COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICA SOBRE LA BASE DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

DIANA LUCÍA LONDOÑO LONDOÑO
DIEGO IVÁN VILLA CHICA
SILVIA INÉS MORALES OSPINA
Estudiantes

Mg. JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN
Asesor

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MEDELLÍN
2013

RECONOCIMIENTOS

Cualquier proyecto, especialmente si se trata de un requisito para optar a un título en un programa específico de educación superior, es el producto del esfuerzo de muchas personasque con su denodado esfuerzo, su notable actividad, su aprestado tiempo y su significativo acompañamiento se hacen presentes, y muy participes en la construcción de una investigación. Evidentemente éste no escapa a la regla.

En primera instancia agradecemos a Dios, por habernos dado la fuerza necesaria para llevar a la excelencia y el perfeccionamiento continuo al presente trabajo.

Nuestro más especial reconocimiento a la SECRETARÍA DE EDUCACIÓN de la Ciudad de Medellín y a su Programa de Formación Avanzada para Docentes de 2011, por ofrecernos la posibilidad de adelantar nuestros estudios de Maestría y, más aún, por su destacado apoyo financiero, en cuanto a las facilidades económicas otorgadas, permitiendo con ello la profundización y cualificación de nuestra formación y quehacer profesional.

Hacemos un llamado de reconocimiento y agradecimiento para: Ana Celi Tamayo Acevedo (coordinadora de la Maestría), al grupo SUMMA de la Universidad de Medellín (grupo de investigación y discusión). De igual manera a los estudiantes del grado Undécimo A de la INSTITUCIÓN EDUCATIVA PBRO. ANTONIO JOSÉ BERNAL LONDOÑO y de la UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN quienes fueron partícipes e hicieron posible con su disciplina, reflexión y aceptación el desarrollo del proyecto; su gran interés en las actividades planteadas y las discusiones en clase fueron una gran motivación para la preparación y realización del mismo.

En esta plenitud de acontecimientos es nuestro mayor deseo, con toda alma razón y corazón, reconocer, además, en Jorge Alberto Bedoya Beltrán (Asesor y compañero de investigación) su nobleza, dimensionalidad humana, su ayuda, que tanto acompañaron y contribuyeron, su irrestricta asistencia y todo su punto de apoyo académico, intelectual y humano para poder fundar esta propuesta; características que fueron apareciendo en el *modus vivendi* de

este trabajo. En él, consideramos: su perseverancia, el valor y la voluntad siempre dispuesta, con fuerza para elevar el ánimo con amistad, ideas e intelecto humano que continuamente ofreció para revertir avenencia mental y tranquilidad académica. Bellas experiencias que se extienden con corriente vital, serena amplitud y estado espiritual pleno. Sus enseñanzas, asesorías y compañía han sido, para nosotros, modelo de aspiraciones honrosas, de claro carácter decidido y fuerza de vigor en los complicados senderos de la vida.

Un agradecimiento muy especial a nuestras familias, por su paciencia y apoyo, por su fe y aliento constante.

A estas personas, a quienes les debemos para toda la vida, todo nuestro crecimiento y formación, profesional, intelectual y humana acaecida en este período de existencia, el más caluroso agradecimiento y el respeto más cordial. Ojalá, la vida y el ser humano del tiempo que viene reconozcan también lo más bello, lo más justo, lo más iluminado y lo más agradable de su condición humana.

Ahora, quedamos con teorías, prácticas y metodologías inquietando nuestra reflexión y gravitando en nuestro corazón. El resultado de esta investigación es apenas el comienzo.

Resumen

Actualmente, se evidencia una fuerte tendencia de la didáctica matemática por considerar las problemáticas que persisten en el aprendizaje propio de los conceptos de ésta área en términos de procesos cognitivos. Se aprecia una clara evolución y preocupación por analizar los errores y dificultades de tipo cognitivo que subyacen en los estudiantes en la comprensión de conceptos matemáticos.

El presente trabajo de grado se enmarca en aquellos proyectos que tienen como línea de investigación los procesos cognitivos de los conceptos de la matemática avanzada, entre los que se encuentra el concepto de derivada, el cual ha sido objeto de profundización y consideración teórica por varias décadas en investigaciones de didáctica en matemáticas. Tema fundamental en los cursos de cálculo. El trabajo se desarrolla en perspectiva a los lineamientos y exigencias establecidas en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín y dentro de su propuesta integra tres aspectos medulares: proceso didáctico en la adquisición del concepto, comprensión del mismo desde varios registros de representación, especialmente el geométrico y la utilización de diversas estrategias de valoración e interpretación en el proceso de construcción del saber, por ejemplo, los mapas conceptuales y la herramienta dinámica del software Geogebra ®.

En este trabajo se hace una exposición detallada del proceso de comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica, de cuatro estudiantes que fueron seleccionados aleatoriamente del curso cálculo diferencial, ofrecido para el segundo semestre de carreras de ingeniería en la Universidad de Medellín; y otros del grado Undécimo A de la Institución Educativa Pbro. Antonio José Bernal Londoño. Y el marco teórico en el cual se sustenta el proceso de análisis y sistematización del trabajo es el Modelo para la comprensión de los conceptos matemáticos, propuesto por Pirie y Kieren (1994).

En primer lugar, se busca identificar y analizar las dificultades de tipo cognitivo que surgen en los estudiantes durante el proceso que conduce a la comprensión del concepto

geométrico de la derivada. En segundo lugar, analizar el dominio de las representaciones en la conceptualización del objeto en estudio y diseñar actividades que permitan la apropiación del mismo a través de la argumentación y la reflexión de los conceptos.

Para tal efecto, en perspectiva del Modelo, sustento teórico del presente trabajo, y teniendo presente dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo promover avances en la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de un curso de cálculo sobre la base del Modelo para la comprensión de Pirie y Kieren?, se diseñaron un conjunto de descriptores que ayudaron a dar lectura a la evolución del proceso de comprensión de los estudiantes.

A la luz del Modelo y en referencia a su estructura, se evidenció que la apropiación del lenguaje matemático utilizado por los estudiantes y la interrelación de conceptos, se inscribieron en un nivel básico en la profundidad y jerarquización. Presentando, además, dificultad en utilizar un lenguaje formal para representar objetos matemáticos. No obstante, se preservan imágenes textuales o visuales del concepto y su representación que aparecen como posibles obstáculos en la comprensión. Por lo anterior, al iniciar el proceso de intervención y a partir de las actividades de la fase de diagnóstico, los cuatro estudiantes se ubicaron en el nivel de Conocimiento Primitivo sobre la base del Modelo de Pirie y Kieren (Ver sección 3.3).

A partir del diseño y aplicación de las actividades se posibilitó a los estudiantes relacionar el concepto con su respectiva representación matemática en relación al objeto de estudio y facilitar de esta manera un acercamiento a comprensiones más avanzadas. De ahí, que las actividades diseñadas a la luz del modelo, favorecieron el desarrollo de estructuras de tipo cognitivo, como el razonamiento, la conceptualización, la abstracción, el pensamiento, entre otras, a través del manejo de las diferentes representaciones, la inserción de las TIC y el uso de los mapas conceptuales, que permitieron la aplicación y evolución del concepto de la derivada en su componente geométrica.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos en el avance en la comprensión del objeto de estudio, y con base en las dificultades superadas por los estudiantes, éstos quedaron ubicados en el nivel dos Creación de la Imagen.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIÓNES

TABLAS

INTRODUCCIÓN

Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del Modelo de Pirie y Kieren, es un proyecto de investigación que a la luz de la teoría propia del modelo, pretende promover el nivel de comprensión en los estudiantes, a través de actividades que permitan la profundización conceptual de ésta temática propia de las matemáticas avanzadas desde un enfoque geométrico. El interés de implementar y desarrollar una propuesta de investigación e intervención pedagógica en este campo, subyace en las necesidades y dificultades de tipo cognitivo que presentan los estudiantes, especialmente en los primeros semestres de estudios universitarios, al abordar éste campo matemático.

Esta propuesta se considera pertinente, ya que a través de los métodos y estrategias utilizadas, en su mayoría de carácter cualitativo, se busca la interpretación, análisis y sistematización del proceso de aprendizaje de los estudiantes, permitiendo más que la generalización, la identificación de necesidades y avances en el proceso de construcción del saber. Las herramientas de intervención pedagógica como los mapas conceptuales, el uso de artefactos dinámicos como el Geogebra®, permiten visualizar e identificar de manera significativa los avances conceptuales con respecto al estado inicial, las representaciones mentales, el cambio de actitudes y comportamientos que se manifiestan en los estudiantes que en definitiva ayudan a interpretar la transformación en las estructuras cognitivas, finalidad de la presente investigación.

De igual manera, la importancia de los diferentes registros de representación que pueda tener el estudiante de los conceptos matemáticos y la relación directa en su proceso de construcción, es en primera instancia, un objetivo para alcanzar en ellos aprendizajes significativos; es así como lo sustentan diferentes autores como Duval (1999), Novak & Gowin (1988), Piere y Kieren (1994), entre otros, para los cuales el estudiante tiene un rol activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que permite que logren adquirir conocimientos propios, con base en sus conocimientos previos.

Esta propuesta enmarca en primer lugar unos antecedentes, que permiten hacer una reflexión y sustentación teórica al planteamiento, desarrollo y solución de la pregunta de investigación y el avance en los objetivos, además orienta los argumentos descriptivos de las guías de intervención pedagógica y la elaboración del marco teórico que respalda el presente trabajo de profundización conceptual. Unos referentes conceptuales compuestos por la teoría del modelo utilizado y de las variables a profundizar en la investigación, estas categorías teóricas sustentan la propuesta pedagógica y los conceptos que se relacionan con el problema, permitiendo la elaboración y posterior ejecución de las estrategias metodológicas, los métodos y técnicas de recolección de la información. Ésta última es el eje medular del trabajo, en el cual se describe el proceso de intervención y se realiza el correspondiente análisis de los resultados obtenidos en contraste con el Modelo para la Comprensión, expuesto por Pirie y Kieren. Por último se encuentran las conclusiones de las intervenciones y reflexiones en el aula, las recomendaciones a tener en cuenta, las bibliografías utilizadas para el desarrollo de la propuesta, y unos anexos que evidencian el trabajo realizado.

En el planteamiento y desarrollo del presente trabajo se puede evidenciar una transformación significativa en los procesos de aula, que le permitieron al estudiante avanzar en la construcción del aprendizaje de forma autónoma, apoyado en las tecnologías y software dinámicos que permiten recrear los conceptos matemáticos, a la vez que potencian el desarrollo de competencias necesarias para comprender los conceptos que conlleven al avance cognitivo hacia la comprensión, en particular del concepto de la derivada en su componente geométrico.

1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los problemas, entre otras, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos, enfatizados en la propuesta de acciones mecanizadoras y repetitivas de los conceptos abordados, que si bien son necesarios para el desarrollo de habilidades procedimentales, también provocan que una cantidad considerable de estudiantes presenten dificultad para alcanzar una adecuada comprensión de los mismos y un desarrollo conveniente de niveles de comprensión.

En los niveles de educación básica media y superior, el cálculo es la rama de la matemática a la que se dedica mayor tiempo en los currículos iníciales en las áreas de ciencias exactas, naturales, tecnológicas y sociales. El aprendizaje del cálculo y, en particular la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que demanda un desarrollo adecuado de procesos cognitivos, metodológicos y estratégicos relacionados con un pensamiento más elaborado. Los conceptos del cálculo designan un conjunto de prácticas, cuya complejidad dependen de los medios y las acciones pedagógicas con las cuales las posibilidades didácticas aproximen en otra forma al estudiante con el objeto de conocimiento. Se parte del hecho de que los problemas de comprensión en matemáticas no se deben solo a la complejidad particular de cada contenido enseñado, sino que es necesario considerar también la complejidad de la construcción no de los saberes sino de los funcionamientos que constituyen la infraestructura operacional del pensamiento (Duval, 2004).

En consecuencia, es necesario abordar el estudio geométrico de la derivada al ser esta una herramienta fundamental en el cálculo a partir de sus diversas representaciones, relaciones y aplicaciones que permiten establecer métodos para el análisis de la variación de algunas funciones y en primera instancia aumenta en el estudiante la posibilidad de procesos cognitivos de razonamiento, visualización, abstracción, planteamiento y solución de problemas. Las tareas de conversión entre diferentes sistemas de representación son minimizadas en la enseñanza y eso produce limitaciones en la comprensión. Duval (1999) expresa que el uso de distintas representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a comprender un concepto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (Rico, 2000, D´Amore, 2002).

De igual manera, en la actualidad, los recursos tecnológicos son la herramienta más característica a la hora de formar activa y prácticamente en esta área, puesto que permiten la representación, visualización y la transferencia de los conceptos de manera dinámica, recuperable y combinable, es decir permite la movilización de los conceptos en gran variedad de situaciones. Estos utilizados como una función de tratamiento conceptual son una estrategia donde se diseña la forma de someter a contraste y comprobación las idealizaciones, representaciones mentales y aprendizajes que se han logrado de los objetos matemáticos. La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto. (Duval, 2004, p.15)

Con este panorama académico frente al estudio de la derivada y según las dificultades relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje, se espera desde esta propuesta de trabajo mejorar o ampliar el conocimiento de la misma, a partir de una interpretación no sólo algebraica y geométrica sino también permitir una interpretación del concepto en un sentido dinámico, alejado de las posibilidades estáticas en las cuales ha estado inmerso, sistematizando las concepciones operantes de los estudiantes en relación con los procesos de conceptualización y comprensión del objeto matemático ya mencionado.

Teniendo en cuenta estos planteamientos, este grupo de trabajo propone la siguiente pregunta de investigación:

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo promover avances en la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de ingeniería en un curso de cálculo, sobre la base del Modelo de Pirie y Kieren?

1.3 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se ha enfocado en el marco de la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos, cómo es el de derivada, basados en el modelo propuesto por Pirie y Kieren; actualmente varios investigadores y docentes, en su mayoría del contexto (David Meel (2003), Jhony Villa (2011), René Londoño (2011), Pedro Esteban Duarte (2006), Rodrigo Rendón (2011) y otros) han manifestado su preocupación por los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, especialmente han reflexionado y destacado la manera como se presenta la comprensión en los estudiantes en los procesos de aprendizaje y han orientado la necesidad de sus trabajos según el modelo de Pirie y Kieren, el cual considera la comprensión como un proceso de crecimiento permanente, completo, dinámico y estratificado pero no lineal.

Londoño (2011) en su propuesta y utilizando el modelo anteriormente descrito, procura facilitar en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de educación superior, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del análisis matemático como lo es el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). De esta investigación se identificó y analizó el diseño de los descriptores que se exponen allí, que son asumidos como los indicadores que les permitía valorar el nivel de comprensión de los entrevistados. Además, se revisó la formulación y planteamiento de las actividades propuestas a los estudiantes, pues se destaca que no se pretendía que los estudiantes utilizaran elementos del cálculo infinitesimal, pues aún no los habían adquirido, sino el uso de conceptos elementales como los de pendiente de una recta, área, curva, entre otros, y a través de procesos de razonamiento infinito, llegaran a la comprensión de la relación inversa entre las cuadraturas y las tangentes.

Por su parte Villa-Ochoa (2011) aborda el proceso de comprensión de la noción de tasa variación como una forma de aproximación al concepto de derivada, para tal efecto, presenta una revisión de la literatura producida en el campo de la Educación Matemática asociada al Cálculo diferencial, en la que, además de dar cuenta de la complejidad del concepto objeto de estudio, descubre la necesidad de darle importancia a la comprensión del mismo en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático, en especial en la interpretación del concepto de la derivada. Entre otras, se apoya en las investigaciones realizadas por Posada y Villa-Ochoa, (2006a; 2006b) en la que se fundamenta la importancia de una aproximación variacional a la función lineal, dirigiendo la atención sobre la necesidad de promover el tránsito que modela la relación de variación entre las variables que intervienen en un evento o fenómeno. En igual sentido, basa su estudio en los resultados arrojados por el trabajo de Posada y Villa-Ochoa (2006b) en el cual se analiza el concepto de función cuadrática desde una perspectiva variacional. Como se puede colegir en ambas investigaciones se observa la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional a través de la comprensión de conceptos matemáticos.

En el fundamento teórico de su trabajo de investigación se hace notable la inminente preocupación hacia dos categorías de esencial importancia y complejidad en la Educación Matemática: la comprensión y la aproximación al concepto de derivada desde una perspectiva variacional. Para abordar la primera, el autor centra su atención en la descripción de algunos marcos teóricos que se han desarrollado en el seno de la Educación Matemática y profundiza particularmente en la teoría de la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren, la cual gracias a sus características, asume como marco teórico de interpretación y análisis en el desarrollo de la investigación. Para dar cuenta del concepto de derivada, en tanto aproximación, muestra como la comprensión de la tasa de variación parece estar mediada por la interacción entre los estudiantes, el software utilizado y el profesor.

Rendón (2011) contextualiza su trabajo en el marco de la Educación Matemática y da a conocer algunas investigaciones que en este campo se producen actualmente, resalta la comprensión de conceptos como el aspecto más relevante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que emana el marco teórico bajo el Modelo de Piere y Kieren de este trabajo de investigación, el cual apunta a la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. También se destaca el interés por llevar a cabo el diseño y la aplicación de una entrevista semiestructurada de carácter socrático como estrategia metodológica, para describir cómo comprenden el concepto de continuidad los estudiantes elegidos. De la anterior se retomó la estructura que se debe tener en el diseño y elaboración de los instrumentos de intervención y socialización en el presente trabajo.

