía.

Argumentación abductiva: En la abducción, se empieza por una conclusión y se procede a derivar las condiciones que podrían hacer a esta conclusión válida. En otras palabras, se trata de encontrar las mejores o más plausibles explicaciones para el ensamble de los hechos dados, en otras palabras, la búsqueda de los datos. En el modelo Toulmin, un argumento es abductivo si teniendo la aserción, se buscan posibles garantías y se formulan posibles datos de acuerdo a ello.

2.5. Acciones del profesor

Se estudia el rol del profesor específicamente en torno al favorecimiento o no de la argumentación en los estudiantes. Samper, Camargo y Perry (2006) señalan que la actividad demostrativa en el aula no surge de manera autónoma, por lo que es necesario que el profesor lleve a cabo acciones que propicien un ambiente adecuado. Es decir, los profesores tienen una doble responsabilidad, apoyar a los estudiantes en el desarrollo de la actividad demostrativa y generar experiencias de aprendizaje que lleven a los estudiantes a argumentar.

Samper et al (2006) organizan una serie de acciones en cuatro grupos, según el objetivo de cada una, y las definen. A continuación se exponen las principales ideas que los investigadores establecen:

- El grupo A contiene las acciones que apuntan a la creación o consolidación de condiciones para constituir una comunidad de práctica (comunidad formada por los estudiantes y profesor, donde el profesor tiene condición de miembro de esa comunidad como el representante de la disciplina de las matemáticas). Estas acciones tienen como objetivo generar un ambiente de clase donde prime la indagación, la comunicación, el trabajo colaborativo, características fundamentales para desarrollar la argumentación. Aquí se pueden encontrar acciones tales como: dar información relativa al funcionamiento de la clase, controlar el cumplimiento de normas, gestionar actividades que se dan simultáneamente, hacer comentarios pertinentes para el curso, flexibilizar normas de trabajo, proporcionar espacio de reflexión, informarse sobre las acciones realizadas por el estudiante, informarse sobre los resultados geométricos obtenidos, sugerir exploración con geometría dinámica y aceptar el uso de geometría dinámica como medio de validación.

- El grupo B se conforma de las acciones que contribuyen a iniciar, desarrollar y/o consolidar una práctica discursiva. Es decir, con estas acciones el profesor busca involucrar al estudiante en los acontecimientos matemáticos de la clase, usando las ideas del estudiante para ampliar el tema, para corregir errores, a la vez que está introduciendo el objeto matemático de estudio de la clase. Ejemplos de estas acciones son: reaccionar con aclaración o precisión, aprovechar la intervención del estudiante, concretar el resultado logrado hasta el momento, institucionalizar el saber, reaccionar de manera lacónica, explicar o corregir el error, parafrasear aporte del estudiante, aprobar aporte del estudiante, repreguntar y aceptar la corrección que le hace un estudiante.

- En el grupo C se incluyen las acciones que se ocupan directamente de la formación de miembros activos de la comunidad de práctica de indagación matemática. Estas acciones tienen como propósito que los estudiantes expresen claramente sus ideas, escuchen críticamente las de sus compañeros para argumentar si las aceptan o no, y justifiquen sus propias ideas. Dentro de esta se pueden distinguir las siguientes acciones: incentivar la intervención de los estudiantes, responsabilizar a los estudiantes, incentivar discusión entre estudiantes, buscar o rescatar aportes del estudiante, exigir aclaración o precisión, exigir justificación e indagar.

- En el grupo D se caracterizan acciones con las que el profesor, en calidad de experto local, aporta directamente elementos de la matemática misma para la construcción del saber de la comunidad. En estas acciones el profesor provee información sobre cómo se hace matemáticas, qué es matemáticas, o para que el saber matemático que se está tratando en clase evolucione, provea sugerencias o exponga parte del contenido. Las acciones aquí presentes son: hacer referencia a asuntos previos de la geometría o de otras áreas de matemáticas, hacer modificaciones al sistema axiomático propuesto en el libro, establecer el foco de atención en el que se centrará la discusión o la tarea a realizar, hacer comentarios relativos al sistema axiomático o a la demostración, proveer sugerencia, problematizar la situación, exigir identificación de hipótesis y tesis de un teorema y proveer justificación o información.

A continuación se presentan las definiciones, propuestas por Samper et al (2006), de las acciones escogidas porque se ve tienen relación, con la intención detrás de la propuesta de enseñanza que es propiciar la argumentación.

Acciones del Grupo A

- **Proporciona espacio de reflexión:** El profesor realiza esta acción cuando le permite a un estudiante presentar su justificación, dejando que elabore sus ideas y dé cuenta de lo realizado; o cuando en la clase se destina un tiempo para realizar una determinada tarea. Como intenciones de esta acción se encuentran: respetar el tiempo que necesitan los estudiantes para madurar sus ideas y establecer las condiciones que necesita un estudiante para dar cuenta de su proceso en la solución de una tarea.

- **Sugiere exploración con geometría dinámica**: El profesor propone el uso de la geometría dinámica para la realización de tareas que requieren la formulación y validación de conjeturas, o como recurso de validación.

- **Acepta el uso de geometría dinámica como medio de validación:** El profesor acepta el uso de la geometría dinámica como medio para validar las conjeturas, como soporte para los argumentos y como herramienta de mediación en la comunicación.

Acciones del Grupo B

- **Reacciona con aclaración o precisión:** Esta acción se da cuando un estudiante comunica sus ideas frente al grupo o al profesor y el profesor aclara las afirmaciones del estudiante. Son intenciones de esta acción: diferenciar situaciones que pueden parecer la misma para el estudiante, ayudar al argumento que está elaborando un estudiante, mostrar la diferencia entre lo que se tiene y lo que el estudiante supone en su argumento, añadir información a la discusión, enfocar la atención en el camino seguido y exigir precisión.

- **Aprovecha intervención del estudiante:** El profesor aprovecha la intervención del estudiante para completar o concluir una idea, hacer una pregunta o proponer una tarea al grupo. En esta acción se observan distintas intenciones: exigir sustentación de afirmaciones hechas, medir el grado de acuerdo a los estudiantes con una propuesta hecha por un compañero, abrir una nueva discusión o posibles caminos para una justificación, señalar puntos problemáticos, hacer avanzar el diálogo y no dejar pasar afirmaciones erróneas.

- **Concreta el resultado logrado hasta el momento:** El profesor sintetiza la idea matemática que se ha elaborado hasta el momento, sin necesidad de sacar aún conclusiones definitivas o institucionalizar el saber. Lo hace para enfocar la atención en lo que han hecho, favorecer la comprensión de lo que se ha hecho y cómo se ha hecho.

- **Institucionaliza el saber:** Esta acción se presenta luego de terminada la tarea con la que se pretende el acercamiento a un concepto, proceso o idea matemática, se establecen definiciones, hechos matemáticos, justificaciones de estos o algoritmos. Se busca con esta acción: favorecer la comprensión de los estudiantes, rescatar los resultados obtenidos y dar crédito al aporte del estudiante.

- **Reacciona de manera lacónica:** Esto se refiere a cuando el profesor responde con comentarios breves o simplemente asintiendo o rechazando la respuesta de un estudiante. Las intenciones asociadas a esta acción son: indicar que hay un error o lo que se ha dicho no es útil para el tema en discusión, indicar acuerdo, acatar la norma de no dar al estudiante más de lo necesario.

- **Declara, indica, explica o corrige el error:** El profesor reacciona explicando cual es el error, porque lo que se dice "no es correcto" y cuál sería la forma acertada de expresar lo dicho. Se identifican como intenciones: favorecer la comprensión de los estudiantes, mostrar la no aplicabilidad del aporte y no dejar pasar afirmaciones erróneas.

- **Aprueba aporte del estudiante:** Esta acción tiene lugar cuando el profesor ratifica o rectifica el aporte del estudiante. Se caracterizan dos intenciones: incentivar la participación y fundamentar lo que el profesor hace o dice a continuación.

- **Repregunta:** Cuando el profesor se percata de que los estudiantes no responden su pregunta o la respuesta es insuficiente, la replantea para generar claridad y buscar la intervención del estudiante. Reenfocar la atención en el punto de discusión y sugerir revisión de lo dicho o hecho, son las intenciones de esta acción.

Acciones del Grupo C

- **Incentiva discusión entre estudiantes:** En casos en que el profesor advierta diferentes puntos de vista entre los estudiantes, éste induce la discusión entre ellos. Con el fin de poder abrir un espacio para explicitar y defender posiciones distintas o involucrar en la discusión aportes de los estudiantes.

- **Busca o rescata aporte del estudiante:** Esta acción se da cuando el profesor recupera aportes valiosos de la intervención de un estudiante. El fin de esta acción es utilizar los aportes de los estudiantes, incluso de los que se expresan tímidamente o no intervienen oportunamente.

- **Exige aclaración o precisión**: En esta acción el profesor se percata de un aporte confuso de un estudiante, o que está mal elaborado. Aquí no se incluyen casos en que se pide justificación o profundización. Las dos intenciones asociadas a esta acción son: entender lo que el estudiante está expresando y favorecer buena comunicación.

- **Exige justificación:** Esta acción se da cuando el profesor pide las razones que sustentan los enunciados construidos, realiza preguntas que permitan establecer el valor de verdad del enunciado y apunta a que los estudiantes se remitan al sistema teórico construido. Detrás de esta acción identifican dos intenciones: procurar que la norma de justificar se convierta en una práctica regular y animar a los estudiantes para que haya producción propia de justificación.

- **Indaga:** Cuando el profesor reacciona al aporte de un estudiante, formulándole preguntas que lo conlleven a mejorar su argumento o para ampliar o profundizar el contenido de su intervención. O bien si el profesor observa que al estudiante no se le ocurre qué decir o qué hacer para resolver la tarea propuesta, le da alguna información al respecto y a continuación le hace una nueva pregunta. Las intenciones detrás de esta acción son: comprender lo que el estudiante hizo o dijo, sugerir al estudiante que haga una revisión de lo dicho o hecho y favorecer la comprensión del estudiante

Acciones del Grupo D

- **Establece el foco de atención en el que se centrará la discusión o la tarea a realizar:** En el momento en que el profesor centra la atención sobre un asunto específico de la tarea a solucionar. Se identifica como intenciones: mostrar importancia de condiciones incluidas en una afirmación, abrir un espacio para la actividad demostrativa, organizar el hilo conductor de la discusión y resaltar la importancia de un elemento en el desarrollo de la discusión.

- **Hace comentarios relativos al sistema axiomático o a la demostración:** El profesor dialoga con sus estudiantes, por ejemplo sobre el proceso de una demostración, por qué hay que introducir cambios al sistema axiomático desarrollado, o cómo encontrar un camino diferente para realizar una demostración. Dos intenciones de esta acción: favorecer una comprensión global de los procesos realizados cuando hay una actividad matemática genuina enfocada principalmente hacia la construcción de un sistema axiomático y dar pautas sobre cómo se trabaja en matemáticas dentro de un sistema axiomático.

- **Problematiza situación:** El profesor sugiere preguntas o hace comentarios relacionados con los respectivos objetos geométricos, con el objetivo de ampliar o precisar la conceptualización que se tiene de ellos. Detrás de esta acción de problematizar los enunciados se reconocen tres intenciones: estudiar el porqué de lo mencionado, favorecer la comprensión e inducir la reconsideración de la situación.

- **Provee justificación o información:** Cuando el profesor se percata de que los estudiantes no logran el resultado esperado, que están lejos de una posible solución óptima, él da la justificación o la información buscada. Esta acción tiene como intenciones: concluir una idea que se venía discutiendo, aclarar información que no se había percibido en lo dicho y aportar a la construcción del sistema axiomático.

3. Metodología

"Si supiese lo que estoy haciendo, no le llamaría investigación, verdad?"
Albert Einstein

Esta investigación se aborda bajo el paradigma de investigación cualitativa, en tanto se trata de acceder al estudio de la argumentación de los estudiantes en el contexto mismo en que sucede: el aula de clase, en particular en la clase de geometría, cuando se usa un software de geometría dinámica. En este sentido, se enmarca en los parámetros que establecen Denzin y Lincoln (2000) cuando afirman que el objetivo de la investigación cualitativa es identificar la naturaleza de las realidades, su estructura, aquella que da razón plena del comportamiento, estudiando la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando dar interpretación a los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas.

Asimismo, el estudio se plantea siguiendo un diseño que se aproxima a un experimento de enseñanza. Un experimento de enseñanza contempla, según Gravemeijer y Simon (citados por Callejo, Valls y Llinares, 2007) tres fases: la primera incluye el diseño y planeación de la propuesta, que comprende la definición de los objetivos de aprendizaje delimitando las metas a alcanzar y el diseño de tareas; la segunda fase hace relación a la implementación en el aula de las tareas diseñadas; y finalmente la tercera fase, contiene el análisis, donde el equipo docente o investigador, observa y analiza la experiencia, apoyándose en el análisis y en las referencias teóricas sobre las cuales fue construida la propuesta.

Significa entonces, que esta investigación puede ser entendida como un experimento de enseñanza, pues se realizó el estudio en tres etapas (análogas a las citadas en el párrafo anterior): la primera centrada en la elaboración de la propuesta de enseñanza; la segunda fue la implementación de esta en el aula con un grupo de estudiantes de octavo grado; y la tercera consistió en el análisis de los resultados obtenidos, de un lado caracterizando los argumentos bajo el modelo Toulmin, y de otro, las acciones que desarrolla el profesor con el ánimo de favorecer la producción de argumentos, usando las categorías de análisis propuestas por el grupo *Æ·G*. Además, el método de la investigación es el estudio de casos, ya que solo se analiza la producción de un grupo reducido de estudiantes cuando resuelven un problema.

Para el desarrollo de la propuesta en el aula, se retoman aspectos característicos de la aproximación metodológica planteada por el grupo *Æ•G*. En primer lugar, las soluciones que los estudiantes dan a los problemas geométricos que les plantea el profesor son la fuente principal para proveer elementos que contribuyen al análisis de las actividades propuestas. En segundo lugar, la interacción entre profesor y estudiantes o entre estudiantes, es la manera adecuada de favorecer la actividad demostrativa y de apoyar el aprendizaje individual. En tercer lugar, el uso de un software de geometría dinámica Cabri, es un medio para viabilizar la participación de los estudiantes; este recurso les proporciona un entorno en el cual se propicie la exploración, la comunicación y la validación (Camargo, 2010).

De otro lado, el proceso de análisis se llevó a cabo en dos fases: la caracterización de los argumentos y la identificación de las acciones del maestro que podrían favorecer la argumentación de los estudiantes, teniendo en cuenta dos de los objetivos específicos de la investigación. En el caso de la caracterización de los argumentos se utiliza un conjunto de categorías, unas tomadas del marco teórico y las otras emergentes que surgieron luego de observar con detalle los resultados de la propuesta de enseñanza. Y de otro lado están las acciones del maestro, que como se mencionó en el marco teórico, fueron seleccionadas según la intencionalidad del estudio, de las propuestas por Samper et al. (2006) por ser las que parecían más pertinentes para la situación a analizar, ya sea porque debieron suceder o porque habría sido bueno que sucedieran. Se analizará un episodio de la entrevista final de cada equipo, para describir con ellas la gestión del profesor para propiciar la argumentación de los estudiantes.

3.1. Formas de recolección de datos

Teniendo en cuenta los objetivos de la investigación y el tipo de experimentación que es en un contexto normal de un salón de clases, con un cronograma establecido institucionalmente y un buen número de estudiantes, era necesario tratar de obtener la mayor cantidad posible de información de los estudiantes. Por estas razones se filmó y se tomaron fotos de algunos momentos de la sesiones, y se grabó en audio y video cuando los estudiantes estaban resolviendo la tarea final. Así mismo, cada equipo de estudiantes guardó en una carpeta sus repuestas a las tareas y los apuntes de cada sesión.

Las grabaciones de audio y video se usaron para construir las transcripciones de la interacción entre los estudiantes. Las transcripciones fueron claves para la realización del estudio de los argumentos de los estudiantes. Así mismo, las hojas de trabajo de los estudiantes, en donde consignaban sus respuestas a las actividades de la propuesta de enseñanza y de la tarea final, las cuales se escaneaban después de cada una de las sesiones, sirvieron como soporte para las transcripciones de los videos o de las grabaciones de audio, cuando los estudiantes se referían a lo escrito en sus hojas de trabajo o a lo visualizado en el computador.

3.2. Descripción de la población

El desarrollo de la unidad didáctica se llevó a cabo con los 43 estudiantes del curso 8°A del Colegio Cooperativo "San Antonio de Prado" de la ciudad de Medellín, en el segundo periodo académico del año 2013, entre el 6 de mayo y el 16 de agosto. No obstante, debido a que no se alcanzó a desarrollar la propuesta en este tiempo, fue necesario solicitar algunas clases del tercer periodo. Inicialmente se hizo un proceso de acercamiento a la temática propia del curso, conceptos básicos de geometría euclidiana y teoremas relacionados con la congruencia de triángulos, apoyado por el uso del software de geometría dinámica Cabri; a la vez que aprendían geometría se iban familiarizando con la función de las diferentes herramientas de este software. Cada sesión, de una hora cincuenta minutos, se desarrolló en el aula de clase. Los estudiantes trabajaron en equipos colaborativos; cada grupo contaba con el apoyo de un portátil (propiedad de uno de los miembros del equipo) el cual tenía instalado el programa Cabri, y trabajaron orientados a través de lo propuesto en cada actividad.

Posteriormente, en el mes de septiembre, se trabajó con solo tres grupos de estudiantes, los cuales fueron citados en jornada extra clase para llevar a cabo la tarea final; el equipo A conformado por tres estudiantes[1]: Ximena, Laura y Valentina; el equipo B por 4 estudiantes: Juliana, Sofía, Julio y Camilo, y el equipo C por 2 estudiantes: Marcos y Ana María. Los estudiantes fueron seleccionados teniendo en cuenta que habían sido los más participativos durante el desarrollo de la propuesta de enseñanza o que habían mostrado mucha motivación con el trabajo realizado en el transcurso del periodo, así mismo, atendiendo a su disposición horaria. De igual forma, para estas sesiones de trabajo, se contó con computadores portátiles con el software Cabri, realizando registros fotográficos y filmaciones. No obstante, semanas después se vio la necesidad de citar de nuevo a los tres equipos para hacerles una entrevista, con el fin de aclarar cuestiones acerca del trabajo realizado anteriormente, ya que los registros tomados y las respuestas consignadas por los estudiantes no fueron, en algunos casos, suficientemente claros para el análisis.

3.3. El papel de la profesora y del investigador

Debido a que el investigador no era el profesor titular del curso, fue necesario llegar a un acuerdo con la maestra encargada del mismo. Es por ello que el investigador tomó el rol a

[1] Los nombres fueron cambiados para proteger la identidad de los estudiantes

la vez de maestro, siendo él quien dirigía el trabajo en las diferentes sesiones. La maestra adoptó una posición de observadora activa y colaboradora del investigador en el registro fotográfico y de video; además, en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, interactuaba continuamente con los diferentes equipos haciéndoles preguntas, colaborando al mismo tiempo con la disciplina y con el llamado a la buena disposición de los estudiantes.

