



UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, EN LA
CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE
INTERACTIVO.

AUTOR: JHON JAIRO GARCÍA MESA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MEDELLÍN
2016

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, EN LA
CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE
INTERACTIVO.

AUTOR: JHON JAIRO GARCÍA MESA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

DR. JULIÁN DAVID CORREA ABAD
DR. JAVIER SANTOS SUÁREZ ALFONZO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MEDELLÍN

2016

Contenido

RESUMEN EJECUTIVO	6
Introducción.....	7
Capítulo 1	9
1. El problema de investigación	9
1.1 Planteamiento del problema	9
1.2 Pregunta de investigación	11
1.3 Objetivo general.....	12
1.4 Objetivos específicos.....	12
1.5 Antecedentes.....	12
1.5.1 Estudios asociados a la función lineal.....	13
1.5.2 Dificultades en el estudio de la función lineal.....	16
1.5.3 La función lineal desde el componente variacional.	19
Capítulo 2.....	21
2. Marco teórico	21
2.1 El razonamiento covariacional.....	21
2.1.1 Acciones Mentales	22
2.1.2 Niveles de razonamiento covariacional.....	24
2.1.3 El razonamiento covariacional en la conceptualización de las funciones.	25
2.2 Las TIC y la educación matemática.....	26
2.2.1 El software educativo	29
2.3 La modelación en la educación matemática.....	30
2.3.1 La modelación en educación matemática a través de la tecnología	33
Capítulo 3.....	35
3. Metodología	35
3.1 Enfoque de la investigación.....	35
3.2 El método	37
3.3 El diseño.....	39
3.3.1 Pregunta de estudio	40
3.3.2 Proposiciones.....	40
3.3.3 Unidad de análisis y el contexto.....	41

3.3.4 La lógica que une los datos a las proposiciones y el criterio para interpretar los resultados.....	43
3.4 Instrumentos para la recolección de la información.....	43
3.4.1 Observación participante	44
3.4.2 Documentos, registros, materiales y artefactos	45
3.4.3 Entrevista	45
3.4.4 Actividades de intervención.....	46
3.5 Análisis de la información	54
3.6 Validez y limitaciones del estudio	56
Capítulo 4.....	57
4. Análisis y discusión de resultados.....	57
Capítulo 5.....	70
5. Conclusiones.....	70
Bibliografía	73
Anexos	75
Anexo 1: Guía de intervención 1	75
Anexo 2: Guía de intervención 2	78
Anexo 3: Guía de intervención 3	82
Anexo 4: Guía de intervención 4	84

Contenido: Lista de tablas

Tabla 1: Obstáculos epistemológicos (Ruiz, 1998) 141-143	18
Tabla 2: Acciones mentales del marco teórico para la covariación. Tomado de: Carlson et al (2003, p. 128)	23
Tabla 3: Marco conceptual para los niveles de covariación. (ibíd., p 129)	25
Tabla 4: Categorías de la investigación. Elaboración propia.....	55
Tabla 5: Análisis de intervención 1, preguntas 1 - 7.....	61

Contenido: Lista de Ilustraciones

Ilustración 1: Estructura conceptual de la función lineal. Elaboración propia	34
Ilustración 2: Enfoque cualitativo, adaptado de Hernández et al (2010, p. 3)	37
Ilustración 3: Intervención 1	47
Ilustración 4: Intervención 2, estación 1.	48
Ilustración 5: Intervención 2, estación 2	49
Ilustración 6: Intervención 2, estación 3	49
Ilustración 7: Intervención 2, estación 4	50
Ilustración 8: Intervención 2, estación 5	51
Ilustración 9: Intervención 2, estación 6	52
Ilustración 10: Intervención 3	53
Ilustración 11: intervención 4.....	54
Ilustración 12: Documento estudiante 1	63
Ilustración 13: Documento estudiante 2	64
Ilustración 14: Documento estudiante 3	65
Ilustración 15: Documento estudiante 4	66

RESUMEN EJECUTIVO

Autor

Jhon Jairo García Mesa

jg@colegioalemanmedellin.edu.co

En el trabajo de investigación se analizó los resultados de un estudio de caso en educación matemática, el cual consistió en una intervención que tuvo por objeto desarrollar el razonamiento covariacional en la conceptualización de la función lineal, a través de un software interactivo. Los referentes teóricos que sustentaron el trabajo fueron: el razonamiento covariacional y el proceso de la modelación en educación matemática, como estrategia didáctica en la contextualización de los fenómenos de estudio. En su desarrollo se evidenció cómo el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que involucra la variación y el cambio de magnitudes, razonando sobre éstas cantidades covariantes a través de eventos dinámicos. La metodología empleada consistió en cuatro secuencias didácticas y apoyándonos en la investigación cualitativa, se pudo establecer los niveles de razonamiento covariacional desde Carlson et al. (2003).

Palabras clave: Función lineal, Covariación, Razonamiento covariacional, TIC, educación matemática y niveles de razonamiento.

Introducción

Esta investigación está en el marco del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín, en la cual se aborda el proceso de razonamiento covariacional en la conceptualización de la función lineal, por medio de la mediación de un software interactivo. Este trabajo de investigación se estructuró en cinco capítulos, que a continuación se describen.

El capítulo uno comienza con la formulación del problema a partir de la experiencia del investigador como docente. Se establecen los antecedentes que de alguna manera dan cuenta de la pertinencia y relevancia sobre la temática investigada y que aún siguen siendo motivo de preocupación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por parte de los docentes que laboran en la disciplina de matemáticas. Se establece en este capítulo también, el objetivo general y los específicos que dan respuesta a la pregunta de investigación

El capítulo dos, es dedicado a una presentación de las teorías que conforman el marco teórico, es decir, las acciones mentales y los niveles de razonamientos covariacional desde los aportes de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003), la importancia de una instrumentalización en el ámbito educativo y la necesidad de contextualizar las situaciones propias de la matemáticas y otras disciplinas a través de la modelación matemática.

El desarrollo metodológico estuvo fundamentado por los trabajos de Yin (2009) y Hernández, Fernández, y Baptista (2010), descritos en el capítulo 3, en el que describo como el estudio de casos desde un enfoque cualitativo es el abordaje apropiado para responder a la pregunta de investigación.

En el capítulo cuatro presento el análisis de los resultados con base a los planteamientos del marco teórico y en general todo el proceso de interacción entre los estudiantes, el software y el docente-investigador.

Finalmente, en el capítulo cinco presento las conclusiones de este trabajo, mostrando las características más importantes suscitadas y sus implicaciones en referencia al marco teórico presentado.

1. El problema de investigación

Este apartado del trabajo, da cuenta de la formulación del problema de investigación, desde la experiencia del docente-investigador y la relevancia del mismo dentro del campo de investigación de la educación matemática, seguidamente se presentan el objetivo general y los objetivos específicos que responden a la forma en que se aborda el problema mencionado, buscando la solución del mismo. Lo anterior cuenta con el respaldo de una revisión de los antecedentes, que obedecen al objeto de estudio.

1.1 Planteamiento del problema

Desde la experiencia laboral es posible visualizar que hay temáticas que año tras año, sin importar las diferencias metodológicas en su enseñanza, presentan una dificultad para los estudiantes, es el caso de la función lineal, este concepto ha sido concebido de una forma mecánica y estática, en donde el docente genera un conjunto de valores, asociados a la variable independiente x , para que los estudiantes encuentren los valores de la variable dependiente y , llevando estos datos a una representación gráfica, lo cual no es dinámica y esta descontextualizada de situaciones de la cotidianidad del estudiante, al respecto, Camargo y Guzmán (2005) señalan que:

No se proponen problemas respecto a situaciones cambiantes pues el contexto es netamente sintáctico, referido a la expresión algebraica del grado de inclinación de una recta. Por esto consideramos que el contexto de su tratamiento privilegia el perfil algebraico – operativo. (p.18)

Teniendo en cuenta la importancia del concepto de función hacia una proyección universitaria, en particular de la función lineal, el presente trabajo pretende aportar elementos alternativos para el abordaje didáctico del tema referenciado

Para el desarrollo de este concepto, es importante desarrollar el pensamiento variacional en los jóvenes de educación básica, pues éste les permitirá pensar de una manera más dinámica, es decir, analizar la relación entre las variables involucradas, y así mismo permita relacionarlas y articularlas en la forma en que intervienen, como también en la covariación de sus magnitudes. Este pensamiento da la posibilidad de distinguir lo que cambia de lo que permanece constante y las posibles regularidades que se pueden generar (Vasco, 2006).

Dentro de la estructura conceptual de la función lineal, hay tres aspectos fundamentales que el presente trabajo, pretende resaltar, el primero de ellos es el razonamiento covariacional, entendiéndolo como cada una de “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003), el segundo aspectos es la utilización de diferentes software, en este caso “geogebra”¹ e “easy java simulations”² como facilitadores del concepto de función lineal, pues ambos permiten manipular los registros de representación gráfica, tabular, algebraico, de manera instantánea para así, verificar las diferentes relaciones que se dan en la expresiones lineales y analizar componentes de covariación entre sus magnitudes y finalmente un tercer componente, la modelación en educación

¹ Es un software matemático interactivo libre para la educación. En: <http://www.geogebra.org/>

² Es una herramienta de autor creada en Java que ayuda a no programadores a crear simulaciones interactivas en Java, habitualmente con fines de enseñanza o aprendizaje. <http://fem.um.es/Ejs/>

matemáticas, que permite integrar los dos anteriores en la contextualización de fenómenos de estudio.

Teniendo en cuenta el espacio curricular para el desarrollo del pensamiento variacional es el cálculo, del cual los conceptos de derivada e integral son las bases para construir modelos matemáticos variacionales, es en el estudio de nociones preliminares como la pendiente, la razón de cambio y la función lineal, en donde se generan las bases para acceder comprensivamente a estos conceptos.

Con base en los planteamientos señalados y a la importancia del concepto de función lineal en las matemáticas escolares, surge la necesidad de desarrollar el razonamiento covariacional desde la función lineal a través de un software interactivo.

En consecuencia el interés de esta investigación se enfocó en brindar una respuesta a la siguiente pregunta:

1.2 Pregunta de investigación

¿Cuáles son los niveles de razonamiento covariacional que se desarrollan en la conceptualización de la función lineal, a través de un software interactivo?

Para dar respuesta a ésta pregunta se planteó un objetivo general y dos específicos, que se enuncian a continuación:

1.3 Objetivo general

Estudiar el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de secundaria, desde el aprendizaje del concepto de función lineal, a través de la mediación de un software dinámico.

1.4 Objetivos específicos

- Determinar los niveles de razonamiento que se presentan en estudio de la función lineal desde una perspectiva variacional.
- Reconocer la función lineal como un modelo matemático que involucra la covariación y el cambio de magnitudes, a partir situaciones propias del contexto de los estudiantes

1.5 Antecedentes

En el campo de la educación matemática, el concepto de función ha ganado una gran espacio en los procesos de investigación, dado que, es visto contemporáneamente como uno de los conceptos matemáticos de mayor importancia por sus diversos aportes para modelar situaciones propias de la matemática, o en su aplicación a otras áreas como la física, la economía, la biología, entre otras, lo que de una u otra forma sustenta la importancia del análisis de este concepto, sea por sus concepción epistemológica, su relación con otros conceptos, sus diversas formas de representación, entre otros.

Al respecto, el MEN (2006) señala que:

“Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos

para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas” (p.66).

1.5.1 Estudios asociados a la función lineal

A continuación se mostrará una revisión de la literatura correspondiente al campo de la educación matemática asociada a la función lineal, particularizando en las investigaciones que den cuenta de éste concepto desde la covariación de sus magnitudes.

En relación a esto Ruiz (1998), realiza una clasificación de las principales investigaciones en relación a la noción de función:

1. Investigaciones de epistemología genética sobre el desarrollo de estadios: Piaget, Grize y Szeminska (1968), Vollrat (1986).
2. Investigaciones basadas en análisis históricos y epistemológicos: Sierpinska (1989, 1992), René de Cotret (1985, 1988).
3. Investigaciones basadas en un modelo teórico previo construido por sus autores:
 - Concepto de imagen – Concepto de definición: Vinner y Tall (1981) y Vinner y Dreyfus (1989);
 - Concepción operacional –Concepción estructural: Sfard (1989, 1991, 1992), Dubinsky, Hawks y Nichols (1989), Dubinsky, Breidenbach, Nichols y Hawks (1992), Dubinsky y Harel (1992);

- Prototipos mentales: Tall y Bakar (1992).

4. Investigaciones sobre el aprendizaje de las diferentes componentes de una función:
 - A. Aprendizaje de los conceptos previos: Maryanskii (1979).
 - B. Determinación de estadios de aprendizaje de las diferentes componentes y representaciones: Thomas (1975), Markovits, Eylon y Brukheimer (1986).
 - C. Aprendizaje de los diferentes componentes y representaciones: Dreyfus y Eisemberg (1982), Guzmán (1989, Eisemberg (1992).
 - D. Interpretación de gráficas: Bell y Janvier (1981) y Janvier (1981,1987).

(Ruiz, 1998, p.58-59)

Se puede apreciar que esta clasificación, en ningún momento es mutuamente excluyente, dado que algunas investigaciones, basadas en análisis históricos y epistemológicos, también identifican los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo se aprecia que la investigadora quiso referenciar las características más relevantes de cada estudio que realizó.

Conjuntamente, en González (2002) se referencia un análisis histórico-epistemológico realizado por Stard (1991), sobre las diversas definiciones y representaciones, donde señala que la noción de función puede concebirse de dos formas: estructuralmente como un objeto, es decir, como si fuera un objeto real y la otra forma estática, en una temporalidad u operacionalmente como un proceso, que implica manejarlo de una manera potencial, más que como una entidad real, que adquiere existencia como elemento de una sucesión de acciones.