En cuanto a Rendón (2011), éste en su investigación hace un breve recorrido por el concepto de continuidad a través de la historia, resaltando su importancia en el contexto de la educación matemática en la actualidad en Colombia. Analiza cuatro casos de estudiantes de Cálculo Diferencial, revela los descriptores de nivel para el concepto y acciones dinámicas de la teoría; que sirvieron de inspiración para concretar los descriptores propios y la detección de las acciones del redoblado utilizado por los estudiantes. En relación a la manera de abordar el concepto de continuidad local de una curva en un punto, su aspecto introductorio, evolución histórica, relación con la geometría y la física de movimiento, el concepto de función entre los siglos XIV y XVII, sirvieron de ilustración y de apoyo para abordar teóricamente el objeto de estudio del presente trabajo de investigación.

Meel (2003) por su lado, realiza una descripción significativa de la comprensión cognitiva, examinando recientes marcos teóricos que realizan propuestas de análisis y ofrecen criterios diferenciadores sobre la misma, que aunque con posturas alejadas de las propuestas de Richard Skemp y Schroeder con la teoría de la comprensión instrumental y relacional, su génesis y desarrollo estuvo influenciado a partir de las mismas. En su artículo se enfoca en el análisis de dos marcos teóricos contemporáneos: El Modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE (Acción – Proceso – Objeto - Esquema) de Dubinsky. También hace referencia a otros marcos teóricos contemporáneos como es el trabajo de Cornu y Sierpinska sobre los obstáculos cognitivos y epistemológicos; las investigaciones sobre la definición del concepto y la imagen del concepto de Tall y Vinner, las exploraciones de Kaput sobre las representaciones múltiples, entre otras.

Del anterior marco referencial se tuvieron en cuenta para la construcción del marco teórico que dirige el presente trabajo de investigación, las definiciones de la comprensión propuestas por estos dos marcos. Desde la perspectiva de la teoría de APOE, la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos, mediante la abstracción reflexiva; un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento, y, por lo tanto, las comprende (Página 224). Por su parte, Pirie y Kieren describen que la comprensión matemática se puede definir estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende las formas y los procesos del mismo y, además se encuentra restringido por los que están fuera de él. (Página 235).

Es importante tener presente que este trabajo de investigación también ha utilizado, la teoría de los sistemas de representación como herramienta de análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes del objeto matemático en estudio. Duval (1999, 2004) profundizó en el uso de las representaciones desde una perspectiva semiótica, analizando en el marco de los problemas de comprensión aquellos que atañen a la formación del pensamiento matemático en contextos escolares. Reconoció la importancia a las representaciones cuando aseguró que: El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación (p.176). En el sentido de Raymond Duval, la comprensión de un concepto implica la articulación coherente entre distintos registros de representación.

En el capítulo II, se ampliará ésta concepción teórica expuesta por Duval de los sistemas de representación y se profundizará, principalmente, en el modelo para la comprensión matemática de Pirie y Kieren, marco teórico central del presente trabajo de investigación.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Hoy en día en la comunidad académica se aprecia una preocupación por estudiar las formas, diferencias y obstáculos que hacen presencia en el estudiante para aproximarse a los contenidos matemáticos y en particular en las estructuras cognitivas implicadas en el proceso de aprendizaje. Se amplía el campo de investigación hasta ahora muy centrado en los conceptos básicos de las matemáticas en todos los niveles de enseñanza a entender la forma como ocurren e interactúan los procesos mentales y cognitivos en la adquisición de saberes. De ahí que la tarea de enseñar y de paso de aprender los fundamentos del cálculo, no es fácil y se haya convertido en uno de los problemas más trascendentales en la educación matemática y aunque se logre que los estudiantes resuelvan de alguna manera mecánica los algoritmos relacionados con la matemática avanzada, no se acercan a lo que realmente es una significativa comprensión del concepto.

En las Instituciones de Educación Superior, se ha evidenciado una problemática generalizada en los estudiantes que aduce a la falta de comprensión, como proceso cognitivo, implicado en el pensamiento matemático de conceptos avanzados y la adquisición de estructuras de análisis, abstracción, confrontación y verificación de las teorías abordadas, obteniéndose al contrario, mecanismos vacíos de reflexión y profundización conceptual, bajo rendimiento académico e inconformidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Un gran número de docentes, comparten la idea de que existen muchas dificultades para que los educandos aprendan los conceptos del cálculo infinitesimal, sobre todo en niveles universitarios.

La inquietud que prevalece hoy por hoy en algunos espacios de aula, sobre la problemática que representa la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, permite reflexionar un poco a cerca de las estrategias y metodologías pedagógicas que se están utilizando para acercar de una forma más asertiva a los estudiantes a la comprensión de los conceptos. Es así como el interés reside en considerar la problemática que subyace del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de conocimientos, desarrollo de habilidades y dominio de competencias.

En este mismo orden de ideas, se considera conveniente observar sobre la base del modelo de Pirie y Kieren, no solo la evolución en la comprensión sino también las movilizaciones de tipo cognitivo que se manifiestan en los estudiantes durante el proceso de intervención. Este proyecto es diseñado y pensado para estudiantes de los últimos niveles de la educación básica escolar y primeros niveles de la educación universitaria, en el área de las matemáticas en estudios del cálculo, en el cual se encuentra la conceptualización geométrica de la derivada, temática cuya mayor correspondencia se encuentra en el pensamiento matemático avanzado. De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Una característica fundamental del trabajo es la utilización de los mapas conceptuales y del instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ®, como posibilidades para personalizar, valorar la evolución, exponer, evidenciar y justificar los componentes conceptuales de la derivada.

Por todo lo anterior una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es la de desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para poner en práctica este concepto, después de comprender nociones o ideas básicas como la de infinito, aproximación y variación. En dicho contexto este trabajo revisa y busca indagar principalmente, por el proceso de comprensión matemática que tiene el estudiante del concepto geométrico de derivada de una función en un punto y la importancia de los sistemas de representación, sobre la base en los estudios de comprensión matemática que estima la Teoría de Pirie y Kieren como fundamento teórico del presente trabajo, de las investigaciones de Raymond Duval sobre los sistemas de representación, porque se considera que las actividades de aprehensión, conceptualización y razonamiento, vienen adheridas a la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación y de la comprensión como generador de imágenes de un concepto y la definición del concepto, de los aportes de Tall y Vinner (1981).

1.5 OBJETIVOS GENERAL Y ESPECÍFICOS

1.5.1 GENERAL

Promover avances en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico en estudiantes de un curso de cálculo, basados en el Modelo de Pirie y Kieren a través del empleo de representaciones semióticas, mapas conceptuales y el uso del software dinámico.

1.5.2 ESPECIFICOS

- Describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de la derivada a partir de las diversas formas que tome su representación semiótica enfatizando en su componente geométrico, el uso de los mapas conceptuales y el empleo de recursos dinámicos.

- Diseñar y aplicar acciones de intervención en el aula que posibiliten en el estudiante la comprensión del concepto geométrico de la derivada.

- Identificar algunos de los obstáculos cognitivos y epistemológicos de los estudiantes en relación con los procesos de conceptualización y comprensión de la derivada.

- Diseñar una propuesta de módulo con actividades que permitan en los estudiantes la conceptualización, aplicación y evolución de la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 REFERENTES CONCEPTUALES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1.1 PROCESOS COGNITIVOS

Rivas Navarro (2008) expresa que en la acción de leer, se procesa la información mediante una serie de actividades mentales o procesos cognitivos, atribuyendo significado a lo que percibe, estableciendo relaciones entre éstas y las experiencias o conocimientos evocados, implicando así la comprensión del texto y por ende la elaboración del significado. Por tanto a lo largo de la vida, se seguirá procesando información al percibir y categorizar las cosas del entorno, al retener y recordar, razonar y resolver problemas, usar el lenguaje y actuar en el mundo(Rivas Navarro, 2008).

2.1.1.1 PROCESOS COGNITIVOS BÁSICOS

Cienfuegos (2012), expresa que los procesos cognitivos básicos, se encuentran en los niveles más iniciales del procesamiento de la información; sin embargo esto no quiere decir que sean simple o “menores”. A través de ellos se adquieren los conocimientos, que son las actividades mentales relacionadas con el percibir, atender, memorizar, recordar y pensar, éstos aunque se describen de manera individual, interactúan en conjunto para obtener un comportamiento determinado.

El proceso perceptivo

Cienfuegos (2012) dice que la percepción es el proceso cognitivo básico a través del cual se interpreta la información que es recibida a través de los sentidos, los cuales a través de las sensaciones, proporcionan una información, la interpretación de éstas en el cerebro establecen las percepciones, las cuales son el resultado del el efecto inmediato de la actividad mental por estimulaciones externas que deben ser transmitidas y transformadas en vivencias.

Los receptores sensoriales conformados por células nerviosas que ponen en contacto al cerebro con el medio externo e interno. Es decir, son terminales que transforman los estímulos químicos o físicos (sonido, luz, etcétera) en impulsos nerviosos que llegan al cerebro donde la información se procesa y desata la respuesta del organismo. Una sensación común para varias personas, genera percepciones diferentes que puede desatar distintos comportamientos. Por tanto la percepción no es exclusiva de mecanismos fisiológicos de los sentidos y del cerebro, también intervienen otros factores que inciden y establecen variaciones perceptivas notables en los individuos como la intensidad, la repetición, la novedad, que serían características de los estímulos; la fisiología, la cultura, la atención y las experiencias individuales.

El proceso de la atención

Este proceso es el que se encarga de seleccionar de uno o varios estímulos, actúa como un filtro de aquellos que inciden sincrónicamente en los órganos sensoriales Cienfuegos (2012) y Rivas Navarro (2008). Se diferencia entre la atención selectiva y sostenida, esta última hace referencia al tiempo que puede mantener la atención dirigida a un objeto. Una vez seleccionado el material, se dan tres operaciones fundamentales: la codificación (recoger información), el almacenamiento (guardar la información ordenadamente) y la recuperación (hacer uso de ella cuando sea necesario).

La codificación con base en la atención, elige parte de la información, para luego procesarla, hacerla reconocible y manipulable por la memoria, de esta forma, la información elegida queda registrada como una representación mental. La codificación no es neutra, pues la interpretación de la información se afecta por las ideas propias sobre el mundo, es decir se construye o personaliza los recuerdos. El almacenamiento se da una vez codificada la información, la retiene la memoria, organizándola mediante esquemas, para luego utilizarla y la recuperación es la acción de traer a la conciencia la información almacenada en la memoria.

En Rivas Navarro (2008), la memoria es el proceso cognitivo facultado de almacenar, retener, y recuperar información de eventos - acciones pasadas procedentes del entorno (imágenes, sonidos, sabores, olores y tacto de las cosas), es un proceso fundamental en la cognición y el aprendizaje en general. Los estímulos sensoriales (visuales o auditivos), procedentes del medio que inciden en los sentidos son retenidos en la memoria sensorial durante muy corto tiempo, la información desaparece rápidamente y es sustituida por una nueva, perdiéndose inmediatamente sino sigue siendo procesada. La pequeña parte que recibe atención y es retenida en la memoria sensorial se transfiere a la memoria a corto plazo, donde se produce una elaboración más compleja de los datos sensoriales, es de la que el individuo es consciente, con una duración corta si no se repasa o práctica. Parte de la información elaborada por la memoria a corto plazo pasa a la memoria a largo plazo, la cual es de mucha capacidad en amplitud y duración, recuperando la información cuando se necesita, de esta forma se puede utilizar los recuerdos y los aprendizajes en un presente inmediato.

2.1.1.2 PROCESOS COGNITIVOS SUPERIORES O COMPLEJOS

Este tipo de procesos son pertenecientes a las habilidades del pensamiento altamente medidas por la actividad intelectual y el trabajo autónomo.

El Razonamiento, como lo proponen Carretero y García citados por Cienfuegos (2012) definen el razonamiento como el proceso que permite extraer conclusiones a partir de premisas o acontecimientos dados previamente, categorizado en razonamiento deductivo y razonamiento inductivo, el primero supone que la conclusión se infiere necesariamente a partir de las premisas y por tanto la verdad de la conclusión depende de la verdad de las premisas, a diferencia de éste, el razonamiento inductivo sólo obtendrá conclusiones probables, dado que se refiere a un proceso de generalización a partir de situaciones concretas que hacen verdadera la conclusión (Cienfuegos, 2012).

Inteligencia

En Castañeda (2009), se citan definiciones de inteligencia a lo largo de la historia.

Piaget (1952): Capacidad para adaptarse al ambiente.

Eysenk (1982): Inteligencia es el producto de la eficiencia de procesamientos neuronales.

Carroll, J.B (1993): Facultad que se refleja en el rendimiento social.

Gardner (1993): Conjunto de capacidades independientes del ambiente. Propuso 8 tipos de inteligencia.

Jensen (1997): Postuló que la inteligencia es la velocidad para procesar información y la capacidad de retenerla activamente en la memoria.

Wechsler (1949) (desarrolló varios test de inteligencia). Para él es la capacidad para actuar con propósito concreto, pensar racionalmente y relacionarse eficazmente con el ambiente.

Stenberg: Autogobierno mental superior, con tres dimensiones: capacidad de resolución de problemas, capacidad verbal, inteligencia práctica o social.

Mario Bunge, plantea un concepto científico de inteligencia, y dice que ésta no debe juzgarse en términos si existe o no existe, sino en función de su utilidad para la descripción y explicación del comportamiento, y habla de inteligencia natural como algo que está en la disposición del individuo como un fenómeno natural e inteligencia social. Se refleja a través de la memoria, solución de problemas, elaboración de estrategias y explicación del comportamiento.

De todo lo anterior se puede deducir que la inteligencia es la capacidad de comprender, entender, asimilar, elaborar y utilizar adecuadamente la información.

Lenguaje

El lenguaje y el pensamiento desempeñan un papel fundamental en el funcionamiento cognitivo pues el primero es la expresión del segundo para la comunicación y el entendimiento de los seres. A través del lenguaje se puede representar la realidad mediante signos, ordena categoriza, fija, codifica y recupera la información.

Vygostky (citado en Cienfuegos 2012) afirma que el lenguaje y pensamiento tienen raíces diferentes. Así en el desarrollo del habla hay una fase pre intelectual y en el desarrollo del pensamiento una fase pre lingüística, por esta razón suponen una independencia, pero ésta independencia desaparece cuando el individuo llega a los dos años de edad, en el cual el pensamiento se torna verbal y el habla racional.

La teoría Vygostkiana atribuye al lenguaje raíces sociales, donde éste va construyéndose a medida que el ser interacciona con otros y cuya relación con el pensamiento se va volviendo independiente en la medida que se necesite cambiar los elementos de la situación en la que el individuo se desenvuelve.

2.2 MODELO EDUCATIVO Y RECURSOS DIDÁCTICOS

En primer lugar, debe entenderse por modelo una representación simplificada de un determinado fenómeno real. En el campo de la educación, los modelos educativos son aquellos que tienen que ver con el desarrollo intelectual, los procesos de enseñanza y/o aprendizaje, al ser el conjunto de lineamientos generales orientadores del accionar académico. Están fuertemente determinados por los procesos históricos y la utilidad en el contexto social en el cual está inscrito y son recopilaciones o síntesis de distintas teorías o enfoques pedagógicos que orientan a la comunidad educativa en la elaboración de programas de estudio y en la sistematización del proceso pedagógico.

Para sustentar teóricamente un modelo educativo se toma como referente la definición dada por Carlos Tünnerman (2005), el cual aún cuando aborda la definición para modelos educativos de instituciones educativas de educación superior, es posible utilizarlo en otros ámbitos sin que pierda su validez o importancia.

Tünnerman (2005) señala que los modelos educativos adquieren importancia en los procesos de transformación universitaria recientes que se distinguen de las formas universitarias de las décadas pasadas en el sentido de que el énfasis está dirigido al mejoramiento de la pertinencia y calidad de la enseñanza y a la renovación profunda de sus métodos pedagógicos, de tal manera que permitan asegurar que los procesos de enseñanza y de aprendizaje se centren en el sujeto que aprende. (Tünnerman, 2005)

Según Flórez Ochoa (1994) un modelo es la imagen o representación del conjunto de relaciones que definen un fenómeno, con miras a su mejor entendimiento. De acuerdo a lo anterior se puede inferir que un modelo es una descripción teórica útil para la comprensión de las características de los fenómenos que se inscriben en un evento particular.

De Zubiría (1994) considera que en la comprensión de un modelo es importante reconocer las huellas o rastros que permiten reconstruir aspectos de la vida humana y que sirven de base para la reflexión y la investigación. En este sentido, un modelo permite entender y describir los fenómenos sociales dados en una estructura en un proceso de evolución histórica.

En síntesis, un modelo educativo es un instrumento de gestión académica y administrativa que contribuye de forma integral y coherente al desarrollo de los miembros de la comunidad educativa, en el marco de la visión institucional. Su pertinente conocimiento le permite a los docentes y a todos en general liderar procesos innovadores de transformación educativa a través de planeaciones e intervenciones pedagógicas.

En el campo de la educación matemática, podría pensarse que un modelo matemático tiene por objetivo describir matemáticamente una situación del mundo real que se presenta con la suficiente frecuencia, pero no obstante, los modelos educativos han constituido históricamente diferentes teorías de razonamiento, enseñanza o aprendizaje que tratan de describir aspectos relacionados con la estructura cognitiva y operacional del individuo, específicamente en el contexto formado por el desarrollo intelectual de los estudiantes y su aprendizaje escolar. Como ejemplos podrían citarse, el modelo de van Hiele para el razonamiento y el Modelo de Pirie y

Kieren (1994)para la comprensión de conceptos matemáticos, éste último es el marco teórico que sustenta el presente trabajo de investigación.