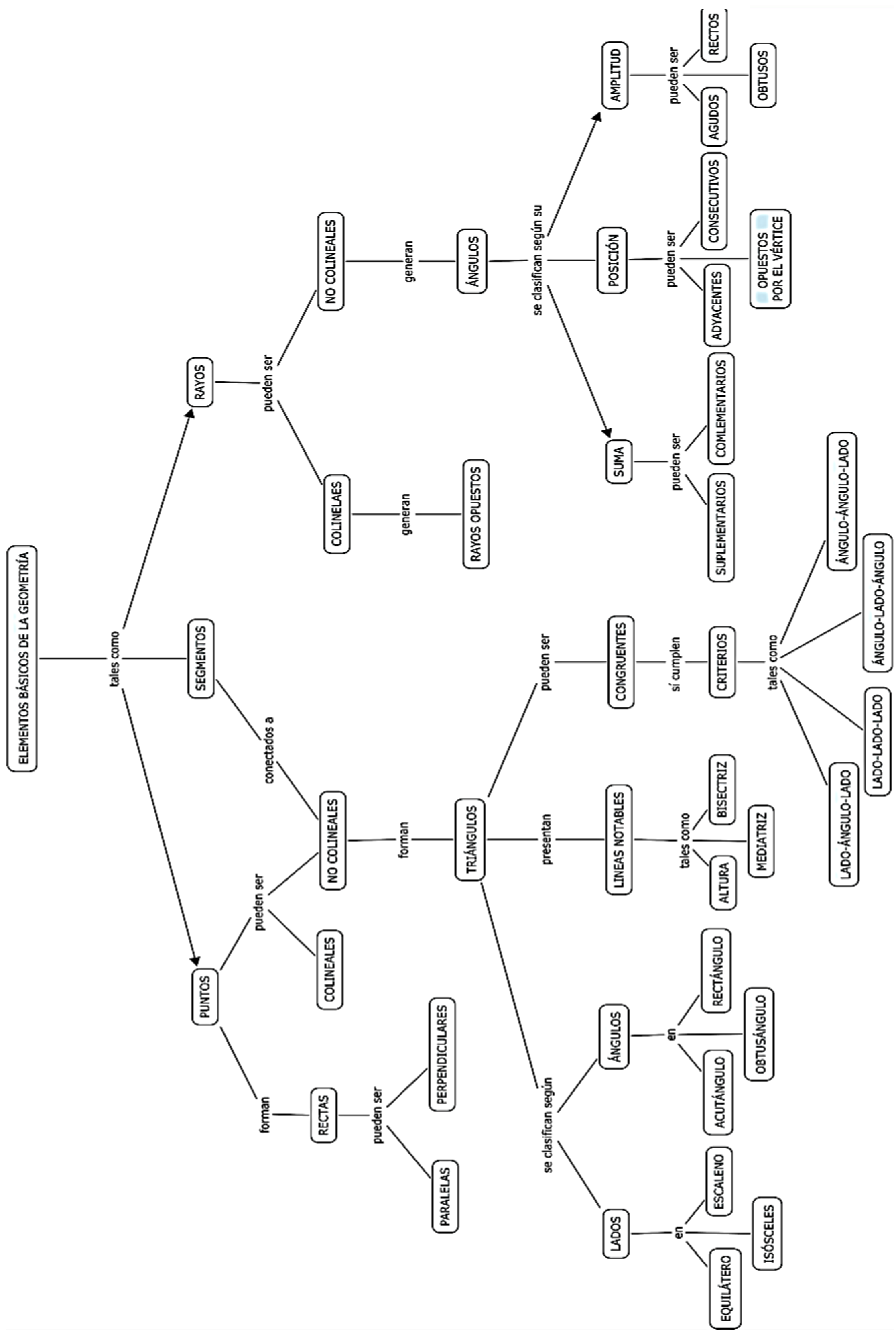
El investigador-profesor, contó todo el tiempo con computador portátil con acceso a internet, al programa Cabri, a la actividad orientadora de cada sesión y a un Video Beam el cual sirvió para proyectar ejemplos, soluciones de un equipo en particular, aclarar términos propios de la geometría o del manejo del programa Cabri. Interactuó todo el tiempo con los estudiantes, poniendo en consideración de todo el grupo el resultado de la exploración y/o descubrimientos de los diferentes equipos, aprobando o desaprobando según el caso.

3.4. Propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza incluye siete actividades (ver Anexo 1) las cuales fueron desarrolladas en nueve sesiones de clase, así como de tres tareas (ver Anexo 2) propuestas a los estudiantes para ser trabajadas por fuera de clase. La intención fue trabajar bajo el enfoque de actividad demostrativa y enseñar los contenidos de geometría propios del curso, a la vez que los estudiantes aprendían a manejar el software Cabri. Es extenso el contenido geométrico que abarcó la propuesta, por lo que aquí no se hace una exposición exhaustiva de este. La figura 3.1 presenta un mapa conceptual (construcción propia) que muestra de forma sucinta los temas, conceptos y relaciones más importantes presentadas en las tareas de la propuesta de enseñanza, para indicar el conocimiento que se esperaba tenían los estudiantes y que necesitaban para abordar la última actividad. Se aclara además, que en cada sesión se entregó a cada equipo de estudiantes los hechos geométricos, definiciones y/o postulados (ver Anexo 3) trabajados en la sesión previa, con el fin de constituir un sistema teórico reducido y local, para que ellos hicieran uso de él en cualquier momento de la clase. Cada una de las tareas fue elaborada con antelación a la fecha de su aplicación: la tabla 3.1 muestra el cronograma de ejecución y la descripción de las diferentes tareas.

Es necesario aclarar algunos términos que se usan para referirse a partes de la propuesta de enseñanza. En este trabajo se entiende por actividad al conjunto de ejercicios, tareas y problemas diseñados para ser resueltos por los estudiantes en cada sesión de clase y que guardan características o propósitos comunes; un ejercicio es la solicitud de realizar acciones que el estudiante puede y sabe cómo hacer, entre ellas: construcciones en Cabri o en papel, o aplicaciones directas de lo tratado en clase; las tareas son ejercicios para desarrollar por fuera de la sesión de clase, para reforzar temáticas específicas; y los problemas son situaciones amarrados a un contexto específico de la matemática misma o del entorno cercano al estudiante que no sugieren ni la respuesta ni cómo proceder, como establecer conjeturas o justificarlas.

Figura 3.1 Mapa conceptual sobre contenido geométrico



CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES		
SESIÓN	**FECHA**	**ACTIVIDAD**
1	Mayo 24	**Actividad 1**
		Exposición de normas de clase y conformación de equipos de trabajo. Ejercicios 1, 2, 3, 4, y 5. Exploración de la función arrastre y peculiaridades de objetos geométricos, en particular para determinar cuándo se puede arrastrar un punto libremente en el plano y cuándo no se puede hacer. Ejercicio 6. Construcción y definición del objeto segmento. Problemas 7, 8, 9, 10 y 11. Exploración de las posiciones de un punto en un segmento, para descubrir el objeto punto medio. Problema 12. Solución de un problema e introducción de formato para reportar los procesos de construcción y exploración.
2	Junio 6	**Actividad 2**
		Ejercicios 1, 2 y 3. Representación del objeto rayo en Cabri, encontrando diferencias con los objetos segmento y recta, para plantear la definición del mismo. Ejercicios 4, 5 y 6. Construcciones para explorar particularidades del objeto rayo: número de rayos que pasan por un punto, rayos determinados por diferentes puntos y rayos con un mismo extremo; justificando sus respuestas con ilustraciones y usando el arrastre. Ejercicios 7 y 8. Trabajo con definiciones. De un lado, utilizar la definición de rayo para señalar figuras que cumplan con las condiciones dadas; y de otro, establecer la definición de ángulo para nombrar diferentes ángulos de una figura. Problemas 9 y 10. Exploración de la herramienta medida en un

		ángulo, para descubrir el objeto bisectriz. Ejercicio 11. Utilizar figuras para reconocer la bisectriz, y favorecer la justificación. Ejercicio 12. Construcción de la definición de bisectriz, a partir de lo descubierto en Cabri.
3	Julio 9	**Actividad 3**
		Ejercicio 1. Construcción de diferentes rectas, para descubrir las diferentes posiciones de dos rectas: paralela y perpendicular. Ejercicio 2. Formulación de la definición de rectas paralelas y de rectas perpendiculares. Ejercicio 3, 4 y 5. Exploración de la perpendicularidad de dos rectas y justificación de regularidades. Problema 6. Exploración del hecho geométrico de la mediatriz, a partir de un problema particular, donde además de explicitar los procesos de construcción y exploración, se incluye la generalización de regularidades, para plantear posibles conjeturas. Manejo del esquema condicional, si… entonces, para formular conjeturas. Tarea 1. Exploración del objeto mediatriz.
4	Julio 18	**Actividad 4**
		Ejercicio 1. Determinación, a partir de una figura, de propiedades de los objetos geométricos trabajados en las actividades 1, 2 y 3, apoyados con los hechos geométricos o definiciones. Ejercicio 2. Utilización de la definición de triángulo para identificarlos entre figuras que lo son y que no lo son. Indicación de condiciones, de estas últimas, que hacen falta para ser triángulo. Problema 3. Formulación de conjeturas asociadas a un problema relacionado con el triángulo isósceles. Utilización del esquema: qué construyeron, qué exploraron y qué descubrieron; así como del formato condicional, si… entonces, para formular conjeturas. Problema 4. Utilización del esquema anterior: caracterización del

		triángulo isósceles. Tarea 2. Problemas relacionados con el triángulo isósceles, para afianzar la justificación.
5	Julio 30	**Actividad 5**
		Problema 1. Establecimiento del criterio de congruencia de triángulos Lado-Lado-Lado, a partir de construcciones en Cabri, exploración de regularidades, justificación de respuestas y formulación de conjeturas.
6	Agosto 9	**Actividad 5**
		Problema 2. Determinación de que Ángulo-Ángulo-Ángulo no es criterio de congruencia de triángulos, apoyado en exploración de construcciones. Problema 3. Establecimiento de criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado, a partir de construcciones en Cabri, exploración de regularidades, justificación de respuestas y formulación de conjeturas.
7	Agosto 21	**Actividad 5**
		Problema 4. Establecimiento de criterios de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo y Lado-Ángulo-Ángulo, a partir de construcciones en Cabri, exploración de regularidades, justificación de respuestas y formulación de conjeturas.
8	Septiembre 3	Tarea 3. Problemas para afianzar la demostración. Socialización y discusión colectiva.
9	Septiembre 17	**Actividad 6**
		Desarrollo de ejercicios asociados a los criterios de congruencia de triángulos.
10	Septiembre 24	Tarea final. Problemas asociados con establecimiento de regularidades de objetos geométricos, de manera que se promueva la argumentación. Participan los tres equipos A, B y C.

11	Octubre 28	Entrevista. Equipo B.
12	Noviembre 6	Entrevista. Equipo A y C.

Tabla 3.1 Cronograma de actividades

4. Análisis y resultados

"Si supiese lo que estoy haciendo, no le llamaría investigación, ¿verdad?"

Albert Einstein

4.1. Caracterización de argumentos

Para esta fase del análisis se recurrió al modelo de Toulmin presentado en el marco teórico. Los argumentos que fueron caracterizados hacen parte de la tarea final en la cual participaron tres equipos de estudiantes, los cuales fueron citados en horario extraclase para ello; se analizaron los argumentos de cada equipo en la tarea propuesta, a partir de unas categorías particulares en relación a: la forma como se estructura el argumento, a la estructura del argumento y a la naturaleza de la garantía. La primera es resultado del marco teórico y las otras son emergentes, luego de la aplicación de la propuesta de enseñanza.

A continuación se define cada categoría y se ejemplifica con producciones de los estudiantes o con ellas modificadas para ilustrarlas.

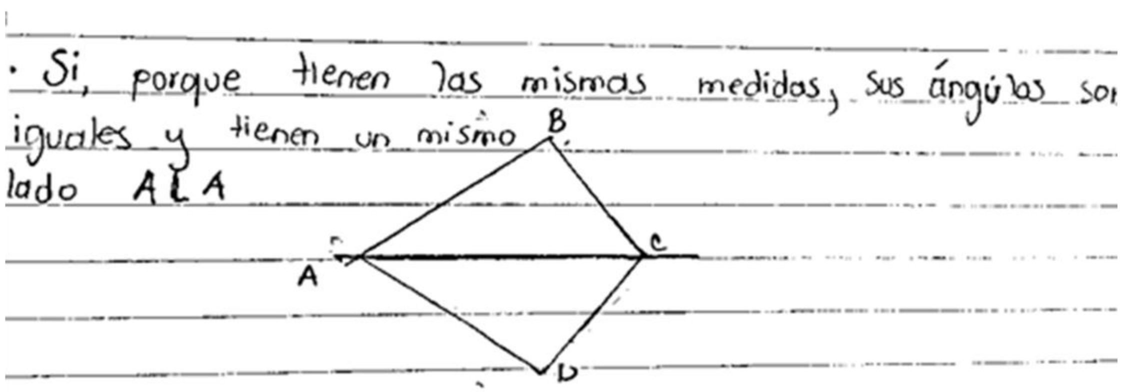
4.1.1. En relación a la forma como se estructura el argumento

Dentro de esta categoría se mencionan tres tipos de argumentos, que como se dijo antes surgen del marco teórico. Un argumento en relación a su estructura puede catalogarse como: deductivo, inductivo o abductivo.

- ***Argumento deductivo:*** A partir de datos y usando la garantía se formula la aserción

Figura 4.1 Ejemplo Argumento deductivo

En el ejercicio 2 de la tarea 3 (ver Anexo2) se propone demostrar la siguiente afirmación: Si $\overline{AC}$ biseca al $\angle DAB$ y al $\angle DCB$, entonces ¿es $\triangle ACD \cong \triangle ACB$? Un estudiante propone lo siguiente



Es claro que el estudiante utiliza los datos, $\overline{AC}$ bisectriz de $\angle DAB$ y $\angle DCB$, porque menciona que los ángulos son “iguales” y a su vez toma de la figura al $\overline{AC}$ como lado común; establece como garantía el criterio de congruencia de triángulos Ángulo- Lado-

Ángulo; aunque no formula explícitamente la aserción $\triangle ACD \cong \triangle ACB$; esta está implícita cuando responde sí a la pregunta.

- ***Argumento inductivo:*** Teniendo varios ejemplos en los que a partir de los datos se evidencia la aserción, se formula una regla.

Figura 4.2 Ejemplo Argumento inductivo

En el ejercicio 2g de la Actividad 5, (ver Anexo 1) los estudiantes debian explorar los diferentes triángulos que construyeron en Cabri, con algunas de las piezas (lados y ángulos) de un triángulo, encontrar regularidades y plantear conjeturas. Un equipo plantea lo siguiente.

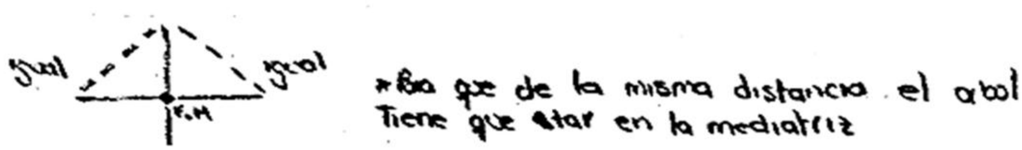
Si los 3 ángulos de dos triángulos son congruentes entonces esos triángulos son congruentes.

La conjetura, la cual se puede considerar como una regla, que en efecto no es válida, la proponen a partir de los triángulos que construyeron. Es decir, los estudiantes estarían usando como datos varios ejemplos de triángulos que tienen entre si ángulos correspondientes congruentes en los que parece que evidencian una propiedad, la congruencia de triángulos, que sería la aserción, y formulan una posible garantía aunque no sea válida, criterio de congruencia Ángulo-Ángulo-Ángulo.

- ***Argumento abductivo:*** A partir de la aserción y teniendo en cuenta posibles garantías se formulan posibles datos.

Figura 4.3 Ejemplo Argumento abductivo

En la tarea 6 de la Actividad 3 (ver Anexo 1) los estudiantes debían decidir si las posiciones propuestas por Pedro y Juana para el árbol satisfacen la equidistancia a la fuente y a la banca, condición exigida por el diseñador de jardines. Un grupo de estudiantes presenta lo que sigue.



El argumento que se entrevé detrás de su afirmación es: la misma distancia del árbol a la fuente y a la banca debe ser igual (aserción); sabemos que cuando un punto está en la mediatriz del segmento se cumple esa propiedad (posible regla), por tanto el árbol debe estar en esa mediatriz, (datos).

4.1.2. En relación a la estructura del argumento

Luego de la implementación de la propuesta de enseñanza se observa que un argumento puede ser analizado si cumple con los tres elementos del modelo Toulmin, diferenciando así el argumento incompleto y el argumento completo.

- ***Argumento incompleto:*** No se expresa explícitamente alguno de los tres elementos principales de un argumento.

Figura 4.4 Ejemplo Argumento incompleto

En el ejercicio 1 de la tarea 1 (ver Anexo 2) se propone: Sea m la mediatriz de $\overline{AB}$ y l una recta perpendicular al $\overline{AB}$ que contiene al punto medio de $\overline{AB}$. Justifique por qué l y m son la misma recta. Lo que sigue corresponde a la respuesta dada por un estudiante.

M y L son la misma recta por que
M es la mediatriz al segmento y L
una recta perpendicular a un punto
medio $\overline{AB}$ entonces forman una
misma recta

El anterior puede catalogarse como un argumento incompleto porque el estudiante no dice explícitamente cual es la garantía, la cual debería ser la definición de mediatriz; menciona los datos, m es la mediatriz del $\overline{AB}$ y l una recta perpendicular al $\overline{AB}$ que contiene su punto medio, y formula como aserción: l y m son la misma recta.

- ***Argumento completo:*** Se mencionan los tres elementos básicos de un argumento: datos, garantía y aserción.

Figura 4.5 Ejemplo Argumento completo

En el ejercicio 10 de la Actividad 2, (ver Anexo 1) se les pidió a los estudiantes: construir el $\angle RST$ y encontrar su medida. Luego debían marcar un punto Q en el interior del ángulo, trazar el $\overrightarrow{SQ}$ y encontrar la medida del $\angle RSQ$ y del $\angle QST$ ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los dos ángulos al mover al $\overrightarrow{SQ}$? Un equipo presenta la respuesta dada a continuación.

esos dos angulos tienen medidas iguales, al $\overrightarrow{SQ}$ estar en la mitad del primer ángulo.
Si movemos el $\overline{SQ}$ un angulo aumenta y otro disminuye.

A pesar de no ser un argumento completo, porque no se indican los datos, $\angle RST$, Q en el interior del ángulo, $\overrightarrow{SQ}$, $\angle RSQ$ y $\angle QST$; solo se menciona la aserción, los $\angle RSQ$ y $\angle QST$ tienen medidas iguales, y la garantía no se explicita. No obstante, los estudiantes hubieran podido valerse de la definición de bisectriz y mencionar los antecedentes para así formular un argumento que si sería completo.

4.1.3. En relación a la naturaleza de la garantía o aserción

En esta categoría se diferencian los argumentos tomando como referencia bien sea la garantía o la aserción. Se distinguen: el argumento visual, el argumento legítimo y el argumento no legítimo.

- ***Argumento visual:*** La garantía es lo que evidencian en la representación ya sea en el computador o en papel.