De manera adicional hace mención a otros trabajos que tratan de la enseñanza de las funciones y se centran en los diferentes modos de representación de las funciones:

“Verstappen (1982), distinguió tres categorías para registrar las relaciones entre funciones usando el lenguaje matemático: a) geométrica: esquemas, diagramas, histogramas, gráficos, dibujos; b) aritmética: números, tablas, pares ordenados; y c) algebraica: símbolos literales, fórmulas. Swan (1982) estableció que las representaciones más útiles eran las tablas de datos, los gráficos cartesianos y la expresiones simbólicas y por su parte Janvier (1987) se dedicó a indagar las habilidades que necesitaban los alumnos para traducir entre varias representaciones el concepto” (González, 2002).

Con el avance de la tecnología, en los colegio se empezaron a disponer las calculadoras y los computadores, los cuales posibilitan que los estudiantes puedan explorar las representaciones de las funciones con mayor facilidad (Kaput, 1992), el tener la tecnología en el aula, permite al profesor revitalizar los métodos en los que se enseñan los conceptos matemáticos y producir más lecciones significativas que ayuden al estudiante a crear significado y aprender para la comprensión.

Algunos estudios relacionados con el conceptos de función lineal, entre ellos, Balbín y Villa (2006) muestran como el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que involucra variación a través de diferentes registros de representación (gráfico, tabular, simbólico y lenguaje natural).

El desarrollo de éste trabajo, se caracteriza por un esquema experimental sustentado en un análisis previo, identificando características didácticas y conceptuales de la función lineal a través de un componente metodológico que gira entorno a la ingeniería didáctica.

Por su parte Coronado y Montealegre (2007), realizaron un trabajo de investigación enfocado al análisis de textos de grado 8 (lo más utilizados), estableciendo unas

categorías de análisis, desde la dimensión conceptual para el estudio de un determinado objeto matemático.

Casallas y Buitrago (2008) plantean su investigación en torno a las prácticas evaluativas en la Educación Básica Secundaria, relativos al concepto de función lineal dentro del campo conceptual multiplicativo (Vergnaud, 1990), centrado en la evaluación como fenómeno didáctico, analizando desde las relaciones que se establecen entre el maestro, el saber y el alumno.

Conjuntamente García (2012) trabaja las funciones lineales desde las representaciones semióticas, que en términos de Duval (1998), permite comprender cómo se da la conceptualización de los objetos matemáticos, señalando los registros de representación antes mencionados.

Posteriormente Buitrago, (2012) señala la importancia que ha tenido la tecnología de fomentar la motivación para la enseñanza de los conceptos matemáticos, por lo que generó una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de función lineal, haciendo uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), utilizando herramientas como “Moodle, Flash, Geogebra, Thatquiz, Youtube”.

1.5.2 Dificultades en el estudio de la función lineal.

Los modelos lineales son importantes en matemáticas porque permiten resolver aquellos problemas de la ciencia que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal. Las funciones reales de variable real, de la forma $f(x) = mx + b$, son quizá el modelo lineal más sencillo y son el primer acercamiento de los estudiantes con el concepto de función.

En virtud de lo anterior, es que diversos investigadores, se han dedicado a explicar las dificultades en el aprendizaje de este concepto. La mayoría de investigaciones antes señaladas hacen una referencia importante a los registros de representaciones semióticas (Duval, 1998), categorizando el cambio de representaciones con una dificultad.

La teoría de Duval (1998) plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación. Duval (1998) lo establece en los siguientes términos:

“Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis: 1) La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado... 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro... 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.” (Duval, 1998, p. 177-178).

Por su parte, (Ruiz, 1998), hace una clasificación de los diferentes obstáculos epistemológicos por los que ha trasegado en el concepto de función:

Obstáculos epistemológicos		Descripción
Obstáculos a nivel de creencias y convicciones.	OB1: Obstáculos de la concepción estática.	Teniendo en cuenta la trascendencia de la tradición euclidiana, se observaban los componentes matemáticos de manera estática, reducidos a expresiones numéricas.
	OB2: Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números.	Para los griegos las magnitudes y números eran objetos distintos (los números eran discretos y las magnitudes continuas).
Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento	OB3: Obstáculo de la razón o proporción.	El aspecto función de la proporción fue invisibilizado por su carácter escalar.
	OB4: Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones.	Se comparaban magnitudes de estructura iguales, lo que impidió encontrar dependencias entre variables.
	OB5: Obstáculo de la concepción geométrica.	Se estructuró el álgebra desde la geometría, definiendo las operaciones del cálculo a partir de las propiedades de ésta.
Obstáculos a nivel de conocimiento técnico	OB6: Obstáculo de la concepción algebraica.	Las expresiones analíticas y toda la simbología del algebra generó dificultades de correspondencia.
	OB7: Obstáculo de la concepción mecánica de curva.	Las curvas no fueron consideradas como gráficos de las relaciones funcionales.

Tabla 1: Obstáculos epistemológicos (Ruiz, 1998) 141-143

Otro aspecto a señalar es que el componente metodológico que se utiliza en la enseñanza de este concepto, está limitado a encontrar valores para las variables determinadas, pero no se hace un análisis de la variación de las magnitudes involucradas, al respecto Balbín y Villa (2006) señalan que, el trabajo en el aula se reduce

a aplicar técnicas algorítmicas para solucionar diversas situaciones y se deja de lado la proporción y la variación como ruta para comprender el concepto de función.

De manera adicional, en el ámbito escolar permanecen dificultades propias del concepto de función, que se ven reflejadas en ciclos académicos posteriores; es posible que las estrategias de enseñanza actuales, no son suficientes para que los estudiantes comprendan el concepto, pero sucede que en los procesos que metodológicamente se usan para enseñarlo, aún prima la simple tabulación de los datos, sin trascender a otras representaciones y mucho menos aplicarlo en la modelación de fenómenos que permitan al estudiante, de una forma más adecuada detallar la variación y el cambio de magnitudes de dichos fenómenos.

1.5.3 La función lineal desde el componente variacional.

Desde hace algunos años, el pensamiento variacional se ha convertido en un componente de gran interés de los investigadores en educación matemática. En lo que respecta a Colombia, en el Ministerio de Educación Nacional MEN, viene presentando ideas para el trabajo de éste pensamiento, pues “cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas” (MEN, 2006, p.66).

Con base a lo anterior, se puede visualizar la importancia de construir desde la educación primaria éste tipo de pensamiento, ya que sería un primer acercamiento para cuantificar la variación de cantidades y magnitudes, y así, en la educación media se pueda distinguir las funciones lineales, conectándolas a un estudio de proporcionalidad directa y más

adelante, en la educación media se genere una asociación análoga con la variación que se presenta en el concepto de derivada.

Teniendo en cuenta el objeto de estudio de la presente investigación, la función lineal desde el razonamiento covariacional, posibilitará el estudio de regularidades y patrones. Relacionando los conceptos de variable, constante, variación, razón de cambio, entre otros, lo que acerca al estudiante a la comprensión de los conceptos matemáticos de ésta forma.

Por su parte Vasco (2006) describe el pensamiento variacional como una manera de pensar dinámica, produciendo sistemas que relacionan sus variables de tal forma que covarían en la obtención de un modelo, por lo que señala como principal propósito del pensamiento variacional la modelación matemática.

Desde esta perspectiva el pensamiento variacional apunta a la consecución mental de relaciones y patrones que presentan las variables que covarían entre sí, por lo cual, es importante que el estudiante identifique en diferentes contextos lo que varía, lo que se mantiene constante y las regularidades que se presentan en esos procesos y así sea posible indicar la forma en que se relacionan las variables y las formas en que covarían las mismas.

2. Marco teórico

Revisando los objetivos propuestos en la presente investigación, se considera pertinente distribuir el marco teórico en tres ejes principales que esbozen la teoría que sustenta este proyecto, el primero hace referencia al razonamiento covariacional, destacando la importancia de correlacionar las magnitudes involucradas en un estudio, donde es de absoluta relevancia analizar las variaciones de una de ella con respecto a la otra y viceversa, con el propósito de comprender de una manera dinámica el caso de estudio. El segundo eje se refiere a las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y la pertinencia e importancia de la utilización de estas en la educación, en particular de la Educación Matemática y por último, el tercer eje muestra el papel de la modelación en educación matemática y la forma como ésta favorece la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes.

2.1 El razonamiento covariacional.

Conforme se ha venido mencionando en el capítulo 1, esta investigación se centra en el estudiante y se interesó en desarrollar el razonamiento covariacional en combinación con los otros dos ejes mencionados anteriormente, se apoyó para esto en el marco teórico de Carlson et al. (2003). Estos autores inician su estudio reflexionando sobre la importancia de analizar patrones de cambio en varios contextos, para que los estudiantes comprendan las diferentes situaciones en las que interviene el concepto de variación.

Es así, como desde Carlson et al. (2003), se define el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían

mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra”. (p.124)

Por su parte Saldanha y Thompson (1998), citado por Carlson, et al. (2003), describen la comprensión de la covariación como “mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)” (p.123). Esta actividad mental implica la coordinación de las dos cantidades, lo que a su vez hace necesario un seguimiento al valor de cada cantidad y de esta forma, darse cuenta de que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante.

Con la anterior descripción, se puede visualizar como la noción de imagen cobra gran relevancia al momento de generar una idea de covariación, desde una estructura dinámica a partir de las operaciones mentales que ejecuta un sujeto.

Respecto a lo anterior y de acuerdo con Vinner y Dreyfus (1989) citado en Carlson, et al. (2003), el concepto de imagen tiene que ver con todas las “representaciones visuales, experiencias, propiedades, e impresiones que un individuo en un contexto dado, asocia con el nombre de un concepto”, siendo así la representación de los procesos mentales a enfrentar en una situación específica.

2.1.1 Acciones Mentales

Son aquellas imágenes de la covariación que se proporcionan para clasificar los comportamientos que se pueden apreciar, cuando los estudiantes se ven inmersos en tareas de covariación. No obstante, un estudiante que presenta un comportamiento particular, debe respaldarlo de una acción específica, que dé cuenta de la comprensión necesaria para responder a tal comportamiento. En la tabla 2, se describen las cinco

acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados que se tuvieron en cuenta en esta investigación.

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamiento
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla 2: Acciones mentales del marco teórico para la covariación. Tomado de: Carlson et al (2003, p. 128)

2.1.2 Niveles de razonamiento covariacional

Permiten clasificar en un determinado nivel a un estudiante, de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que exhibe en el contexto de un problema o tarea, así que, para clasificar a un estudiante en un determinado nivel, este debe dar cuenta de las acciones mentales que implica el nivel respectivo y los anteriores.

El marco teórico para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo:

Niveles	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.

<p>Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea</p>	<p>En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.</p>
---	--

Tabla 3: Marco conceptual para los niveles de covariación. (ibíd., p 129)

Es importante aclarar, que en lo que se refiere a la presente investigación, se espera alcanzar el nivel de coordinación cuantitativa (N3) y en consecuencia las acciones mentales suscitadas deben responder hasta la AM3. Lo anterior sustentado, en que el tema a trabajar solo necesita del nivel mencionado para su conceptualización.

2.1.3 El razonamiento covariacional en la conceptualización de las funciones.

Teniendo en cuenta el objeto de estudio, es importante hacer una referencia a la noción de razonamiento covariacional para describir las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos.

Recientemente, la literatura nos muestra cómo se pretende incluir el tema de las funciones desde la educación secundaria, apoyando que se promueva el pensamiento conceptual acerca de funciones, lo que incluye investigar patrones de cambio entre las magnitudes involucradas, sin embargo, no es claro hasta qué punto los currículos de matemáticas han respondido a estos llamados y aun así como lo referencia Carlson, et al.(2003), los estudiantes que ingresan a la universidad traen algunas falencias sobre las funciones.

Al respecto Thompson (1994) como se citó en Carlson, et al. (2003), al estudiar el proceso de adquirir una comprensión de las relaciones funcionales dinámicas, ha sugerido que el concepto de razones es fundamental. Dado que, “una imagen madura de razón involucra lo siguiente: la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades” (p 123).

Conjuntamente, para Confrey y Smith (1995) citado en Carlson, et al. (2003), un enfoque de covariación que tenga como fin crear y conceptualizar funciones, incluye la formación de vínculos entre los valores del dominio de una función y los de su recorrido; lo reporta en la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, en nuestro caso es el de estudiantes de secundaria para funciones lineales asociadas a situaciones dinámicas.

2.2 Las TIC y la educación matemática

Durante las última década vivimos una revolución cultural que se gestó a partir de las TIC, dada la difusión mundial que han tenido estas tecnologías, esto ha implicado una circulación inmediata y eficaz de la información y el conocimiento; para ser más específicos, hay grandes progresos tanto en el desarrollo de la matemática como en la tecnología, algunos de los cuales, hacen referencia a contribuciones de la tecnología en la investigación y en aplicaciones que se van generado en los contenidos propios de las matemáticas, estos “se han desarrollado hasta tal punto que ya no es posible hablar de nuevas tecnologías para la enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas” (Balacheff, 2000).

Estos cambios afectan prácticas del ámbito educativo, acerca de qué enseñar, cómo enseñar, para qué enseñar y todo lo referente al aprendizaje de los estudiantes, pues es posible que resulten cambios en las estructuras curriculares, en las herramientas de aprendizaje y sobretodo en los métodos de enseñanza, es así como estas tecnologías “amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar” (MEN , 1998), por lo cual, es necesario replantear desde la razón de ser de la escuela y demás instituciones educativas, hasta la formación básica que precisan las personas, la forma de enseñar y aprender, las infraestructuras y los medios que utilizamos para ello.