2.2.1 MODELO DESARROLLISTA

La sociedad actual demanda formar individuos preparados para enfrentar nuevas necesidades según el contexto; como lo son la transferencia del conocimiento en la solución de problemas, el flujo y manejo de la información, la incorporación de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el fortalecimiento al acceso laboral, entre otras, por lo que las actividades académicas, particularmente la enseñanza, han tenido que replantear los métodos para cumplir pertinentemente con esta tarea. De ahí que los modelos educativos deban ser orientados más que en saber cuáles contenidos enseñar y cómo introducirlos en clase, en analizar qué problemas en la estructura cognitiva se enfrenta quien aprende y cómo los aplica en su realidad inmediata.

Lo anterior permite afirmar que el aprendizaje se ha convertido en uno de los mayores desafíos en los procesos de interrelación de los grupos humanos y de innovación académica. Por tal, las instituciones educativas tienen la responsabilidad de generar condiciones que posibiliten a los individuos lograr, además, de su inserción social y productiva, el desarrollo de todo su componente axiológico dentro de un contexto sociocultural determinado.

El modelo desarrollista llamado así por algunos teóricos, entre ellos Flórez Ochoa (1994), o conocido también como modelo cognoscitivista, tiene como meta educativa que cada individuo acceda, progresiva y secuencialmente, a la etapa de desarrollo intelectual, de acuerdo con las necesidades y condiciones de cada uno. Los fundamentos teóricos de éste modelo se originaron en las ideas de la Psicología Genética de Jean Piaget.

No obstante, De Zubiría (1994) llama a este modelo, teoría del conocimiento y destaca el rol del maestro, el cual está dirigido a tener en cuenta el nivel de desarrollo y el proceso cognitivo de los alumnos. Éste debe orientar a los estudiantes a desarrollar aprendizajes por recepción significativa y a participar en actividades exploratorias, que puedan ser usadas posteriormente en formas de pensar independiente. De ahí que lo importante no es el resultado del proceso de aprendizaje en términos de comportamientos logrados y demostrados, sino los indicadores cualitativos que permiten inferir acerca de las estructuras de conocimientos y los procesos mentales que las generan.

El modelo desarrollista enfatiza la importancia de la experiencia en el desarrollo de los procesos cognitivos. En este aspecto un aporte que se destaca es el carácter activo del sujeto en sus procesos de conocimiento y de desarrollo cognitivo.

La planeación y ejecución pedagógica del presente trabajo de investigación está enmarcada bajo principios y criterios del Modelo Desarrollista. A la luz de las propuestas conceptuales de éste modelo y en concordancia con el Modelo para la comprensión de Pirie y Kieren, el estudiante asume un papel activo y reflexivo en el procesamiento y adquisición de la información, interpretando y verificando acontecimientos, en un esfuerzo de atribuir significado a las actividades que se le proponen. Así pues, actividades de intervención, sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilita el trabajar en un ambiente donde sea posible la discusión y la argumentación, la visualización y la confrontación del contenido enseñado, favoreciendo el desarrollo y evolución en la comprensión de los conceptos, en éste caso el de derivada como aproximación local.

Por un lado, las actividades que se proponen en el trabajo presuponen en el estudiante el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos como el de función, variable, límite, continuidad, aproximación, entre otros, y en procedimientos algorítmicos y algebraicos que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma se amplía el campo correspondiente al Pensamiento Variacional, por cuanto su estudio inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes. De otro lado se espera que el estudiante haga uso de la geometría para representar visualmente conceptos y procesos y, a partir del análisis, interpretación y relación de éstos, él pueda desarrollar pensamiento y comprensión en la medida que reconoce las propiedades y elementos constitutivos del objeto de estudio. En este sentido, la mayoría de las actividades están encaminadas a que el estudiante pueda reconocer las características del objeto matemático, en este caso el concepto objeto de estudio, utilizando diferentes recursos didácticos que posibiliten la comprensión de los diferentes registros de representación y validación de los elementos asociados a este.

Resumiendo, la metodología basada en el Modelo Desarrollista, busca en primer lugar que el estudiante aprenda haciendo. Es importante la experiencia de éstos con el objeto de estudio, puesto que los hace progresar continuamente, desarrollarse, evolucionar secuencialmente en las estructuras cognitivas para acceder a conocimientos cada vez más elaborados, para ello se utilizó como estrategias de trabajo de aula e instrumentos de validación y verificación del conocimiento, los mapas conceptuales propuestos por Joseph Novak, los diálogos personalizados con los estudiantes y la incorporación del software dinámico Geogebra ®.

2.2.2 MAPAS CONCEPTUALES

Los mapas conceptuales se han convertido en un instrumento para identificar la progresión del conocimiento de un individuo frente a un contenido específico, en la medida que permite visualizar las ideas o concepciones y las relaciones jerárquicas que pueda establecer entre los mismos.

Esta herramienta pedagógica se utilizó en el presente trabajo como estrategia de aprendizaje y como elemento de diagnóstico y de gestión del conocimiento, por la posibilidad que ofrece para personalizar y evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

Joseph D. Novak y D. Bob Gowin (1988) plantean que los mapas conceptuales tienen por objeto representar las relaciones entre conceptos en forma de proposiciones y tienen la particularidad de dirigir la atención, tanto del estudiante como del profesor. Argumentan que se produce más fácilmente un aprendizaje significativo cuando los nuevos conceptos o significados conceptuales se engloban bajo otros conceptos más amplios y cuando a través de esta técnica se pone de manifiesto conceptos y proposiciones.

Puesto que los mapas conceptuales constituyen una representación explícita, permiten a profesores y estudiantes intercambiar sus puntos de vista sobre la validez de un vínculo proposicional determinado, o darse cuenta de las conexiones que faltan entre los conceptos y que sugiere la necesidad de un nuevo aprendizaje. Además, ayudan al que aprende, a hacer más evidentes los conceptos claves o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugieren conexiones entre los conocimientos y los que ya trae el estudiante. En ese sentido, la elaboración de mapas conceptuales puede ser una actividad creativa y puede ayudar a fomentar la creatividad y el aprendizaje colaborativo(Novak & Gowin, 1988).

2.2.3 LAS TIC Y EL SOFTWARE DINÁMICO: GEOGEBRA ®

En la actualidad las herramientas tecnológicas de la información y la comunicación han producido un cambio significativo en el comportamiento y desarrollo cognitivo del individuo, transformando los procesos educativos y la forma como se produce el proceso de aprendizaje, condicionando en el ámbito escolar los roles de los profesores y los estudiantes.

Organismos internacionales como la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura), así como las dependencias que formulan la política educativa en nuestro país, como el MEN (Ministerio de Educación Nacional), coinciden en señalar las deficiencias e insuficiencias de los resultados educativos. Se cuestiona, especialmente, la calidad y pertinencia de los aprendizajes, que no parece corresponder con las demandas del mundo contemporáneo.

El aprendizaje y el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante, como el razonamiento, la comprensión, la abstracción, entre otras, se ha convertido en uno de los mayores desafíos de la sociedad, por ello se han desarrollado propuestas orientadas a la incorporación de nuevos y variados métodos de enseñanza o de las nuevas tecnologías, de tal manera que se pueda lograr en el estudiante una mayor integración del conocimiento, la capacidad de resolver problemas acertadamente, fomentar el trabajo colaborativo e incentivar la autonomía y la creatividad.

La UNESCO aplica una estrategia amplia e integradora en lo tocante a la promoción de las TIC en la educación. El acceso, la integración y la calidad figuran entre los principales problemas que las TIC pueden abordar, al éstas contribuir al acceso universal a la educación, la igualdad en la instrucción, el ejercicio de la enseñanza y el aprendizaje de calidad y el desarrollo profesional de los docentes.

La UNESCO (2004) ilustra que del mismo modo como la tecnología ha inducido cambios en todos los aspectos de la sociedad, también está cambiando nuestras expectativas acerca de lo que los estudiantes deben aprender para funcionar de modo efectivo en la nueva economía mundial. Los alumnos deberán moverse en un entorno rico en información, ser capaces de analizar y tomar decisiones, y dominar nuevos ámbitos del conocimiento en una sociedad cada vez más tecnológica. Deberán convertirse en estudiantes de por vida, colaborando con otros individuos para realizar tareas complejas y utilizando de modo efectivo los diferentes sistemas de representación y comunicación de conocimiento. Para que los estudiantes puedan adquirir el conocimiento y las habilidades esenciales en el siglo XXI, deberá pasarse de una enseñanza centrada en el profesor, a una centrada en el alumno (UNESCO, 2004).

En la cumbre Mundial de la Sociedad de la Información, organizada por la ONU en el 2003, se reconoce que las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) tienen inmensas repercusiones en prácticamente todos los aspectos de la vida diaria. El rápido progreso de estas tecnologías brinda oportunidades sin precedentes para alcanzar niveles más elevados de desarrollo (Echeverría, 2008).

En el campo de la educación matemática, la incorporación de las TIC como actividad dinámica, genera un ambiente en el que el estudiante tiene oportunidad para aprender a producir demostraciones formales a través de la exploración dinámica que proporcionan los sistemas computacionales. La utilización de éstos y de los software interactivos para la modelación y exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, deben permitir la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

Una de las herramientas dinámicas utilizadas en el ámbito computacional, es el Geogebra ®, software matemático interactivo y libre (respeta la libertad de todos los usuarios para ser usado, copiado, estudiado y distribuido de varias formas), creado para la educación en colegios y universidades por Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores en la universidad de Salzburgo en el año 2001. Escrito en Java, fácil de utilizar y disponible en múltiples plataformas. Es un procesador geométrico y algebraico, que reúne geometría, estadística, algebra y cálculo, el cual es un recurso didáctico útil y enriquecedor en la práctica de la docencia de las matemáticas; puesto que permite la construcción, visualización y el trazado dinámico de objetos matemáticos.

El instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ® se utilizó para exponer y justificar los componentes conceptuales de la derivada por medio de métodos geométricos. Diferentes actividades propuestas de simulación, contrastación, exploración, verificación y relación conexa entre la geometría y el cálculo, especialmente entre la recta tangente y la derivada, fueron desarrolladas por los estudiantes participantes en el presente trabajo de investigación.

2.3 OTROS MODELOS QUE SE UTILIZAN EN LA INVESTIGACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS IMPLICADOS EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS COMPLEJOS

2.3.1 MODELOS COGNITIVOS.

A continuación se va a exponer brevemente algunos de los modelos que se hacen referencia en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de la derivada en su componente geométrico, estos modelos permiten describir teóricamente la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y la manera como se da el proceso de construcción del saber.

La adquisición de conceptos matemáticos avanzados y el proceso de construcción de los mismos, exige en los estudiantes un funcionamiento cognitivo superior, especialmente en el desarrollo de las capacidades de razonamiento, abstracción, análisis y representación de los contenidos. La problemática de la presente investigación está inscrita en tal propósito, en el de promover niveles de comprensión que atañen, primordialmente, a la conceptualización de la derivada en el campo geométrico y que se constituye en uno de los conceptos matemáticos más complejos de la matemática avanzada.

Aunque se hace necesario aclarar que la comprensión de los objetos matemáticos no se debe sólo a la complejidad del contenido abordado, sino que también es necesario abordar los procesos cognitivos de construcción de éstos en el estudiante y la forma como son diseñados e introducidos de manera didáctica en la clase por el docente. De ahí que se encuentren investigaciones que establezcan modelos que no sólo estén interesados en ofrecer estrategias de intervención en el aula sino que también permitan describir la naturaleza del conocimiento y formación del pensamiento matemático en los estudiantes.

Dos investigadores D. Tall y S. Vinner, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado cuya intención busca clarificar la formación de las ideas y el lenguaje matemático en los estudiantes, es decir, el proceso de adquisición y representación de los contenidos matemáticos en la mente de los mismos hasta llegar a procesos más complejos de formalización. A propósito de la distinción que hacen de estas dos categorías, Tall y Vinner (1981) establecen categorías diferenciadoras entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo.

Por un lado, la definición del concepto, es considerado como una secuencia de palabras o una definición formal del mismo, condicionado en su mayoría por el proceso de evolución histórica. No obstante, la imagen del concepto matemático que tenga un estudiante, se considera como la estructura cognitiva de un individuo asociada al concepto y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos vinculados al concepto y que se van perfeccionando a través de la experiencia en el tiempo.

Tall y Vinner (1981) citados en Meel (2003) proponen que se debería utilizar el término *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados... Conforme se desarrolla la imagen del concepto, no necesita ser coherente en todo momento… Se llamará *imagen del concepto evocado* a la porción de imagen del concepto que se encuentra activa en un momento determinado. En diferentes momentos, pueden evocarse imágenes aparentemente conflictivas. Sólo cuando se evocan simultáneamente aspectos conflictivos habrá algún sentido real de conflicto o confusión.

Es clara la distinción que realizan entre la imagen del concepto y la definición formal del concepto y entre la imagen y la imagen evocada, éstas últimas permiten explicar cómo los estudiantes pueden responder de manera inconsistente, proporcionando evidencia de la comprensión en una circunstancia y careciendo de comprensión en otra. De acuerdo con Vinner (1981), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, es decir la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto. Aquí se hace importante resaltar, que se debe entender imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del estudiante, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, tabular, algebraica, numérica, simbólica,…).

Resumiendo, se puede decir que la imagen del concepto es una representación no siempre verbal que se asocia mentalmente al concepto, es decir, aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. El desarrollo de las representaciones mentales se da como resultado de una interiorización de las percepciones que se tengan del mismo.

En este mismo panorama teórico de las investigaciones cognitivas a cerca del conocimiento matemático superior, se hace prescindible citar la teoría de las representaciones semióticas, expuesta por Raymond Duval, en la cual afirma que la comprensión de un concepto matemático debe implicar la coherente articulación entre diferentes registros de representación y es menester del docente propiciar experiencias de aprendizaje que posibiliten la visualización del concepto matemático en diferentes registros.

Duval (1999, 2004) sustenta su teoría de las representaciones semióticas a partir del interrogante sobre si es necesario para el aprendizaje de las matemáticas, la utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario, éstos son sólo un medio cómodo y no más importante para el desarrollo de las actividades cognitivas. Es evidente que esta pregunta apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano y el aprendizaje de las matemáticas constituye el dominio o base donde ésta se sustenta. Para dar respuesta al anterior interrogante Duval (2004) plantea lo siguiente:

- No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, pues toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque no le encuentran ningún sentido práctico.

- Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Entendiendo como representaciones mentales todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto y todo aquello que le está asociado.

- La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales.

La coordinación de los diferentes registros de representaciones aparecen como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas (Duval 2004, p.189). Tomando en cuenta este planteamiento se observan prácticas en la enseñanza que reflejan las dificultades de aprendizaje. Se ha demostrado que la coordinación de representaciones no es automática, surgen dificultades en el momento de trabajar con las representaciones en el mismo registro y en diferentes registros. Desde una perspectiva teórica, en relación a la importancia de los registros, Duval (idem) señaló que la construcción de un concepto tiene que ver directamente con la articulación de sus representaciones.

Duval (1999), reconoció la importancia de las representaciones cuando aseguró que: *El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación* (p.17).

Señaló que las representaciones semióticas deben cumplir las siguientes funciones:

- la función de comunicación (intercambio social),
- objetivación (toma de conciencia)
- tratamiento (manipulación de la información).

También, afirmó que un registro semiótico de representación está condicionado a que éste permita tres actividades cognitivas fundamentales:

a) La formación de una representación identificable, sea esta una frase, dibujo, fórmula escrita, esquema, etc. Comprende una selección de rasgos y datos que se pueden representar; responden a reglas que permiten asegurar las condiciones de identificación y tenga la posibilidad de su utilización en otra actividad cognitiva.

b) El tratamiento de una representación lo cual significa la transformación de la representación en el mismo registro.

c) La conversión de una representación, que plantea la transformación de una representación de un registro a otro manteniendo la totalidad o la parte de la representación inicial.

En consecuencia, la interpretación de fenómenos para generar una representación semiótica de éste, puede provocar en el individuo interpretaciones encaminadas a su explicación en términos de diferentes representaciones. Un entendimiento de esta situación implicará la utilización de diferentes representaciones y tareas de conversión, que a su vez puede convertirse en un obstáculo para la comprensión de los conceptos. Aunque se encuentra que las investigaciones cognitivas en el campo educativo están cada vez más interesadas en la forma como aprenden los estudiantes los conceptos matemáticos, que ésta a su vez no suele coincidir con la forma, método o intención de quien enseña, que muchas veces dicha presentación intencionada de los conceptos puede ofrecer obstáculos cognitivos en el estudiante, que se ven no sólo reflejado en el poco dominio de los mismos, sino también en de las competencias propias del área.

Pero la dificultad en el proceso de comprensión, no es un asunto exclusivo de la enseñanza y de las estrategias o métodos en los que se apoya el docente para vincular el estudiante al objeto de conocimiento, es necesario revisar los mitos que se transmiten de personas a otras a través de los tiempos y cómo son asumidos como verdad absoluta. Nadie ignora que de todas las asignaturas que se imparten en las instituciones educativas, las matemáticas y en éstas, el pensamiento matemático avanzado, son las que representan en su comprensión mayor grado de dificultad para la mayoría de los estudiantes, sin importar el nivel escolar en el que éste se encuentre.

2.3.2 MODELO PARA EL RAZONAMIENTO.MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

2.3.2.1 INTRODUCCIÓN

En la educación matemática, debido a su complejidad conceptual, se hace necesario realizar esfuerzos de investigación y búsqueda de estrategias de aula que faciliten en el proceso de enseñanza y aprendizaje, la superación de las limitaciones y otros obstáculos asociados al aprendizaje del objeto matemático.

Por tanto, la enseñanza de las matemáticas ha de contribuir al desarrollo de la comprensión para alcanzar gradualmente mejores niveles de razonamiento, de análisis, de visualización y abstracción en los estudiantes. Por ende, el quehacer del docente no ha de estar exclusivamente enfocado en la búsqueda de contenidos, sino también en la forma conveniente de introducirlos en clase, para promover y favorecer procesos cognitivos y de pensamiento.