Figura 4.6 Ejemplo Argumento visual

En el ejercicio 2 de la tarea 3 (ver Anexo 2) se propone demostrar la siguiente afirmación: Si $\overline{AC}$ biseca al $\angle DAB$ y al $\angle DCB$, entonces ¿es $\triangle ACD \cong \triangle ACB$? La siguiente es la solución de un estudiante.

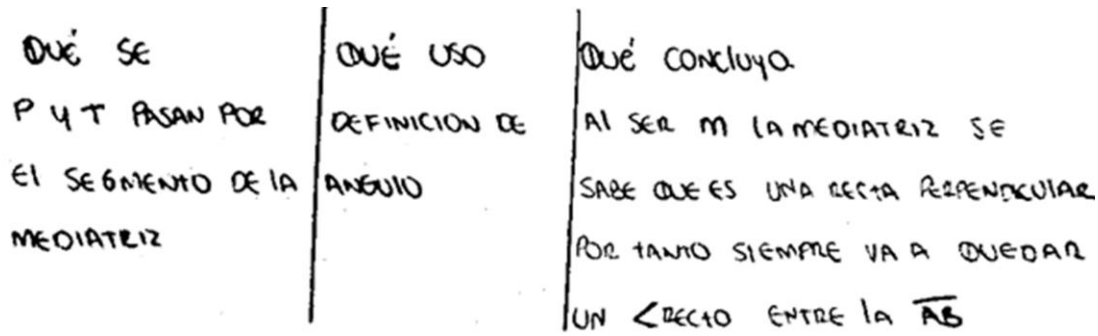
RESPUESTA: SI, EL $\triangle$ ACD ES $\cong$ CON EL $\triangle$ ACB, PORQUE AL BISECAR EL $\overline{AC}$, SE PUEDE CONCLUIR QUE EL $\triangle$ ABC Y $\triangle$ ADC SON CONGRUENTES, Y AL MEDIR CADA TRIANGULO (SEGÚN LO VISTO EN CLASE "CABRI") SE PUEDE VER QUE LOS TRIANGULOS SON CONFORMADOS CON LA MISMA MEDIDA...

El estudiante menciona los datos, $\overline{AC}$ bisectriz de $\angle DAB$ y $\angle DCB$, pero basa su aserción en lo que observa de la figura al hacer referencia a "medir el triángulo se puede ver". Cuando menciona la clase de Cabri, se está refiriendo al ejercicio realizado para descubrir cuándo los triángulos son congruentes.

- ***Argumento no legítimo:*** La garantía es una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, o la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

Figura 4.7 Ejemplo Argumento no legítimo

En el ejercicio 2 de la tarea 1 (ver Anexo 2) se propone: Sea m la mediatriz de $\overline{AB}$, P un punto de m y T el punto medio de $\overline{AB}$. Justifique por qué $\angle PTA$ es recto. La siguiente es la solución dada por un estudiante.



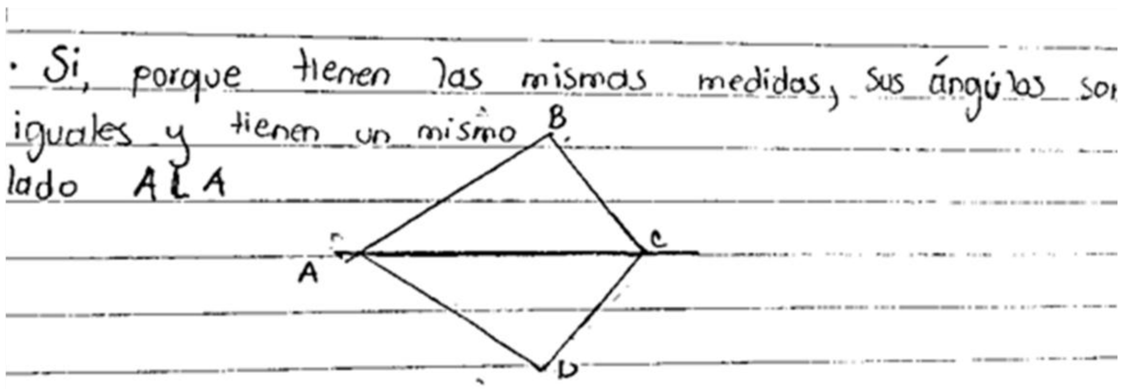
QUÉ SE	QUÉ USO	QUÉ CONCLUYO
P Y T PASAN POR EL SEGMENTO DE LA MEDIATRIZ	DEFINICION DE ANGULO	AL SER m LA MEDIATRIZ SE SABE QUE ES UNA RECTA PERPENDICULAR POR TANTO SIEMPRE VA A QUEDAR UN ∠RECTO ENTRE LA $\overline{AB}$

La forma como el estudiante consigna su argumento, asumiendo que entiende que en la columna Qué uso se debe colocar la garantía de su argumento, muestra que es un argumento no legítimo; claramente la definición de ángulo no relaciona los datos con la aserción. Sin embargo, lo que consigna en la tercera columna son dos argumentos incompletos, deductivos y legítimos. El primero tiene como datos que la recta m es mediatriz y como aserción que m es una recta perpendicular; no menciona la garantía que sería la definición de mediatriz. El segundo argumento tiene como datos que m es perpendicular, aunque sin hacer mención explícita a esto, y la aserción es que se determina un ángulo recto. No menciona como garantía la definición de rectas perpendiculares.

- ***Argumento legítimo:*** La aserción es consecuencia de los datos y la garantía sí relaciona datos y aserción.

Figura 4.8 Ejemplo Argumento legítimo

En el ejercicio 2 de la tarea 3 (ver Anexo2) se propone demostrar la siguiente afirmación: Si $\overline{AC}$ biseca al $\angle DAB$ y al $\angle DCB$, entonces ¿es $\triangle ACD \cong \triangle ACB$? Un estudiante propone lo siguiente



Es un argumento legítimo completo deductivo pues la aserción, $\triangle ACD \cong \triangle ACB$, es consecuencia de los datos, la congruencia de los ángulos DAC y BAC asi como de los ángulos DCA y BCA "sus ángulos son iguales", propiedad reflexiva de la congruencia del segmento que comparten "tienen un mismo lado" y la garantía es el criterio Ángulo-Lado-Ángulo. Sin embargo, si se analiza con cuidado lo que escribe el estudiante, se podría entrever que anteriormente debió construir un argumento incompleto deductivo legítimo que no menciona, pues realmente debió partir de los datos dados: el $\overline{AC}$ biseca al $\angle DAB$ y al $\angle DCB$, usar como garantía la definición de bisectriz para concluir que $\angle DAC \cong \angle BAC$ y que $\angle DCA \cong \angle BCA$.

4.2. Análisis de los argumentos en la tarea final

A continuación se muestran los argumentos producidos por cada equipo de estudiantes, como respuesta a las preguntas planteadas en la tarea final y su respectivo análisis. La tarea estuvo dividida en dos sesiones; en la primera no era necesario el uso del software Cabri, aunque los estudiantes habrían podido utilizarlo y en la segunda parte el ejercicio planteado exigía el uso del software Cabri. Se aclara que se analizaron las respuestas escritas cuando ellas tenían sentido. De lo contrario, se analiza la transcripción del video o lo que respondieron en la entrevista. Antes de mostrar el análisis, se incluyen las respuestas esperadas al ejercicio planteado.

Sesión 1

En la primer tarea se les preguntó a los estudiantes: decida si la respuesta a la pregunta es SI, NO o NO SE PUEDE SABER. Si la respuesta es SI o NO, justifique porque lo es. Si la respuesta es NO SE PUEDE SABER, indique las condiciones que harían que la respuesta fuera SI.

PREGUNTA 1A

Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ opuestos. Sea T un punto que no pertenece a la $\overleftrightarrow{AB}$. ¿Es $\angle TBA \cong \angle TBC$?

RESPUESTA ESPERADA

Posible construcción en Cabri o en papel.

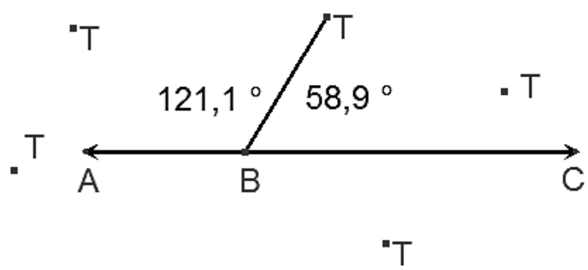


Figura 1

No se puede saber si $\angle TBA \cong \angle TBC$, porque no se sabe dónde está el punto T; por ejemplo en la figura $\angle TBA = 121°$ y $\angle TBC = 58{,}9$, $\angle TBA \ncong \angle TBC$. Para que los ángulos fueran congruentes, T debería ser un punto de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a B, $\overline{TB} \perp \overleftrightarrow{AB}$; así, ambos ángulos tendrían una medida de 90°, siendo congruentes. En este caso hay infinitas posiciones para T: puede ser cualquier punto de la recta descrita.

RESPUESTA (ENTREVISTA) EQUIPO A

[…] **Profesor:** ¿Qué responderían entonces? ¿Unas veces si unas veces no es congruente?

Valentina: Todo depende de cómo esté ubicado el ángulo.

Ximena: Depende de donde se ubique el punto T. O sea si está en el centro quedan perpendiculares y quedan congruentes. De resto no.

Argumento 1

Datos: T en el centro.

Cualificador: Depende de donde se ubique el punto T.

Garantía: No hay.

Aserción: Los segmentos son perpendiculares.

Argumento 2

Datos: Segmentos perpendiculares [Implícito].

Garantía: No hay.

Aserción: Los ángulos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento 1 deductivo incompleto legítimo, Argumento 2 deductivo incompleto legítimo.

Ambos argumentos son deductivos, en tanto cada uno parte de unos datos, de un lado, T "en el centro" y en el segundo segmentos perpendiculares, para establecer la aserción que es los segmentos son perpendiculares en el primer argumento y los ángulos son congruentes en el otro. Es incompleto pues la garantía no se hace explícita en ninguno de los dos argumentos. Es legítimo porque la aserción y los datos están relacionados.

RESPUESTA (ENTREVISTA) EQUIPO B

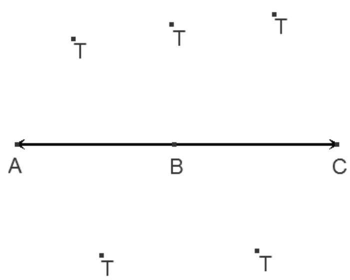
[…] **Profesor:** Entonces, ¿dónde tendrían que ubicar ese punto? ¿Dónde lo pondrías tú? [Dirigiéndose a Juliana].

Julio: Abajito del B.

Camilo: En cualquier parte.

Juliana: [Realiza el dibujo].

Figura 2



[…] **Profesor:** ¿Es entonces verdadero qué ∠TBA≅∠TBC?

Julio: Yo creo que no, porque uno no sabe dónde está el punto T.

Datos: T un punto que no pertenece a la $\overleftrightarrow{AB}$.

Cualificador: No se sabe dónde está T.

Garantía: [Parece ser] visual.

Aserción: No son congruentes los ángulos.

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto visual.

El argumento es deductivo pues parte de unos datos, T un punto que no pertenece a la $\overleftrightarrow{AB}$ pues así los representan. Parece que toman su decisión basados en la representación que han hecho pero no hacen referencia a ello; por esto no se considera que haya garantía, y por tanto es incompleto. Formulan una aserción, los ángulos no son congruentes.

RESPUESTA (TRANSCRPICIÓN VÍDEO) EQUIPO C

Marcos: Entonces T, ponga un punto por aquí [le indica a Ana María, un punto por fuera de ambos rayos] entonces $\angle TBA\ y\ \angle TBC$ [construye ambos ángulos].

Ana María: Sí… [En relación a la posición de los puntos].

Marcos: No, no son congruentes. Mira este punto [T] puede ser por aquí o por acá [señala varias posiciones] Es decir no pueden ser congruentes.

Datos: T no está en la $\overleftrightarrow{AB}$ y rayos opuestos.

Garantía: [Parece ser] visual.

Aserción: Los ángulos no son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento deductivo completo visual.

Se refiere a un argumento completo porque tiene los tres elementos básicos de un argumento. De carácter deductivo, parten de los datos, T un punto que no pertenece a la $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ rayos opuestos, utilizan una garantía, aparentemente visual y formulan una aserción, los ángulos no son congruentes. En este caso, se considera que la garantía es visual porque construyen los ángulos y luego señalan las diferentes posiciones de T.

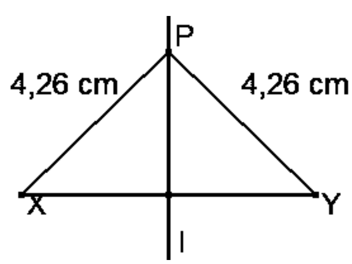
PREGUNTA 1B

Sea l la mediatriz del $\overline{XY}$ y P un punto de l. ¿Es $PX = PY$?

RESPUESTA ESPERADA

Posible construcción en Cabri o en papel.

Figura 3



Las distancias PX y PY sí son iguales pues P es un punto perteneciente a la mediatriz, y el hecho geometrico de la mediatriz: la mediatriz es el conjunto de puntos que equidista a los extremos del segmento, garantiza dicha igualdad.

RESPUESTA EQUIPO A

si es congruente, por que es un punto perteneciente a la mediatriz

Datos: P un punto de la mediatriz l.

Garantía: [No se sabe si se está haciendo alusión a la definición o al hecho geométrico].

Aserción: Los segmentos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto legítimo.

En este argumento no hay claridad sobre el uso de una regla, de manera que sería incompleto por la falta de la garantía. Es deductivo, ya que los estudiantes parten de unos datos, P un punto de la mediatriz l y formulan una aserción: los segmentos son congruentes.

RESPUESTA EQUIPO B

si porque, si el punto p pertenece a L que es la mediatriz al dar la division tendra la misma medida

Datos: l la mediatriz del $\overline{XY}$ y P un punto de l.

Garantía: Si es mediatriz entonces da la división.

Aserción: Los segmentos tendrían la misma medida.

Tipo de argumento: Argumento deductivo completo legítimo.

El argumento es deductivo porque los estudiantes parten de unos datos, l mediatriz del $\overline{XY}$ y P un punto de l e indican como aserción igualdad de medida. Como no era claro lo que querían decir al mencionar "dar la división tendrán la misma medida", se procedió a la entrevista. A continuación un apartado de esta.

Profesor: […] ¿A cuál división se refieren?

Juliana: A la división que genera el punto medio.

Por ende los estudiantes están pensando en el punto medio, luego el argumento sería legítimo para este caso. De otro lado podría hablarse de un argumento no legítimo pues P puede ser cualquier punto de la mediatriz. Sería completo puesto que tiene los tres elementos básicos de un argumento.

RESPUESTA EQUIPO C

Si, porque el Punto P está en la mediatriz l.

Datos: l la mediatriz del $\overline{XY}$ y P un punto de l.

Garantía: No queda claridad si se está usando la definición.

Aserción: Los segmentos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto legítimo.

El anterior es un argumento deductivo, pues los estudiantes utilizan datos, l mediatriz del $\overline{XY}$ y P un punto de l, y formulan una aserción, los segmentos son congruentes. Pero como no especifican la garantía se convierte en incompleto.

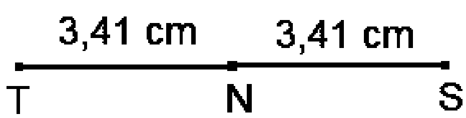
PREGUNTA 1C

N es el punto medio del $\overline{TS}$. ¿Es $NT > NS$?

RESPUESTA ESPERADA

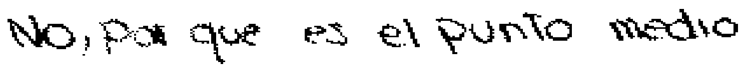
Posible construcción en Cabri o en papel

Figura 4



La longitud NT no puede ser mayor que la longitud NS, porque si N es el punto medio, la definición de punto medio asegura la la equidistancia de N a T y S.

RESPUESTA EQUIPO A



Datos: N es el punto medio del $\overline{TS}$.

Garantía: No hay.

Aserción: NT no es mayor que NS.

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto legítimo.

Aunque en este argumento pareciera que se hace uso de la definición, no está explicita la garantía: por ende sería incompleto. Además es deductivo, se utilizan los datos, N punto medio del $\overline{TS}$, y se formula la aserción, NT no es mayor que NS.

RESPUESTA EQUIPO B

no porque se encuentra en el medio de $\overline{TS}$

Datos: N es el punto medio de $\overline{TS}$.

Garantía: No hay garantía.

Aserción: NT no es mayor que NS.

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto legítimo.

Este equipo no menciona la garantía explícitamente, por ende es un argumento incompleto, pero dan indicios de que están usando la definición de punto medio, al decir "se encuentra en el medio". Es deductivo porque utilizan los datos, N punto medio del $\overline{TS}$, y formulan la aserción NT no es mayor que NS.

RESPUESTA EQUIPO C

No, porque N es el punto medio, osea que $NT \cong NS$.

Datos: N es el punto medio de $\overline{TS}$

Garantía: No hay garantía

Aserción: NT no es mayor que NS

Tipo de argumento: Argumento deductivo incompleto legítimo.

En este argumento la garantía no es explicita, luego es incompleto; pero a diferencia de los equipos anteriores, este equipo es más explícito. Presentan una consecuencia de la aserción, $\overline{NT} \cong \overline{NS}$, que podría considerarse como de otro argumento. El punto medio de un segmento asegura la igualdad entre los segmentos que este origina y no la congruencia de los segmentos que determina. Para ese argumento los datos que no se han dado, es la equidistancia a los extremos del segmento, la garantía es la definición de congruencia. El primero es deductivo legítimo, pues relaciona datos, N punto medio de $\overline{TS}$, y aserción, NT no es mayor que NS.

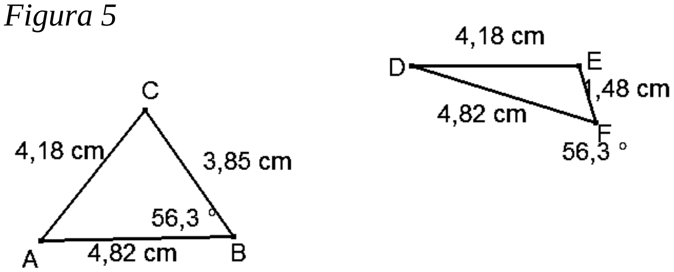
PREGUNTA 1D

Dos de los lados de un triángulo son congruentes a dos lados de otro triángulo. Además un ángulo del primer triángulo es congruente a un ángulo del segundo triángulo. ¿Son congruentes los triángulos?

RESPUESTA ESPERADA

Posible construcción en Cabri o en papel

Figura 5



Como se puede observar en la figura, en los triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle DEF$ se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ y $\angle B \cong \angle F$, pero $\overline{BC} \ncong \overline{EF}$. Luego los triángulos no serían congruentes. De otro lado, el hecho de que dos lados de un triángulo sean congruentes a dos lados de otro triángulo, y que estos dos triángulos tengan un ángulo congruente, no es suficiente para que ambos triángulos sean congruentes, pues el ángulo debe estar incluido entre los dos lados. Así se cumpliría el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado.

RESPUESTA EQUIPO A

Si, Por qué por que cumple el criterio de congruencia "LLA"

Datos: Dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes a dos lados y un ángulo de otro triángulo.