Al respecto, Rojano (2014) y particularizando en el caso de las matemáticas, expone que desde los años setenta se empezaron a utilizar nuevas tecnologías desde el componente educativo, iniciando con las calculadoras científicas y el material audiovisual, seguidamente herramientas computacionales, que con el paso del tiempo han sido potenciadas y orientadas como estrategia de enseñanza en la articulación de la tecnología con la educación matemática.

La implementación de las TIC aportan un nuevo desafío al sistema educativo, consistente en cambiar de un modelo de formación donde la fuente del conocimiento es solo a través del profesor o en algunos casos al texto guía, a modelos en donde las fuentes de información y comunicación se masifican, diversifican y multiplican haciéndose este, el conocimiento, mucho más asequible y flexible.

Esto es un desafío a los modelos tradicionales de comunicación que se dan en nuestra cultura escolar, se puede intuir entonces que en las clases en donde las TIC se usan como herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se crean nuevas formas de relacionarse entre los alumnos, nuevas formas de relacionarse con los docentes y

sobre todo nuevas formas de relacionar con el conocimiento, volviéndose el acceso al conocimiento mucho más democrático y menos dictatorial.

“Las estimaciones muestran que alrededor del 85% del currículo tradicional de matemáticas consiste en la realización de cálculos con papel y lápiz. Expertos afirman que estos cálculos incluyen procesos analíticos y algebraicos que requieren la aplicación, casi exclusiva, de habilidades cognitivas que no involucran procesos superiores de abstracción, generalización, diseño de estrategias de resolución de problema, etc.” (MEN , 1998)

Así, con el apoyo de la tecnología, el estudiante podrá realizar cálculos de rutina, graficaciones y estadísticas de manera inmediata, para centrarse en las habilidades de pensamiento matemático como, la interpretación de resultados, la generalización de patrones, la resolución de problemas, entre otros.

De esta forma, queda expuesta la importancia de las TIC, puesto que, además de cambiar el modelo de formación, diversificar las fuentes de información y modificar las relaciones entre los actores del proceso de enseñanza y aprendizaje, la importancia de las TIC particularmente para la enseñanza de las matemáticas, radica en que estas logran representar de forma más real el entorno, potenciando la posibilidad que los estudiantes logren un aprendizaje más efectivo y comprensivo, ya que las relaciones entre los objetos matemáticos que los estudiantes pueden lograr por medio de los instrumentos computacionales, son relaciones mucho más activas y directas que las relaciones que se lograban anteriormente, propiciándose de esta manera lo que Balacheff y Kaput (1996) nombra como “Nuevo Realismo Matemático”, como se citó en, (Moreno, 2015).

2.2.1 El software educativo

Generalmente se caracteriza por ser altamente interactivo, lo que requiere de una realimentación continúa de quien lo manipula para ejecutarse, en el caso de esta investigación, enmarcada en la educación matemática, se trabajará con “Easy Java Simulations” y “Geogebra”, dado que, ambos presentan un entorno dinámico, a través de gráficos y animaciones interactivas, que facilitan la exploración de los mismo y permiten la modificación por parte de los estudiantes, para tener una experiencia directa de situaciones del mundo real, donde ellos puedan tomar decisiones y ellos realicen aprendizajes inductivos o deductivos a través de su manipulación de los programas.

2.2.1.1 Easy Java Simulations

Easy Java Simulations (EJS) es una herramienta de autor diseñada para ayudar a profesores y estudiantes a crear simulaciones interactivas en Java de manera fácil. Es un software libre, diseñado para la creación de simulaciones de fenómenos naturales con fines pedagógicos o científicos, estos se describen a través de un conjunto de variables que cambia debido a la iteración de un algoritmo dado.

En la creación de una simulación con la ayuda de EJS, el usuario no programa la simulación a nivel de la escritura de código, en lugar el usuario está trabajando en un nivel conceptual más alto, declarando la organización de las ecuaciones y otras expresiones matemáticas que operan la simulación. EJS maneja los aspectos técnicos de codificación de la simulación en el lenguaje de programación Java, liberando así al usuario para que este se concentre en el contenido de la simulación.

EJS está escrito en el lenguaje de programación Java y las simulaciones creadas están en Java o JavaScript. EJSS tiene su propio formato para el almacenamiento de las simulaciones, que se basa en XML, EJS y EJSS y lleva la extensión .xml, .ejs y

.ejss. Contiene no sólo el código para la simulación, sino también el resto de las cosas, como la introducción de HTML

2.2.1.2 Geogebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa, permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Adicionalmente GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

2.3 La modelación en la educación matemática

Los cambios que ocurren en el mundo, de una u otra forma permean el sector educativo, lo que implica una reflexión constante del docente acerca de cómo encaminar el conocimiento.

En medio de las continuas transformaciones, no basta tener conocimiento específico sobre un asunto y ejercer su mera transmisión. Es fundamental, cada día, obtener nuevos conocimientos y habilidades en la aplicación y socialización de ellos. Y, con ese pretexto, la modelación matemática viene siendo muy defendida como método de enseñanza. (Biembengut & Hein, 2004, p.106)

Desde finales de la década de los sesenta ha crecido una comunidad de educadores e investigadores en matemáticas interesados por la aplicación de las matemáticas y modelación matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se puede decir que este interés está enfocado en activar a los estudiantes con procesos matemáticos contextuales que resulten atractivos para ellos, y se hagan partícipes de la actividades a través de una matemática realista (Blum y Niss, 1991).

Es por esto, que durante los últimos años son varios los investigadores que han aportado a la conceptualización de la modelación en matemática Biembengut y Hein (2004), Blum (2007), trigueros (2009), Villa & Ruiz (2009), entre otros, de los cuales se obtienen una gran variedad de apreciaciones, pero sin importar las posturas que se adopte, apuntan a la necesidad de relacionar las matemáticas con situaciones propias de la cotidianidad.

Así que, resulta difícil encontrar una definición de modelación en matemáticas que abarque las ideas de los investigadores ya mencionados, por lo que, se orientará el presente trabajo de investigación desde lo planteado por la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM):

[...] el estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y/o la construcción de modelos y de otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una comprensión del fenómeno y/o resolver el problema.

En la modelación “la búsqueda de relaciones entre variables, que los estudiantes deben desarrollar, se constituye en una actividad fundamental y se expresan a través de modelos matemáticos” (Trigueros, 2009, p.79), brindando la oportunidad de trabajar las matemáticas, desde el estudio de una situación real, articulada a los intereses y

necesidades de los estudiantes, de tal forma que les permita comprender mejor los contextos donde se desenvuelven y claro está, con la intención de generar el conocimiento matemático.

Su implementación requiere de un cambio en la forma como los docentes desarrollan sus clases, trascendiendo la enseñanza de una matemática descrita en mallas curriculares y optando por un proceso en el cual, el estudiante tenga otro rol que le permita ser partícipe de la construcción de su propio conocimiento desde la experimentación, el análisis, la toma de decisiones y la estructuración de modelos matemáticos, los que se estructuran como “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan describir, explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (Villa, 2007, p.67).

Frente a esto, los lineamientos curriculares de matemáticas propuestos por el MEN reafirman la importancia de la modelación en matemáticas, destacándola como “un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa” (MEN , 1998). De esta forma, espera que todos los estudiantes necesitan experimentar procesos de matematización que lleven a la implementación, creación e interpretación de los modelos en todos los niveles educativos.

2.3.1 La modelación en educación matemática a través de la tecnología

En lo que refiere a esta investigación, se tuvo la necesidad de implementar la modelación matemática como estrategia didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por medio de una mediación de la tecnología, pues esta, ofrece un apoyo en las formas de representación, la cuantificación de datos, el establecimiento de modelos y la variación de los mismos, entre otros.

A pesar de su importancia y relevancia para el mundo real, la modelación matemática en general no es uno de los principales enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los colegios.

Una razón podría ser la falta de recursos disponibles (planes de lecciones, tareas de modelado, etc.) para el profesor. Otra es la falta de experiencia en el modelado matemático del profesor, lo que lleva a una falta de confianza y una resistencia general a embarcarse en un modelo matemático en el aula.

Al respecto, Williams y Goos (2013), manifiestan que la tecnología puede ser el puente para la brecha cognitiva que impide a un estudiante de llevar a cabo una tarea de modelado. Sin embargo, también hay que señalar que la tecnología nunca debe sustituir las matemáticas, y mucho menos el maestro; debe ser visto como un tiempo y, a veces temporalmente, como un medio para superar una dificultad.

Los enfoques para la enseñanza de los modelos matemáticos han sido influenciados por el desarrollo y la introducción de tecnologías. Muchos investigadores y profesores han reportado el uso exitoso de la tecnología en la introducción de las ideas matemáticas a través de la exploración y la investigación.

En relación a lo anterior, Borba y Villarreal (2005) citado en Molina (2013), hablan de un movimiento en la comunidad matemática que valora el proceso de experimentación en la producción de matemáticas, y hacen énfasis en el papel de la tecnología representada entre otros, en ordenadores, calculadoras gráficas y diferentes interfaces que vinculados a ellos, pueden tomarse en conjunto como una unidad (humanos-con-los-medios) reorganizante del y de la forma misma como se produce conocimiento.

No es sorprendente que el uso de la tecnología sigue prevaleciendo en la clase de matemáticas en absoluto, pues la tecnología puede utilizarse de muchas maneras en el proceso de modelado matemático. Las simulaciones por ordenador se pueden utilizar para desarrollar modelos matemáticos para que los estudiantes obtienen la sensación de la importancia de los parámetros de un modelo. Equipos de registro de datos proporciona una oportunidad para recopilar datos para validar los modelos. Sistemas de álgebra computacional se pueden utilizar para hacer la resolución de problemas matemáticos, como parte de la solución de un problema real que permite tiempo para desarrollar las habilidades de la formulación y revisión del modelo.

En el siguiente esquema se sintetizan los planteamientos correspondientes al marco teórico:

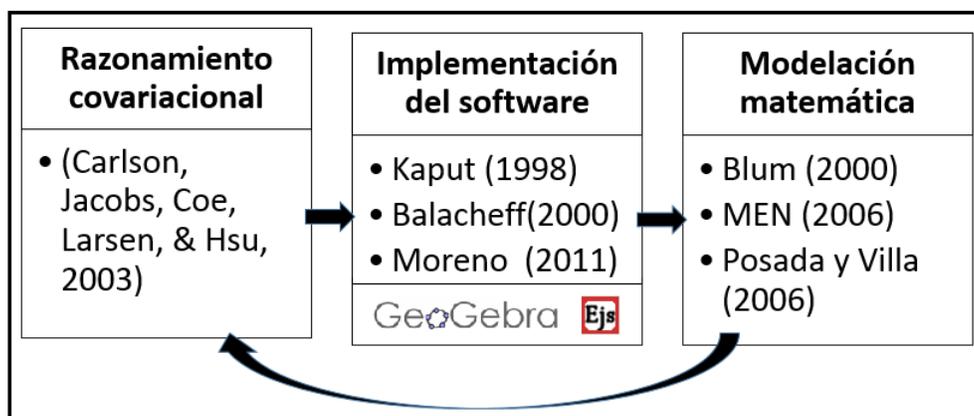


Ilustración 1: Estructura conceptual de la función lineal. Elaboración propia

3. Metodología

En este capítulo se da cuenta del componente metodológico, en el cual se argumenta la pertinencia de un enfoque cualitativo y la implementación de un estudio de caso como método de investigación, seguidamente se describe el diseño de la misma y se referencian cada uno de los instrumentos utilizados, especificando la utilidad y relevancia de los mismos dentro de la investigación.

3.1 Enfoque de la investigación

Con el auge de la globalización, la sociedad reclama con mayor severidad procesos de investigación cualificados que permitan a la humanidad seguir avanzando y generando nuevos desarrollos tecnológicos en las diferentes disciplinas que conforma la sociedad.

Toda investigación se caracteriza por ser reflexiva, sistemática y rigurosa, en la búsqueda de los conocimientos que sirvan para solucionar los problemas específicos que se abordan, por su parte, la investigación científica “se concibe como un conjunto de procesos sistemáticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno; es dinámica, cambiante y evolutiva”, Hernández et al. (2010, p.xxvii), la cual, se puede presentar de forma cualitativa, cuantitativa y mixta, teniendo todas el mismo grado de importancia.

Teniendo en cuenta la presente investigación está estuvo enmarcada en el campo de la educación matemática, se vio la necesidad de la implementar una investigación con un enfoque cualitativo, donde el docente este en constante reflexión y renovación de sus prácticas pedagógicas, de tal forma, que dé profundidad a los datos, analizando e interpretando el contexto de trabajo y las experiencias suscitadas del mismo.

Es relación a esto en Hernández et al. (2010), se referencia que,

“los *estudios cualitativos* pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos. Con frecuencia, estas actividades sirven, primero, para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes, y después, para refinarlas y responderlas. La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien “circular”. (p.7)

De igual forma, la investigación cualitativa es importante para el ámbito educativo, ya que, se trata de educar para la comprensión, interpretación de la realidad que se expresa en fenómenos, conflictos, problemas e interrogantes en los diferentes ámbitos de la vida del ser humano, favoreciendo así, una educación integral.

En la siguiente tabla, se describen más características, proceso y bondades del enfoque cualitativo en la investigación.

Enfoque Cualitativo	Características
	<ul style="list-style-type: none"> - Explora los fenomenos en profundidad. - Se conduce basicamente en ambientes naturales. - Los significados se extraen de los datos. - No se fundamenta en la estadistica.
	Proceso
	<ul style="list-style-type: none"> - Inductivo. - Recurrente. - Analiza multiples realidades subjetivas. - No tiene secuencia lineal.
	Bondades
	<ul style="list-style-type: none"> - Profundidad de significados. - Amplitud. - Riqueza interpretativa. - Contextualiza el fenomeno.