En las últimas décadas, la investigación en educación matemática ha otorgado un campo privilegiado a la creación de modelos que favorezca de un lado los métodos de enseñanza y que a su vez facilite la construcción de saberes. El modelo educativo de Van Hiele surgió como una propuesta que centra su interés en la promoción de niveles de razonamiento, ayudando al estudiante a superar gradualmente su capacidad de pensamiento para enfrentarse a la solución de problemas y de paso conducir a un aumento progresivo del razonamiento como proceso cognitivo de la complejidad en la construcción del saber.

2.3.2.2 PRESENTACIÓN DEL MODELO

Modelo que fue diseñado por los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele en 1957, como respuesta a la preocupación existente en éstos y demás profesores de su país por la comprensión y enseñanza de los contenidos geométricos.

Las ideas centrales de lo que fue el modelo educativo inicial creado por los Van Hiele y que prevalecen en la actualidad pueden enunciarse de la siguiente manera (Gutierrez, 1990):

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.

2. Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de su razonamiento.

3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero si se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo abarca el aspecto descriptivo mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento de los individuos, permitiendo valorar el progreso de estos, y el aspecto instructivo el cual marca pautas a seguir para asistir el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento. Su metodología activa con base en el constructivismo, tiene como finalidad la adquisición de competencias básicas en el área y la adecuación a distintos ritmos de trabajo, aunque el modelo tuvo sus inicios en geometría es extrapolable a los contenidos del análisis matemático que poseen un alto contenido visual y geométrico.

El modelo tiene tres componentes primordiales: En primer lugar está el *insight*, definido como comprensión, el cual se caracteriza porque el alumno logra entender cómo funciona y cuáles son las reglas de formación, en segundo lugar están los niveles de razonamiento y por último las fases de aprendizaje, las cuales están orientadas a ayudar a progresar a un estudiante desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, tanto los niveles como las fases, tienen propósito fundamental promover el *insight*, que según Van Hiele, se obtiene cuando una persona actúa adecuadamente en una situación y con intención(Esteban D, Vasco A, & Bedoya B, 2007)

Si bien la filosofía que inspira el modelo de van Hiele se refiere al razonamiento y aprendizaje de las matemáticas en general, tanto las observaciones íniciales de los esposos van Hiele como todos los estudios relevantes que se han hecho desde entonces, están centrados en la geometría (Gutierrez, 1990). Y aunque este modelo estuvo influenciado por Piaget, se separó de éste en ideas como:

- En el modelo de van Hiele es fundamental estimular a los niños para que asciendan de un nivel al siguiente, en cambio la teoría psicológica de Piaget, hace referencia al desarrollo del niño más que al aprendizaje.

- En su modelo afirma que el aprendiz desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento. Piaget no captó en toda su dimensión el papel que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro por parte del aprendiz.

- Concibe las estructuras de un nivel superior como el resultado del estudio de un nivel inferior, es decir, se alcanza el nivel superior si las reglas del nivel inferior han sido estudiadas y explícitas. En la teoría de Piaget, los niños nacen dotados de la estructura superior y sólo necesitan tomar conciencia de ella.(De la Torre Gómez, 2003, Volumen 24)

2.3.2.3 LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

En este apartado, sin la intensión de ser exhaustivos, pero no por ello dejando a un lado la rigurosidad, se destacan aspectos relevantes referentes a los niveles de razonamiento propuestos por van Hiele a cómo se presenta el grado de complejidad de los objetos que son aprendidos por los estudiantes de acuerdo a su nivel de formación escolar.

Así pues, los niveles de razonamiento no dependen del desarrollo biológico del estudiante, en su lugar, están relacionados con las experiencias de aprendizaje a las que ha sido expuesto a lo largo de su historia académica con respecto al concepto objeto de estudio. Los niveles permiten reconocer la forma en que el estudiante asimila y desarrolla diversas actividades a partir de un concepto abordado.

En éste sentido, los niveles son una estratificación del razonamiento humano y su presencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje es bastante evidente en los actores involucrados, en el marco de los problemas de comprensión que atañen, primordialmente, la complejidad de los conceptos abordados.

Según Gutiérrez (1990), De la Torre Gómez (2003) y Esteban (2007), las siguientes son las principales características que permiten reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su puesta en escena en el acto educativo en el aula de clase:

Nivel 0, predescriptivo:

Los estudiantes reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden aprender el empleo de cierto vocabulario para identificar algunas figuras, pero no identifican explícitamente las propiedades de la figuras.

Nivel 1, de reconocimiento visual:

Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen. Perciben las figuras como objetos individuales, no están en capacidad de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase, o sea interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades. En muchas ocasiones las descripciones de las figuras se basan en su semejanza con otros objetos, no necesariamente geométricos, que conocen.

Nivel 2, de análisis:

Los estudiantes se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal. A demás de la observación para reconocer las propiedades matemáticas pueden deducir la existencia de otras generalizándolas a partir de la experimentación. No obstante no se encuentran en capacidad de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. Este nivel es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar “matemático” pues es el primero en que el estudiante se encuentra en capacidad de descubrir y generalizar propiedades que aún no conocían, pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

Nivel 3, de clasificación y relación:

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes. No obstante sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración. Los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas. Al alcanzar este nivel los estudiantes habrán adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. En efecto, la capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, este avance en la habilidad de razonamiento, no es más que un paso intermedio en dirección a la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales.

Nivel 4, de deducción formal:

El estudiante puede entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones ya cobran sentido y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación. Puede comprender la estructura axiomática de las matemáticas, aceptan la posibilidad de llegar a un mismo resultado desde distintas premisas.

En éste nivel se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se está estudiando, es decir comprenden las propiedades que compone un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

2.3.2.4 CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES.

La jerarquización y secuencialidad de los niveles. Los cuatro niveles representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático que puede usar un estudiante, cada nivel se apoya en el anterior. Los niveles 1, 2 y 3 hacen referencia a habilidades que todavía no saben usar; más concretamente trata de habilidades que apenas comienzan a adquirir pero de las cuales todavía no son conscientes, sobresaliendo así su estructura recursiva.

La relación entre el lenguaje y los niveles. A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico, una palabra tiene significados diferentes en los distintos niveles, además dos personas que razonan en diferentes niveles no podrán comprenderse. Cada nivel se caracteriza por determinadas habilidades de razonamiento, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel de razonamiento cuando se tenga un dominio adecuado de todas esas destrezas.

Van Hiele (citado en De la Torre Gómez, 2003) afirma con firmeza que la obtención de cada nivel es el resultado de un proceso de aprendizaje, aunque éste, en algunas ocasiones, pueda ser incidental y no guiado, e insiste en que sería un error el suponer que se pueda lograr un nivel por mera maduración biológica.

2.3.2.5 LAS FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE.

Las fases de aprendizaje según el modelo, constituyen un esquema para organizar la enseñanza, contribuyendo a que el alumno progrese desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, las fases son cinco y se clasifican en:

Fase1, información: En esta fase se trata de hacer un diagnóstico de ideas previas sobre el objeto de estudio y se puede introducir términos que se van a necesitar para unificar el lenguaje, se trata de una fase de toma de contacto; el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear y el material que se va a utilizar.

Fase 2, orientación dirigida: A partir del diagnóstico obtenido en la anterior fase, se crean una serie de tareas unipaso encaminadas a que los aprendices alcancen un mínimo de competencia sobre el tema de estudio. El objetivo es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos, propiedades del objeto de estudio. Aquí se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele (citado en Gutiérrez 1990) afirma que si en esta fase las actividades son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior.

Fase 3, explicitación: Aquí se hace necesario que el aprendiz exponga, ordene sus ideas, no basta con saber, sino que tiene que saber explicarlas e intercambiar experiencias de cómo han resuelto las actividades. Los puntos de vista divergentes harán que se tenga que analizar con cuidado sus ideas o las de su compañero. Esta fase tiene como tarea conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nivel de razonamiento nuevo que están empezando a alcanzar. Esta no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes.

Fase 4, orientación libre: Es el momento de investigar, se da la introducción de problemas-temas destinados al afianzamiento, diferenciación y apoyo, es en esta fase en la que los estudiantes deberán aplicar los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. Los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varias alternativas de resolución.

Fase 5, integración: A lo largo de las fases anteriores los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos, se da la recopilación del trabajo de los estudiantes, se ordena los resultados y se hace una explicación final del objeto de estudio, se da el debate con la resolución de dudas y aclaración de términos relacionados con el lenguaje apropiado. Completando esta fase, los estudiantes tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrá adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Van Hiele (citado en De la Torre Gómez 2003) anota que, en un proceso de aprendizaje guiado, la ayuda del maestro es principalmente indirecta y proviene de la situación didáctica creada por él, con la cual logra acelerar el desarrollo del proceso de razonamiento del estudiante.

2.4 MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN: EL MODELO PARA LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE PIRIE Y KIEREN.

2.4.1 MODELO PARA LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En esta parte del trabajo, la intención es presentar la aproximación de algunas conceptualizaciones en referencia a la evolución y al tratamiento del proceso de la comprensión, necesarias de abordar para llegar al desarrollo teórico del Modelo propuesto por Piere y Kieren. Fundamentalmente, se pretende describir algunos aspectos sobre el concepto de compresión matemática, los cuales pueden ofrecer mejores elementos de lectura para caracterizar e identificar la fuerza instrumental que presenta el modelo de Pirie y Kieren para valorar el crecimiento de la comprensión.

2.4.2 ENFOQUES SOBRE EL CONCEPTO DE LA COMPRENSIÓN

En la actualidad no es necesario profundizar mucho para encontrar un gran sinnumero de textos, documentos, informes e investigaciones en donde se ofrezcan profundas y bien logradas referencias en torno a la definición del concepto de comprensión en diferentes disciplinas del saber, valga nombrar: la Psicología, la Filosofía, la Sociología y la Epistemología principalmente. A continuación, se presenta una breve revision que permite, en lo sucesivo, un acercamiento al conocimiento del concepto dejando entrever claramente su importancia y complejidad y que permiten, a su vez, situarla en el contexto de la investigación en general y en particular en el ambiente de la investigación matematica.

Los siguientes son enfoques referenciados por Romero (2004), en su trabajo Diágnostico y Evaluación de la Comprensión del Conocimiento Matemático y que sirvieron de soporte teórico para el presente trabajo de investigación:

Enfoque Filosófico

Para el momento histórico en que la ciencia era considerada desde una marcada bipolaridad, las ciencias de la naturaleza y las ciencias del hombre, algunos de los más destacados filosofos contemporaneos, permitieron identificar la Comprensión a partir de dos tendencias, dos grupos, dos dimensiones distintamente diferentes: una metodologica y otra de carácter histórico-ontológico.

En la primera, la metodológica, la comprensión es entendida como un método desde el cual es posible fundamentar las ciencias del espiritu, presupuestos teoricos, en los que no era dable la arbitrariedad en la interpretación. En su lugar y consecuentemente con esto, las diferentes realidades culturales debían estar en una universalidad interpretativa. Por tanto, la comprensión del conocimiento tenía una característica histórica que no demandaba justificación.

En terminos de Abel (1964) la comprension se entendía, principalmente, como un método particular para explicar la conducta humana. Es decir, una forma de aprehensión de los objetos de las ciencias del espíritu, pero a su vez también como una manera para fundamentar la explicación de la ciencia natural, originando con ello una acentuada disyuntiva entre explicar y comprender. Según Wright (1987) la explicación y la comprensión son métodos distintos. En este sentido, Ferrater (1994) plantea que la comprensión tiene que ver más con las distintas posiciones adoptadas en relación a la explicación y a la comprensión propiamente dicha. Para Habermas (1981) la comprensión ha de ser entendida como la racionalidad de la acción. Morín (1994) introduce una nueva categoría, la antroposocial, la cual ve como pertinente y necesaria abordar la comprensión como una manera fundamental de conocimiento psicológico y social.

Enfoque Histórico-Ontológico.

En esta perspectiva se considera la Comprensión como uno de los rasgos fundamentales del existir humano, dimensión ontológica, y de su existencia histórica, dimensión histórico-ontológica. Por tal efecto, la Comprensión es una determinación fundamental y necesaria de la realidad humana, es un modo de ser. Acorde a esto Gadamer (2000) afirma que las vivencias guardadas en la memoria se configuran en el recuerdo para posteriormente intervenir en la Comprensión del significado. De otro lado y para fundamentar el sentido histórico-ontológico de la Comprensión, Habermas (1981) advierte que esta demanda una doble participación en la interpretación: la del sujeto que interviene y la de las acciones del otro, el otro como ser humano.

Enfoque Epistemológico

La preocupación de este enfoque no se encuentra orientada a determinar la habilidad para desempeñar una acción, pues Comprender no es, exclusivamente, demostrar capacidad para realizar una determinada acción practica o identificar el *cómo* hacer algo. Lo que si bien es cierto es que la Comprensión, en tanto proceso, se alcanzaría en una etapa posterior a la acción, la realizada por el sujeto sobre el medio que le rodea, es decir, cuando el "hacer" se transforma en "conocer". El enfoque sustenta sus referencias en Piaget (1981) y su propuesta de asimilación y acomodación cognitiva en la que el progreso del conocimiento es una auto-regulación que proporciona al sujeto la sensación de una relativa Comprensión. En igual dirección, en apoyo a estos presupuestos Toulmin (1997) propone que el proceso de la Comprensión consiste en elaborar una explicación de las capacidades, procesos y actividades a través de las cuales el ser humano adquiere inteligibilidad de la naturaleza en consonancia con las ideas y concepciones que presentan las otras disciplinas al proceso del conocimiento.

Enfoque Psicológico

A diferencia de la psicología experimental, caracterizada por desarrollar formulaciones enteramente descriptivas, la psicología basada en la comprensión apuntala su interés hacia la naturaleza explicativa del proceso para proporcionar aclaraciones e interpretaciones de los fenómenos psíquicos que hacen presencia e intervienen en el proceso. Desde este punto de vista, la Comprensión es el proceso por medio del cual es posible identificar haciendo objeto de análisis la operación de estructuras mentales inherentes al ser humano, está según Arnold, Eysenck y Meili (1979) deviene en método de conocimiento científico que se aplica para poder hacer visible y presentar testimonio sobre la conducta y las acciones del otro.

Para este enfoque la Comprensión puede entenderse como la recepción consciente de un contenido de experiencias vitales en la que intervienen los sentidos y las estructuras mentales del individuo, quien a su vez las emplea como instrumentos ordenadores de esos eventos existenciales en un contexto de significación. Según esto, la Comprensión presenta la cualidad de ordenar las experiencias de los sujetos y encontrarse relacionada a lo significativo (Dorsch 1985)

En este orden de ideas Morin no duda en proponer dos sentidos para la Comprensión. En el primero supone que esta es un conocimiento que permite la capacidad de aprehender todo aquello de lo que es posible hacer una representación concreta, en tal sentido, comprender es representar. Mientras que en el segundo el perfil de su planteamiento hacia el conocimiento de las acciones realizadas por el sujeto, por tal razón la Comprensión se entiende como el modelo fundamental de conocimiento para cualquier situación del actuar humano en la que cobran presencia la subjetividad, la afectividad, los sentimientos y pensamientos de un ser que se percibe como individuo o como sujeto humano.

La comprensión, como proceso, entonces ha de prestar atención y tener en cuenta la dimensión cognoscente y humana propia de cada individuo; según como lo propone Schank (1998), comprender consiste en procesar experiencias nuevas a partir del aparato cognitivo del cual dispone el ser humano. Y supone, por tal, recordar el fenómeno más recientemente experimentado y estar en capacidad de emplear todas las expectativas generadas por ese recuerdo y que ayudan en el procesamiento de la experiencia actual.

En último lugar White y Gunstone (1992) dejan evidenciar una marcada contrariedad hacia el intento de ofrecer una definición al proceso de Comprensión, puesto que su marcada complejidad no lo permite, salvo si opera en ella una especie de reducción y restricción sobre los procedimientos desde los cuales es valorada. No obstante, proponen algunas descripciones, que para el sentido de la investigación presentan relevante importancia, estas se encuentran basadas en las siguientes categorías:

- *Comprensión de conceptos y disciplinas:* en este ámbito la comprensión no puede verse como una dicotomía del todo o nada, sino como un continuo sin límites, multidimensional.

- *Comprensión de elementos simples de conocimientos:* ante una regla o un algoritmo se alcanza comprensión cuando se está en capacidad de explicar el procedimiento inherente en lo tocante a esa regla o a ese algoritmo
- *Comprensión de comunicaciones extensas:* la comprensión debe entenderse como un proceso de análisis de las palabras y de otros símbolos que permiten la construcción de significado, para tal efecto introducen una diferencia esencial entre la naturaleza de la comprensión de conceptos (o de elementos simples de conocimiento) y la naturaleza de las comunicaciones
- *Comprensión de situaciones:* a este respecto cobra importancia la capacidad para seleccionar la información relevante, explicar cómo y por qué surge esa situación y predecir qué sucederá en el transcurso futuro de la misma. es decir, para comprender una situación se requiere establecer un paralelismo entre la situación propiamente acaecida y las experiencias previas relacionadas.
- *Comprensión de personas*: Comprender la conducta de un sujeto supone estar en capacidad de explicar las acciones que éste realiza y de predecir las que podría realizar. A este respecto. explicación y predicción se convierten en elementos indicativos de la comprensión.

2.4.3 COMPRENSION EN EDUCACIÓN MATEMATICA

Desde algunas décadas atrás se ha venido presentando un creciente interés en la necesidad de direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia instrumentos que permitan, en alguna forma, según variados instrumentos, dar cuenta de la movilización de los niveles de comprensión en relación a objetos de estudio propios de la matemática avanzada.