Garantía: Criterio de congruencia Lado - Lado – Ángulo [No es un criterio de congruencia de triángulos].

Aserción: Los dos triángulos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento deductivo completo no legítimo.

El anterior es un argumento completo pues contiene los tres elementos básicos de un argumento; deductivo, ya que los estudiantes utilizan los datos, dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes a dos lados y un ángulo de otro triángulo; plantean una garantía, en este caso no legítima pues no es un criterio válido. No obstante, en la entrevista los estudiantes se percatan de la no legitimidad de su garantía:

Profesor: […] ¿Lado-Lado-Ángulo es criterio de congruencia?

Ximena: Sí.

Profesor: ¿Cuáles criterios de congruencia conocen?

Valentina: [Busca en la carpeta] Lado-Ángulo-Lado, Lado-Lado-Lado, Ángulo-Lado-Ángulo y Lado-Ángulo-Ángulo.

Laura: Ese no es un criterio de congruencia entonces. Nos confundimos.

Ximena: Se formaría Lado-Ángulo-Lado.

Profesor: ¿Dónde se ponga el ángulo se cumple ese criterio?

Ximena: Si… ¡Ah, no! […] Hay que tener cuidado en donde se ubica el ángulo congruente.

RESPUESTA EQUIPO B

Si porque, si los dos lados de ambos triangulos
tienen una misma medida entonces los triángulos
son congruentes.

Datos: Dos lados de un triángulo son congruentes a los de otro triángulo.

Garantía: Criterio Lado-Lado [implícito].

Aserción: Los dos triángulos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento deductivo completo no legítimo.

En este argumento, los estudiantes solo se valen de uno de los datos, la congruencia de los lados, para plantear la aserción: la congruencia de los triángulos. Por ende, sería deductivo, pero incompleto, pues no proveen la garantía; además no puede ser considerado legítimo pues en este caso el criterio Lado-Lado que ellos parecen usar como garantía, no es válido.

RESPUESTA EQUIPO C

Los triángulos si son congruentes porque tienen dos lados iguales y
un ángulo en cómon, por lo cual el otro lado también sería
congruente con el del otro Triángulo

Argumento 1

Datos: Dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes a dos lados y un ángulo de otro triángulo.

Garantía: No está explicita.

Aserción: El otro lado de cada triángulo es congruente.

Argumento 2

Datos: Tres lados de un triángulo congruentes a tres lados del otro.

Garantía: No se menciona.

Aserción: Los triángulos son congruentes.

Tipo de argumento: Argumento 1 deductivo incompleto no legítimo y Argumento 2 deductivo incompleto legítimo.

Los dos argumentos son deductivos e incompletos porque no mencionan la garantía. El primero no es legítimo porque la garantía implícita es que teniendo dos lados de cada triángulo respectivamente congruentes el tercer lado tiene que ser congruente, la cual es falsa. El segundo es legítimo pues parece que están considerando como garantía el criterio Lado-Lado-Lado.

Sesión 2

En la segunda parte de la actividad, se presentó a los estudiantes un problema, el cual debía ser resuelto con geometría dinámica. Es un problema en el cual tienen que completar los datos para asegurar que se dé la aserción. Es decir, se está invitando a los estudiantes que formulen argumentos abductivos.

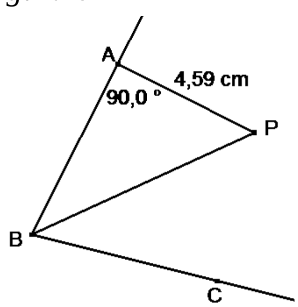
El problema solicitaba la siguiente construcción el $\angle B$ y la bisectriz $\overrightarrow{BX}$ de este. **Sea $\boldsymbol{P}$ un punto fijo** de la bisectriz, A y C puntos cualesquiera en lados diferentes del ángulo.

a. ¿Cuándo es mínima la distancia de P a A? Escriba su conjetura
b. ¿Es posible que la distancia mínima de P a A sea mayor que la distancia mínima de P a C? Escriba su conjetura. Justifique su respuesta.

RESPUESTA ESPERADA 2A

Posible construcción.

Figura 6



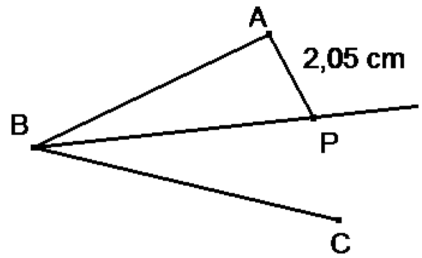
Si $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle B$, A y C puntos en los lados del $\angle B$, y $\overline{PA} \perp \overline{AB}$, entonces la distancia entre P y A es mínima.

RESPUESTA (TRANSCRIPCIÓN VÍDEO) EQUIPO A

[…] **Profesor:** ¿Qué construyeron?

Estudiantes: Muestran la representación en la pantalla.

Figura 7



Profesor: Ok. Entonces ¿cuándo será mínima esa distancia? ¿Dónde debe estar el punto A?

Laura: Cuando está así [indica con su mano perpendicularidad].

Profesor: ¿Será que si?

Laura: [Lee] ¿Cuándo es mínima la distancia de P a A? Cuando se cruzan…

Ximena: Pues cuando este segmento [señala $\overline{AP}$] es perpendicular a este otro [señala $\overline{AB}$].

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo, $\overline{AP} \perp \overline{AB}$.

Garantía: Visual.

Aserción: La distancia AP es mínima.

Tipo de argumento: Argumento abductivo completo visual.

En el proceso de plantear la conjetura, los estudiantes formulan un argumento de carácter abductivo, pues usan los datos para construir un ejemplo y con el arrastre encuentran la condición faltante, en el que se evidencia la aserción solicitada, la distancia mínima se encuentra cuando el $\overline{AP}$ es perpendicular al $\overline{AB}$. La garantía es de naturaleza visual: si un punto está sobre la recta perpendicular a una dada entonces su distancia a un punto de la recta es mínima. Los estudiantes utilizan lo que ven en la pantalla del computador para asegurar la validez de su aserción. De igual forma es completo, porque contiene los tres elementos básicos de un argumento.

RESPUESTA (TRANSCRIPCIÓN VÍDEO) EQUIPO B

Profesor: ¿Encontraron la distancia mínima?

Sofía: Sí, cuando es recto.

Estudiantes: Muestran la representación en la pantalla.

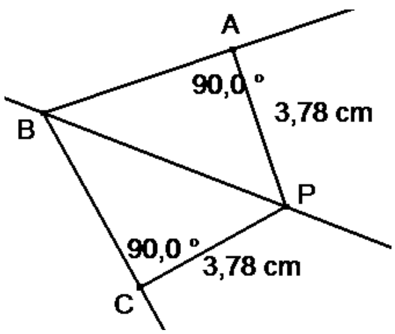


Figura 8

Profesor: ¿Quién es recto?

Sofía: El ángulo A.

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo $\angle A$.

Garantía: Visual.

Aserción: La distancia mínima se encuentra cuando el ángulo A es recto.

Tipo de argumento: Argumento abductivo completo visual.

En forma similar al argumento anterior, los estudiantes plantean un argumento abductivo, pues encuentran la condición que falta para que la distancia mínima sea mínima: cuando el ángulo A es recto. La garantía es visual, utilizando Cabri para asegurar la validez de su aserción. Igualmente es completo, porque contiene los tres elementos básicos de un argumento.

RESPUESTA (TRANSCRIPCIÓN VÍDEO) EQUIPO C

Marcos: [Había encontrado el punto A en el lado del ángulo para el cual la distancia a P es mínima sin determinar qué propiedad especial tenia el segmento. El profesor le preguntó si existia un punto correspondiente en el otro lado del ángulo] Sí y creo que van a ser iguales, porque esta es la bisectriz. [Construye en Cabri al $\overline{PC}$ y arrastra el punto C hasta encontrar el valor mínimo, encontrando que el valor es igual al segmento anterior]. Entonces son congruentes y debe haber alguna relación entre los ángulos, deben ser iguales [mide $\angle BAP$ y $\angle BCP$, encuentra valores cercanos pero no iguales].

[…]

Profesor: ¿Qué encontraron?

Estudiantes: Muestran la representación en la pantalla.

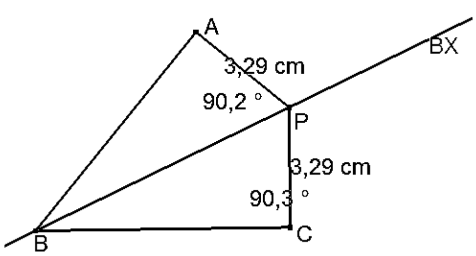


Figura 9

Profesor: ¿Tienen ángulos de 90°?

Marcos: Sí, son rectos.

Profesor: ¿Y qué propiedad tienen los ángulos de 90°?

Marcos: [Revisa su carpeta percatándose de la perpendicularidad de los segmentos cuando hay ángulos de 90°] Ah, entonces $\overline{PC}$ es perpendicular con $\overline{BC}$ y $\overline{PA}$ con $\overline{BA}$ y esa es la mínima distancia.

Argumento 1

Datos: P es un punto de la bisectriz.

Garantía: No la da.

Aserción: Son congruentes los lados [$\overline{PA}$ y $\overline{PC}$]

Argumento 2

Datos: Deben ser congruentes $\angle BAP$ y $\angle BCP$

Garantía: No da.

Aserción: Son congruentes los lados.

Argumento 3

Datos: Ángulos de medida 90°

Garantía: No la dan.

Aserción: Los ángulos son rectos.

Argumento 4

Datos: Los ángulos son rectos.

Garantía: Definición de segmentos perpendiculares (en las notas).

Aserción: $\overline{PC}$ es perpendicular con $\overline{BC}$ y $\overline{PA}$ con $\overline{BA}$.

Argumento 5

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo, $\overline{PC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PA} \perp \overline{BA}$.

Garantía: Visual.

Aserción: BC y BA son la mínima distancia.

Tipo de argumento: Argumento 1 deductivo incompleto no legítimo, Argumento 2 abductivo incompleto no legítimo, Argumento 3 deductivo completo legítimo, Argumento 4 deductivo completo legítimo y Argumento 5 inductivo completo visual.

A diferencia de los argumentos presentados por los equipos anteriores, este equipo presenta dos argumentos abductivos. El primero en el momento en que se percatan de la igualdad de la distancia mínima y creen que es consecuencia de la congruencia de $\angle BAP$ y $\angle BCP$. El segundo, cuando añaden la perpendicularidad a las condiciones dadas para asegurar que la mínima distancia es consecuencia de todo ello. Ambos argumentos son incompletos pues no presentan la garantía. En relación a los argumentos deductivos, se observa que Marcos se anticipa, logrando percatarse de que tanto la mínima distancia de P a A como la de P a C, se darán cuando estos segmentos son perpendiculares a cada lado del ángulo; de estos argumentos uno es incompleto y los otros dos completos. Y el último, es un argumento inductivo, completo y visual: parten de una construcción que incluye los datos, encuentran una aserción y se valen de lo que observan en la pantalla del computador para dar la garantía.

RESPUESTA ESPERADA 2B

La distancia mínima de P a A no puede ser mayor que la distancia mínima de P a C. La conjetura esperada es: Si P es un punto de la bisectriz de un ángulo entonces su distancia mínima a los lados del ángulo es igual.

Posible construcción

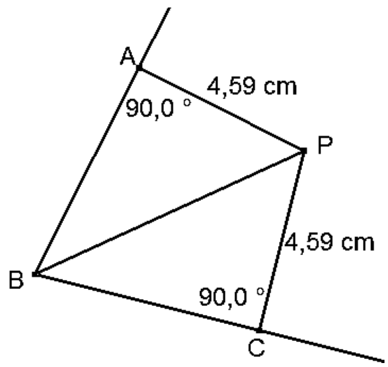


Figura 10

La justificación esperada podría ser informal. Deben mencionar que, los triángulos PBC y PBA, son congruentes. Por tanto $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ por ser lados correspondientes. Podría ser formal, como se presenta a continuación.

Tabla 4.1 Demostración esperada a la pregunta 2B

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
$\overrightarrow{BX}$ bisectriz, P un punto de $\overrightarrow{BX}$	Def. de bisectriz. Def. segmento.	$\angle ABP \cong \angle CBP, \overline{BP}$
$\overline{BP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BP} \perp \overline{BC}$	Def. perpendicular	$\angle BCP$ y $\angle BAP$ son rectos
$\angle BCP$ y $\angle BAP$ son rectos	Hecho geométrico ángulos rectos	$\angle BCP \cong \angle BAP$
$\overline{BP}$	Propiedad reflexiva	$\overline{BP} \cong \overline{BP}$
$\angle ABP \cong \angle CBP$ $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ $\angle BCP \cong \angle BAP$	Criterio de congruencia LAA	$\triangle PBC \cong \triangle PBA$
$\triangle PBC \cong \triangle PBA$	Def. Triángulos congruentes	$\overline{AP} \cong \overline{CP}$

RESPUESTA EQUIPO A

$\overline{AP} > \overline{PC}$ y depende de donde se ubiquen los
puntos A y C en el $\angle B$.
sí, $\overline{AP} > \overline{PC}$ entonces si se mueve el punto P se aumentan
las 2 distancias sin que $\overline{AP}$ deje de ser mayor que $\overline{PC}$.

Argumento 1

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto fijo de la bisectriz, A y C puntos cualesquiera en lados diferentes del ángulo, $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$.

Cualificador: Depende de donde se ubiquen los punto A y C en el $\angle B$.

Garantía: Visual.

Aserción: La distancia mínima PA es mayor que la distancia mínima PC.

Argumento 2

Datos: P un punto cualquiera de la bisectriz del $\angle B$.

Garantía: Visual.

Aserción: $PA > PC$.

Tipo de argumento: Argumento 1 inductivo completo visual y Argumento 2 inductivo completo no legítimo.

En este caso los estudiantes se valieron de los datos para construir posibles ejemplos, encontrando la aserción, una distancia es mayor que la otra, e incluyen un cualificador a los datos, dependiendo de donde se ubiquen los puntos en el ángulo. En el segundo argumento no tuvieron en cuenta que el punto P era fijo, por ende la garantía que se suponía visual, no relaciona los datos con la aserción. Por esto, no es legítimo el argumento. Ambos argumentos son inductivos pues generalizan lo que han visto en la calculadora.

RESPUESTA (TRANSCRIPCIÓN VÍDEO) EQUIPO B

Julio: No, porque cuando hay perpendiculares entonces son las mismas [las distancias]. No puede haber ni distancia mayor ni distancia menor.

Sofía: Serían congruentes.

Julio: Las dos distancias siempre serán las mismas.

Argumento 1 (Julio)

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto fijo de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo, $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PC} \perp \overline{CB}$.

Garantía: Visual.

Aserción: PA no puede ser ni mayor ni menor que PB.

Argumento 2 (Julio)

Datos: PA no puede ser ni mayor ni menor que PB.

Garantía: No la da.

Aserción: $PA = PB$

Cualificador: Siempre.

Argumento 3 (Sofía)

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto fijo de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo, $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PC} \perp \overline{CB}$

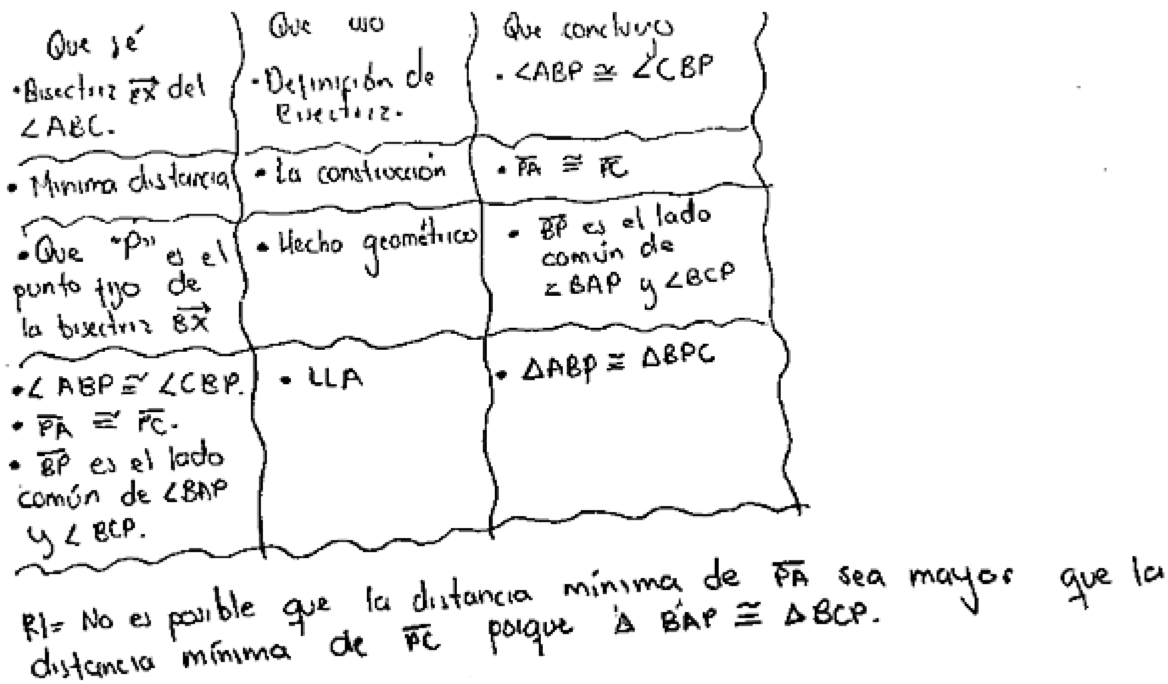
Garantía: No la da.

Aserción: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Tipo de argumento: Argumento 1 deductivo completo visual, Argumento 2 deductivo incompleto legítimo y Argumento 3 deductivo incompleto legítimo

Se encuentran tres argumentos deductivos de dos estudiantes. El primero de ellos tiene una garantía visual. En los otros dos argumentos Julio y Sofía no explicitan su garantía, luego serían incompletos. Es de notar que en el segundo argumento, los datos de Julio son la aserción encontrada en el primer argumento.

RESPUESTA EQUIPO C



Que sé	Que uso	Que concluyo
• Bisectriz $\overrightarrow{BX}$ del $\angle ABC$.	• Definición de bisectriz.	• $\angle ABP \cong \angle CBP$
• Minima distancia	• La construcción	• $\overline{PA} \cong \overline{PC}$
• Que "P" es el punto fijo de la bisectriz $\overrightarrow{BX}$	• Hecho geométrico	• $\overline{BP}$ es el lado común de $\angle BAP$ y $\angle BCP$
• $\angle ABP \cong \angle CBP$. • $\overline{PA} \cong \overline{PC}$. • $\overline{BP}$ es el lado común de $\angle BAP$ y $\angle BCP$.	• LLA	• $\Delta ABP \cong \Delta BPC$

R1= No es posible que la distancia mínima de $\overline{PA}$ sea mayor que la distancia mínima de $\overline{PC}$ porque $\Delta BAP \cong \Delta BCP$.

Argumento 1

Datos: Bisectriz $\overrightarrow{BX}$ del $\angle ABC$

Garantía: Definición de bisectriz.

Aserción: $\angle ABP \cong \angle CBP$

Argumento 2

Datos: Mínima distancia.

Garantía: Visual.