Ilustración 2: Enfoque cualitativo, adaptado de Hernández et al (2010, p. 3)

3.2 El método

En esta investigación se desarrolló el razonamiento covariacional al presentar una serie de actividades, por medio de un software interactivo, para que los estudiantes puedan ser conscientes de los fenómenos de variación, a través de un proceso de observación, interacción, interpretación y análisis.

Para abordar los procesos mencionados era necesaria la inmersión en el campo, por parte del investigador, de tal forma, que le permitiera realizar un estudio detallado de los avances del estudiantes al pensar con un sentido covariacional, por los cual, se seleccionó el estudio de casos como método de investigación.

El estudio de casos es un método de investigación trabajado por diferentes autores, Hernández Sampieri y Mendoza (2008), citado por Hernández et al. (2010), definen un estudio de casos como los “estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta; analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar alguna teoría”, considerando que los estudios de caso son útiles para refinar, confirmar y extender la teoría, y producir conocimiento y validar resultados obtenidos por otros diseños.

Conjuntamente, en Hernández et al. (2010) citando a Blatter (2008), se expone un estudio de casos como una aproximación investigativa en la cual una o unas cuantas instancias de un fenómeno son estudiadas en profundidad. Lo que permite visualizar el estudio de casos como el análisis de un caso específico, con el que se busca determinar características detalladas del fenómeno sin generalizar a partir de estudios estadísticos, donde se puede profundizar en el proceso de investigación a partir de unos primeros datos analizados.

El estudio de casos también ha sido concebidos como un asunto de muestreo o un método (Yin, 2009) que será la perspectiva bajo la cual se sustentara la presente investigación, adicionalmente Yin, sostiene que el método de casos es la estrategia pertinente cuando:

- Se responde a preguntas del tipo “Cómo” o “Por qué”.
- El investigador tiene poco control sobre los eventos.
- Cuando el foco de atención se sitúa dentro del contexto de un fenómeno contemporáneo en la vida real.

Otros elementos que referencia Yin respecto al estudio de casos, es la claridad que hace en cuanto a tener objetivos diferentes:

- Exploratorio: cuyos resultados pueden ser usados como base para formular preguntas de investigación.
- Descriptivo: intenta describir lo que sucede en un caso particular.
- Explicativo: facilita la interpretación.

Yin, define un estudio de casos como “una pregunta empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real, sobre todo cuando los límites entre el fenómeno y contexto no son claramente evidentes” (2009, p.9), es decir, cuando se tiene la intención de enmarcar el contexto respecto al fenómeno de estudio.

3.3 El diseño

El diseño del estudio de casos debe tener una estructura conceptual que de coherencia, una “secuencia lógica que conecta los datos empíricos a las respuestas iniciales de la investigación del estudio y, finalmente, a sus conclusiones” (Yin, 2009). Esto permite que haya una relevancia significativa en la recolección de datos y así pueden ser interpretados eficientemente.

Con base a lo anterior, la presente investigación tuvo en cuenta los referentes presentado por Yin (2009), respecto a los componentes del diseño que se orientó, es decir:

- Pregunta de estudio
- Propositiones
- Unidad de análisis
- La lógica que une los datos a las proposiciones
- El criterio por interpretar de los resultados.

3.3.1 Pregunta de estudio

Como viene siendo presentado, esta investigación se centró en dar respuesta a la pregunta: *¿Cuáles son los niveles de razonamiento covariacional que se desarrollan en la conceptualización de la función lineal, a través de un software interactivo?*, la cual se originó desde la experiencia como docente, pero se fue fortaleciendo con los antecedentes de la investigación.

Para afrontar la problemática mencionada la investigación se desarrolló a partir del marco teórico de (Carlson et 2003) en el abordaje del razonamiento covariacional, el que también permite la incorporación de herramientas tecnológicas y la contextualización de situaciones por medio de la modelación en matemáticas.

3.3.2 Proposiciones

En el desarrollo de la investigación se han analizado situaciones que requieren una revisión dada su trascendencia en la consecución de la misma, estos son:

- La inmediatez de las diferentes representaciones de la función lineal (tabular, algebraico, gráfico) que se dan a partir del software utilizado, le permite al estudiante interpretar y analiza con mayor detalle, las relaciones que se presentan entre las variables involucradas en un fenómeno específico.
- Desde las preguntas presentadas por el investigador, los estudiantes empiezan a ser conscientes de sus procesos de razonamiento, se vuelven críticos y reflexivos de sus ideas y respuestas.

- El trabajo con las herramientas tecnológicas requiere de instrucciones bastante detalladas y explícitas para el estudiante, dada que la interpretación que este tiene de las situaciones, en algunos casos puede ser que no esté en la misma línea de lo que busca el investigador.

3.3.3 Unidad de análisis y el contexto.

De acuerdo a lo planteado por (Yin, 2009), la unidad de análisis permite establecer el caso a ser estudiado, de esta forma, se presentará el contexto en el cual se aplicó la investigación.

Desde esta perspectiva se presentará el contexto en el cual se aplicó el trabajo de campo, las razones por las cuales se diseñaron y aplicaron diferentes intervenciones y las consideraciones que se tuvieron para seleccionar cuatro estudiantes que, se tomaron como unidad de análisis.

El colegio donde se desarrolló el trabajo de campo es el Colegio Alemán Medellín, ubicado en el barrio Ditaires del municipio de Itagüí, institución educativa de carácter privada, laica y mixta, certificado para impartir enseñanza formal en los niveles de educación: preescolar, básica en los ciclos de primaria y secundaria y media académica; en jornada diurna. Sus estudiantes hacen parte de estratos socioeconómicos 5 y 6, ubicados en su mayoría en los barrios El Poblado y Laureles, y en municipios aledaños como Envigado y Sabaneta.

Es importante resaltar que el colegio donde se desarrolló el trabajo de campo, presenta ciertas particularidades por su condición de colegio internacional (siendo parte del

Bachillerato IB), entre ellas, el colegio distribuye los grados con base al currículo alemán, desde “Prekínder” hasta “Klasse 12”, siendo equivalente al sistema colombiano cada grado en una año menos, es decir, en el caso de los estudiantes con los que se realizó el trabajo de campo, pertenecen a “Klasse 10” que en Colombia es el equivalente a un grado 9°.

De manera adicional, es válido mencionar que es un colegio con altos estándares de calidad educativa, reflejados en pruebas estandarizadas nacionales e internacionales, el colegio tiene en su plan de formación tres idiomas: Español, Inglés y Alemán, siendo este último el de mayor intensificación. Además el colegio se destaca por proyectar las habilidades musicales, artísticas y deportivas de sus estudiantes, aprovechando la riqueza de su infraestructura y recursos. Frente al último aspecto, es importante anotar, que los estudiantes cuentan con recursos informáticos de excelente calidad, en la dotación de sus salas de informática; se cuenta con una plataforma virtual donde los docentes pueden ubicar actividades en diferentes formatos de presentación para que los estudiantes avancen en los contenidos propios de cada área de manera independiente, en un espacio denominado centro de aprendizaje autónomo.

Retomando los estudiantes con los que se realizaron las intervenciones, cabe destacar que fueron seleccionados inicialmente por ser de grado 9° en el sistema colombiano y siendo los únicos 4 estudiantes de “Klasse 10” que estaban presencialmente durante el semestre que se hizo el trabajo de campo, dado que el resto de los estudiantes se encontraba de intercambio en Alemania, claro está, que la participación de los estudiantes antes mencionados obedece a la motivación de los mismos por participar. En otras palabras se está hablando de un muestreo por conveniencia.

Para el trabajo de campo se diseñó un conjunto de cuatro actividades de intervención, las cuales fueron dirigidas al grupo de estudiantes con los que se trabajó, por motivos

éticos y de no guardar relevancia para la investigación su identidad, en lo que sigue nos referiremos a ellos usando los nombres de: Estudiante 1 (E1), Estudiante 2 (E2), Estudiante 3 (E3), y Estudiante 4 (E4), siendo los dos primeros de género femenino y los dos restantes masculino. Es válido aclarar, que para la participación de los estudiantes, se presentó un formato de autorización aprobado por los padres de cada uno de estos, al igual que se contó con la autorización del colegio para el desarrollo de la investigación.

3.3.4 La lógica que une los datos a las proposiciones y el criterio para interpretar los resultados.

En este caso, (Yin, 2009) plantea una consecución en conjunto del cuarto y quinto componente, los cuales representaran lo que pasa en el análisis de los datos de la investigación del estudio de caso y pondrán los fundamentos para el análisis respectivo (será especificado después de la descripción de los instrumentos), es este caso los denominaremos instrumentos para la recolección de la información.

3.4 Instrumentos para la recolección de la información

A continuación se presentaran los instrumentos que permitieron la recolección de los datos que serán analizados más adelante, teniendo en cuenta que la investigación se realiza desde un enfoque cualitativo.

3.4.1 Observación participante

Esta técnica de recogida de información, consiste en observar a la vez que se participa en las actividades del grupo que se está investigando, Yin (2009) referencia que para la eficiencia del instrumento es necesaria una aproximación del observador y los observados, situación bastante viable en la presente investigación, ya que, tenía el rol de docente-investigador, lo que permitió tener en consideración las fortalezas y debilidades de los mismos.

Se decidió observar entonces, cómo los estudiantes ponen en práctica habilidades de razonamiento covariacional, siendo conscientes de las mismas, a partir de las situaciones de variación presentadas, la importancia de los elementos que el software utilizado pone al servicio del estudiante y en general de todas las interacciones tanto en el dialogo de los estudiantes con el docente-investigador como en los registros que realizaban.

Es importante aclarar, que el papel de observador-participante se desarrolló al interior de las sesiones de clases, las cuales fueron autorizadas por el colegio, teniendo en cuenta que el desarrollo de las actividades de intervención no entorpecerían los contenidos académicos de los estudiantes, dado que, era una temática propia del curso.

La forma de registrar la observación estuvo enmarcada en elementos narrativos a través del diario de campo y registros audiovisuales, por medio de grabaciones y fotografías.

3.4.2 Documentos, registros, materiales y artefactos

Una fuente muy significativa de datos cualitativos son los documentos, materiales y artefactos diversos. Estos pueden ayudar a entender el fenómeno de estudio, además “le sirven al investigador para conocer los antecedentes de un ambiente, las experiencias, vivencias o situaciones y su funcionamiento cotidiano” (Hernández et al., 2010, p. 433).

En el caso de esta investigación, se usaron las producciones escritas elaboradas por las estudiantes en el transcurso del trabajo de campo, específicamente cuando necesitan resolver una situación a través de diversos procedimientos y en general a medida que desarrollaban las actividades de intervención.

3.4.3 Entrevista

Es válido acotar que este instrumento surge en el mismo proceso de investigación, teniendo en cuenta, que no se veía una muy buena descripción escrita por parte de los estudiantes, pero desde la observación-participante se visualizaban ideas bastante claras, que no podían transmitir por escrito, así que, se optó por añadir este instrumento enfocándolo en los diálogos del docente-investigador con los estudiantes y en las preguntas que iban surgiendo.

Siendo esta investigación de un enfoque cualitativo, la entrevista tiende a ser más personal, flexible y abierta. En (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010, p.418), la definen “como una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)”, así a través de preguntas y respuestas, se consigue una comunicación conjunta de significados como base de la temática abordada.

Por su parte, (Yin, 2009), coincide en que la entrevista es de una naturaleza abierta, lo que implica una conducta diferente del investigador, para que las preguntas enfocadas en la investigación surjan como un dialogo natural.

3.4.4 Actividades de intervención

El trabajo de campo realizado se compuso de una serie de cuatro actividades de intervención, diseñadas por el docente-investigador a través de los software Easy Java Simulations y Geogebra, antes mencionados, procurando las interacciones necesarias que posibilitaran un análisis covariacional en el conocimiento matemático por parte de los estudiantes. En este punto, es importante aclarar, que los estudiantes ya conocían ambos programas, pues había sido trabajo durante clases previas con otros contenidos, por lo cual, se puede afirmar que ya traían ciertas destrezas en la manipulación de los mismos.

Las actividades de intervención se desarrollaron desde el aula virtual del colegio, a continuación se mostraran las secuencias didácticas de las mismas:

- **Intervención 1**

En esta sesión se presentó una construcción en Geogebra, de los elementos que conforman una función lineal a partir de su respectiva ecuación, contando con deslizadores para variar el valor de cada elemento y el respaldo de la representación gráfica y algebraica de la función, dependiendo de los valores utilizados.

La intencionalidad era, que los estudiantes analizaran lo que representa cada elemento en una ecuación de la forma $y = mx + b$.