Algunas investigaciones en educación matemática centran su quehacer, su inquietud, esencial, en esta dirección y orientan su pregunta problematizadora en esta orientación: ¿cómo proponer, diseñar y evaluar instrumentos que coadyuven a involucrar en la mejor manera la comprensión en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas? De tal suerte que, en la actualidad existe un denso abanico de proyectos, estudios y líneas de investigación que hacen de la comprensión el lugar común para afianzar reflexiones, discusiones e interpretaciones a partir de los derroteros y presupuestos de algunos marcos teóricos para caracterizar e identificar progresos o mejoras en los niveles de comprensión en las acciones pedagógicas, situaciones didácticas y experiencias de aula que fomentan en última instancia actitudes favorables hacia el estudio y el conocimiento de la matemática.

Dadas las circunstancias y exigencias sociales actuales, en cuanto a competencias y recursos, a las que se ven advocados los estudiantes, es indudablemente necesario hacer un reconocimiento de la importancia con la que debe ser mirada la comprensión en la enseñanza y fundamentalmente el aprendizaje de las matemáticas. La preocupación académica e intelectual en este sentido no cesa, su característica es permanecer en la continua búsqueda de los fundamentos teóricos, así como de los instrumentos metódicos que permitan sustanciales renovaciones y evoluciones significativas para la práctica del proceso educativo en experiencias de aprendizaje. Sin embargo, aún permanece abierto el paisaje de acciones y prácticas didácticas con el cual abordar posibles caminos de reflexión e interpretación al interrogante de fuerza mayor y capital importancia en el ámbito de la educación: ¿Cuál es la manera de enseñar más pertinente y adecuada para fomentar y facilitar Comprensión? ¿Existe esa manera? Probablemente este sea el paradigma a asumir.

2.4.3.1 PERSPECTIVAS DE LA COMPRENSIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la actualidad son diversas las perspectivas que han focalizado su estudio al ámbito de la Comprensión del conocimiento matemático. Las siguientes son las que destaca Romero (2004) como las más importantes:

Perspectiva de la posición representacionalista: el centro teórico de este enfoque es fomentar y profundizar en el estudio de teorías basadas en el concepto de la representación y en el modelo de procesamiento de la información desarrollado en el ámbito de la psicología cognitiva (Resnick y Ford, 1990), en la Semiosis y Pensamiento Humano, (Duval, 2004), en el marco de las representaciones múltiples, (Kaput, 1985) y en el Sistema representacional, (Nakahar, 1994).

Para esta perspectiva, la noción de representación encuentra fuertes vínculos con el concepto de comprensión. Los supuestos a partir de los cuales se sustenta esta teoría obedecen a los siguientes preceptos: las ideas matemáticas, gracias a su naturaleza abstracta, necesitan ser representadas en alguna forma para comunicarlas y, posteriormente, para poder orientar el pensamiento sobre ellas.

Todo proceso de comunicación, en tanto acto del lenguaje, requiere el empleo de representaciones externas, portadoras de significado y la movilización de las representaciones internas las cuales son necesarias para generar operaciones y funciones mentales(Resnick y Ford, 1990). Por tal razón, en orden a como lo expresan Hiebert y Carpenter (1992), debe existir una condición de relación entre las representaciones externas y las representaciones internas imaginando a estas últimas como una especie de redes y conexiones en términos de estructuras o telas de araña constituidas por nodos.

Es así como el aumento de la comprensión puede ser interpretado como el crecimiento de las redes de representaciones mentales, que se derivan gracias a la incorporación de otras, diferentes representaciones internas a la red ya existente o también porque se presentan reestructuraciones o reorganización de esta a causa de la creación de nuevos vínculos entre las representaciones. En este sentido las redes internas, y por ende la comprensión, son entendidas como un constructo de carácter dinámico.

Perspectiva de la perspectiva histórico-empírica de Sierpinska (1990,1994): en la que, a partir de los marcos de su observación, se hace obligatorio visibilizar diferentemente el proceso de la Comprensión teniendo en cuenta las dificultades que emergen toda vez que se da inicio al acercamiento de la construcción de un concepto, independiente de cual sea el escenario o la intención para hacerlo. Tal como se plantea en Meel (2003), para esta perspectiva, la Comprensión, no obstante su complejidad, consiste en la superación de obstáculos cognitivos.

Por su parte Romero (2004) sostiene que la preocupación de esta autora no radica en ofrecer una definición o caracterización precisa sobre el proceso de la comprensión, por tal, su iniciativa no pretende ser un modelo como tal, en el sentido estricto del término; su propuesta se encamina mejor a fundamentar la comprensión como acto, como una experiencia en movimiento en la que se identifican los siguientes componentes:

- el sujeto de comprensión o sujeto que comprende
- objeto de comprensión o lo que se intenta comprender
- la base de la comprension o el sustento para realizar un nuevo acto de comprensión.
- las operaciones mentales básicas con las que se vincula la base con el objeto de comprensión. En este aparte, defiende, además, la importancia y el valor didáctico y cognitivo de las siguientes operaciones mentales: identificación, discriminación, generalización y síntesis.

En definitiva, a la luz de este enfoque se entiende la comprensión, además, de un acto, como un proceso mediante el cual se pueden presentar contribuciones reveladoras que permitan entender mejor las dificultades relacionadas con la Comprensión matemática del estudiante y en apreciar cómo los sujetos comprenden las matematicas en su contexto.

Perspectiva Significado y Comprensión: para esta propuesta la comprensión de un objeto matemático exige del sujeto el reconocimiento de una finalidad para resolver una clase de situaciones-problemas, que deben resolverse no exclusivamente por aplicación o desarrollo de actividades mentales; es decir, no es posible dejar de lado, ni restarle importancia a otros factores, que como los sociales y culturales tienen su fuerte incidencia al momento de comprender esos objetos. Según Díaz-Godino (2000), y Díaz-Godino y Batanero (1994) es menester reconocer la elevada complejidad de los objetos matemáticos y recomiendan pensar "qué significa comprender" intentando la búsqueda de sentidos en otras direcciones que puedan favorecer mayormente algunas acciones y prácticas para la didáctica de las matemáticas, orientadas especialmente a determinar aspectos de los objetos matemáticos que sean de mayor conveniencia y ayuden, efectivamente, en la comprensión de los estudiantes.

En esta dirección, frente a los conceptos y la presentación de los objetos de estudio es indispensable reconocer los niveles necesarios que permitan identificar el posible alcance de una adecuada comprensión en estos. Una forma de facilitar estos efectos es mediante el empleo de prácticas significativas (en referencia a las acciones, observables o no, a las que acude una persona para resolver una situación o un problema), y en el significado de un objeto-institución (en involucrar las personas que realizan prácticas sociales compartidas en una misma situación)

Perspectiva Significado y Comprensión del Modelo de Proceso de Koyama (1993, 1997, 2000): El objetivo principal de este modelo, respecto a la comprensión, se encuentra en consonancia con la aproximación conceptual de los modelos previos, al considerarla como un proceso en movimiento a partir del cual es posible clarificar, en alguna forma, estados de comprensión en los estudiantes cuando se los concibe como sujetos de interacción en situaciones de enseñanza y aprendizaje en referencia a un objeto de estudio. En Romero (2004, p.52), el modelo se intenciona para facilitar el progreso de la comprensión, a la vez que se presta, como instrumento de efectiva y fundamental utilidad para el profesor de matemáticas.

De este modelo conviene tener en cuenta lo siguiente: un objeto de estudio es comprendido cuando se conecta a una red interna de conocimientos previamente adquiridos, a un esquema o a una estructura cognitiva ya existente. Por tal razón si se considera la comprensión como una actividad dinámica interna, es necesario involucrar métodos para exteriorizarla.

Koyama propone un modelo para la comprensión de las matemáticas, denominado Modelo de Procesos de dos Ejes, desde el cual se intenta distinguir los elementos reales que intervienen en la comprensión en los estudiantes. Las características del modelo se sustentan principalmente en las siguientes dos componentes: cuatro variables jerárquicas de enfoque hacia la comprensión en el eje vertical y tres etapas orientadas al aprendizaje en el eje horizontal (intuitiva, reflexiva y analítica). El estudiante progresa, no necesariamente en forma lineal, de un determinado nivel de comprensión a otro superior.

Perspectiva la comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto: El acto de comunicar, al emplear conceptos, implica mínimamente, una acción de palabra y otra de escucha. En efecto, hay presente una acción mediada por símbolos lingüísticos y sonoros que inciden en lo fundamental para que quien habla y, a su vez, quien escucha, puedan alcanzar el efecto último de la comunicación: llegar a un adecuado nivel de comprensión en la transmisión y recepción de la información.

Ahora bien, toda vez que es empleado un concepto, en una interacción humana, ya sea en el aprendizaje de las matemáticas o en cualquier otra acción comunicativa, es necesario tener en cuenta, en lo general, que las palabras son quienes vehiculan tránsitos de imaginarios en relación a ese concepto. Por tal, existe la tendencia a asociar una imagen mental con el concepto cuya función es la de permitir una aproximación, aunque no siempre fiable, a la definición del concepto.

En este sentido, es importante destacar el esfuerzo de los autores Tall y Vinner, quienes con su marco teórico, el concepto imagen y el concepto definición, amplían el horizonte de la comprensión en la Educación Matemática. De acuerdo con Meel (2003, p.228) los autores afirman que "un estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto- la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto- por tal deberíamos emplear el término *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados".

Siempre que un estudiante se aproxima a un concepto no lo hace partiendo desde cero, como tabula rasa, olvidando sus concepciones previas o pasando por alto su biografía académica. Por el contrario, acude a imágenes mentales y "puede razonar a partir de su concepto imagen (en este caso, sus conclusiones no siempre son verdaderas), o apelar al concepto definición, pudiendo darse el caso en el que no reconozca el concepto estudiado en muchas situaciones en las cuales se expone" (Esteban, 2006). La comprensión, según referencia en Villa- Ochoa (2011), se alcanza cuando existe consistencia entre la imagen que el estudiante haya elaborado y la definición formal propia del concepto.

Perspectiva la comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales: En Meel (2003, p. 233) Sfard (1991) define los cimientos de las matemáticas como dos entidades: Concepto y concepción. Es decir, la forma en que los estudiantes pueden admitir las nociones matemáticas *operacionalmente* como procesos y *estructuralmente* como objetos abstractos. Un concepto se refiere a una idea oficial definida matemáticamente en la que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del estudiante, causados por el concepto. Estas dos definiciones se relacionan con el análisis de Vinner (1991) sobre la definición del concepto formal y la descripción por parte de Tall y Vinner (1981) de una imagen de concepto. Sfard (1991) señala que los conceptos matemáticos radican en una dualidad de concepción, por lo que se pueden visualizar como estáticos, instantáneos e integradores – estructurales o dinámicos, secuenciales y detallados- operacionales-.

Una concepción operacional, a pesar de que es difícil de describir, se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Por otro lado, una concepción estructural es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional.

Sfard propone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras, en vez de representaciones verbales que requieren de un proceso serial. Estas imágenes mentales permiten al estudiante realizar ideas abstractas más tangibles y le permite considerarlas, incluso, como entidades físicas en las que las operaciones relacionadas con ellas ocurren por completo en los ojos de la mente.

2.5 EL MODELO DE PIRIE Y KIEREN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el proceso de construcción del conocimiento es importante considerar la creación de estrategias que permitan una experiencia significativa en relación al objeto estudio, puesto que así se contribuye continuamente al desarrollo y evolución secuencial en las estructuras cognitivas del estudiante para que pueda acceder a conocimientos cada más elaborados y complejos. En este sentido el modelo de Pirie y Kieren permite herramientas que posibilitan hacer lectura y relacionar conceptos para de esta dar cuenta del crecimiento en la comprensión.

El modelo se expone como teoría a finales de la década de los ochenta por Susan Pirie y Thomas Kieren quienes "teniendo en cuenta el constructivismo social de Vigotsky y la Epistemología genética de Piaget" (Rendon, 2011), y proponen un marco teórico a partir del cual es posible identificar la evolución en la comprensión de un objeto de estudio matemático. Por tal, es una teoría de carácter constructivista porque, según Lyndon (2000), el estudiante debe reflexionar y reorganizar sus constructos personales para poder construir nuevas estructuras conceptuales. El fundamento sobre el cual se postula la teoría es llegar a reconocer algunos niveles de la evolución de la comprensión matemática. Para ello, los autores, se sustentan, inicialmente, en el concepto de comprensión definido por Glasersfel:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (Meel, 2003, p.235)

A partir de esta definición Pirie y Kieren, proponen un punto de vista diferente, al de sus contemporáneos, respecto al estudio de la evolución de la comprensión matemática. Para ellos, la comprensión puede ser vista como una estructura geométrica en forma de anillos, constituida por elipses o niveles sucesivos, en donde lo dinámico, lo no lineal y la recursividad se convierten en los elementos de suma importancia para un proceso de aprendizaje que a su vez deja de ser jerárquico.

El principal interés del modelo se encuentra dirigido a identificar la evolución de la comprensión que evidencia el estudiante respecto a un objeto de estudio. Sin embargo, es conveniente observar que, según lo propone Lyndon (2000), para el modelo, la comprensión no es un proceso estático o exclusivamente mental, también se caracteriza por las interacciones con los demás y con el medio ambiente social y didáctico, así como también, por las diferentes situaciones que se manifiestan en una acción pedagógica y no como el resultado de la misma.

De acuerdo con esta teoría, el estudiante participa activamente en el proceso de construcción y evolución de la comprensión a partir de los elementos y situaciones que le permiten los problemas matemáticos. Esta construcción es un proceso que tiene su génesis en el interés y necesidad del estudiante, en su compromiso continuo de promover sus estructuras de conocimiento.

El modelo acude a la observación y a la descripción de los factores que intervienen en la interacción de los estudiantes en relación con el contenido matemático, para identificar diferencias y progresos en la evolución de la comprensión. En conclusión, Piere y Kieren enfocaron su estudio en el elemento de la comprensión al relegar el contenido matemático, no es sólo saber que contenidos específicos enseñar y como introducirlos en clase, sino también identificar el estado actual del nivel de comprensión del estudiante.

2.5.1 LOS NIVELES DEL MODELO Y SUS CARACTERÍSTICAS

Una de las principales demandas presentes en el proceso del aprendizaje de las matemáticas, es el tratamiento de la conceptualización formal, además de la motivación y movilización de algunas funciones mentales. En este aspecto, se hace complejo alcanzar, por el nivel de abstracción de sus elementos, en forma inmediata una comprensión de los diferentes tópicos del conocimiento matemático en general y los del pensamiento matemático avanzado, en particular en particular.

Por estas razones, es necesario acudir a un instrumento que pueda dar cuenta de la evolución de la comprensión de un objeto matemático, además, por la necesidad de llevar a cabo observaciones e interpretaciones de situaciones que permitan la posibilidad de hacer lecturas, en mayor medida, más ajustadas a la realidad de una experiencia de aula, para identificar, especialmente, algunas características relevantes a partir de las cuales la comprensión pueda ser entendida como proceso dinámico inherente a la experiencia personal de cada estudiante. La propuesta del modelo de Pirie y Kieren se orienta en este sentido.

El modelo destaca su interés en identificar la evolución de la comprensión matemática a través de ocho niveles a partir de los cuales es posible dar cuenta de los progresos de esa evolución sobre un concepto (objeto de estudio) específico del área de las matemáticas. En esta dirección los autores, según (Romero 2004, p. 50) afirman que:

"La comprensión matemática puede ser caracterizada como nivelada pero de forma no lineal. Es un fenómeno recursivo y la recursión sucede cuando el pensamiento se desplaza entre niveles de sofisticación. En realidad, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos de dentro y además, está obligado por los de fuera"

Niveles del Modelo

El modelo de Pirie y Kieren plantea ocho niveles o estratos de naturaleza anidada que estructuran la teoría y dan cuenta de la evolución y el progreso de la comprensión del estudiante con respecto al saber matemático, permitiendo identificar el grado de conocimiento y desarrollo de las estructuras cognitivas que intervienen. A continuación se presenta la estructura y las características para cada nivel, tal y como lo propone Villa-Ochoa (2011):

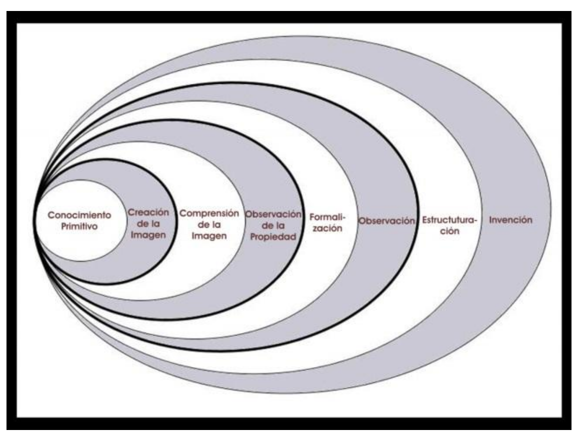


Ilustración 1. Evolución de la Comprensión según el Modelo.

Nivel 1. Conocimiento Primitivo (Primitive Knowing)

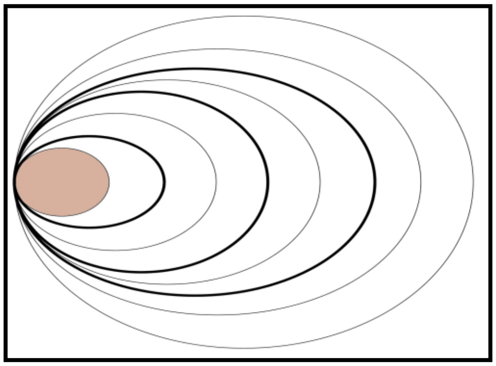


Ilustración 2. Nivel 1: Primitive Knowing

Es el nivel desde el cual empieza el modelo y su adjetivo primitivo no quiere decir conocimiento precario o nivel de conocimiento matemático bajo. En éste se ha de tener en cuenta el conocimiento básico o primordial presente en el estudiante. Son las concepciones previas que posee el estudiante y las herramientas o estrategias a las que acude para dotar de sentido o de acción a un evento que se le propone. En este sentido, el conocimiento se encuentra formado por todo lo que el estudiante ha construido previamente en su aprendizaje, gracias al desarrollo de sus experiencias en las situaciones reales, a sus ideas y concepciones hacia la matemática y al concepto objeto de estudio. Son los preliminares mentales a los que el estudiante acude para el desarrollo de una actividad procedimental o conceptual.