Aserción: $\overline{PA} \cong \overline{PC}$

Argumento 3

Datos: P un punto fijo de la bisectriz $\overrightarrow{BX}$

Garantía: Hecho geométrico [no se sabe a cuál se hace referencia].

Aserción: $\overline{BP}$ lado común $\angle BAP \cong \angle BCP$

Argumento 4

Datos: $\angle ABP \cong \angle CBP$, $\overline{PA} \cong \overline{PC}$ y $\overline{BP}$ lado común $\angle BAP \cong \angle BCP$

Garantía: Criterio de congruencia Lado-Lado-Ángulo.

Aserción: $\triangle ABP \cong \triangle BPC$

Argumento 5

Datos: $\overrightarrow{BX}$ bisectriz de $\angle B$, P un punto de la bisectriz, A y C puntos en lados diferentes del ángulo.

Garantía: Si $\triangle BAP \cong \triangle BCP$ entonces $PA \ngtr PC$.

Aserción: La distancia mínima PA no puede ser mayor que la distancia mínima PC.

Tipo de argumento: Argumento 1 deductivo completo legítimo, Argumento 2 deductivo completo visual, Argumento 3 deductivo incompleto no legítimo, Argumento 4 deductivo completo no legítimo y Argumento 5 deductivo completo no legítimo.

Este equipo marca una diferencia, en relación a los anteriores. Presentan una pequeña demostración en el esquema a tres columnas para asegurar la validez de su aserción. Es de destacar que los estudiantes utilizan las aserciones encontradas en un paso de la demostración como datos en el siguiente paso, donde cada paso de la demostración corresponde a un argumento. Todos los argumentos son deductivos, pero hay unos legítimos y otros no. En el primero de ellos, los estudiantes se valen de la definición de bisectriz dada en las sesiones de clase para presentar su garantía, uniendo de manera legítima los datos con la aserción; así mismo, el argumento presentado en la justificación posterior a la demostración, podría pensarse que es un argumento legítimo, pues aparentemente los estudiantes se valen de la congruencia de triángulos encontrada en la demostración para plantear su aserción. No obstante, esa congruencia de triángulos obedece a un argumento no legítimo, pues no se utilizó un criterio válido dentro del sistema teórico construido. El segundo argumento se construye a partir de lo observado en la pantalla del computador, pero harían falta más datos para poder llegar a la aserción presentada. Además, la aserción de este argumento es consecuencia de lo que están tratando de demostrar: la congruencia de triángulos. Los dos últimos argumentos son completos pero no legítimos, la garantía que presentan no une los datos con la aserción.

A continuación, se relacionan la cantidad de argumentos producidos de acuerdo a las preguntas (Tabla 4.2) y a los equipos de estudiantes (Tabla 4.3).

Tabla 4.2 Relación de argumentos de acuerdo a la respectiva pregunta

Argumento	P 1A	P 1B	P 1C	P 1D	P 2A	P 2B	Total
Deductivo completo legítimo		1			2	1	4
Deductivo completo no legítimo				2		2	4
Deductivo completo visual	1					2	3
Deductivo incompleto no legítimo				1	1	1	3
Deductivo incompleto legítimo	2	2	3	1		2	10
Deductivo incompleto visual	1						1
Inductivo completo visual					1	1	2
Inductivo completo no legítimo						1	1
Abductivo incompleto no legítimo					1		1
Abductivo completo visual					2		2

Tabla 4.3 Relación de argumentos según las producciones de los equipos

Argumento	EQUIPO A	EQUIPO B	EQUIPO C
Deductivo Completo legítimo		1	3
Deductivo Completo no legitimo	1	1	2
Deductivo Completo Visual		1	3
Deductivo Incompleto no legitimo			2
Deductivo Incompleto legítimo	4	3	3
Deductivo Incompleto Visual		1	
Inductivo Completo visual	1		1
Inductivo completo no legítimo	1		
Abductivo incompleto no legítimo			1
Abductivo completo visual	1	1	
Total	8	8	15

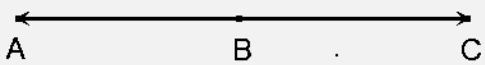
4.3. Acciones del profesor

Esta parte se enfoca en el análisis de tres episodios de las entrevistas del profesor con los tres equipos en la tarea final, una de cada equipo. Se usan como categorías de análisis las acciones mencionadas en el marco teórico, para determinar cuándo el profesor favoreció o qué habría podido hacer el profesor para promover la argumentación. Se aclara que se hace uso del corchete para indicar el número de la intervención del estudiante o del profesor, y del paréntesis para señalar la acción correspondiente.

Tabla 4.4 Acciones como categorías de análisis

Acciones Grupo A	
1	Proporciona espacios de reflexión
2	Sugiere exploración con geometría dinámica
3	Acepta el uso de geometría dinámica como medio de validación
Acciones Grupo B	
4	Reacciona con aclaración o precisión
5	Aprovecha intervención del estudiante
6	Concreta el resultado logrado hasta el momento
7	Institucionaliza el saber
8	Reacciona de manera lacónica
9	Declara, indica o corrige el error
10	Aprueba aporte del estudiante
11	Repregunta
Acciones Grupo C	
12	Incentiva discusión entre estudiantes
13	Busca o rescata aporte del estudiante
14	Exige aclaración o precisión
15	Exige justificación
16	Indaga
Acciones Grupo D	
17	Establece el foco de atención en el que se centrará la discusión
18	Hace comentarios relativos al sistema axiomático
19	Problematiza situación
20	Provee justificación o información

Tabla 4.5 Episodio de análisis 1

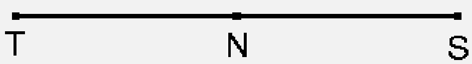
ENTREVISTA PREGUNTA 1A – EQUIPO A	ACCIÓN
1. Profesor: Si hay dos rayos opuestos se presenta lo siguiente [Ilustra la situación].  Y ahora ¿dónde se puede poner el punto ***T***?	14
2. Ximena: Por fuera de la recta.	
3. Profesor: ¿Por fuera? ¿En dónde? ¿Por aquí? [Señala un punto en cualquier lugar]	16
4. Ximena: En cualquier parte.	
5. Profesor: Ah, bueno. ¿Y se forman entonces dos ángulos?	10, 13
6. Ximena: Sí.	
7. Profesor: [Representa un rayo cualesquiera que contiene al punto ***T*** determinando así dos ángulos]. ¿Será que esos ángulos son congruentes?	19
8. Ximena: No.	
9. Profesor: ¿Dónde tendría que ponerlo [el punto] para que los ángulos fueran congruentes?	11
10. Ximena: Por acá, en todo el centro. Que el punto quede en la perpendicular.	
11. Profesor: ¿Sería entonces la única forma?	10, 16

12. Ximena: Sí, sería el único caso.	
13. Profesor: Ustedes respondieron: *“no es congruente, porque* $\boldsymbol{TBC}$ *están en una sola recta”*.	17
14. Ximena y Laura: [Risas] Eso no tiene sentido.	
15. Ximena: Lo redactamos mal.	
16. Profesor: ¿Qué responderían entonces? ¿Unas veces si unas veces no es congruente?	6
17. Valentina: Todo depende de cómo este ubicado el ángulo.	
18. Ximena: Depende de donde se ubique el punto $\boldsymbol{T}$. O sea si está en el centro quedan perpendiculares y quedan congruentes, de resto no.	
19. Profesor: Ok. Entonces, ¿consideran qué fue error en la redacción?	10
20. Ximena: Sí, no tuvimos cuidado en la escritura.	

En la intervención [1] el profesor sitúa a las estudiantes de nuevo en el problema que ya habían resuelto con antelación (17), intentando comprender lo que hicieron; el profesor solicita aclaración (14) al preguntar por la posición de T. De otro lado en [3], el profesor indaga (16) con las tres preguntas que hace para exigirle a Ximena más precisión; él habría podido lograr que la estudiante produjera un argumento si hubiera pedido una explicación de su decisión (15). Luego, el profesor en [5] a la vez que aprueba el aporte de Ximena (10), busca con su pregunta que Ximena aporte más información (13), para estar seguro de que ella esté realmente pensando en el contexto del problema. Paso seguido, en [7] el profesor se vale de una construcción que él mismo elabora para problematizar la situación

(19), enfocando la atención de las estudiantes en una situación que posiblemente no tenían en mente. No obstante en [9], al profesor le hizo falta exigirle a Ximena una justificación (15) y mayor precisión (14), pues ella solo respondió con un no a la pregunta sobre la congruencia de los ángulos; se perdió una oportunidad para favorecer la argumentación. Por otro lado el profesor habría podido incentivar la discusión (8), preguntándole por ejemplo a Laura o a Valentina si estaban de acuerdo con la respuesta de Ximena y porqué. A continuación en [11], el profesor aprovecha la intervención (10) de Ximena para indagar (16) sobre la posibilidad de encontrar otra posición para que los ángulos fueran congruentes, pues ella ya había manifestado que tenía que quedar sobre la perpendicularidad. En [13] el profesor al recordarles la respuesta que habían dado en la tarea final, establece el foco de lo que quiere tratar ahora (17). Ahora bien, luego de que las estudiantes se dan cuenta en [14,15] que su solución no responde a la pregunta, el profesor [16] concreta el resultado logrado hasta el momento (6) a través de una pregunta, quitándoles la oportunidad a las estudiantes de concretar lo que a través de esta entrevista habían descubierto y posiblemente argumentar para justificar su respuesta. Aunque el profesor no realiza acciones como exigir justificación (15), incentivar la discusión (12), Laura y Valentina dan respuesta al problema; así mismo el profesor no exigió justificación (15) a lo que ellas respondieron, y por lo tanto las estudiantes no continuaron en su esfuerzo de validar lo esperado. Finalmente, el profesor en [19] solamente aprueba los aportes (10) de Ximena y Valentina, haciendo falta indagar (16) e incentivar aún más la discusión (12) entre las estudiantes, acerca de que causaba la congruencia de los dos ángulos, dando otra oportunidad para la construcción de argumentos. De igual forma, el profesor no termina esta parte de la entrevista concretando el hecho geométrico que se puso en juego para así institucionalizar (7) el conocimiento matemático.

Tabla 4.6 Episodio de análisis 2

ENTREVISTA PREGUNTA 1C – EQUIPO B	ACCIÓN
1. Profesor: [Ilustra la situación]  Nos preguntan si $\boldsymbol{NT > NS}$	17
2. Juliana: No, eso es falso.	
3. Camilo: No. Son iguales.	
4. Profesor: Ustedes escribieron: *"No porque se encuentra en el punto medio de* $\overline{\boldsymbol{TS}}$" Bueno, y ¿qué es un punto medio?	16
5. Juliana: El que está en la mitad.	
6. Profesor: Sí. Y por definición ¿qué es un punto medio?	10, 16
7. Juliana: [La busca en el portafolio] Lee: *El punto T es punto medio del* $\overline{\boldsymbol{SX}}$*, si T está entre los puntos S y X, y la longitud del* $\overline{\boldsymbol{ST}}$ *es igual a la longitud del* $\overline{\boldsymbol{TX}}$ (Definición dada en la sesión 1 Mayo 24 de 2013)	
8. Profesor: Ah bueno, es bueno que cuando demos una respuesta acompañarla de una justificación.	18
9. Juliana: Entonces es mejor escribir que no porque es la misma distancia	

entre $\boldsymbol{NT}$ y $\boldsymbol{NS}$.	

El profesor en [1] inicia estableciendo el foco de atención de los estudiantes (17) pues ilustra la situación dentro del cual se enmarcaba la pregunta, abriendo el espacio para que inicie la discusión. A continuación [4] indaga (16) en reacción a lo que dicen Juliana y Camilo; el profesor formula esta pregunta que de manera indirecta los invita a continuar interviniendo para desarrollar más su argumento y para revisar el contenido de su intervención. Sin embargo, el profesor no abrió un espacio para poner en consideración las posibles diferentes posiciones de los miembros del equipo (12), de manera que manifestaran su acuerdo o desacuerdo con Juliana. En [6] el profesor aprueba el aporte (10) de Juliana, y continua indagando (16), ya que pregunta por la consecuencia de su intervención. En [8] el profesor realiza un comentario que da pautas sobre cómo se trabaja en matemáticas dentro de un sistema axiomático (18), específicamente exigiéndoles a los estudiantes a incluir la justificación a cada una de sus respuestas. Pero deja de lado acciones como: incentivar la discusión de los estudiantes (12) involucrando aún más sus aportes en la discusión, con el fin de que además de tener una buena comunicación, sean capaces de defender su posición frente a sus compañeros; concretar el resultado logrado (6) donde los estudiantes puedan enfocarse en el camino seguido, favoreciendo su comprensión y exigir justificación (15). La norma de justificar se debe convertir en una práctica regular para el estudiante, para conseguir buenos argumentos.

Tabla 4.7 Episodio de análisis 3

ENTREVISTA DE LA PREGUNTA 1B – EQUIPO C	ACCIÓN
1. Profesor: Ustedes dijeron: si, porque el punto ***P*** está en la mediatriz. Pero eso ya lo sabíamos. ¿Qué significa que el punto ***P*** esté en la mediatriz? ¿Qué es la mediatriz?	16
2. Marcos: Es la que pasa por… la que corta al segmento en toda la mitad.	
3. Profesor: ¿Es una qué?	14
4. Marcos: Es una recta.	
5. Profesor: El hecho de que esté en esa recta y como la mediatriz pasa por el punto medio, entonces ¿qué hace?	20, 16
6. Marcos: Hace que los dos…	
7. Profesor: [Después de un silencio prolongado]. ¿Qué pasará con cualquier punto que se tome aquí? [Ilustra la situación].	11
8. Marcos y Ana María: Siempre van a ser iguales.	
9. Profesor: ¿Así lo tome por acá [ubica un punto cualquiera en la mediatriz] pasará lo mismo?	16
10. Marcos: Si.	
11. Profesor: Eso es un hecho geométrico. Cualquier punto que se tome en la mediatriz y se una con ambos extremos del segmento, hará que esos segmentos tengan la misma distancia.	20

En la intervención [1] el profesor inicia la entrevista leyendo la respuesta que los estudiantes habían dado a la pregunta en la tarea final e indagando (16) acerca del uso del término mediatriz en su respuesta. La intención del profesor en [3] es exigir aclaración (14) de manera que Marcos provea un discurso matemático claro, pero el profesor se quedó corto en su exigencia de claridad al no solicitar que explicara lo que quería decir con la palabra mitad. De nuevo en su intervención [5], el profesor indaga (16) sobre cuál es el efecto de que la recta sea una mediatriz, pero comete el error de interpretar lo que dijo Marcos como si estuviera haciendo referencia al punto medio. Es decir, al introducir ese término en su solicitud provee información (20) que posiblemente Marcos no había considerado. En [7] el profesor formula su solicitud de otra forma (11). Paso seguido, en [9] el profesor indaga (16) a través de su propuesta de examinar lo que pasa con otro punto de la misma recta. En la respuesta de Ana María y Marcos, no es claro a qué se están refiriendo, por lo tanto, el profesor debió haber exigido aclaración (14). Tampoco exigió la justificación (15), cosa que los estudiantes deberían haber podido dar, pues tenían tanto el hecho geométrico de la mediatriz como la definición, ambos caminos para justificar la respuesta. Finalmente, en [11] el profesor provee información (20), con la intención de institucionalizar (7) el saber matemático en cuestión, pero no exigió la justificación (15) de ese hecho geométrico, cosa que habrían podido construir los estudiantes, perdiendo así otra manera para incentivar la discusión (12) entre los estudiantes.

En las tablas 4.8, 4.9 y 4.10 se relacionan tanto las acciones realizadas, las no realizadas, como las faltantes en los episodios descritos de cada equipo. En relación a éstas últimas, cabría decir que aunque se conformó un subconjunto de las acciones propuestas por el grupo Æ•G como aquellas que podrían suceder, pero dentro de las entrevistas, muchas no tenían cabida; es posible que en una clase si fueran posibles. El asterisco al final de la acción, indica cuantas veces más hubo reincidencia de la acción dentro del episodio respectivo.

Tabla 4.8 Relación de acciones equipo A

Equipo A		
Acciones realizadas	**Acciones que debió realizar**	**Acciones faltantes**
(6) Concreta resultado (10) Aprueba aporte del estudiante ** (11) Repregunta (13) Busca aporte del estudiante (14) Exige aclaración o precisión (16) Indaga * (17) Establece foco de atención (19) Problematiza situación	(7) Institucionaliza (10) Exige aclaración o precisión (13) Incentiva discusión ** (15) Exige justificación *** (16) Indaga	(1) Proporciona espacio de reflexión (2) Sugiere exploración con GD (3) Acepta el uso de GD como medio de validación (4) Reacciona con aclaración (5) Aprovecha intervención del estudiante (8) Reacciona de manera lacónica (9) Indica el error (20) Provee justificación

Tabla 4.9 Relación de acciones equipo B

Equipo B		
Acciones realizadas	**Acciones que debió realizar**	**Acciones faltantes**
(10) Aprueba aporte del estudiante (16) Indaga * (17) Establece foco de atención (18) Hace comentarios relativos al sistema axiomático	(6) Concreta resultado (14) Exige aclaración o precisión * (15) Exige justificación	(1) Proporciona espacio de reflexión (2) Sugiere exploración con GD (3) Acepta el uso de GD como medio de validación (4)Reacciona con aclaración (5)Aprovecha intervención del estudiante (7) Institucionaliza (8) Reacciona de manera lacónica (9) Indica el error (11) Repregunta (12) Incentiva discusión (13) Busca aporte del estudiante (17) Establece foco de atención. (19) Problematiza situación (20) Provee justificación

Tabla 4.10 Relación de acciones equipo C

Equipo C		
Acciones realizadas	**Acciones que debió realizar**	**Acciones faltantes**
(7) Institucionaliza (11) Repregunta (14) Exige aclaración o precisión (16) Indaga * (20) Provee justificación	(12) Incentiva discusión * (14) Exige aclaración o precisión (15) Exige justificación **	(1) Proporciona espacio de reflexión (2) Sugiere exploración con GD (3) Acepta el uso de GD como medio de validación (4)Reacciona con aclaración (6) Concreta resultado (7)Aprovecha intervención del estudiante (8) Reacciona de manera lacónica (9) Indica el error (10) Aprueba aporte del estudiante (13) Busca aporte del estudiante (17) Establece foco de atención. (18) Hace comentarios relativos al sistema axiomático (20) Problematiza situación

5. Conclusiones

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella"

Carl Friedrich Gauss

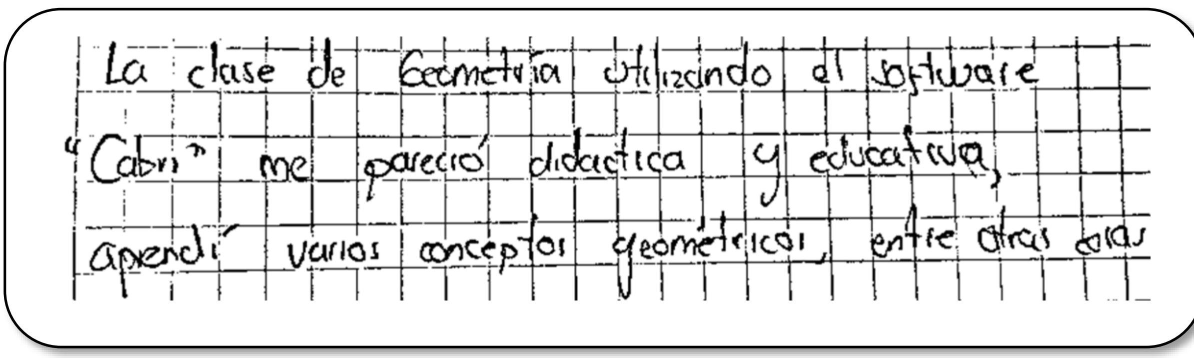
5.1. Respecto a la geometría dinámica

El uso de sistemas de geometría dinámica, en particular Cabri, promueve un cambio en el método de enseñanza y una nueva forma de aprendizaje, que puede resultar más efectiva que otras metodologías porque promueve la argumentación. Los estudiantes, por medio de la función arrastre, exploran los diferentes objetos y sus atributos; se valen de la herramienta medida para encontrar posibles regularidades. Se emplea la geometría dinámica dentro de unas actividades bien estructuradas, que apunten a la construcción del conocimiento y favorezcan la argumentación. No se considera un obstáculo el uso de este software, porque los estudiantes ya estaban acostumbrados a manipular este tipo de herramientas ya que durante tres meses, el aprendizaje del uso de Cabri fue paulatinamente y en forma simultánea con la propuesta de enseñanza. Los estudiantes no solamente aprendieron a usar las diferentes herramientas y funciones de Cabri sino que también aprendieron a interpretar la información que las figuras representadas con Cabri proveían para identificar las propiedades geométricas de las figuras.