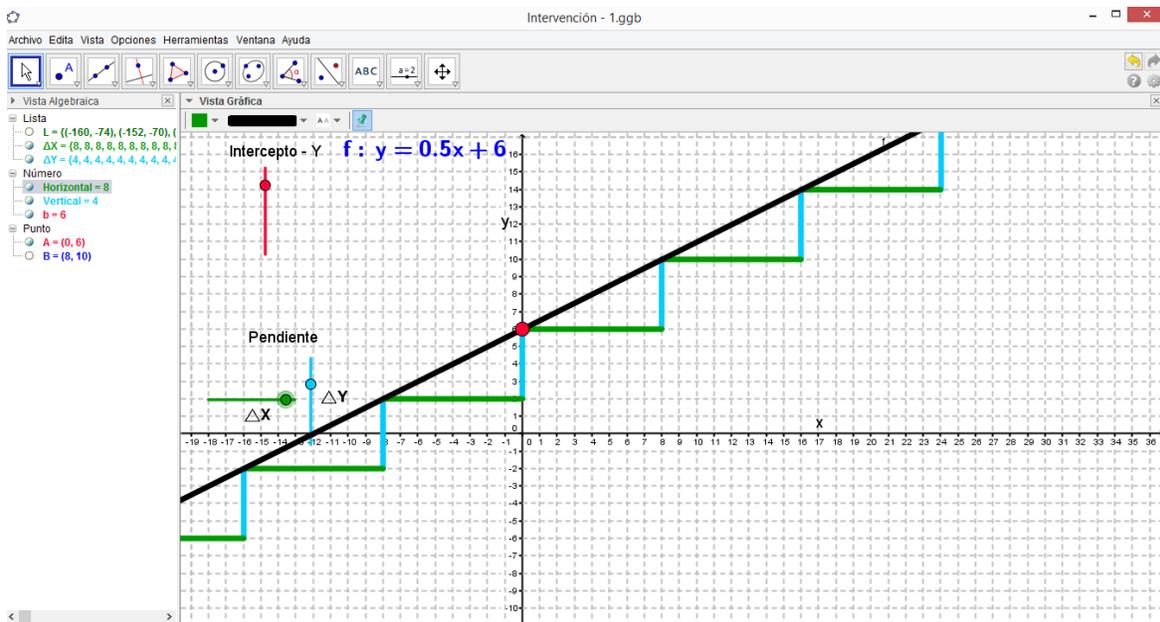


Ilustración 3: Intervención 1

- **Intervención 2**

En esta caso, se diseñaron una serie de estaciones, siete en total, que dan cuenta de los diferentes casos para hallar la ecuación de una función lineal, donde se esperaba que los estudiantes pusieran en práctica los elementos conceptuales suscitados en la intervención 1.

Se buscaba verificar el tratamiento que los estudiantes le daban a las diferentes situaciones en que se presenta la función lineal, a partir de la variación en sus elementos.

Es importante resaltar, que el método de estaciones obedece a la metodología del colegio, buscando la diferenciación en las clases, es decir, que cada estudiante trabaje con base en su ritmo de aprendizaje.

En el caso de la estación 1, esta demandaba la ubicación de los dos puntos presentados, de tal forma que coincidieran la recta dada, lo que requirió una interpretación de los datos por parte del estudiante.

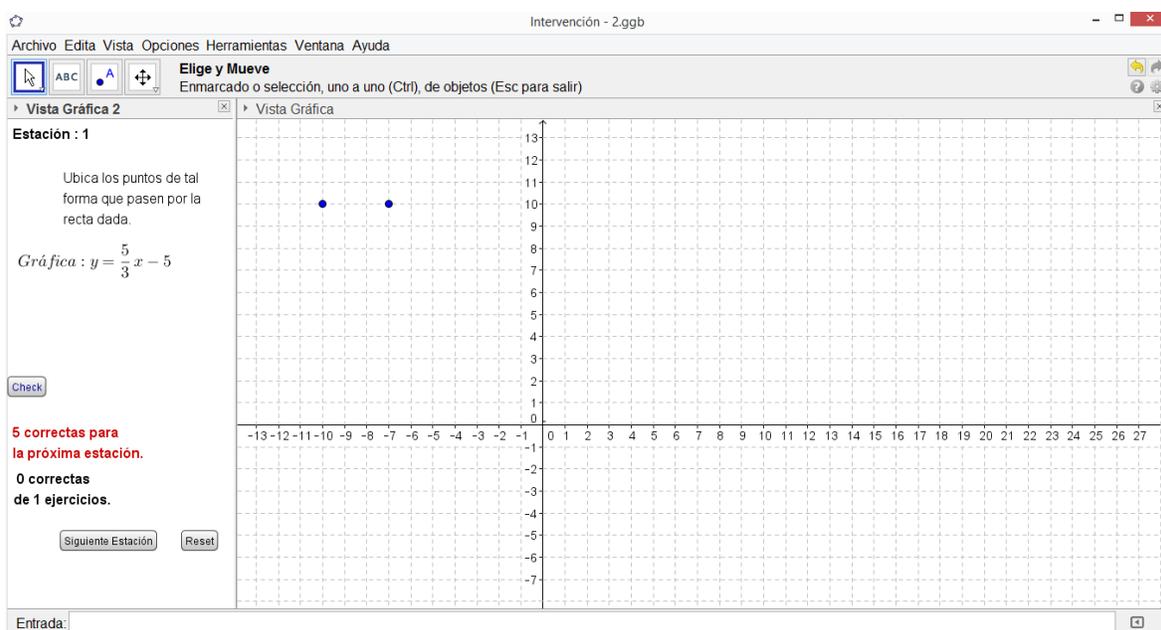


Ilustración 4: Intervención 2, estación 1.

La estación 2, tenía la misma finalidad, con la variación, que el estudiante no recibía la ecuación de la función lineal de forma estándar, sino que debía despejarla.

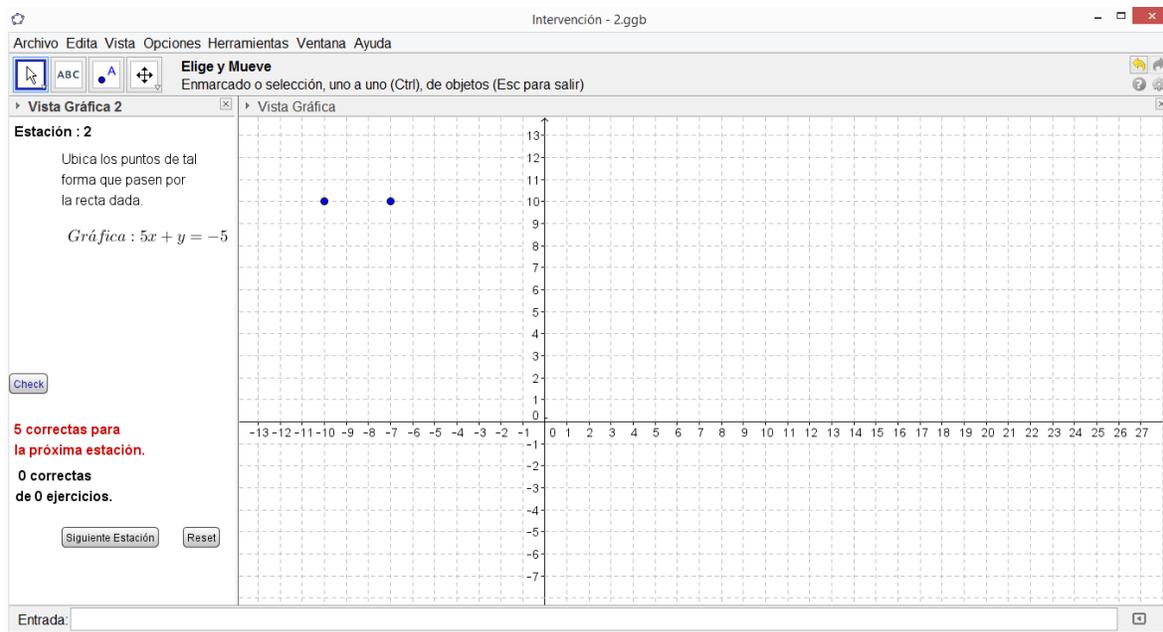


Ilustración 5: Intervención 2, estación 2

Por su parte, la estación 3 solicitaba la ecuación de la función lineal que tuviera la pendiente m y el intercepto b , en el eje Y referenciado, así el estudiante debía continuar utilizando los conceptos abordados en la intervención 1

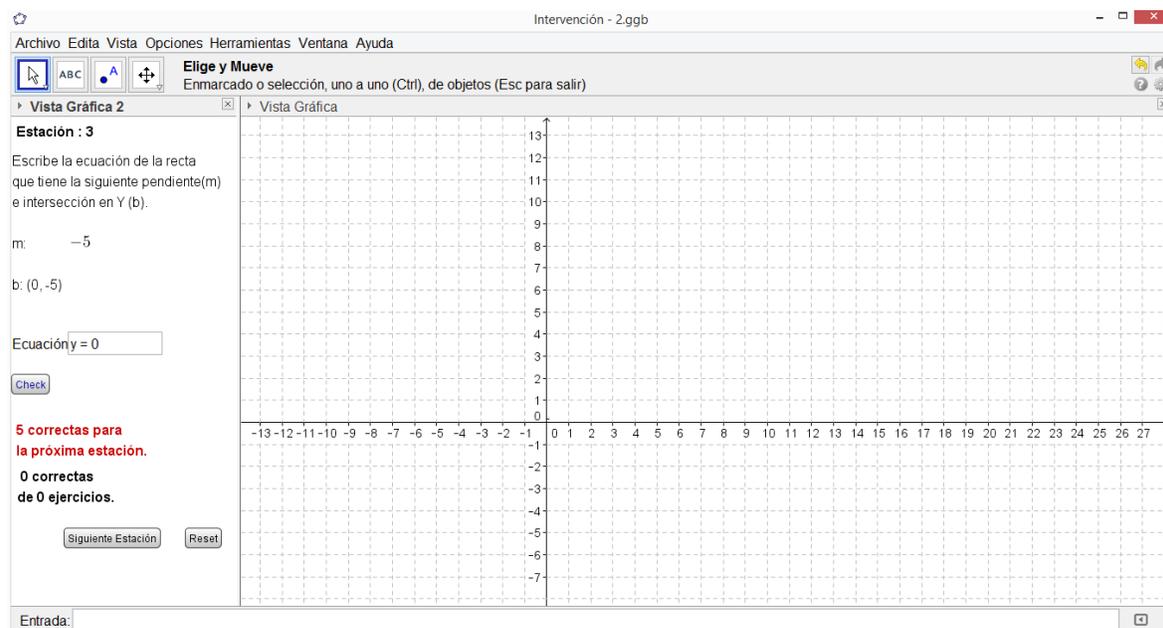


Ilustración 6: Intervención 2, estación 3

En la estación 4, se presenta la gráfica de una función lineal, para que el estudiante a partir de los elementos de la misma, asocie su respectiva ecuación.

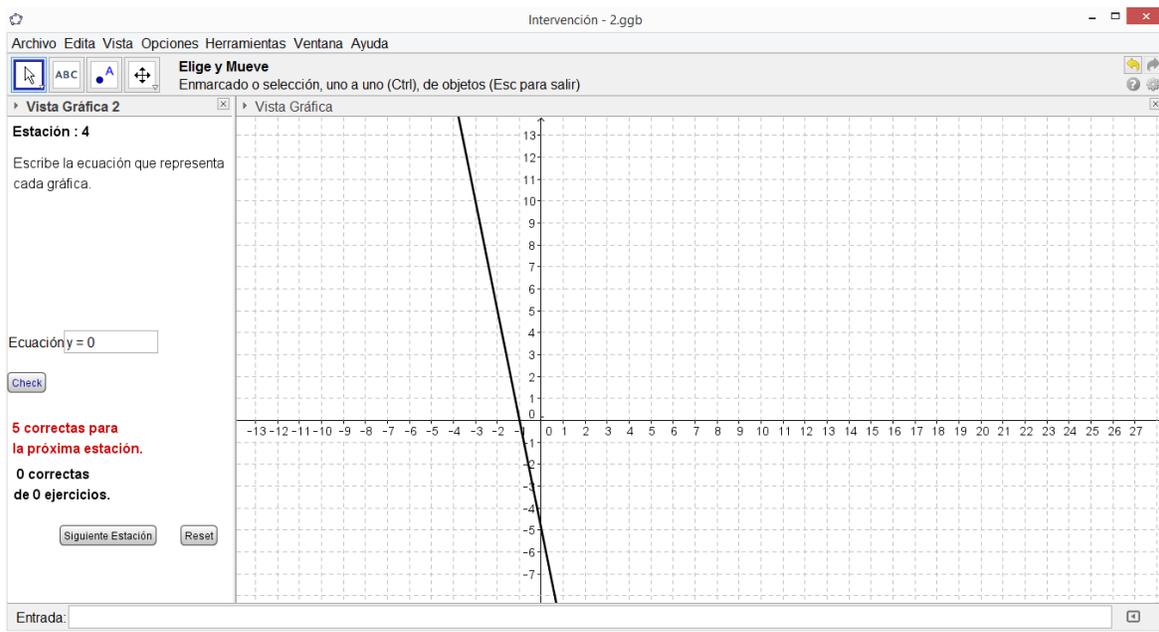


Ilustración 7: Intervención 2, estación 4

En la estación 5, el estudiante recibe la coordenada de un punto por donde pasa la gráfica de la función lineal y la pendiente m , de la misma, con estos elementos y apoyándose en operaciones algebraicas y saberes previos, debía encontrar la ecuación correspondiente a las condiciones dadas.