Pirie y Thom (2006) mencionan que, como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona; sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través unas acciones físicas, verbales o escritas.

Nivel 2. Construcción de la Imagen (Image Making).

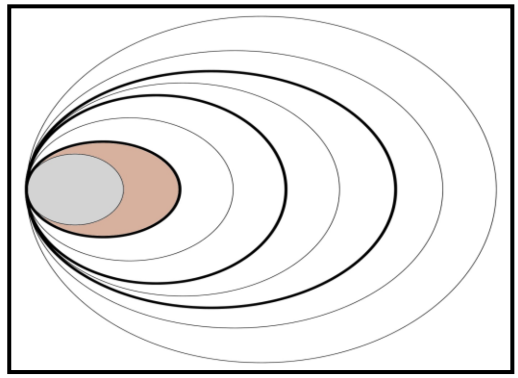


Ilustración 3. Nivel 2. Image Making

En este nivel el estudiante desarrolla actividades propuestas en diferentes tareas ya sean mentales o físicas, con la intención de promover concepciones iníciales o para profundizaren el concepto objeto de estudio. El estudiante puede realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Es aquí en donde se da inicio a la evolución de la comprensión puesto que se hacen diferenciaciones matemáticas a través de las acciones siempre sobre la base del conocimiento primitivo. Lo esencialmente importante del trabajo en este nivel radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas, no exclusivamente gráficas, y que puedan existir en forma verbal, mental, escrita o física.

Nivel 3. Comprensión de la Imagen (Image Having)

Pirie y Kieren (1992b) afirman que las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

En los dos primeros niveles se alude al término "imagen" que en su teoría Pirie y Kieren (1994), emplean para significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre algún tópico en particular, cualquier representación “mental”, no necesariamente visual o pictórica. Esta teoría postula que en la evolución de la comprensión matemática sobre un tópico particular, es un movimiento continuo, en donde el estudiante elabora, sostiene y extiende imágenes particulares.

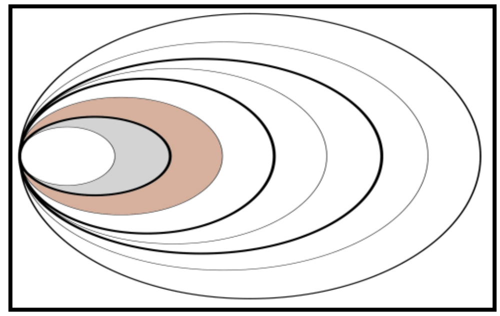


Ilustración 4. Nivel 3. Image Having

Nivel 4. Captación de la propiedad (Property Noticing)

Una vez que el estudiante haya construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas. En palabras de Thom y Kieren (2006, p. 190) este estrato es una forma de “*standing back*” "caminar atrás” y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento. Meel (2003, p.337) afirma que en este estrato se observan las propiedades construidas hasta el momento, las cuales se combinan para construir definiciones que pueden evolucionar y definir características particulares, mientras que se ignoran otros elementos del concepto.

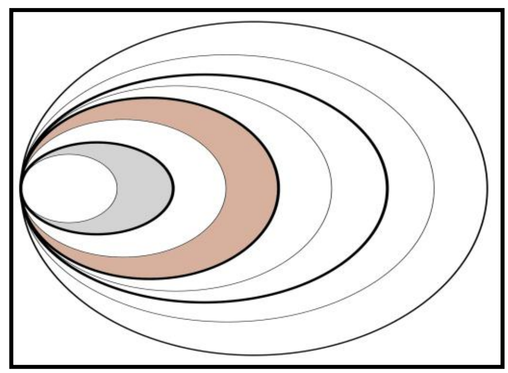


Ilustración 5. Nivel 4. Property Noticing

De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre *Image Having*y *Property Noticing*es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión. Quizás en este nivel, el aprendiz resalta generalidades de varias imágenes y desarrolla un concepto definición que incorpora imágenes múltiples.

Nivel 5. Formalización (Formalising)

El estudiante se encuentra en capacidad de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes. El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática adecuada. En palabras de Meel (2003):

El estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona.[...] la descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas (p.238).

Nivel 6. Observación (Observing)

En este nivel se asume que el estudiante posee la habilidad para considerar y realizar indagaciones sobre su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal. Se encuentra en capacidad de observar, estructurar y organizar procesos personales de pensamiento como también, reconocer las ramificaciones de tales procesos. Así mismo, en este nivel el estudiante ha progresado a la producción de verbalizaciones de los conocimientos del concepto formalizado.

El proceso de observación implica reflexionar sobre la coordinación de unas actividades de las matemáticas formales. Thom y Pirie (2006, p. 191) presentan una analogía entre estadios, así: *"Observing is to Formalising as Property Noticing is to Image Having"*

Nivel 7. Estructuración (Structuring)

Para este nivel el estudiante se encuentra en capacidad de tomar consciencia de las proposiciones y asociaciones y, entonces, las relaciones provenientes de las observaciones pueden ser explicadas por un sistema axiomático. Cuando se alcanza este nivel la preocupación por parte del estudiante no está exclusivamente centrada en un tópico en particular, sino más bien, él ha ubicado su entendimiento en una gran estructura y podrá concebir pruebas de propiedades asociadas con un concepto y examinar acciones desarrolladas en el concepto que provienen de otras propiedades lógicas. Siguiendo a Thom y Pirie (2006, p. 194) la *Estructuración* implica ser capaz de explicar o teorizar unas observaciones formales en términos de una estructura lógica. En este nivel, las observaciones generales sobre formalización de un tema objeto de estudio, se incluyen en una estructura matemática y ya no necesitan ser tratados como casos específicos de esa estructura.

Nivel 8. Invención (Inventising)

Según los planteamientos de Thom y Pirie (2006, p. 194) la *Invención* requiere que el estudiante rompa con las pre-concepciones que surgieron en la comprensión temprana, con el fin de plantear nuevas preguntas que pueden dar lugar al surgimiento de un concepto totalmente diferente.

El hecho de que este estrato sea denominado "invención" no quiere decir que en los niveles precedentes no puedan emerger creaciones o invenciones por parte de los estudiantes. En este nivel, el entendimiento matemático del estudiante se ve sin límites, imaginando y buscando más allá de la estructura corriente y contemplando la pregunta "¿qué pasa sí?" Este cuestionamiento resulta del uso del conocimiento estructurado del estudiante y que se toma como conocimiento primitivo para investigar preguntas que están más allá del dominio inicial del objeto de estudio.

Respecto a su Teoría, Pirie y Kieren (1991) señalan que es importante ser conscientes que los estadios, por sí mismos, no constituyen la comprensión, dichos estadios se nombran partes de un fenómeno dinámico en cual no tiene existencia independiente fuera de la observación de la compresión de una persona particular de un tópico específico de las matemáticas.

2.5.2 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

Además, de los ocho niveles para describir la evolución de la comprensión de un concepto matemático, la teoría presenta otras características de fundamental importancia para el modelo: El *folding back* o la acción de regresar a cualquiera de los niveles internos, dada la necesidad de recoger información específica para superar los obstáculos que hagan presencia en el proceso de construcción del conocimiento, necesarios para la evolución de la comprensión matemática. Otra de las características que presenta el modelo es la que hace referencia a los *límites de falta de necesidad* que permiten identificar avances significativos en la comprensión de los niveles internos. Además, para identificar la actuación y exposición escrita por parte del estudiante hacia las actividades propuestas en los niveles internos se *encuentra la complementariedad de la acción y la expresión* aspectos que cobran especial relevancia en la movilidad o paso de un nivel al siguiente.

Otra característica importante del modelo de Piere y Kieren sobre la comprensión es la *fractalidad*, la cual consiste que cada nivel de comprensión se encuentra contenido en los niveles subsiguientes, es decir, que los niveles externos crecen de forma recursiva desde los niveles internos.

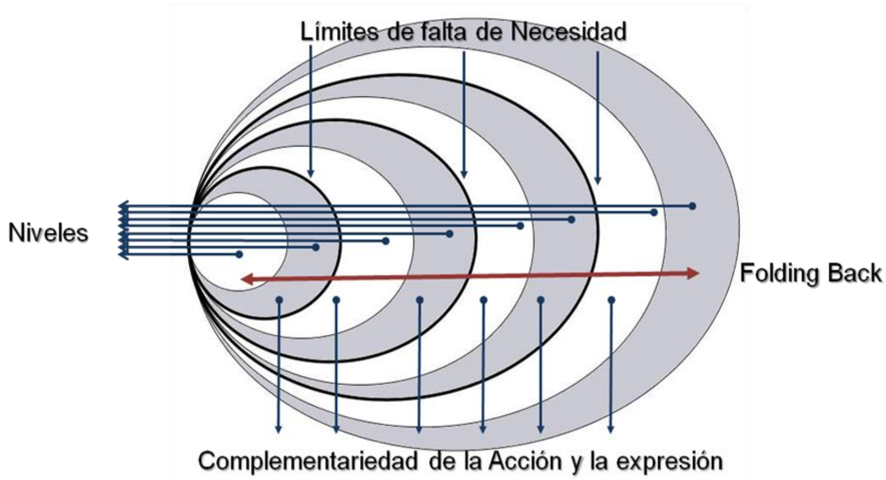


Ilustración 6. Características del Modelo.

Ramirez (2011) describe las características del modelo de Pirie y Kieren de la siguiente forma:

El Folding Back

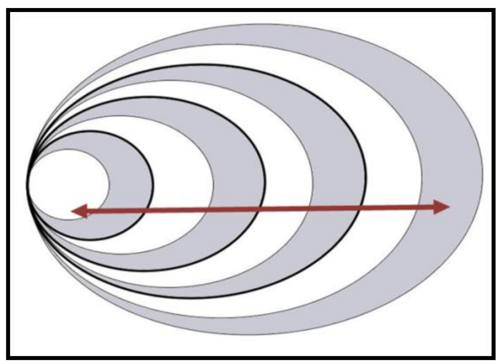


Ilustración 7. La característica del *Folding Back.*

Este es el elemento más importante y constituye, además, una de las principales diferencias con otros modelos y teorías. Consiste en la posibilidad de "Redoblar" o volver hacia atrás. De acuerdo a Lyndon (2000, p. 131)cuando el estudiante se ve enfrentado a una situación problema de la cual su solución no es inmediata, necesita volver a un nivel anterior de comprensión para generar un cambio cognitivo que le permita organizar sus construcciones para el concepto. Este es un proceso dinámico que asegura la efectividad de la comprensión que le permite a un estudiante que está en un nivel exterior, regresar a uno de los niveles internos, con el fin de reconstruir la comprensión de un concepto o afianzar elementos que no fueron necesarios en el paso por dicho nivel, pero que es necesario para la superación y avance en los niveles externos. El estudiante que avanza, retrocede o redobla hacia el nivel interno, mejora su comprensión y regresa al nivel externo para continuar con el proceso.

La necesidad de redoblar aparece como consecuencia del proceso de crecimiento en la comprensión y es individual, no es propia del concepto sino del sujeto que comprende.

Los límites de falta de Necesidad

Es otra de las características de esencial importancia. Los límites de falta de necesidad se presentan entre las vecindades de algunos niveles y constituyen procesos de comprensión más elaborados y estables para un concepto. Cuando un estudiante se encuentra en dichos límites es porque ha realizado progresos cualitativos superiores en la comprensión, es decir, ha alcanzado niveles de mayor sofisticación y complejidad en cuanto al objeto de estudio. Pero aun así, lo anterior, no determina que el estudiante en algún momento no tenga la necesidad de hacer *folding back* sobre los niveles internos en la comprensión que realiza.

En este diagrama, los límites de falta de necesidad se evidencian por líneas más gruesas y están determinados sólo en la interface de algunos de ellos, entre los niveles 2 y 3, entre los niveles 4y 5 y entre los niveles 6 y 7.

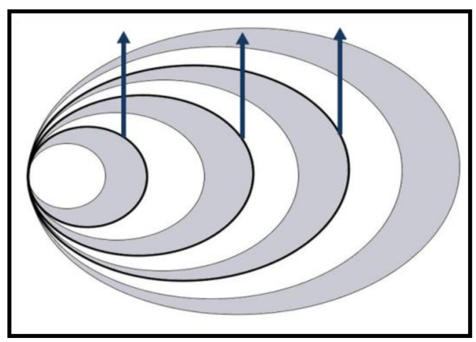


Ilustración 8. Niveles para los límites de falta de necesidad.

La complementariedad de la acción y la expresión

Esta otra característica propia del modelo. Se presenta en todos los niveles a excepción del primero y el último. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles.

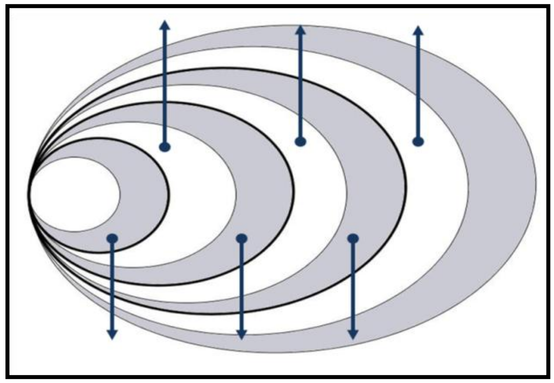


Ilustración 9. Complementariedad de la Acción y la Expresión.

Pirie y Kieren (1994, b) afirman que:

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel".

Según Meel (2003), Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasarán al siguiente nivel.

Conviene subrayar, lo enfáticos que son los autores del modelo para identificar la comprensión como un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento, que evoluciona conforme se presente un notable desarrollo en la capacidad de expresión de los mismos. De lo anterior se infiere un carácter dinámico del modelo y las complementariedades de la acción y la expresión se evidencian mediante la participación de los estudiantes que en muchas ocasiones proponen respuestas o soluciones innovadoras que se pueden considerar invenciones o formalizaciones propias de la originalidad de los mismos.

La fractalidad en el Modelo de Pirie y Kieren.

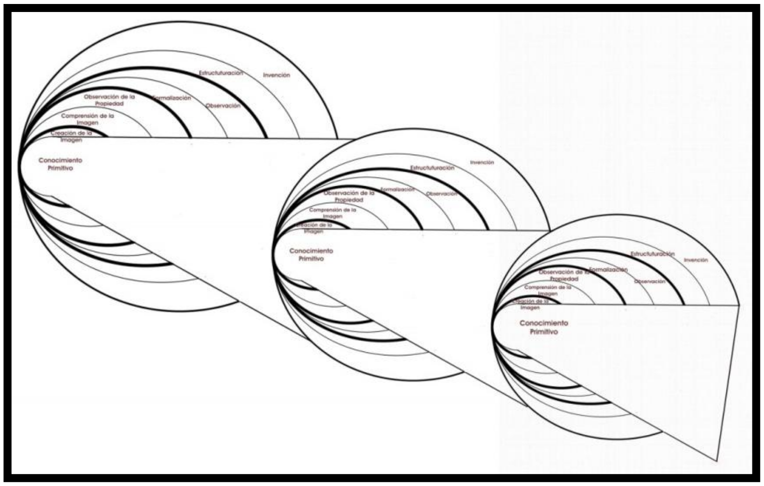


Ilustración 10. La fractalidad del Modelo.

Pirie y Kieren consideran que el proceso de comprensión no es lineal, así como tampoco limitado, pues cada nivel externo opera a manera de envolvente de los niveles más internos, al respecto Meel (2003) en su investigación profundiza al afirmar que “los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel interno permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos”. Esta característica es la que le concede al modelo la consideración de teoría de la relatividad de la comprensión. En Meel (2003), se presenta la voz de los autores materializada en las siguientes palabras:

Se podría observar a una persona en el nivel de invención como si tuviera su comprensión previa como una nueva acción primitiva [Conocimiento Primitivo]. Una consecuencia principal de esta línea de pensamiento es que, para un observador la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona “dentro” de la acción primitiva y observar la misma estructura nivelada.

Los autores consideran al primer nivel o el de conocimientos primitivos como el centro interno del modelo a partir de él puede entenderse que la evolución de la comprensión matemática presenta se da de una naturaleza similar a la totalidad. Esta propiedad otorga al centro interno el atributo de característica fractal tal como se ilustra en la Figura 14.

Otras características importantes del modelo

A continuación, según la investigación de Rendón (2011), se presentan otros elementos de relevante importancia, necesarios para las perspectivas teóricas de la presente investigación y que a su vez habilitan otras alternativas sobre las cuales se puede obtener un importante provecho, en procura a mejorar sustancialmente los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre un concepto matemático en su calidad de objeto de estudio:

En cada nivel se puede establecer la estructura total del modelo. Es decir, cada uno de ellos puede contener los ocho niveles con una estructura idéntica a la del modelo. Gracias a la condición de fractalidad el nivel sobre el conocimiento primitivo se convierte en el elemento génesis de la comprensión de otro concepto más elaborado; un proceso completo, y a su vez este se convierte en el conocimiento base para iniciar otro proceso.

La comprensión como proceso subjetivo. No es posible conocer realmente lo que sucede en el ámbito mental de otro individuo, dada la complejidad de los procesos que intervienen en el aprendizaje. De lo que sí se puede tener algún conocimiento y abordar para su estudio es en lo referente a las manifestaciones externas presentes en los estudiantes, toda vez que afronte la construcción de un conocimiento en particular.