Al finalizar el año lectivo 2013, la profesora titular del curso solicitó a los estudiantes evaluar la experiencia de la cual habían hecho parte, de manera que comentaran sobre el nivel de aprendizaje adquirido, situaciones que les hubieran podido resultar interesantes y aspectos a mejorar. Las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 ilustran algunos de los comentarios de los estudiantes.

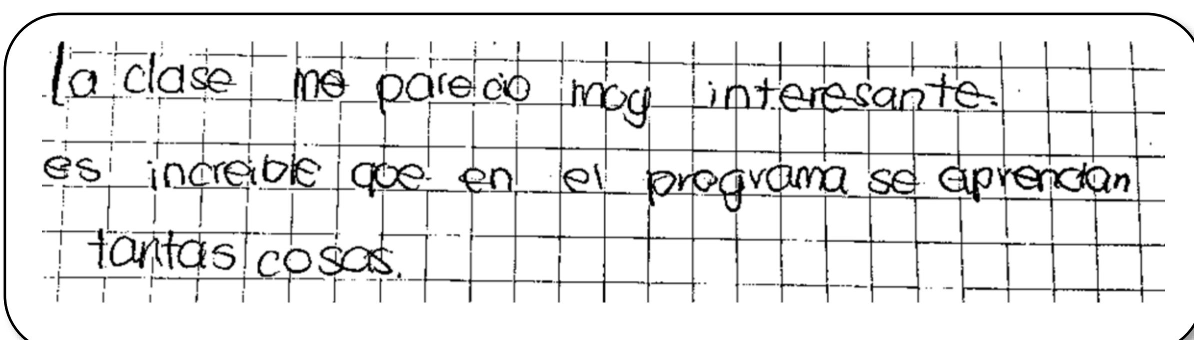
(Los nombres fueron cambiados para proteger su identidad).

Figura 5.1 A propósito de la geometría dinámica: Marcos



La clase de Geometría utilizando el software "Cabri" me pareció didáctica y educativa, aprendí varios conceptos geométricos, entre otras cosas

Figura 5.2 A propósito de la geometría dinámica: Stefany



la clase me pareció muy interesante. es increible que en el programa se aprendan tantas cosas.

Figura 5.4 A propósito de la geometría dinámica: Evelyn

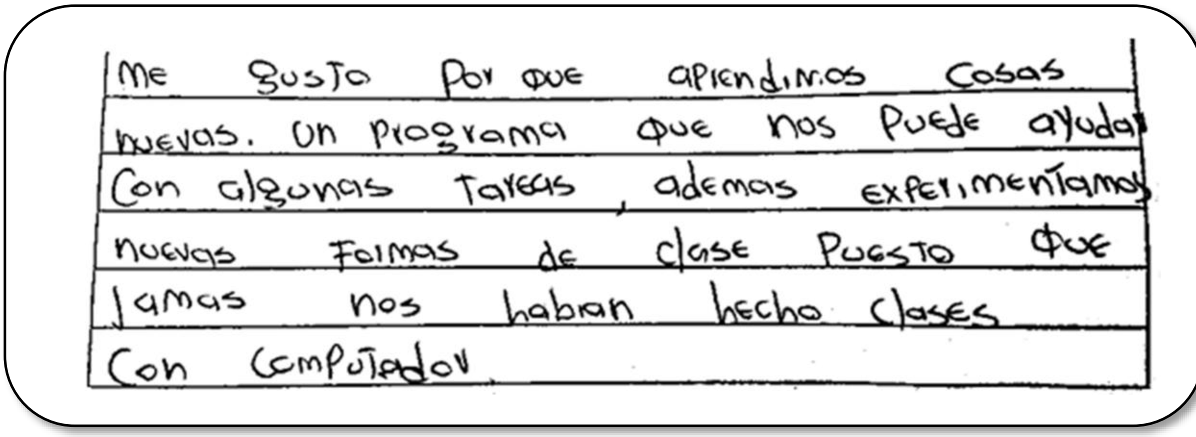
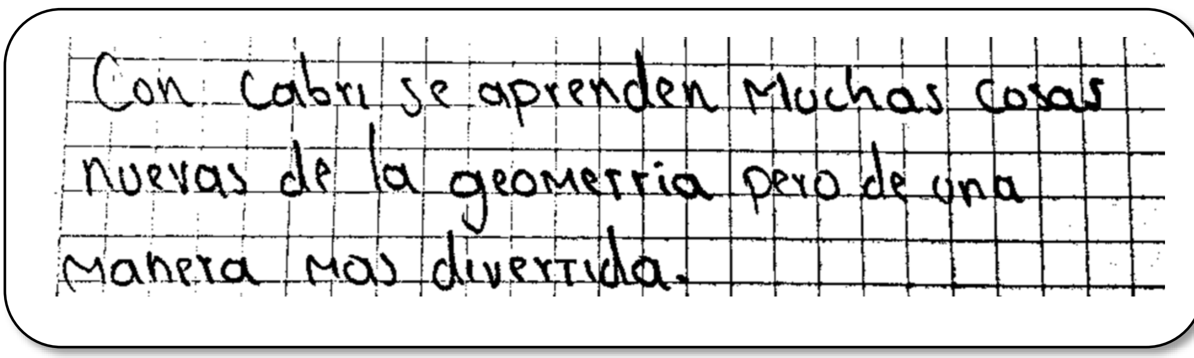

Me gusto por que aprendimos cosas
nuevas. Un programa que nos puede ayudar
con algunas tareas, ademas experimentamos
nuevas formas de clase puesto que
jamas nos habian hecho clases
con computador

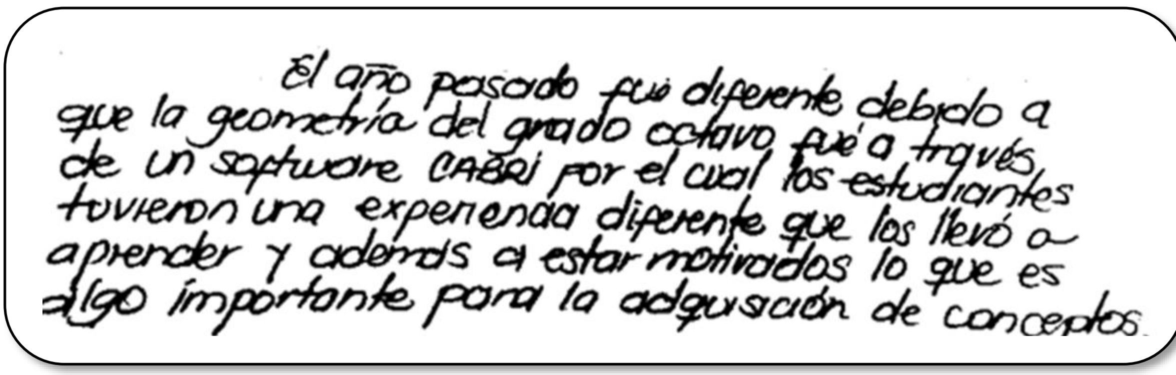
Figura 5.3 A propósito de la geometría dinámica: Isabela


Con Cabri se aprenden muchas cosas
nuevas de la geometria pero de una
manera mas divertida.

En general, los estudiantes manifiestan cómo las clases con Cabri fueron además de interesantes, didácticas, divertidas, novedosas y salidas de lo común. Se sorprenden del hecho de poder manipular los objetos geométricos de una manera fácil, y de cómo este software se convierte para ellos en una nueva forma de construir el conocimiento, situación a la que se enfrentaban por primera vez. Es importante señalar igualmente, que los estudiantes sienten que al tiempo que se familiarizaban con el manejo del software aprendían conceptos geométricos; Cabri se volvió útil para el aprendizaje: el artefacto se convierte en instrumento de aprendizaje (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, 2013).

Así como se solicitó a los estudiantes, se le pidió a la profesora titular del curso que comentara sobre la metodología usada, ya que estuvo presente durante el desarrollo del experimento de enseñanza. La figura 5.5 contiene su punto vista. Ella resalta que se logró que el estudiante sintiera motivación y ganas de aprender, situación muchas veces no fácil de lograr; comenta que gracias a la utilización de Cabri se pudo hacer un buen acercamiento al contenido propio del curso: una aproximación al aprendizaje significativo.

Figura 5.5 A propósito de la geometría dinámica: Profesora titular


El año pasado fue diferente debido a
que la geometría del grado octavo fue a través
de un software CABRI por el cual los estudiantes
tuvieron una experiencia diferente que los llevó a
aprender y además a estar motivados lo que es
algo importante para la adquisición de conceptos.

En concordancia con lo anterior, la clase de geometría debería estar mediada por el uso de computadores. Cabri no es el único software de geometría dinámica, cualquier software de esta índole puede favorecer el pensamiento geométrico. Por lo menos, lograr que sea usado en ciertos momentos de la clase sino siempre, sería ventajoso para el aprendizaje. Se considera además, que la geometría no debe ser relegada del currículo en los colegios; la tendencia que existe entre los maestros de dejar de enseñar geometría, priva a los estudiantes de la posibilidad de explorar, construir y validar el conocimiento.

5.2. Respecto a la actividad demostrativa y la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza, como parte del experimento llevado a cabo en esta investigación y enmarcada dentro de la actividad demostrativa, se convierte en un aporte para el profesor de matemáticas. Se puede aplicar en un curso cuya intencionalidad no solo sea enseñar conceptos básicos de geometría euclidiana o congruencia de triángulos, sino también que tenga el propósito de desarrollar habilidades argumentativas en los estudiantes y direccionar el camino hacia la demostración.

Enseñar a demostrar bajo el modelo tradicional puede convertirse en un trabajo difícil y de pocos resultados. Pero si antes de la demostración hay un acercamiento a la argumentación, donde se lleve de la mano al estudiante de manera que haya construcción y exploración, si se le exija a justificar sus procesos, a descubrir propiedades, producir conjeturas y comunicarlas, con seguridad se tendrían mejores resultados. Prueba de ello son los resultados, en particular a la producción de conjeturas; dos de los tres equipos formulan conjeturas en el esquema condicional si… entonces (Ver respuesta a la pregunta 1B Equipo B y pregunta 2B Equipo A). La demostración no debe estar incluida solo en la educación superior. Como se ha mostrado con este trabajo, los estudiantes de la secundaria también pueden producir justificaciones, claro está, con un trabajo bien orientado y entendiendo el ritmo de aprendizaje de ellos. Aunque con algunos errores, un equipo presenta una demostración en el esquema a tres columnas: Qué se, Qué uso y Que concluyo; como justificación a su respuesta (Ver respuesta a la pregunta 2B Equipo C).

Retomando de nuevo las evaluaciones de los estudiantes (Figuras 5.6, 5.7 y 5.8), puede verificarse lo expresado en el párrafo anterior. Los estudiantes manifiestan que aprenden a demostrar, quizás no al nivel de un matemático, pero si con un cierto grado de rigurosidad exigido en la propuesta de enseñanza y de acuerdo al nivel de dificultad propio de su grado de escolaridad. Señalan, así mismo, que durante la implementación de la propuesta, tuvieron la posibilidad de comprobar y descubrir. Sienten que ellos mismos se acercan y construyen conocimiento, sin necesidad de replicar lo que el profesor hace en el tablero. De la misma forma, la profesora titular del curso (Figura 5.9), recalca que este tipo de trabajo propicia la argumentación. Se refiere al trabajo en equipos colaborativos, metodología de aula desarrollada durante toda la propuesta, como una buena estrategia para desarrollar habilidades propias del razonamiento deductivo. Reitera también que los procesos de observación, exploración, formulación de conjeturas y verificación, además de ser desarrollados durante el periodo académico, favorecieron la producción de argumentos.

Figura 5.6 A propósito de la actividad demostrativa: Vanessa

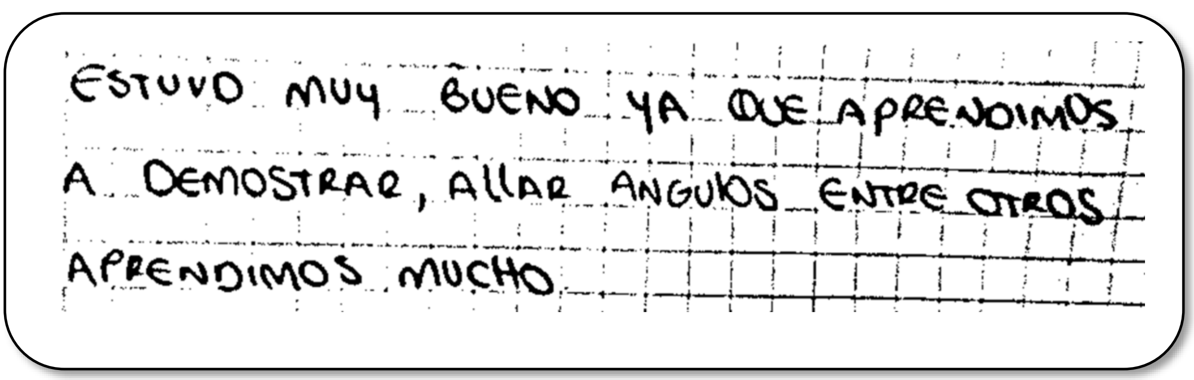


Figura 5.7 A propósito de la actividad demostrativa: Ximena

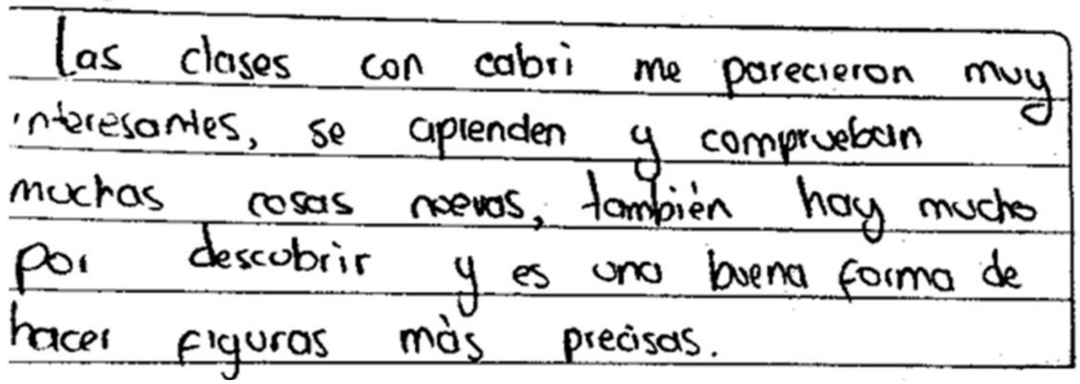

las clases con cabri me parecieron muy
interesantes, se aprenden y comprueban
muchas cosas nuevas, también hay mucho
por descubrir y es una buena forma de
hacer figuras màs precisas.

Figura 5.8 A propósito de la actividad demostrativa: Andrés

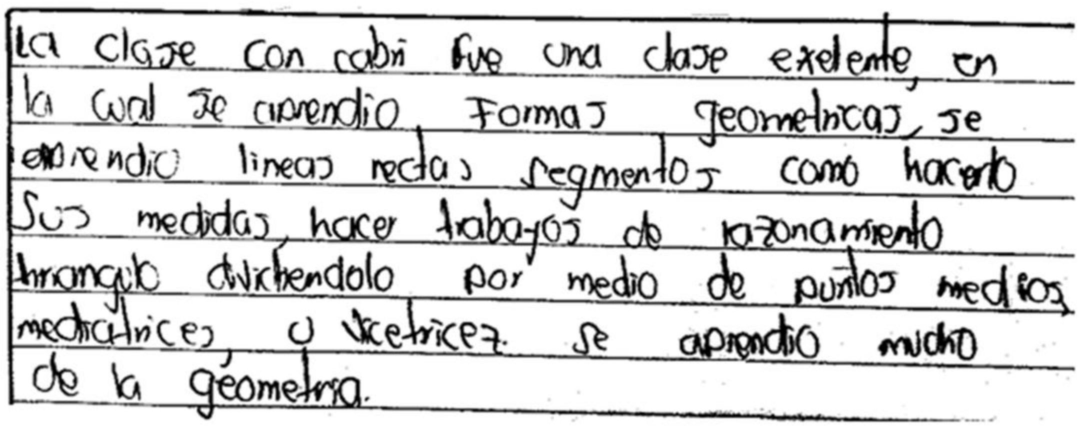
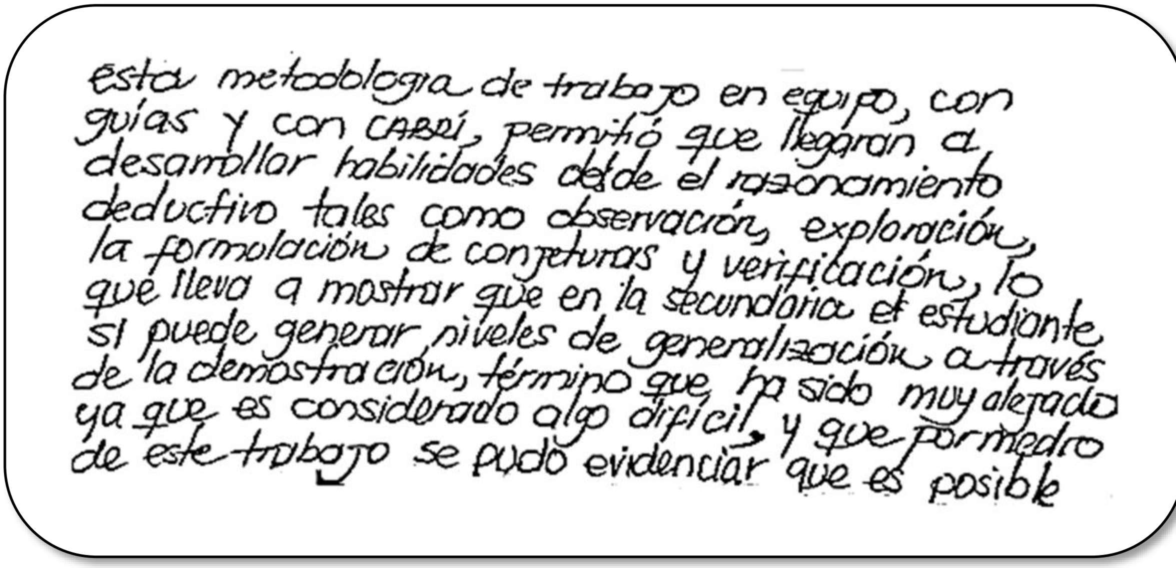

la clase con cabri fue una clase exelente, en
la cual se aprendio Formas geometricas, se
aprendio lineas rectas segmentos como hacerlo
sus medidas, hacer trabajos de razonamiento
triangulo dividiendolo por medio de puntos medios
mediatrices, y vicetricez. se aprendio mucho
de la geometria.