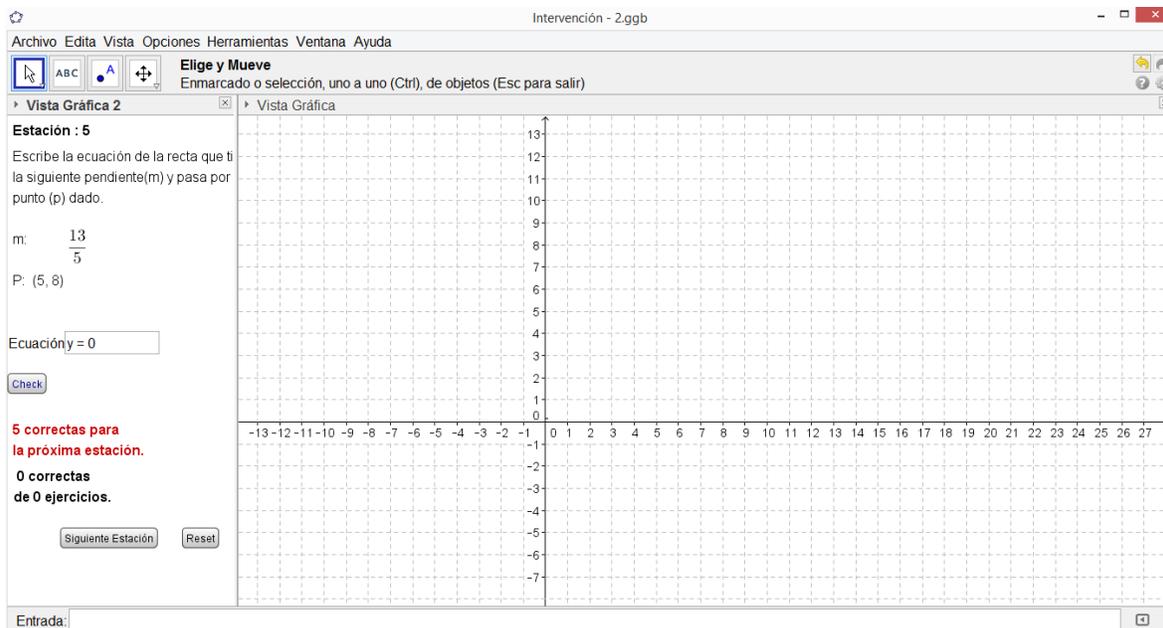


Ilustración 8: Intervención 2, estación 5

En la estación 6, el estudiante recibe las coordenadas de dos puntos, por los que pasa la gráfica de la función lineal, con estos elementos y apoyándose en operaciones algebraicas y saberes previos, debe encontrar la ecuación correspondiente a las condiciones dadas.

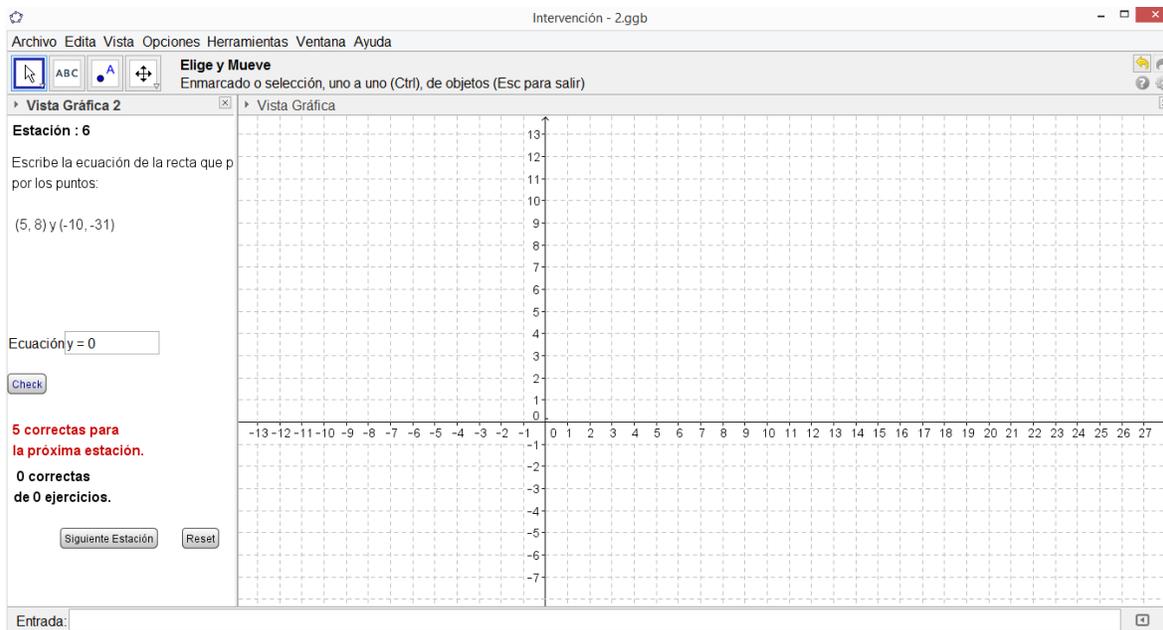


Ilustración 9: Intervención 2, estación 6

Finalmente, la estación 7, requiere de los mismos elementos presentados en la estación 6, pero requiere de operaciones más complejas en términos aritméticos.

- **Intervención 3**

Esta actividad fue diseñada en EJS, donde el estudiante encuentra la representación de una moto y un deslizador para cambiar la velocidad de la misma. Una vez ejecutada el estudiante obtiene la representación gráfica de la situación y la tabulación de los valores obtenidos de acuerdo a la selección de la velocidad realizada.

En este caso, se buscaba contextualizar una aplicación del concepto de función lineal a través de la física, específicamente lo relacionado con la cinemática en el caso de la relación posición vs tiempo. Es importante aclarar, que dentro de la guía que reciben los estudiantes, se presentó una breve explicación del fenómeno estudiado.

Inicialmente se buscaba que los estudiantes hicieran una descripción detallada del movimiento de la moto y a partir de esto plantean una descripción del movimiento. A continuación los estudiantes reciben una serie de instrucciones con la finalidad de asociar la pendiente de la recta como la velocidad de la moto, todo esto a través de las variaciones entre las magnitudes involucradas.

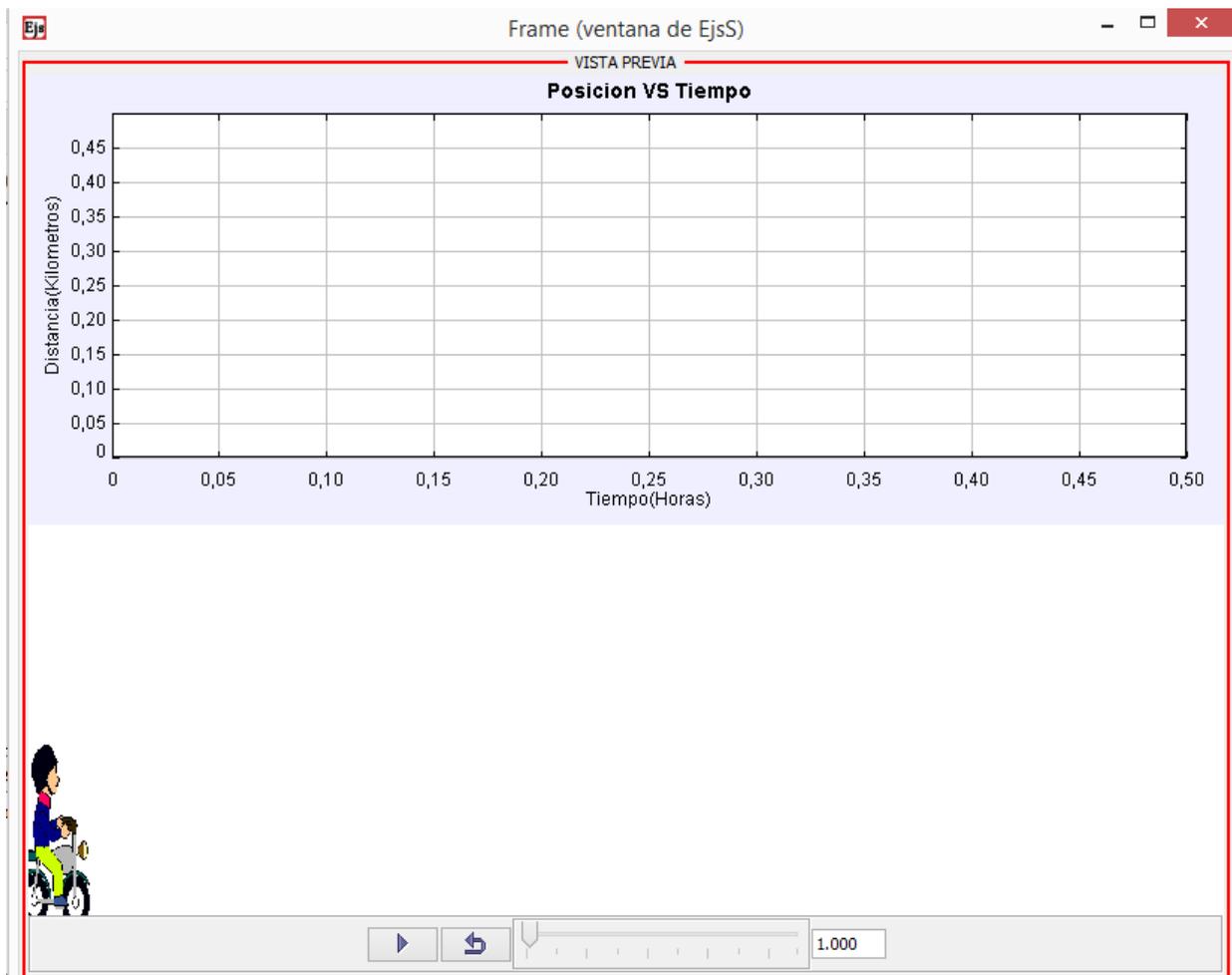


Ilustración 10: Intervención 3

- **Intervención 4**

Esta última activada, fue desarrollada en Geogebra, a partir de la representación gráfica de un modelo de oferta-demanda, respecto a un producto en específico, diseñada en la misma vía de la intervención 3, pero en este caso la aplicación hace referencia a la economía y de igual forma los estudiantes reciben una breve intervención que dé cuenta del fenómeno de estudio.

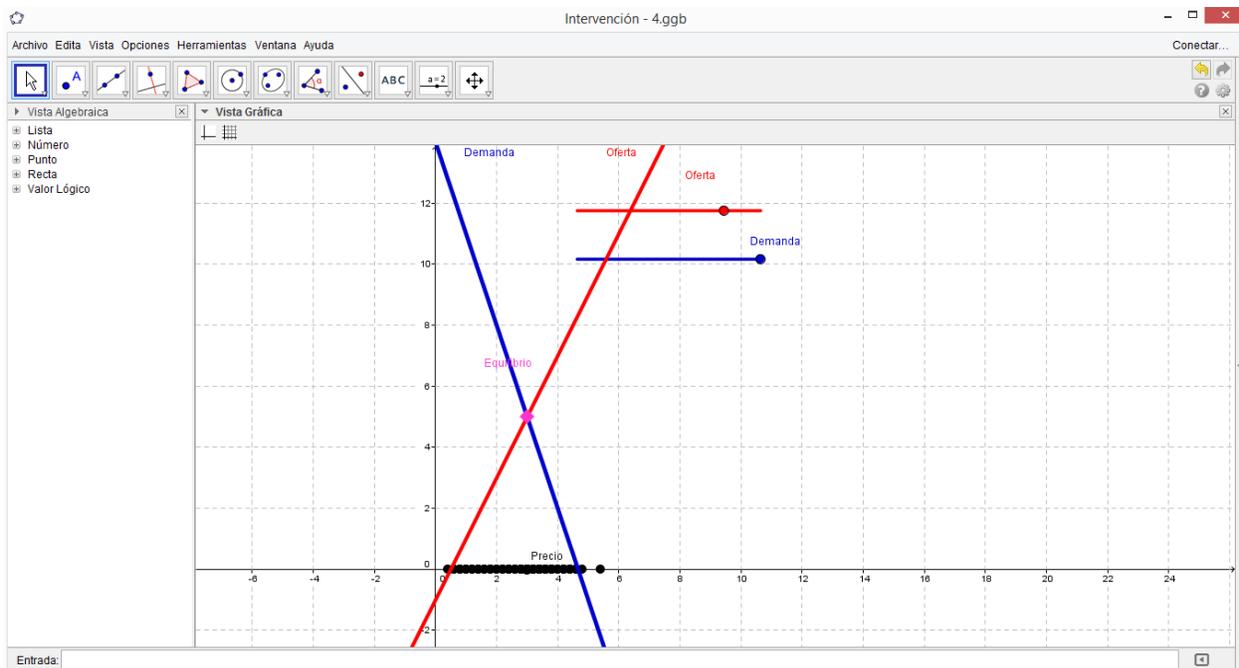


Ilustración 11: intervención 4

3.5 Análisis de la información

Se desarrolló desde las orientaciones de (Yin, 2009), es decir, en la relación entre la lógica que une los datos a las proposiciones y el criterio para interpretar los resultados. En este sentido, se hizo un proceso de contrastación entre la teoría esbozada en el marco teórico y la información recogida por medio de los instrumentos de recolección de datos. De esta forma, el análisis se generó con base a los siguientes momentos:

- Reflexión constante del investigador para hacer modificaciones en las intervenciones teniendo en cuenta datos ya recogidos.
- Elementos aportados por los asesores después de confrontar sesiones de intervención.
- Organización y sistematización de los elementos suscitado de la investigación, es decir, diarios de campo, anotaciones de los estudiantes, pantallazos de la actividades, fotografías y grabaciones.
- Análisis de los datos obtenidos de cada estudiante en particular.
- Confrontación de la categorías iniciales, desencadenadas del marco teórico: Razonamiento covariacional, implementación de los software.
- Categorías emergentes suscitadas de la información obtenida.

Con base a las premisas anteriores se obtuvo la siguiente clasificación:

Categorías	
Iniciales	Emergentes
Conceptualización de la función lineal	Interpretación de la función como un modelo matemático.
Desarrollo del razonamiento Covariacional	La razón de cambio como relación entre dos cantidades.
Implementación de los software	Aprendizaje logrado por los estudiantes a través de los software utilizados.

Tabla 4: Categorías de la investigación. Elaboración propia.