Las posibilidades que permite la interacción. El lenguaje empleado, los razonamientos y argumentos expuestos y las diferentes situaciones en las que los estudiantes demuestran capacidad para enfrentar son los elementos característicos que emergen en cada uno de los niveles a partir de los cuales se puede evidenciar un cambio en el orden cualitativo de su evolución de la comprensión.

La entrevista, el diálogo y la socialización de las experiencias de aprendizaje propuestas pueden ser tomadas como herramientas de notable utilidad, puesto que a partir de ellas, es posible reconocer aspectos en la evolución de la comprensión de los estudiantes. En este sentido, según los autores, un único instrumento, como una prueba objetiva, aplicado para la construcción de un concepto, se convierte en limitante ulterior para visibilizar esa evolución, por tal, es necesario y recomendable, en términos de la comprensión, emplear diferentes estrategias que coadyuven a evidenciarla.

2.5.3 ¿POR QUÉ LA PROPUESTA DE PIRIE Y KIEREN COMO MODELO PARA ESTA INVESTIGACIÓN?

En consideración a los elementos característicos propios del modelo mencionado anteriormente y a la importancia en el sentido de lo complejo del concepto de la derivada en su componente geométrico, se hace oportuno emplear la propuesta como fundamento teórico por las posibilidades cognitivas, didácticas y metodológicas que permite.

En la actualidad, el sentido hacia el cual apuntalan un buen número de investigaciones en educación orientadas al estudio de conceptos propios de la matemática avanzada, involucran la comprensión como preocupación académica y formativa. Al ser la derivada el objeto de estudio de este trabajo y a sabiendas de las dificultades, ya sea que cobren presencia como obstáculos o como errores, en su aprendizaje es apenas normal y consecuente optar por elegir un marco teórico pertinente que apoyado, en aras a contar con diferentes medios para visibilizar evolución en la comprensión, en otros enfoques o referentes, como los son los mapas conceptuales, las representaciones semióticas y el empleo del Geogebra ®a manera de software dinámico permitan el acceso a la aplicación de estrategias de aprendizaje y a elementos de lectura y hermenéutica focalizados más a evidenciar movilizaciones o avances hacia la comprensión conceptual que a la ejecución procedimental o algorítmica del objeto de estudio.

En el contexto del marco teórico se verifica el empleo del mismo para realizar otros estudios de investigación que guardan proximidad o familiaridad al concepto de la derivada, circunstancia esta que permite contar con un horizonte que deviene en fuente de consulta, fundamentación y contrastación.

Para intentar movilizar cognitivamente algunas de las dificultades presentes en los estudiantes al momento de abordar el concepto de derivada, la investigación presenta como instancias de apoyo el empleo del método del haz de secantes y la manipulación de las variables visuales a través del empleo del Geogebra ®, para suscitar en los estudiantes mejores aproximaciones de carácter conceptual desde el análisis y trazo de rectas tangentes a algunas curvas. De esta forma y teniendo siempre en cuenta las características del modelo como recurso y como lente, ya sea para promover o para observar el tránsito por los tres primeros niveles de la evolución de la comprensión del concepto objeto de estudio en los estudiantes, dada la importancia de su componente visual como categoría necesaria en la formalización del concepto. Se toman los tres primeros niveles por las descripciones que implican y por las posibilidades que permiten para aplicar algunos sistemas de representación semiótica.

2.6 CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO: BREVE RECORRIDO HISTÓRICO Y OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.

2.6.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Antes del siglo XVII, una curva por lo general se describía como un lugar geométrico de los puntos que satisfacían alguna condición geométrica, y las rectas tangentes se obtenían por construcciones geométricas. Esta perspectiva cambió de manera radical con la creación de la geometría analítica en los años de René Descartes[1] y Pierre de Fermat[2]. En este nuevo escenario los problemas geométricos se replanteaban en términos de expresiones algebraicas, y las nuevas clases de curvas se definían no por sus condiciones geométricas sino algebraicas.

Newton[3] y Leibniz[4], independientemente el uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo integral hasta llegar a conseguir que problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo por los nuevos métodos de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue esencialmente el hecho de poder fundir en uno el Cálculo integral y la segunda rama importante del Cálculo: el Cálculo diferencial.

Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la Matemática. Este concepto no se formuló hasta

---

[1] ***René Descartes****(1596-1650). Nació en el pueblo Le Haye, Francia, de una familia noble, y siguió las carreras de la Medicina y el Derecho en la universidad de Poitiers. Su obra magna "Discurso del Método" publicada en 1637y dividida en seis partes; una de ellas es la "Geometría" en la cual da a conocer al mundo un nuevo enfoque en el cual cualquier curva geométrica se representa por una ecuación con dos incógnitas, y cualquier ecuación con dos incógnitas representa una curva.*

[2] ***Pierre de Fermat****(1601-1665). Nació en Francia, fue un jurista y matemático, apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de "príncipe de los aficionados". Acostumbraba anotar sus descubrimientos en el margen del libro que estaba leyendo, fue así como se encontró después de muerto, lo que hasta hace poco se conoció como el* ***Teorema indemostrado de Fermat****. A más de ser un coinventor de la Geometría Analítica y precursor del Cálculo Diferencial, Fermat hizo aportes importantes a la Teoría de los Números y a la Teoría de la Probabilidad.*

[3] ***Isaac Newton****(1642-1727).Nació en Woolsthorpe el día de navidad, matemático, físico y astrónomo inglés. Se inmortalizó por el descubrimiento de las leyes de la mecánica y la gravitación universal, su explicación de la descomposición de la luz en los diferentes colores, y por sus nobles trabajos relativos al álgebra y a la geometría, así como la invención del cálculo diferencial.*

[4] ***Goottfried Leibniz****(1646-1716. Nació en la ciudad de Leipzig, fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como "El último genio universal". Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces.*

el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones.

El concepto de derivada evolucionó en este nuevo contexto. En los años 1630, Fermat fue el primero en distinguir una relación entre el problema de encontrar rectas tangentes y el problema aparentemente inconexo de encontrar valores máximos y mínimos. Ya la relación entre las rectas tangentes a curvas y la velocidad de una partícula en movimiento fue descubierta por Isaac Newton a fines de los años 1660.

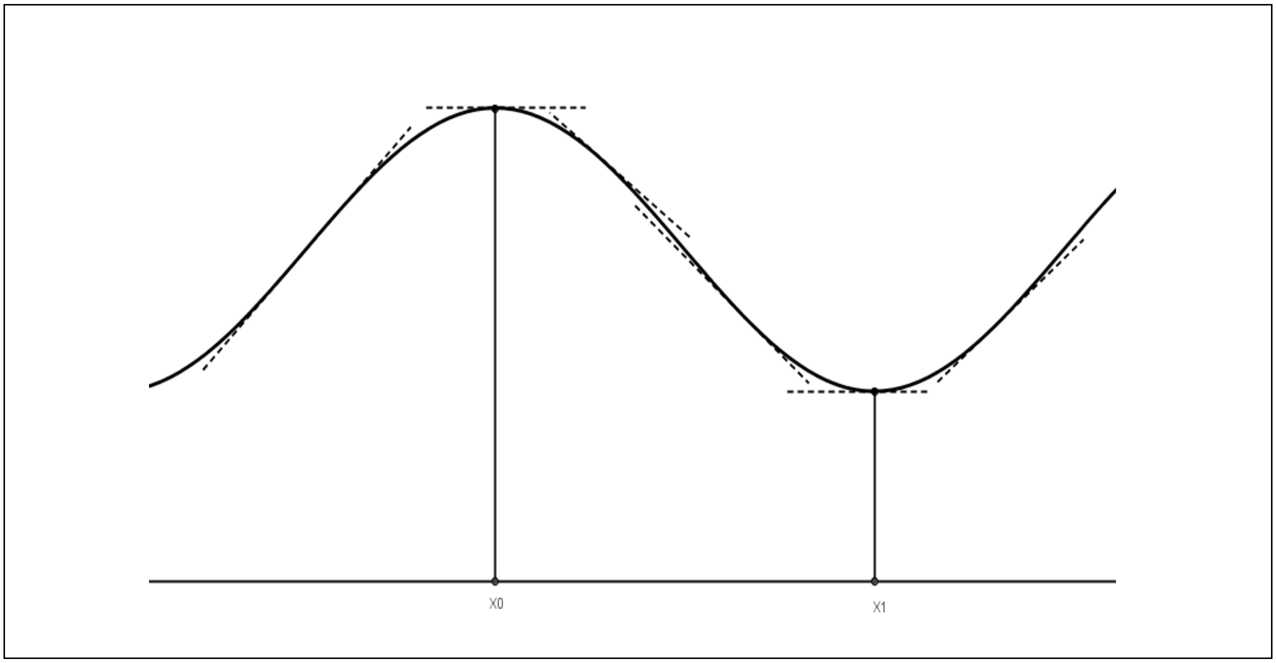


Ilustración 11. La curva tiene tangentes horizontales en los puntos x_0 y x_1.

La idea de Fermat, básicamente muy simple, puede comprenderse con auxilio de la Ilustración 11. Se supone que en cada uno de sus puntos, esta curva tiene una dirección definida que puede venir dada por la tangente. Cada una de estas tangentes se ha indicado en la figura por una recta de trazos. Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo como los de la figura, las abscisas x_0 y x_1, la tangente ha de ser horizontal. Por tanto el problema de localizar estos valores extremos se reduce a la localización de las tangentes horizontales (Apostol, 1988).

En cada uno de los progresos principales del siglo XVII, algún paso determinado conducía de la confusión a un método nuevo. Así, por ejemplo, Newton mismo indica qué es lo que le sugirió el cálculo diferencial: "la manera que tenía Fermat de trazar tangentes" Al año 1638 siguiente al de la publicación de la geometría de Descartes, Fermat le comunicó el método aceptado para encontrar las tangentes. Este se originó en la investigación que hizo Fermat de los máximos y mínimos, problema que abordó esencialmente del mismo modo que se hace hoy día en el cálculo. Lo que hizo equivale a igualar la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ a cero para encontrar los valores de x que hagan máximo o mínimo a $f(x)$. Geométricamente esto equivale a encontrar las abscisas de los puntos de la curva $y = f(x)$ en los cuales la tangente es paralela al eje x(Ruiz, 2002).

Fermat no prosiguió a examinar las derivadas de orden superior ni su equivalente geométrico para determinar si $f'(x) = 0$ dan en realidad máximos o mínimos. Tampoco aisló el cálculo de la derivada de su presentación implícita en problemas de máximos y mínimos.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente en un *punto arbitrario* de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias referentes a la noción de derivada.

A primera vista parece que no habrá conexión entre el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente en un punto de la curva. El primero que descubrió que estas dos ideas, en apariencia sin conexión, estaban íntimamente ligadas, fue el maestro de Newton, Isaac Barrow[5]. Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación la explotaron en forma tal que inauguraron una etapa sin precedente en el desarrollo de la Matemática.

Ángel Ruiz (2002) plantea en su libro "*Historia y filosofía de las matemáticas*" que Fueron cuatro problemas los que motivaron la creación del cálculo:

---

[5] ***Isaac Barrow*** *(1630-1677). Nació en Inglaterra, estudió en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, al cual ingresó a los 14 años, a más de las matemáticas era un gran conocedor de los idiomas griego y árabe, poco después de su grado fue nombrado profesor de la misma universidad, teniendo como estudiante a Isaac Newton, a quién cedió su puesto de profesor en 1669.*

En la revisión del proceso histórico del desarrollo de la derivada sin la noción del límite, Lozano (2011) presenta la siguiente secuencia y plantea que el primer problema fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo. El segundo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies. El tercero fue determinar cuándo una función alcanza un valor máximo o mínimo y el último problema estaba asociado a la geometría y era como calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de *velocidades* y, en general para el estudio de la *variación* de una función.

También Fermat descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica "antecedente del concepto de la derivada". Método que se puede reducir al cálculo del siguiente límite.

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

Aproximación similar a la que Newton y Leibniz desarrollaron posteriormente.

Newton señalaba "Cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finamente iguales", considerando el límite de una función o "el de la derivada" en su libro Philosophienaturalis principia mathematica (1687), lema I del libro I, sección I.

Leibniz bajo la influencia de Huygens[6], le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas estando seguro que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes

[6] ***Christiaan Huygens** (1629-1695). Nació en La Haya- Holanda, estudió mecánica y geometría, estuvo muy influenciado por René Descartes. En 1656 creó el primer reloj de péndulo, ingresó en la Royal Society, allí pudo mostrar sus superiores telescopios, pionero en el estudio de la probabilidad, resolvió numerosos problemas geométricos como la rectificación de la cisoide y la determinación de la curvatura de la cicloide.*

a través de sumas. En 1676 Leibniz ofreció las reglas $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o fraccional. En julio de 1677 Leibniz ofreció las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente dos funciones.

Su método se recoge por primera vez en un artículo publicado en la revista Acta erudito rumen 1684 enunciándolo como “Un nuevo método para máximos y mínimos y también tangentes, que no se ven obstruido por las cantidades fraccionarias ni por los irracionales”. Método que se trataba de una aproximación geométrica y no cinemática como en Newton. El artículo contenía los símbolos que representaban para Leibniz cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con las cuales construyo su cálculo diferencial “cálculo de tangentes” y las reglas:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Y señalaba que, $dy = 0$para valores extremos relativos o para los puntos de inflexión. Introduciendo el término de “calculo diferencial” (de diferencias) pero antes había usado la expresión “*methodustengentium directa*” (Lozano, 2011)

En el siglo XIX la función derivada logra su reconocimiento social, científico y matemático con mayor rigor a partir de Niels Abel[7], Bernhard Bolzano[8], AugustinCauchy[9], Karl Weierstrass[10] entre los más reconocidos.

---

[7]***Niels Henrik Abel*** *(1802-1829). Nació en Noruega, matemático célebre por haber probado en 1824 que no hay ninguna fórmula para hallar los ceros de todos los polinomios generales de grados* $n \geq 5$ *en términos de sus coeficientes y en el de las funciones elípticas, ámbito en el que desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíprocas de la integral elíptica.*

[8]***BernhardBolzano****(1781-1848). Nació en República Checa, filósofo, matemático y teólogo. Sus inquietudes científicas resultaron muy avanzadas para su tiempo. Tras demostrar el teorema del valor intermedio, dio el primer ejemplo de una función continua no derivable sobre el conjunto de los números reales. En el campo de la lógica, trató la tabla de verdad de una proposición e introdujo la primera definición operativa de deducibilidad. Estudió anterior a Cantor, los conjuntos infinitos.*

Bolzano (1817) quien definió por primera vez la derivada como un límite: la cantidad $f(x)$ a la que la razón

$$\frac{f(x+\ \Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

Cauchy describió la derivada en su libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección "cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre dichos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente si $\nabla x = i$, entonces los dos términos de la razón entre las diferencias serán dos cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro límite positivo o negativo. Este límite:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

Si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo si se toma $f(x) = x^m$. Siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeña será:

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\ .2}x^{m-2}i + \cdots + i^{m-1}$$

---

[9]***Luis Cauchy****(1789-1857). Nació en París "Los hombres pasan, pero sus obras quedan", fueron sus últimas palabras, graduado como Ingeniero de Caminos, pocos años después abandonó su trabajo de ingeniero y se dedicó a la investigación y la enseñanza de la ciencia pura. Una de sus tres grandes obras sobre la integral definida como un número complejo como límite, la cual reformó la teoría de la variable compleja. Sus definiciones rigurosas del límite y de continuidad son usadas hoy por los autores más modernos del Cálculo Diferencial.*

[10]***Karl Weierstrais****(1815-1897). Nació en Ostenfelde-Alemania, conocido como "el padre de los modernos análisis", estudió matemáticas en la Universidad de Münster, se interesó en las funciones elípticas, en la solidez del cálculo, capaz de escribir las pruebas de varios teoremas entonces no probados, como el teorema del valor intermedio, el teorema de Bolzano-Weierstrass, y Heine-Borel teorema.*

Que tendrá por límite la cantidad mx^{m-1}, es decir una nueva función de la variable x llamada función derivada y se designa por la notación y' o $f'(x)$"

2.6.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA COMO UNA PENDIENTE

El método usado para definir la derivada tiene una interesante interpretación geométrica que conduce por un camino natural a la idea de tangente a una curva.

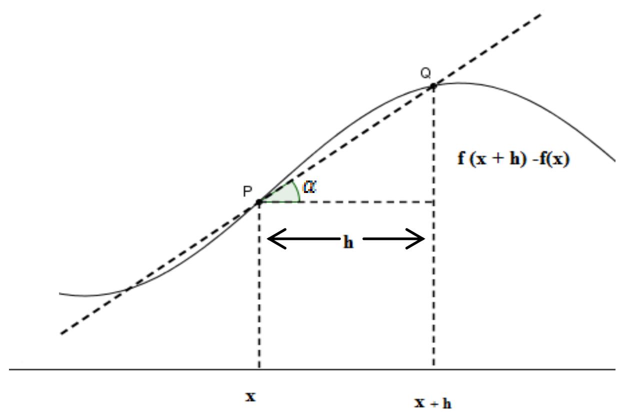


Ilustración 12. Interpretación geométrica del cociente de diferencia como tangente de un ángulo.

En la Ilustración 12 está dibujada una parte de la gráfica de una función *f*. Las coordenadas de los dos puntos *P* y *Q* son, respectivamente, $(x.f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. En el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *PQ*, la altura es $f(x+h)-f(x)$ y representa la diferencia de las ordenadas de los dos puntos *P* y *Q*; y en consecuencia, el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma *PQ* con la horizontal. El número real tg α se denomina la *pendiente* de la curva entre *P* y *Q* y da un método para valorar la inclinación de esta línea. Por ejemplo si *f* es una función lineal, digamos $f(x) = mx + b$, el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tiene el valor *m*, de manera que *m* es la pendiente de la curva.