Figura 5.9 A propósito de la actividad demostrativa: Profesora titular


esta metodología de trabajo en equipo, con
guías y con CABRI, permitió que llegaran a
desarrollar habilidades del de el razonamiento
deductivo tales como observación, exploración,
la formulación de conjeturas y verificación, lo
qué lleva a mostrar que en la secundaria el estudiante
si puede generar niveles de generalización a través
de la demostración, término que ha sido muy alejado
ya que es considerado algo difícil, y que por medio
de este trabajo se pudo evidenciar que es posible

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la propuesta es efectiva para el colegio donde fue implementada por ser innovadora y al haber logrado que los estudiantes argumentaran, puede seguir siendo aplicada. A pesar de que no se lograron los objetivos, en cuanto a la demostración, al nivel que se soñaba, si se ven diferencias pues los estudiantes evolucionaron positivamente. Se siente ahora una responsabilidad en su promulgación a la comunidad de educación matemática.

5.3. Respecto a los argumentos de los estudiantes

Otro de los aportes a la comunidad de educación matemática está precisamente en las categorías con las que fueron analizados los argumentos. Las categorías relacionadas con la forma como se estructura el argumento: argumento deductivo, argumento inductivo y argumento abductivo son tomadas del marco teórico. Pero las categorías relacionadas con la estructura del argumento, completo e incompleto, y aquellas relacionadas con la naturaleza de la garantía: argumento visual, argumento legítimo y argumento no legítimo, son emergentes surgen durante el análisis de la producción de los estudiantes.

Se puede evidenciar (Ver tabla 4.2 y 4.3) que la tercera parte de los argumentos producidos fueron deductivos incompletos legítimos, los cuales son observados en todos los ejercicios propuestos en la tarea final. Fueron argumentos incompletos por falta de la garantía; los estudiantes no sienten la necesidad de nombrarla, a pesar de que contaban con la lista de los hechos geométricos, definiciones y postulados, pero pocas veces se remiten a estos, salvo en los casos que el profesor lo sugiere. Ello indica que faltó, durante el desarrollo de la propuesta didáctica, exigir justificaciones, siempre incluyendo en ellas las garantías.

En relación a los argumentos deductivos completos, se presentan diez, tres de ellos legítimos y cuatro no legítimos. Sobresale el equipo C que tuvo mayor producción de argumentos completos legítimos, tres en total (Ver tabla 4.3). En este equipo fue realmente un estudiante, Marcos, quien formuló los argumentos completos y además trató de armar una demostración deductiva usando el esquema a tres columnas, tal y como lo había aprendido en clase. Si se hubiera promovido más una actitud crítica de los estudiantes respecto a las ideas de otros, y la exigencia de que los demás justifiquen sus ideas, la compañera de Marcos habría logrado que él produjera más argumentos. Es significativo que al menos un equipo de estudiantes construyera una demostración usando el esquema adecuado, pues dentro de la propuesta de enseñanza, sólo la actividad 6 (Ver anexo 1) tenía el propósito de afianzar este esquema. Esto significa que para lograr esto requiere de un proceso de enseñanza a término más largo y de constante exigencia.

Así mismo, puede observarse que los estudiantes muchas veces se valen de garantías visuales: siete argumentos son de este tipo (Ver tabla 4.2); las utilizan particularmente en las tareas con Cabri y cuando deben hacer la conjetura. Aunque no podría catalogarse este hecho como negativo, en la medida en que los estudiantes logren valerse del contenido matemático involucrado, más que de la parte visual, que suele resultar engañosa en algunos casos, se lograrán argumentos aceptados dentro de la comunidad matemática. Es decir, hay que llevar a que el estudiante trascienda de los argumentos con garantía visual a argumentos deductivos completos legítimos; la visualización es una competencia muy importante en geometría y aún más para iniciar la argumentación, pero es necesario que los estudiantes entiendan que deben ir transformando sus argumentos en argumentos teóricos porque sólo así se puede asegurar que la aserción es válida en un sistema teórico y que no depende de la representación que se está usando.

A propósito de los tres argumentos inductivos en el ejercicio 2B, se observa que aparecen de una mala lectura al problema, porque el contexto de la situación direccionaba a la producción de argumentos deductivos. Y aunque no son muchos los argumentos abductivos (tres), es meritorio que argumentos de esta naturaleza surjan en estudiantes con poca experiencia en actividad demostrativa.

Ahora bien, el análisis de los resultados mostró que puede favorecerse la argumentación tanto con el uso de sistemas de geometría dinámica (17 argumentos) y sin su uso (14 argumentos). Ello muestra que Cabri puede convertirse en una herramienta potente para suscitar la producción de argumentos, y por ende de demostraciones. Ya sea con el uso o no de un SGD, lo importante es presentar tareas bien diseñadas a los estudiantes en donde se exija la justificación y que capte su interés, acompañadas además de una adecuada gestión del profesor. No hay una diferencia grande entre la cantidad de argumentos de un tipo u otro, pero es posible que no haber usado Cabri habría significado la disminución de la cantidad de argumentos.

5.4. Respecto al papel y a las acciones del profesor

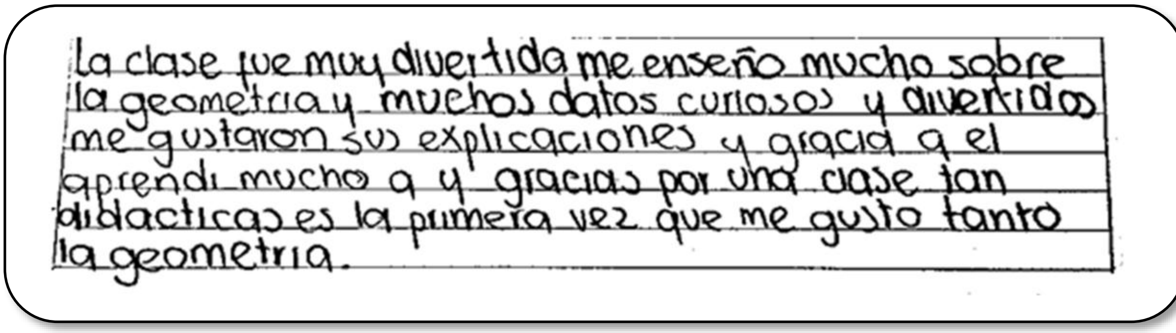
A pesar de la intención del profesor en promover la argumentación a través de la actividad demostrativa, le hizo falta estar más atento y sensible a las oportunidades que se presentaron para promover precisamente la producción de argumentos, darles la oportunidad de argumentar aún desde sus creencias. Por ejemplo en la pregunta 1A, los estudiantes no tenían todos los hechos geométricos para dar respuesta a la pregunta, pues el concepto de ángulos par lineal y la propiedad de ser suplementarios no fue abordado en la propuesta de enseñanza como hecho geométrico, pero habrían podido hacerlo desde lo que veían o creían. Además, muchas veces, como el profesor espera una respuesta específica, no se detiene a pensar en el aporte del estudiante y cómo lograr que se vaya acercando a la respuesta esperada. De pronto con cierto entrenamiento del profesor o la posibilidad de observar clases en la cual se promueve la argumentación, antes de asumir el reto de usar una metodología en clase distinta a la acostumbrada, se hubieran tenido mejores resultados.

En relación a las acciones del profesor (Ver tablas 4.8, 4.9 y 4.10), se observa que no logró hacer de la justificación una norma de clase. Aunque en las tareas escritas se les pedía la justificación, los estudiantes hicieron caso omiso. Al estudiante le cuesta incluso reportar paso a paso sus construcciones. Parece ser que eso es una habilidad que se debe desarrollar y, por tanto, debe ser objetivo de enseñanza. En la entrevista que se les hizo a los estudiantes, el profesor trató de buscar más información, pero no propició la argumentación porque no indagó en los momentos en que tocaba o claramente no pidió justificación.

No obstante, dada la cantidad de argumentos producidos (Ver tabla 4.2) es una señal de que las acciones del profesor también conllevaron a que los estudiantes argumentaran, no quizás en el nivel esperado. En relación a las acciones del profesor que se esperaba se realizaran, no se hicieron, tal vez porque son más probables en situación de aula, no en el contexto específico de una entrevista.

El papel del profesor sí incide en la percepción de los estudiantes sobre una determinada asignatura. Señal de ello es la evaluación de Sergio (Figura 5.10) quien comenta como la geometría no era de su agrado, pero que debido a un cambio en la forma de enseñanza, donde al igual de aprender se divierte, está motivado ahora por conocer más. No es el estudiante quien no quiere aprender, es la actuación del profesor en clase la que incide en un cambio de actitud hacia el aprendizaje de la geometría; así como, las actividades que se proponen y el uso de herramientas como los SGD.

Figura 5.10 A propósito del papel del profesor: Sergio


la clase fue muy divertida me enseño mucho sobre
la geometria y muchos datos curiosos y divertidos
me gustaron sus explicaciones y gracia a el
aprendi mucho a y gracias por una clase tan
didacticas es la primera vez que me gusto tanto
la geometria.

5.5. Observaciones generales y preguntas pendientes

Al dar una mirada a los resultados de este trabajo, se puede decir que se logró implementar una propuesta de enseñanza, se consiguieron producciones de los estudiantes en las que argumentan y el análisis retrospectivo de la actuación del profesor fue un factor de aprendizaje respecto a la enseñanza. El impacto de este trabajo puede ser positivo, ya que puede servir de referente para generar otras investigaciones, bien sean en el ámbito escolar o de pregrado e incluso en otros campos, tales como la estadística, el álgebra o el cálculo, en torno al fomento de la argumentación, el tipo de tareas que la propician y la gestión que debe hacer el profesor en el aula para apoyar el aprendizaje de la demostración, conducentes estas a la mejora de la educación matemática. Debe estudiarse si con formas alternativas de proponer tareas para los estudiantes y metodologías de enseñanza diferentes a las tradicionales, se puede enganchar a los estudiantes, no solo con el estudio de la geometría o de la demostración, sino de la matemática en general, con el fin de formar estudiantes críticos, reflexivos y transformadores de su propia realidad.

Quedan cuestiones aún por resolver, que pueden convertirse en preguntas de investigación: ¿Si en la tarea final los equipos se hubieran agrupado distinto a como trabajaron durante la propuesta de análisis, se habrían podido obtener mejores resultados? ¿Si los equipos de trabajo son conformados agrupando estudiantes como Marcos y Ximena, quienes fueron los que produjeron mayor cantidad de argumentos en sus respectivos grupos, se generarían más y mejores argumentos? ¿Sera que para haber mayor argumentación deben trabajar juntos los estudiantes más propositivos o con mayor conocimiento? ¿Los resultados serán los mismos en otro tipo de colegio y con condiciones económicas quizás diferentes? ¿Qué resultados se podrían obtener tanto en argumentación como en demostración si se hace un estudio longitudinal?

Referencias Bibliográficas

"He lamentado profundamente no haber avanzado al menos lo suficiente como para comprender algo de los grandes principios fundamentales de las matemáticas, pues los hombres que las dominan parecen poseer un sexto sentido"

Charles Darwin

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., y Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding of the 20th PME International Conference,* 113-120.

Boero, P., Douek, N., y Ferrari, P. L. (2002). Developing Mastery of Natural Language: Approach to Theoretical Aspects of Mathematics. En L. English (Ed.). Handbook of International Research in Mathematics Education. (pp.262-295) .L.E.A., Mahwah, N.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history and epistemology to cognition.* Netherlands: Sense Publishers.

Callejo, M., Valls, Julia., y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza: aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, 5-21.

Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Volumen especial,* 371 – 383.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Crespo, C. (2006). *Aplicación del modelo argumentativo de Stephen Toulmin en una institución educativa.* (Tesis de maestría). Universidad del Norte, Barranquilla.

D´Amore, Bruno. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio, Universidad de Bologna.

Denzin, N., y Lincoln, Y. (2000). Handbook of qualitative research. Thousands Oaks: Sage publications.

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics student's performances. *Proceedings of PME-XXIII, 2,* 273–280.

Douek, N., y Pichat, M. (2003). From oral to written text in grade, the long term and I approach to mathematical argumentation *Proceedings of CERME III International Conference, Group 4,* 1 - 10.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *La Lettre de la Preuve, noviembre/diciembre 1999.* Recuperado de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 137-161). Netherlands: Sense Publishers.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria.* (Tesis de maestría). Universitat Autònoma De Barcelona, Barcelona.

De Gamboa, G., Planas, N., y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Revista Summa, 64,* 35-44.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Godino, J., y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19(3),* 405-414.

Goizueta, M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores.* (Tesis de maestría). Universitat Autònoma De Barcelona, Barcelona.

González, N., y Larios, V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria. El proceso de construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica.* Saarbrücken: Editorial académica Española.

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7 - 10.

Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. En P. Boero. (Ed.), *Theorems in school From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*. (pp. 3-16). Netherlands: Sense Publishers.

Ibañes, M., y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en el bachillerato. *Revista Números, 61,* 19-40.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 151-161.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/35231051/Demostrar-es-un-problema-o-el-problema-es-demostrar.

Larios, V., y González, N. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria. El proceso de construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica.* Saarbrücken: Editorial académica Española.

, V., y González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Relime*, *13(14-I),* 147-160.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173 - 204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Marrades, R., y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87 - 125.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

Molina, O., Perry, P., Samper, C., y Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración, 29(1),* 73-96.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques.* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed*? Educational Studies in Mathematics, 66,* 23-41.

Perelman, C. (1997). *El imperio retórico. Retórica y argumentación.* Recuperado de http://es.scribd.com/doc/103933291/El-Imperio-Retorico-de-Chaim-Perelman.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C., y Molina, O. (Ed), *Geometría plana un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., y Echeverry, A. (2013). Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular. En Perry et al. (Ed), *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística.* (pp. 13-92). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Planas, N., y Morera, L. (2012). *La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado.* Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/matematicas_comunicacion/sites/grupsderecerca.uab.cat.matematicas_comunicacion/files/Argumentaci%C3%B3nMatematica_MoreraPlanas_PROTEGIDO.pdf.

Samper, C., Camargo, L., y Perry, P. (2006). *Geometría plana un espacio de aprendizaje*. Reporte de investigación presentado al CIUP. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Samper, C., Camargo, L., y Leguizamón, C. (2010). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sardà, A., y Sanmartí, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. *Enseñanza de las ciencias, 18 (3)*, 405-422. Recuperado de http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v18n3p405.pdf

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Recuperado de http://es.scribd.com/doc/100258986/Los-usos-de-la-Argumentacion-Toulmin.

Anexos

Anexo 1: Propuesta de enseñanza

Actividad 1

Estudiantes: ______________________________
____
____

A continuación encontrarán una serie de indicaciones, las cuales sólo deben ser realizadas a partir de la indicación del docente.

Con la ayuda del programa Cabri, realizar las siguientes construcciones.

1. Construir un punto y nombrarlo A. Arrastrar el punto.

2. Construir una recta l tal que A no pertenece a la recta. Describir cómo la construyeron.

3. Construir un punto B en la recta l y arrastrarlo. ¿Notan alguna diferencia de lo que sucedió con el punto A? Describan en qué consiste la diferencia. ¿Qué propiedad geométrica entre puntos y rectas se puede deducir de la experiencia anterior?

4. Dado un punto, ¿a cuántas rectas pertenece? ¿En qué se basan para su respuesta? Dados dos puntos, ¿a cuántas rectas pertenecen? ¿Tres puntos?

5. Construir tres puntos no colineales, ¿Cuántas rectas pueden construirse?, ¿por qué?

6. Construir un $\overline{CD}$ y definir segmento.

7. Construir un punto P en el $\overline{CD}$, ¿Existe una posición para el punto P de tal forma que se determinen en $\overline{CD}$ dos segmentos de la misma longitud?

8. Usar la herramienta punto medio de Cabri. Describan lo que pasa.

9. Construir el segmento $\overline{EF}$.

10. Construir un punto Q que no pertenezca a $\overline{EF}$. ¿Existe una posición de Q para que los segmentos $\overline{QE}$ y $\overline{QF}$ midan lo mismo?

11. Definir punto medio.

12. Ahora construyan dos segmentos que se intersecan en sus puntos medios y se mantenga esa propiedad bajo el arrastre. Completar la tabla.

Construyeron	
Exploraron	

Actividad 2

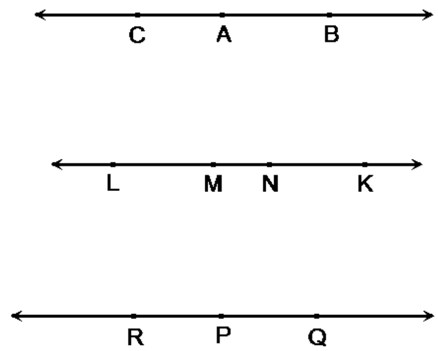
Estudiantes: ______________________________
____
____

A continuación encontrarán una serie de indicaciones, las cuales sólo deben ser realizadas a partir de la indicación del docente.

Con la ayuda del programa Cabri, realizar las siguientes construcciones.

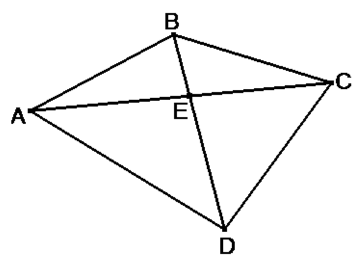
1. Construir un punto A. Construir un rayo que contenga el punto A.
2. Arrastrar el rayo, ¿Qué diferencias encuentran con la recta y con el segmento?
3. Definir rayo.
4. Construir un punto Q. ¿Cuántos rayos contienen al punto Q? Ilustren con un dibujo su respuesta.
5. Construir una recta *m* y cuatro puntos que pertenecen a ella T, A, X, V ¿Cuántos y cuáles rayos distintos quedan determinados con estos puntos? ¿Por qué son distintos?
6. Construir dos rayos con el mismo extremo y arrástrenlos y describan momentos durante el arrastre que les parezcan interesantes. Expliquen por qué es interesante.
7. **RAYOS OPUESTOS:** Dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen.

   Establecer en la figura cuales son rayos opuestos y cuales no son rayos opuestos.



8. **ÁNGULO:** un ángulo es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y que tienen el mismo origen.

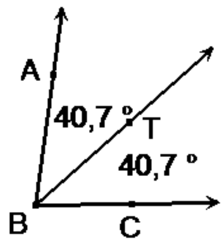
Nombrar todos los ángulos determinados en la figura.