3.6 Validez y limitaciones del estudio

Teniendo en cuenta que la presente investigación estuvo centrada en un estudio de caso, desde un enfoque cualitativo, se analizó de forma específica el objeto de estudio, siendo este el desarrollo del razonamiento covariacional, considerando que los resultados no se deben generalizar a otros contextos, si tenemos en cuenta las condiciones particulares de los estudiantes que hicieron parte de la investigación.

4. Análisis y discusión de resultados

Las distintas actividades realizadas con los estudiantes de Klasse 10, requerían que estos, descargaran desde el aula virtual del colegio las situaciones diseñadas con el software y dieran respuesta a la guía de trabajo (Ver anexos).

- **Análisis Intervención 1**

La primera intervención que se consideró como evidencia de la categoría inicial que referencia el razonamiento covariacional, permitió analizar los elementos que conforman la función lineal desde un enfoque variacional, dando respuesta a una serie de preguntas orientadas por el investigador a través de una guía de trabajo (Ver anexo 1) y en una retroalimentación constante entre los estudiantes, el investigador y el software.

Las respuestas que se muestran a continuación fueron transcritas literalmente por el investigador en cada una de las siguientes tablas:

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
1) ¿Qué sucede cuando se cambia el valor del intercepto Y?	“Cuando se cambia el valor del intercepto Y dependiendo del cambio el valor aumenta o disminuye”	“El intercepto Y es el que maneja la recta Y, al moverlo la pendiente no cambia”	“Cuando se cambia el valor del intercepto Y este cambia el corte del eje y, dependiendo el valor que tome y no modifica la pendiente”	“Se cambia el corte del eje y por el valor que toma la b”

Análisis	En el caso de E1 no hay claridad sobre que aumenta y lo que disminuye con el cambio. En el caso de E2 se destaca la referenciación de la pendiente. Por su parte E3 y E4 dan cuenta de una buena conceptualización de lo que es el intercepto Y.
-----------------	--

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
2) ¿Qué pasa cuando en la pendiente solo se modifica una de las variaciones sea en Δx o Δy ? Justificar.	“Cuando en la pendiente solo se modifica una de la variaciones, esta recta no se altera”	“No cambia nada”	“No hay modificaciones , porque una dela variaciones sería 0”	“No cambia nada, porque se está dividiendo por cero”
Análisis	Los cuatro estudiantes señalan que no hay cambios en las rectas, sin embargo, E1 y E2 hacen caso omiso a la justificación. Por su parte E3 y E4 tienen un argumento (AM1 para esta situación), faltando hacer la salvedad de lo que sucede si la Δx es cero.			

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
3) ¿Qué sucede cuando las variaciones tienen el mismo signo?	“Cuando las variaciones tienen el mismo signo ambas tienen las misma ubicaciones así se encuentre en el lado negativa, además va de manera ascendente”	“La recta va ascendiendo”	“Siempre la pendiente es positiva, porque se dividen signos iguales”	“Las rectas que se forman son crecientes”
Análisis	Vemos que los cuatro estudiantes coinciden en la trayectoria de la gráfica de acuerdo a las condiciones dadas.			

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
4) ¿Qué sucede cuando las variaciones tienen signos contrarios?	“La recta desciende debido a que tienen signos contrarios”	“La recta va descendiendo”	“Siempre la pendiente es negativa, porque se dividen signos contrarios”	“Las rectas que se forman son decrecientes”
Análisis	En este caso también hay coincidencia en la trayectoria da la gráfica.			

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
5) ¿Qué pasa cuando el valor absoluto del Δx es mayor que el Δy ?	“La recta tiende a inclinarse más, porque la Δx es mayor”	“Cambia la inclinación de forma horizontal estando más cerca al eje x”	“Si es positivo crece pero lentamente y si es negativo decrece también lentamente”	“Los valores de x toman valores muy altos y los valores de y no por eso la pendiente tiene una inclinación leve”
Análisis	Se aprecia que todos los estudiantes referencian la inclinación de la recta. En el caso de E1 simplemente hace alusión pero no justifica y E2 por su parte señala que la inclinación se da hacia el eje X, lo que es verdad pero carece de conceptualización. Se puede decir que E1 y E2 coordinan la dirección de cambio de una variable con la cambio en la otra variable. Por su parte E3 hace una diferenciación cuando son valores positivos y negativos y referencia un crecimiento o decremento “lento”. E4 habla de una inclinación leve de la pendiente dados los valores que toman X e Y. En los estudiantes E3 y E4 vemos un nivel de coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra variable (AM3.)			

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
6) ¿Qué pasa cuando el valor absoluto del Δy es mayor que el Δx ?	“Cambia la inclinación de la recta, ya no esta tan abierta, sino más inclinada hacia el eje y”	“Cambia la inclinación de forma vertical estando más cerca al eje y, lo quiere decir que la pendiente es más empinada”	“Si es positivo crece muy rápido y si es negativo decrece muy rápido”	“La pendiente va ser muy inclinada porque los valores de x toman valor muy bajos y los de y muy altos”

Análisis	De manera análoga a la pregunta anterior, las respuestas de E1 E2 dan cuenta de AM2 y las de E3 y E4 de AM3.
-----------------	--

Pregunta / Estudiante	E1	E2	E3	E4
7) *¿Crees que el software utilizado ayuda a visualizar de manera eficiente las diferentes representaciones de la línea recta?	“Sí, porque muestra las diferentes características que se necesitan”	“ Si, pero le faltan pocos detalles como mostrar los números más grandes”	“Sí, porque no tenía que hacer los planos y las rectas en el cuaderno eso quita mucho tiempo. Solo con mover los botones”	“Sí, porque uno pueden ver las rectas con más facilidad y el programa le da a uno los valores”
Análisis	En este caso se aprecia una buena recepción del software por parte de los estudiantes, sustentado en sus representaciones inmediatas, la capacidad de visualización, la tabulación conjunta de los datos y su practicidad en el manejo, sin embargo hay aspectos por mejorar en el diseño en cuanto a la presentación.			

Tabla 5: Análisis de intervención 1, preguntas 1 - 7

- **Análisis Intervención 2**

El trabajo que se realizó por estaciones estuvo enmarcado en la categoría emergente de comprensión de la función lineal, pues en cada una de la estaciones se buscaba la representación de este concepto, mediado por el concepto de pendiente y la ecuación de la recta.

En general hubo un alto grado de motivación en esta intervención, a partir de la implementación del software y sobre todo el diseño de la actividad. Los estudiantes estuvieron muy concentrados en pasar cada estación y el diseño de la actividad propiciaba ir avanzando y estar muy pendiente de cada detalle, ya que para pasar de una estación a otra el estudiante debía acumular cinco respuestas correctas consecutivas.

A continuación se detallaran algunos resultados que se evidenciaron en el proceder de cada estudiante.

- **Estudiante 1 (E1)**

La estudiante inicio el trabajo con muy buena disposición, lo que reflejaba en el paso de cada estación, dio cuenta de una interiorización de los conceptos de pendiente e intercepto Y, además de conceptos solidos al enfrentarse ecuaciones lineales.

A continuación se muestran algunos procedimientos utilizados por la estudiante en las estaciones que lo requirió.

Estación 2	Estación 5	Estación 6 y 7
$3x + 8y = 24$ $y = \frac{3}{8} + \frac{24}{8}$ $y = \frac{3}{8}x + 3$	$y = mx + b \quad (4, 2)$ $y = -\frac{3}{2} \left(\frac{4}{1} \right) + b$ $2 = -6 + b$ $2 + 6 = b$ $8 = b$	$(6, 3) \quad (-12, 18)$ $x \quad y \quad x \quad y$ $m = \frac{18 - 3}{-12 - 6}$ $m = \frac{15}{-18} \quad \underline{5}$ $3 = \frac{5}{-6} \left(\frac{6}{1} \right) + b$ $3 = \frac{30}{-6} = -5 + b$ $3 + 5 = b$ $8 = b$

Ilustración 12: Documento estudiante 1

- **Estudiante 2 (E2)**

La estudiante E2, por su parte al inicio tenía una dificultad para despejar ecuaciones, por lo cual, fue quien en principio necesito mayor atención del docente, no obstante después de la aclaración, comenzó a realizar las estaciones con facilidad, evidenciando claridad en los conceptos de pendiente y el intercepto en Y.

Seguidamente se muestran algunos procedimientos utilizados por la estudiante en las estaciones que lo requirió.

Estación 2	Estación 5	Estación 6 y 7
$-5x - 2y = -10$ $-2y = 5x - 10$ $y = \frac{5x}{-2} - \frac{10}{-2}$ $y = -\frac{5x}{2} + 5$	$m = -\frac{1}{4} \quad P: (4, 3)$ $x \quad y$ $y = mx + b$ $3 = -\frac{1}{4}(4) + b$ $3 = -\frac{4}{4} + b$ $3 = -1 + b$ $3 + 1 = b$ $4 = b$	$(8, -8) \quad (-8, 2)$ $x \quad y \quad x \quad y$ $m = \frac{2+8}{-8-8} \quad m = \frac{-10}{-16} = \frac{-5}{8}$ $y = mx + b$ $2 = \frac{-5}{8} \left(\frac{-8}{1} \right) + b$ $2 = \frac{40}{8} + b$ $2 = 5 + b$ $2 - 5 = b \quad -3 = b$

Ilustración 13: Documento estudiante 2

- **Estudiante 3 (E3)**

Por su parte, el estudiante E3 desde la intervención 1, viene mostrando habilidades y destrezas en la conceptualización de la función lineal, desarrollando de manera rápida las siete estaciones propuestas.

El estudiante señala que para el desarrollo de las mismas necesitó tener en cuenta los que representa la pendiente, respecto al cociente entre el cambio vertical y el cambio horizontal, además de tener presente el Intercepto Y como un punto fijo, para evitar más procedimientos.

Estación 2	Estación 5	Estación 6 y 7
$x - 2y = 6$ $-2y = 6 - x$ $y = \frac{6}{-2} - \frac{x}{-2}$ $y = -\frac{1}{2}x - 3$	$m = \frac{10}{7} \quad p \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ x & y \end{pmatrix}$ $y = mx + b$ $6 = \frac{10}{7}(7) + b$ $6 = 10 + b$ $6 - 10 = b$ $-4 = b$ $y = \frac{10}{7}x - 4$	$\frac{-17 - 4}{-16 - 6} = \frac{-21}{-24} = \frac{7}{8}$ $4 = \frac{7}{8} \cdot 8 + b$ $4 - 7 = b$ $-3 = b$

Ilustración 14: Documento estudiante 3

- **Estudiante 4 (E4)**

De igual forma, el estudiante E4 también se ha caracterizado por dar cuenta de buenas capacidades para el área de matemáticas, sobre todo mostrando mucha lógica a la hora de resolver cualquier situación. También es particular que no realiza casi procedimientos argumentando que no eran necesarios.

Frente a la resolución de las estaciones, comenta que se basó en contar la unidades a la que correspondía la pendiente y a ubicar siempre el intercepto en Y.

Estación 2	Estación 5	Estación 6 y7
$-5x - 2y = -10$ $y = -\frac{5}{2}x + 5$	$m = \frac{-17 - 4}{-16 - 8} = \frac{7}{8}$ $4 = \frac{56}{8} + b$ $b = -3$	

Ilustración 15: Documento estudiante 4

En términos generales vemos que la parte procedimental está enmarcada en la metodología del colegio, no obstante los estudiantes logran finalizar las estaciones, lo que da cuenta de una coordinación de la dirección de cambio de una variable con respecto a la otras (AM2), teniendo en cuenta que los estudiantes representaron las funciones lineales a partir de diferentes situaciones específicas, de las cuales fueron conscientes, identificando los cambios entre estación y estación (Ver anexo 2)

- **Análisis Intervención 3**

Antes de dar a conocer los resultados de las intervenciones 3 y 4, es importante aclarar, que en estas dos actividades, se optó por realizar las guías entre el grupo de estudiantes y el docente-investigador a modo de dialogo y a través de preguntas de las misma guía y algunas otras que surgían en el momento de la intervención , teniendo en cuenta lo que se ha mencionado de la falta de descripción en la escritura por parte de los estudiantes, por lo que estas actividades fueron sistematizados en grabaciones y se extrajeron los apartados más significativos para la investigación.

En el desarrollo de esta intervención permitía salir de situaciones abstractas a un fenómeno del mundo real, determinando el papel que juega la relación por cociente entre

las diferencias de dos cantidades de magnitud, en la dependencia entre ella “tiempo vs distancia” y como esta situación propicia acciones mentales enfocadas en el razonamiento covariacional.

Dentro de la situación cada estudiante debía asignar un valor arbitrario para la moto que iba a movilizar, seleccionando dos puntos arbitrarios en la recta que se generaba, y repetir el proceso con otro valor (Ver anexo 3).

En el siguiente diálogo se observa el reconocimiento al que llegaron los estudiantes:

Diálogo 1:

Investigador: *¿Qué sucede con los dos valores*

E1: *Dan el mismo valor que la velocidad*

E2: *Si, lo mismo que la velocidad*

E3: *Nosotros (se refiere a él y E4) seleccionamos más puntos y todos da lo mismo*

Investigador: *Entonces... ¿qué se puede concluir de la razón de cambio de la recta que representa la velocidad de la moto?*

E2: *Profe es que pues, las variaciones no son las mismas.*

E3: *O sea que la velocidad es también la pendiente*

Investigador: *Exacto. Bueno pero retomemos lo que dijo E3, es decir que lo había hecho con más puntos y daba lo mismo. ¿Qué se interpreta de eso?*

E1: *Que siempre san lo mismo*

Investigador: *Y eso ¿qué quiere decir?*

E4: *No es que la pendiente es constante y por eso la recta es lineal*

De esta forma se considera que la actividad permite en el estudiante:

- Determinar las cantidades que varían (AM1).