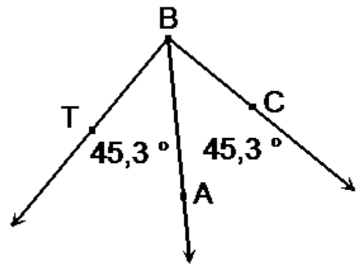


9. Construir un ángulo y encontrar su medida. ¿Qué sucede cuando arrastran uno de los rayos? Describan los valores que observaron durante el arrastre

10. Construir $\angle RST$ y encontrar su medida. Luego marcar un punto Q en el interior del ángulo. Trazar el $\overrightarrow{RS}$. Encontrar la medida de $\angle RSQ$ y $\angle QST$ ¿Qué relación encuentran entre las medidas de los dos ángulos al mover $\overrightarrow{SQ}$?

11. Observen y analicen la siguiente figura. ¿En cuáles casos el $\overrightarrow{BT}$ es la bisectriz del ángulo? Explicar por qué.





12. Ahora completen la siguiente definición de bisectriz.

La bisectriz del $\angle ABC$ es ____________________ con extremos en ________________ del ángulo y los demás puntos en ___________________ tal que el rayo con _______________ forman dos ángulos _______________

Actividad 3

Estudiantes: ______________________________
____
____

A continuación encontrarán una serie de indicaciones, las cuales sólo deben ser realizadas a partir de la indicación del docente.

Con la ayuda del programa Cabri, realizar las siguientes construcciones.

1. Construir una recta l y un punto P exterior a la recta. Tazar una recta m por el punto P. Arrastrar ambas rectas. ¿Qué relación encuentran en las posibles posiciones de ambas rectas?
2. Definir recta paralela y recta perpendicular.
3. Construir dos rectas l y m perpendiculares a una recta n. ¿Qué relación encuentran entre esas rectas? ¿En qué se basan para justificarlo?
4. Dado un punto Q en la recta k, ¿cuántas rectas por ese punto son perpendiculares a k? Muéstrenlo con un dibujo.
5. Dado un punto C que no está en una recta m ¿Cuántas rectas que pasan por C son perpendiculares a m? Justificar la respuesta.
6. **SITUACION PROBLEMA.** El diseñador de los jardines de un parque les comenta a los jardineros que desea sembrar un pino que quede a la misma distancia de una fuente

y de una banca. Cada uno de ellos se imagina la posición del árbol como aparece en la figura

Pedro supone que la posición del árbol es el punto medio del segmento que une la fuente y la banca, mientras que Juana lo imagina en otro lugar. ¿Cumplen las dos imágenes la condición establecida? Utilizar Cabri para modelar la situación.

- Reporten los pasos de la construcción.

- Reporten el paso de exploración.

- Generalicen lo que descubrieron.

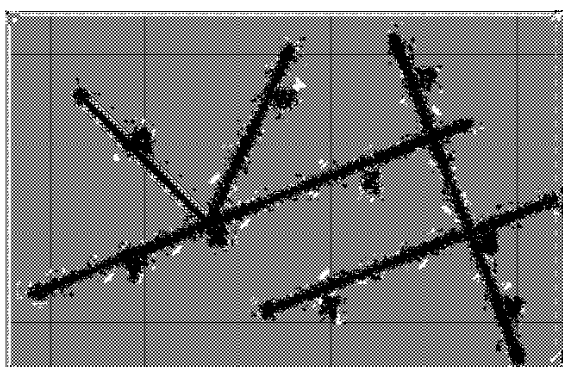
Actividad 4

Estudiantes: ______________________________
____
____

A continuación encontrarán una serie de indicaciones, las cuales sólo deben ser realizadas a partir de la indicación del docente.

Con la ayuda del programa Cabri, realizar las siguientes construcciones.

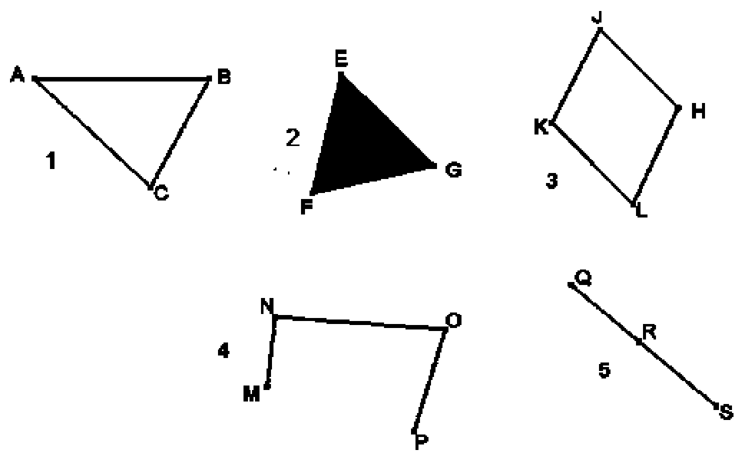
1. Enuncien lo que pueden afirmar de la figura, o la información que le falta para asegurar lo que parece cierto, y el postulado (hecho geométrico) o definición que lo asegura.



Afirmación	**Hecho Geométrico (postulado) o definición**

2. **DEFINICIÓN TRIÁNGULO:** Dados tres puntos no colineales, la unión de tres segmentos con extremos en esos puntos es un triángulo. Los puntos se llaman vértices del triángulo y los segmentos lados del triángulo.

Establezcan cuáles de las siguientes figuras son triángulos, de acuerdo con la definición dada. En caso de no ser triángulo comentar que condición de la definición no se cumple.



3. Construyan el $\Delta EFG.$ ¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos del triángulo y las medidas de $\angle F$ y $\angle G$? Escriban una conjetura.

Qué Construyeron	
Qué exploraron	
Qué descubrieron	

4. De acuerdo con los resultados del punto anterior, completen la siguiente conjetura:

Un triángulo _________________ tiene dos ángulos _______________. Ninguno de estos ángulos ________________ tiene como vértice el punto ______________ de los lados _________________

Actividad 5

Estudiantes: ______________________________
____
____

A continuación encontrarán una serie de indicaciones, las cuales sólo deben ser realizadas a partir de la indicación del docente.

Con la ayuda del programa Cabri, realizar las siguientes construcciones.

1. Con la ayuda del programa Cabri construir $\overline{PQ}$ y $\overline{ST}$. Luego construyan el ΔABC de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{BC} \cong \overline{ST}$. Utilicen la herramienta compás para facilitar la construcción.

   a) ¿Cuántos triángulos existen con lados congruentes a esos segmentos?

   b) Si hay más de uno, ¿tienen otra propiedad común?

   c) ¿Su respuesta sería la misma si se hubieran dado tres segmentos? Expliquen su respuesta.

   d) Construyan un tercer segmento denominado MN y luego construyan un triángulo cuyos lados son congruentes a los tres segmentos. Describan la que descubrieron y escriban una conjetura.

2. Construyan los ángulos $\angle WBZ$ y $\angle XUY$. Después construyan el ΔABC usando esos ángulos, siguiendo las siguientes instrucciones:

- Mida el $\angle WBZ$
- Construyan $\overrightarrow{AT}$
- Roten el $\overrightarrow{AT}$ alrededor de A usando la medida del $\angle WBZ$. Si el rayo no rotó en la dirección deseada, usen *Calcular* (antepenúltimo ícono) para encontrar el opuesto de la medida del $\angle WBZ$
- Sea B un punto del $\overrightarrow{AT}$
- Construyan el $\angle B \cong \angle XUY$

a. ¿Cuántos triángulos existen con ángulos congruentes a esos ángulos?

b. Si hay más de uno. ¿Tienen otra propiedad común?

c. ¿Su respuesta sería la misma si se hubieran dado tres ángulos?

d. Construyan un tercer ángulo.

e. Construyan el triángulo que tiene los tres ángulos congruentes a los dados. ¿Cuántos triángulos existen?

f. Si hay más de uno. ¿tienen otra propiedad común?

g. Escriban conjeturas.

3. Construir los lados $\overline{RS}$ y $\overline{TV}$ y el $\angle Q$. Construya el ΔABC con $\overline{AB} \cong \overline{RS}, \overline{AC} \cong \overline{TV}$ y $\angle B \cong \angle Q$.

a. ¿Cuántos triángulos existen? Si hay más de uno, ¿tienen otra propiedad común?

b. Supongan ahora que se construyen los mismos segmentos pero es el $\angle A$ el que es congruente al $\angle Q$. ¿Cuántos triángulos existen?

c. Si el ángulo dado es congruente al $\angle C$ y se mantiene la congruencia de los lados sin hacer construcción alguna diga cuántos triángulos existen. Justifiquen su respuesta.

d. Escriban conjeturas.

4. Construir $\angle F$, $\angle G$ y $\overline{JH}$. Luego construyan el ΔABC haciendo que $\angle B \cong \angle F, \angle A \cong \angle G$ y $\overline{AB} \cong \overline{JH}$.

a) ¿Cuántos triángulos existen?

b) Supongan ahora que se mantiene la congruencia de los ángulos pero es el $\overline{BC}$ el que es congruente al $\overline{JH}$. ¿Cuántos triángulos existen?

c) Si ahora el $\overline{AC}$ es congruente al $\overline{JH}$ y $\angle B \cong \angle F, \angle A \cong \angle G$, sin hacer construcción alguna, diga cuántos triángulos existen. Justifiquen su respuesta.

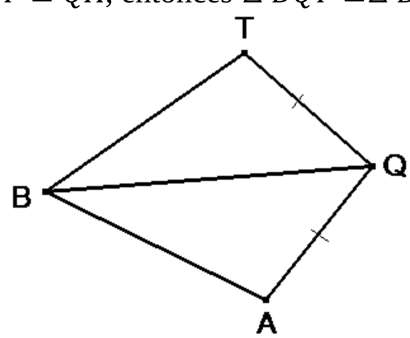
d) Escriban conjeturas.

Actividad 6

Estudiantes: ______________________________
____
____

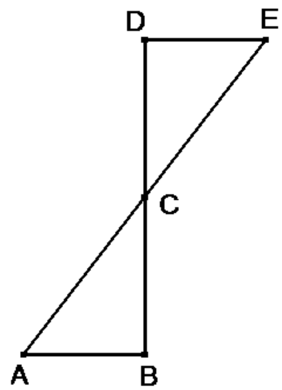
1. Completar cada demostración

a. Si $\overrightarrow{QB}$ biseca al $\angle TQA$ y $\overline{QT} \cong \overline{QA}$, entonces $\triangle BQT \cong \triangle BQA$.



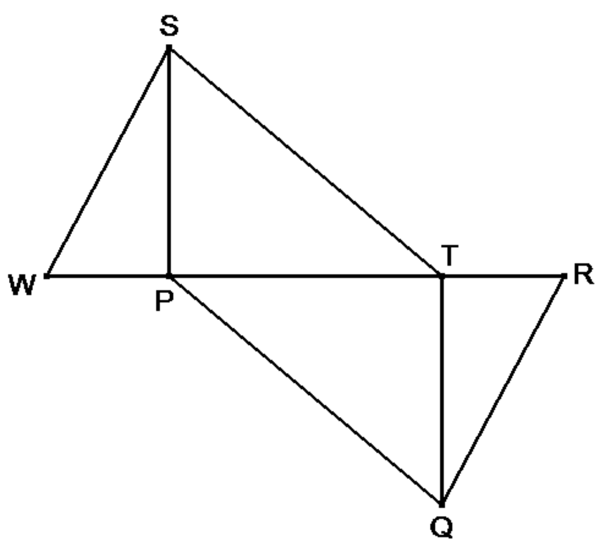
Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
$\overrightarrow{QB}$ biseca al $\angle TQA$	Definición de bisectriz	

b. Si C es el punto medio de $\overline{BD}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, entonces $\angle E \cong \angle A$



Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

2. Identificar dos pares de triángulos que podrían ser los que demostrarían congruentes para llegar a la conclusión dada.

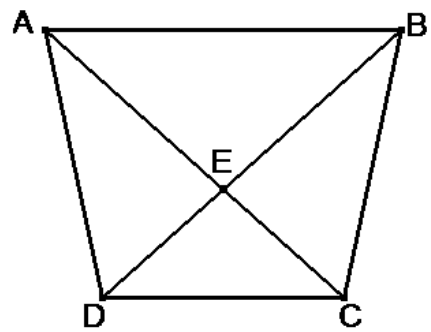


a. $\overline{SP} \cong \overline{TQ}$

b. $\angle W \cong \angle R$

c. $\overline{ST} \cong \overline{PQ}$

3. Usar la siguiente figura y la información dada para completar la tabla



Qué sé	**Triángulos Congruentes**	**Justificación**	**Conclusión**
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{DE} \cong \overline{CE}$ $\angle ADE \cong \angle BCE$			$\overline{AE} \cong \overline{\quad}$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$			$\angle DAE \cong \square$
$\angle ABE \cong \angle BAE$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$			$\overline{\quad} \cong \overline{BC}$
$\angle ADE \cong \angle BCE$ $\overline{DE} \cong \overline{CE}$			$\overline{\quad} \cong \overline{BE}$

Anexo 2: Tareas

Tarea 1

1. Sea m la mediatriz de $\overline{AB}$ y l una recta perpendicular de $\overline{AB}$ que contiene al punto medio de $\overline{AB}$. Justifique por qué l y m son la misma recta.

2. Sea m la mediatriz de $\overline{AB}$, P un punto de m y T el punto medio de $\overline{AB}$. Justifique por qué $\angle PTA$ es recto.

Tarea 2

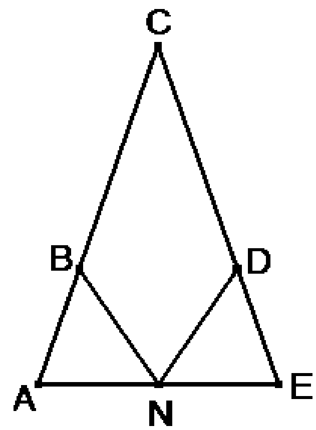
1. Se sabe que el ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. T es el punto medio del $\overline{AC}$. ¿Qué puede decir sobre los triángulos ABT y CBT? Justifique su respuesta.

2. $\overline{XW}$ y $\overline{YZ}$ se intersecan en el punto medio F. ¿Es el triángulo XFY congruente al triángulo WFZ? Justifique su respuesta.

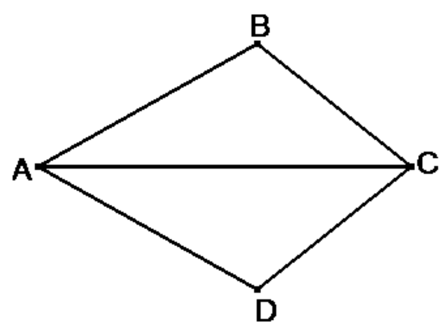
Tarea 3

Demuestra las siguientes afirmaciones

1. Si $\angle CBN \cong \angle CDN, \angle A \cong \angle E$ y N es punto medio de $\overline{AE}$, entonces $\triangle ABN \cong \triangle EDN$



2. Si $\overline{AC}$ biseca al $\angle DAB$ y al $\angle DCB$, entonces $\triangle\, ACD \cong \triangle\, ACB$.



Anexo 3: Hechos geométricos, definiciones y postulados

Actividad 1

HG PUNTOS RECTA: Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene.

HG RECTAS PUNTO: Dos rectas se cortan en un único punto.

HG PUNTOS COLINEALES: Tres o más puntos son colineales si existe una recta que los contiene.

Def. SEGMENTO: El segmento AC es el conjunto de puntos A, C y todos los puntos entre A y C. Los puntos A y C se llaman los extremos del segmento.

Def. PUNTO MEDIO: El punto T es punto medio del $\overline{SX}$, si T está entre los puntos S y X, y la longitud del $\overline{ST}$ es igual a la longitud del $\overline{TX}$.

Actividad 2

Def. RAYO: El rayo LK está formado por todos los puntos del $\overline{LK}$ junto con todos los demás puntos de la $\overleftrightarrow{LK}$, tal que K está entre cualquiera de esos puntos y L. El punto L es el origen del rayo LK.

Def. RAYOS OPUESTOS: Dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen.

Def. ÁNGULO: Un ángulo es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y que tienen el mismo origen.

HG MEDIDA DE ÁNGULOS: A un ángulo le corresponde un número entre 0° y 180°

Def. ÁNGULOS CONGRUENTES: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Actividad 3

Def. ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.

Def. BISECTRIZ: Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes.

HG BISECTRIZ ÁNGULO: La medida de un ángulo es igual al doble de la medida de cualquiera de los dos ángulos determinados por su bisectriz.

Def. RECTAS PERPENDICULARES: Dos rectas que determinan ángulos rectos son perpendiculares.

Def. RECTAS PARALELAS: Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.

HG PARALELAS-PERPENDICULAR: Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas entre sí.

HG PUNTO PERPENDICULAR: Por un punto de una recta pasa una única perpendicular a la recta dada y que pasa por dicho punto. Dado un punto en una recta existe una única recta perpendicular que la contiene

HG PUNTO EXTERIOR PERPENDICULAR: Por un punto exterior a una recta pasa una única perpendicular a la recta dada y que pasa por dicho punto. Dado un punto exterior a la recta existe una única recta perpendicular que contiene dicho punto.

Actividad 4

Def. MEDIATRIZ: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que contiene al punto medio de éste.

HG MEDIATRIZ: La mediatriz es el conjunto de puntos que equidista a los extremos del segmento.

Def. SEGMENTOS O RAYOS PERPENDICULARES: Dos rectas, segmentos o rayos que determinan ángulos rectos son perpendiculares.

Def. TRIÁNGULO: Dados tres puntos no colineales, la unión de tres segmentos con extremos en esos puntos es un triángulo. Los puntos se llaman vértices del triángulo y los segmentos lados del triángulo.

Actividad 5

Def. TRIANGULO CONGRUENTE: dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

- **CRITERIO LADO-LADO-LADO (LLL):** Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

- **CRITERIO LADO-ÁNGULO-LADO (LAL):** Si dos lados y el ángulo incluido entre ellos, en un triángulo, son congruentes con dos lados y el ángulo incluido entre ellos en otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
- **CRITERIO ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA):** Si dos ángulos y el lado incluido entre ellos, en un triángulo, son congruentes con dos ángulos y el lado incluido entre ellos en otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.
- **CRITERIO LADO-ÁNGULO-ÁNGULO (LAA)**: Si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, en un triángulo, son congruentes con dos ángulos y el lado opuesto al ángulo correspondiente en otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Anexo 4: Consentimiento informado

Medellín, 15 de mayo de 2014

Señores
UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
Maestría en Educación Matemática

El Colegio Cooperativo "San Antonio de Prado" y en su nombre el representante legal Rubén Darío Isaza Gómez, como ente educativo y formador permite al magister en formación de la UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, perteneciente al programa Maestría en Educación Matemática **JORGE ANDRÉS TORO URIBE** responsable de la Propuesta de Intervención Pedagógica ***"Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo "*** quien se desempeñó como investigador el año anterior con estudiantes de grado 8°A, publicar los resultados de sus estudios aplicados en nuestra institución. Estamos convencidos que este trabajo aportará excelentes resultados para nuestros estudiantes, interviniendo de manera directa y positiva en el proceso de su aprendizaje, en el caso particular de la geometría.

Atentamente,

RUBEN DARÍO ISAZA GÓMEZ
Rector