- Coordinar el cambio de una cantidad de magnitud con los cambios de la otra (AM3).
- El reconocimiento de la constante como razón de cambio de una función lineal (AM4)

- **Análisis Intervención 4**

Esta última actividad permitía al estudiante tener un papel más crítico frente a la situación, donde debía poner en práctica los conocimientos adquiridos en relación a la función lineal y con base a estos interpretar un modelo de oferta-demanda (Ver anexo 4).

En los siguientes diálogos vemos algunas situaciones a las que se llegó con los estudiantes.

Diálogo 2:

Investigador: *¿Qué características tiene la recta de la demanda?*

E1: *pues está decreciendo*

E2: *O sea que tiene pendiente negativa y el corte en Y es en 14*

E3: *La pendiente es -3*

E2: *O sea que la recta es $y = -3x + 14$*

Investigador: *Si es correcto. Bueno, lo mismo para la oferta*

E2: *Tiene pendiente positiva y corta en -1*

E3: *La recta es $y = 2x - 1$*

A este punto vemos que los estudiantes reconocen con facilidad la pendiente y el intercepto y de las rectas, lo que evidencia una comprensión sustancial del concepto gráfico de función lineal, teniendo la capacidad de interpretar y construir gráficas. Más aún se logró un buen tratamiento de conversión de los registros.

En otro fragmento del diálogo, vemos las conjeturas que sacan las estudiantes:

Diálogo 3:

Investigador: Ahora: ¿cómo hallamos el punto de equilibrio?

E1: Pues ahí dice que es donde se intersecan las rectas, en (3,5)

E2: Eso está muy raro: ¿3 artículos a 5 pesos cada uno?

E4: pero eso está en miles y decenas, \$ 3000 cuando son 50 artículos

En el dialogo anterior se ve como los estudiantes pueden inferir lo que representa el punto de equilibrio, a partir de los cambios que presenta la oferta respecto a la demanda (AM3).

5. Conclusiones

El marco teórico utilizado dentro de este trabajo, sirvió de gran ayuda a la hora de analizar la forma como los estudiantes razonan a partir de la variación y con base en los niveles de razonamiento y acciones mentales allí planteadas, se pudo llegar a varias conclusiones que se exponen a continuación, a partir de las siguientes instancias.

La comprensión del concepto de función lineal

- La identificación de regularidades desde las situaciones sujetas al cambio, en donde se registra una primera aproximación al concepto de función.
- El reconocimiento de la función lineal como un modelo matemático que involucra la covariación entre sus magnitudes, las cuales se derivan con una constante.
- Las situaciones planteadas enfocadas en el contexto de disciplina específica, generaban altos niveles de motivación en los estudiantes, dado que sentía la utilidad de conocimiento matemático abordado, lo que a su vez se reflejaba en el análisis riguroso cuando se enfrentaban a los fenómenos de variación estudiados enfocados en la comprensión del concepto de función.

El razonamiento covariacional

- Los estudiantes con los que se realizó la investigación dieron cuenta principalmente de características del nivel 3 (N3), teniendo en cuenta, que el análisis de los resultados reflejaron la conceptualización en la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambio de la otra, lo que a su vez incluye de manera implícita las acciones mentales AM1 y AM2.
- Los estudiantes que participaron en este estudio, presentaron variaciones en la habilidad para aplicar razonamiento covariacional, al analizar eventos dinámicos. Fueron capaces de determinar la dirección general del cambio en la variable dependiente, con respecto a la variable independiente (N2) y con frecuencia fueron capaces de coordinar imágenes de la cantidad de cambio de la variable de salida, mientras consideraban cambios en la variable de entrada (AM3).
- Los estuantes también tuvieron la capacidad de aplicar de manera consistente el razonamiento N2 y exhibieron comportamientos que sugieren que eran capaces de coordinar cambios, en la dirección y la cantidad de cambio de la variable dependiente al unísono con un cambio imaginado de la variable independiente (AM1, AM2 y AM3).
- El diálogo constante entre el investigador y los estudiantes, permitió promover la evolución en el razonamiento, dado que, servía de confrontación para que el estudiante estuviera en constante reflexión sobre los planteamientos.

Software utilizado

- Los tipos de software utilizados como mediadores del conocimiento permitieron, que el estudiante se centrará en el análisis de las situaciones de variación presentada, dada la inmediatez y variedad de sus representaciones.
- Las formas de graficar tradicionales han considerado como secundario lo variacional y privilegiado el trazado del dibujo de la gráfica de la función a partir de ubicar un conjunto discreto de puntos. En cambio, la representación gráfica dinamizada a partir de un software es integradora ya que permite a la par construir la gráfica de la función y analizar el comportamiento variacional de ésta.
- A través de la observación y la manipulación de estas herramientas, el estudiante puede en algunos casos acercarse a la construcción y apropiación de conceptos, teniendo en cuenta que, puede sacar sus propias conjeturas y conclusiones que se articulen con el conocimiento convenido por la comunidad matemática.

Modelación

- La modelación matemática como estrategia didáctica en la construcción de contenidos matemáticos, permitió que los estudiantes aprecien ésta área como una herramienta útil en la solución de problemas que involucran los contextos propios de los estudiantes.
- Es necesaria una intervención del currículo de matemáticas, de tal forma que se pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función lineal con sus estudiantes, desde una perspectiva variacional.

Bibliografía

- Balacheff, N. (2000). *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: Complejidad didáctica y expectativas*. Obtenido de <http://www.cvrecursosdidacticos.com/>: http://www.cvrecursosdidacticos.com/download_file.php?file=1288115856_U2_Balacheff.pdf.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 105-125.
- Blum, W. N. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Buitrago, G. H. (2012). *Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Camargo, L., & Guzmán, A. A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, e., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA*, 121-156.
- Casallas, G. L., & Buitrago, J. M. (2008). *Situaciones de validación en el aula de matemáticas en torno a la función lineal*. Univerisidad Pedagógica Nacional de Colombia.
- Coronado, N. A., & Montealegre, Q. L. (2007). *Tratamiento didáctico de la función lineal en libros de texto de matemáticas para la educación básica secundaria. Un estudio en el Departamento del Caquetá*. Universidad Padagógica Nacional.
- Duval, R. (1998). *Semiosis y Pensamiento Humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción al español de Miryam Vega*. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Primera edición.
- García, D. O. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función*. Manizales: UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES.
- González, A. M. (2002). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. *Revista AULA*, 89-104.

- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la investigación*. México D.F.: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- MEN . (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- MEN . (2006). *Estadares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Molina, J. F. (2013). *La modelación con tecnología en el estudio de la función seno*. Medellín: Universidad de Medellín.
- Moreno, A. L. (12 de Diciembre de 2015). *MEN*. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf
- Posada, F., & Villa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Rojano, T. (2014). *El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años*. Distrito Federal, México: Grupo Santillana México.
- Ruiz, H. L. (1998). *La noción de función análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 75-87.
- Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Obtenido de <http://pibid.mat.ufrgs.br/>: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf
- Villa, J. A. (2007). La modelacion como un proceso en el aula de matemáticas: Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.
- Villa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en educación matemática. Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Catolica del Norte*(27), 1-21.
- Williams, J., & Goos, M. (2013). Modelling with Mathematics and Technologies. En M. A. (Ken) Clements et al. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (págs. 549-567). New York: Springer Science+Business Media.
- Yin, R. K. (2009). *Investigación sobre estudio de casos. Diseño y métodos*. London New Delhi: SAGE Publications.

Anexos

Anexo 1: Guía de intervención 1

	<p>UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN COLEGIO ALEMÁN MEDELLÍN</p> <p>PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DESDE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE INTERACTIVO</p>	
---	---	---

Intervención # 1

Objetivo:

Formular y verificar conjeturas relacionadas con las características de la función lineal.

Descripción de la actividad:

Se presenta una construcción en Geogebra, donde el estudiante debe describir las relaciones que observa entre los elementos que conforman la función lineal, a través de las preguntas que orienta el maestro investigador.

Instrucciones:

- Ingresar al aula virtual del colegio y abrir el archivo llamado intervención_1_variacion_lineal.
- Mover los tres deslizadores que se presentan y analizar qué cambio se producen a medida que se manipulan.
- Responder las preguntas de la guía.

Análisis conceptual:

1) ¿Qué sucede cuando se cambia el valor del intercepto Y ?

2) ¿Qué pasa cuando en la pendiente solo se modifica una de las variaciones sea en Δx o Δy ? Justificar.

3) ¿Qué sucede cuando las variaciones tienen el mismo signo?

4) ¿Qué sucede cuando las variaciones tienen signos contrarios?

5) ¿Qué pasa cuando el valor absoluto del Δx es mayor que el Δy ?

6) ¿Qué pasa cuando el valor absoluto del Δy es mayor que el Δx ?

*¿Crees que el software utilizado ayuda a visualizar de manera eficiente las diferentes representaciones de la línea recta?

Anexo 2: Guía de intervención 2

	<p>UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN COLEGIO ALEMÁN MEDELLÍN</p> <p>PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DESDE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE INTERACTIVO</p>	
---	---	---

Intervención # 2

Preguntas intervención

Objetivo:

Identificar la ecuación de una recta desde sus diferentes representaciones a través de los elementos que la componen.

Actividad:

Se presentan una serie de 7 estaciones en las cuales el estudiante debe dar cuenta del manejo de conceptos básicos de la función lineal, como los son: la pendiente, el intercepto en Y, y la ecuación de la recta.

Instrucciones:

- Ingresar al aula virtual del colegio y abrir el archivo llamado `intervención_2_estaciones_lineal`.
- Desarrollar lo que se pide en cada estación y responder las preguntas que se presentan para la misma.

Análisis conceptual

Estación # 1

¿Qué haces para ubicar los puntos de tal forma que correspondan con el trazo de la recta?

Estación # 2

¿Qué diferencia hay con la primera estación?

¿Qué debe hacer antes de ubicar los puntos?

Estación # 3

¿Qué representan la m y la b ?

¿Cómo intervienen la m y la b en el trazo de la recta?

Estación # 4

¿Cómo identificas elementos de la ecuación de recta en su respectivo trazo?

Estación # 5

¿Qué elemento requieres para encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la m respectiva?

Estación # 6

¿Cuál (es) elemento(s) necesitas para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados (en caso de ser varios elementos especifica el orden en que debes hallarlos)?

Estación # 7

¿Qué diferencia hay con la sexta estación?

*¿Consideras que el trabajo con este tipo de herramienta aporta a la construcción del concepto estudiado?

Anexo 3: Guía de intervención 3

	<p>UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN COLEGIO ALEMÁN MEDELLÍN</p> <p>PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DESDE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE INTERACTIVO</p>	
---	---	---

Intervención # 3

Objetivo:

Transferir el concepto de función lineal en una aplicación de la física.

Descripción de la actividad:

Se presenta una moto que se desplaza con una velocidad constante, la cual se puede variar.

Instrucciones:

- Ingresar al aula virtual del colegio y abrir el archivo llamado intervención_3_aplicacionfisica_lineal.
- Responder las preguntas de la guía.

Análisis conceptual

1. Asignar un valor arbitrario para la velocidad de la moto y activar el botón “play”, para verificar su desplazamiento y la recta que se genera.

2. Seleccionar dos puntos que pasen por la recta que representa gráficamente la velocidad de la moto y hallar la razón de cambio entre los puntos seleccionados.

3. Realizar el mismo procedimiento cambiando la velocidad de la moto

4. Qué puede concluir acerca de la razón de cambio de la recta que representa la velocidad de la moto.

Anexo 4: Guía de intervención 4

	<p>UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN COLEGIO ALEMÁN MEDELLÍN</p> <p>PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DESDE LA FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DE SOFTWARE INTERACTIVO</p>	
---	---	---

Intervención # 4

Objetivo:

Transferir el concepto de función lineal en una aplicación de la economía.

Descripción de la actividad:

Se despliegan un par de graficas que representan la oferta y la demanda de un producto determinado.

Instrucciones:

- Ingresar al aula virtual del colegio y abrir el archivo llamado intervención_4_aplicacionlineal_lineal.
- Hacer una lectura atenta de la guía.
- Responder las preguntas de la guía.

La oferta y la demanda.

En economía, muchas situaciones presentan comportamientos que pueden explicarse mediante el análisis de líneas rectas y la solución de ecuaciones lineales, una de ellas es el análisis de producción que tienen las compañías tomando en cuenta la manera como se comporta un artículo en el mercado, es decir, la oferta y a la demanda que tiene un artículo.

Para determinar los niveles de producción, una compañía debe tomar en cuenta las curvas de demanda y oferta del producto fabricado. Para cada nivel de precio existe una cantidad correspondiente de unidades de ese producto que los consumidores comprarían o demandarían. Además, como respuesta a los diferentes precios, la compañía está dispuesta a proveer al mercado una cantidad de artículos, a la cual se le llama oferta.

Usualmente, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende izquierda a derecha. El punto en el cual se intersecan las rectas que representan la oferta y la demanda recibe el nombre de punto de equilibrio.

Análisis conceptual

Se muestran las rectas que representan la oferta y la demanda de producir una cantidad de artículos cuyos precios de venta se da en miles de pesos.

1. Hallar las ecuaciones de las rectas que representan la oferta y la demanda.

2. Determina cuántos artículos deben producirse y a qué precios deben venderse para que la empresa se encuentre el equilibrio.

3. Explica qué es el precio de equilibrio y qué es la cantidad de equilibrio.

4. De acuerdo con la gráfica que representa la oferta, ¿cuál es el precio aproximado de producir 100 artículos?

5. ¿Por qué es importante que exista una gran demanda de un artículo en el mercado?

6. ¿Cómo influye el precio de equilibrio en la economía de una empresa?