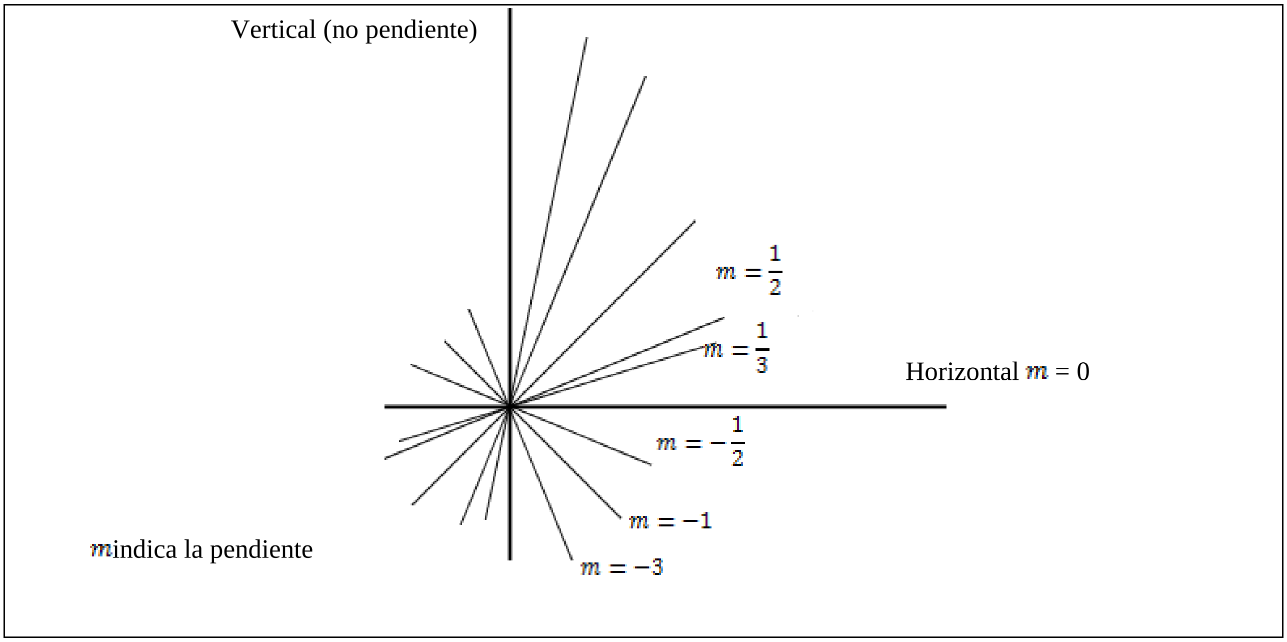


Ilustración 13. Rectas de pendiente distinta

En la Ilustración 13 se dan algunos ejemplos de rectas de distinta pendiente. Si se traza una recta horizontal, $\alpha = 0$ y la pendiente, $tan\alpha$, es también 0, Si α está entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, yendo de izquierda a derecha, la ruta es ascendente y la pendiente está representada por un número positivo. Si α está comprendido entre $\frac{1}{2}\pi$ y π, yendo de izquierda a derecha la recta es descendente y la pendiente negativa. Una recta en la que $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, tiene pendiente 1. Si α crece de 0 a $\frac{1}{2}\pi$, $tan\alpha$ crece más allá de todo número y las rectas correspondientes a tales pendientes se aproximan a la posición vertical. Puesto que $tan\frac{1}{2}\pi$ es indefinida, se dice que las *rectas verticales no tienen pendiente*.

Sea *f* una función que tiene derivada en *x*, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando *h* tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender *h* a cero, el punto *P* permanece fijo pero *Q* se mueve hacia *P* a lo largo de la curva y la recta *PQ* se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto *P* el número $f'(x)$. La recta por *P* que tiene esta pendiente se denomina la *tangente* a la curva en *P*.

Nota: El concepto de tangente a una circunferencia (y a algunas otras curvas especiales) ya había sido considerado por los antiguos griegos. Definían la tangente a un círculo como la recta que tenía un punto común con el círculo y todos los demás fuera de él. De esta definición se pueden deducir muchas de las propiedades de las tangentes a los círculos. Por ejemplo, se puede demostrar que la tangente en cada punto es perpendicular al radio en este punto. Sin embargo, esta definición de tangente dada por los griegos para el círculo no se puede extender fácilmente a otras curvas. El método anterior, en el que la tangente se define a partir de la derivada, ha demostrado ser más satisfactorio. Utilizando esta definición para obtener la tangente al círculo, se puede probar que la recta así encontrada, tiene todas las propiedades halladas por los geómetras griegos. Conceptos como perpendicularidad y paralelismo se pueden explicar analíticamente en forma simple, utilizando las pendientes de las rectas. Por ejemplo, de la identidad trigonométrica.

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha tan\beta},$$

Se sigue que dos rectas no verticales, con la misma pendiente, son paralelas. También de la identidad:

$$cot(\alpha - \beta) = \frac{1 + tan\alpha tan\beta}{tan\alpha - tan\beta},$$

Se deduce que dos rectas no verticales cuyas pendientes tienen como productos -1 son perpendiculares.

El signo de la derivada de una función es de utilidad para precisar la forma de la gráfica. Por ejemplo, si en un punto *x* de un intervalo abierto la derivada es *positiva*, la gráfica es ascendente en la proximidad de *x* al pasar de izquierda de *x* a la derecha. Esto ocurre en x_3 en la Ilustración 14.

Una derivada *negativa* en un intervalo indica que la gráfica es descendente como ocurre en x_1, mientras que una derivada cero en un punto significa una tangente horizontal. En un máximo o mínimo tales como los indicados en x_2, x_5 y x_6 la pendiente ha de ser cero. Fermat fue el primero que observó que puntos como x_2, x_5 y x_6 donde *f* tiene un máximo o un mínimo se han de encontrar entre las raíces de $f'(x) = 0$. Es importante hacer notar que $f'(x)$ puede ser cero en puntos en los que no hay máximo ni mínimo, tal como ejemplo, en x_4. Obsérvese que estas tangentes particulares, atraviesan la gráfica. Éste es un ejemplo de una situación no incluida en la definición de tangencia de los griegos.

Las anteriores observaciones relativas al significado del signo de la derivada se pueden considerar como obvias si se interpretan geométricamente.

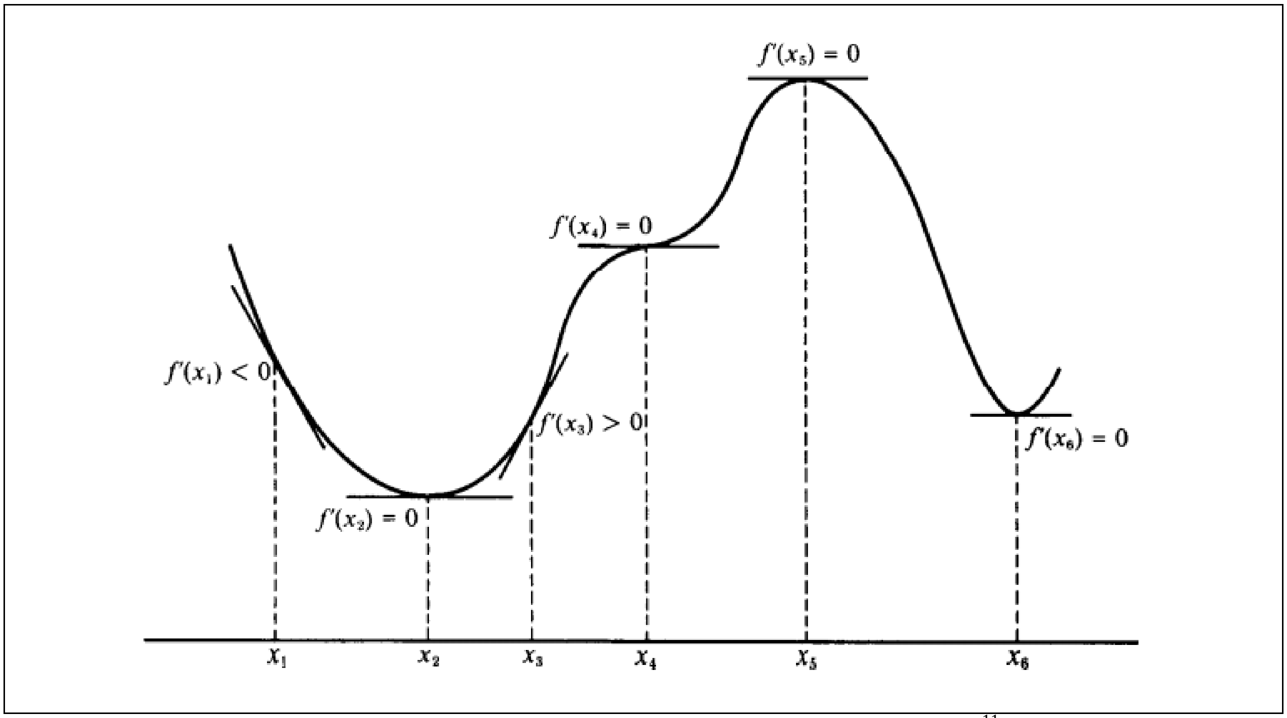


Ilustración 14. Significado geométrico del signo de la derivada. [11]

2.6.3 INTERPRETACIÓN ANALÍTICA DE LA DERIVADA

[11]Tomado de Apostol (1988, Volumen 1)

En la geometría plana, la recta tangente l en un punto P sobre una circunferencia se puede definir como la recta que tiene solamente un punto P en común con tal circunferencia, como se ilustra en la Figura 5.1. Esta definición no se puede aplicar a cualquier gráfica, ya que la recta tangente puede cortar a una gráfica varias veces, como se muestra en la Figura 5.2.

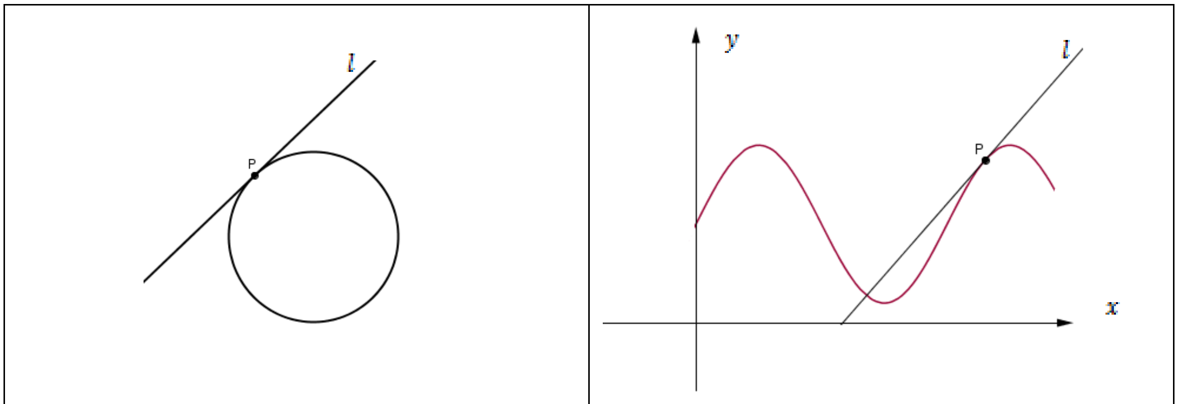
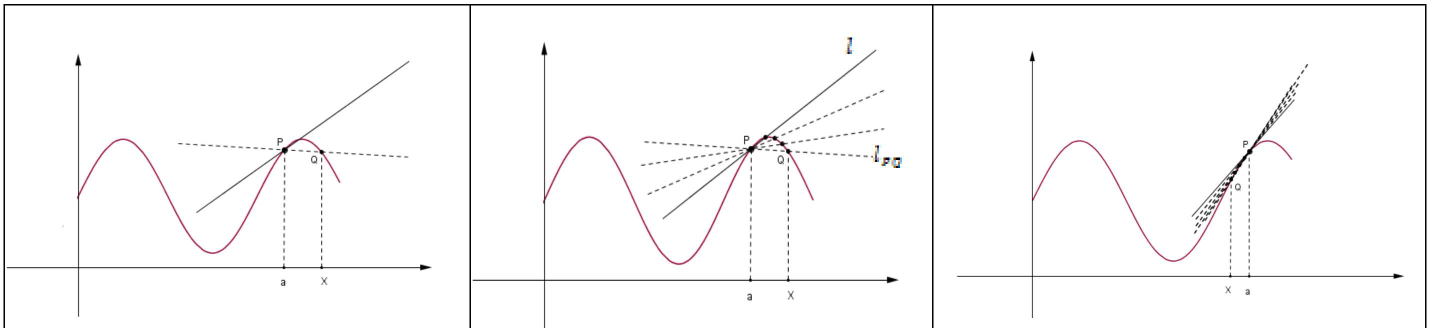


Figura 5.1

Figura 5.2

Ilustración 15. Recta tangente a la curva en un punto P.

Para identificar la recta tangente l a la gráfica de una función en un punto P, basta especificar la pendiente m de l, ya que ésta y el punto P determinan completamente a la recta. Para encontrar m se escoge otro punto Q sobre la gráfica y se considera la recta l_{PQ} que pasa por P y Q, como se muestra en la Figura 6.1. La recta l_{PQ} es una **recta secante** de la gráfica.



l_{PQ}= Pendiente de l_{PQ}

m = pendiente de   Figura 6.1

l_{PQ}tiende a l

m_{PQ} tiende a m

Figura 6.2

l_{PQ}tiende a l

m_{PQ} tiende am

Figura 6.3

Ilustración 16. Pendiente de la recta tangente $l$como límite de las pendientes de las rectas secantes.

Sea m_{PQ} la pendiente de l_{PQ}. Ahora se considera la variación de m_{PQ} cuando Q se acerca a P. Si Q tiende a P por la derecha se tiene la situación ilustrada en la Figura 6.2, en la que se señalan varias posiciones de la recta secante l_{PQ} correspondientes a las diversas posiciones de Q , por medo de línea punteada. Se ve que para Q cercano a P, la pendiente m_{PQ} debe ser muy parecida a la pendiente m de l. En la Figura 6.3 Q tiende a P por la izquierda y, nuevamente, se ve que m_{PQ} se acerca a m. Estas observaciones sugieren que si m_{PQ} tiende a algún valor fijo cuando$Q$ tiende a P, entonces ese valor se debe usar para definir la pendiente de la recta tangente l en P.

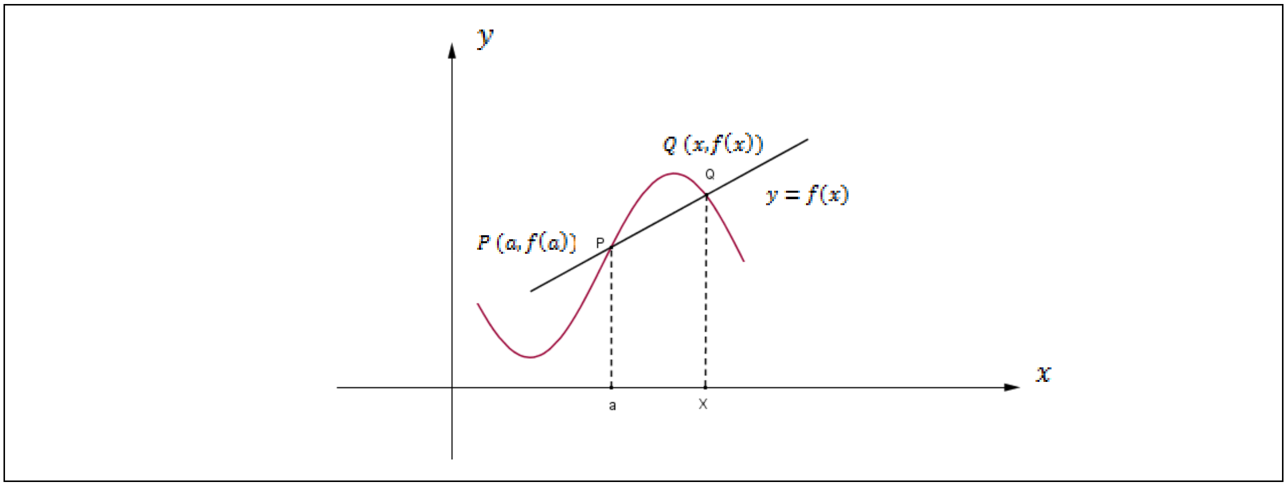


Ilustración 17. Pendiente $m$de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Si la función f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces marcamos las coordenadas P y Q como en la Ilustración 17. Usando la fórmula para la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene que la pendiente de la recta secante l_{PQ}es:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con esta notación, puede sustituirse la frase Q tiende a P por x tiende a a. Así se llega a la siguiente definición.

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **pendiente m de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siempre y cuando el límite exista

2.6.4 EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

Como se había dicho los griegos habían establecido que la recta tangente a una circunferencia, en un punto *P*, es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia; sin embargo analizando otras curvas se encontró que esta definición no era adecuada. En Uribe (2001) se encontró que el primer paso en la solución del problema consistió en precisar lo que debía entenderse por recta tangente a una curva en un punto dado. Con este fin, G.W. Leibniz hizo lo siguiente:

1. Dibujó una curva, marcó un punto *P* en ella y tomó un pequeño arco de la curva en las proximidades de *P*.
2. A continuación, trazó una circunferencia que se "ajustara" al pequeño arco tomado; este círculo recibe el nombre de *CIRCULO OSCULADOR*.
3. Finalmente trazó la recta tangente a esta circunferencia, por el punto *P*. Esta tangente es precisamente la recta tangente a la curva en *P*.

El segundo paso dado por Leibniz fue el siguiente: aprovechando que René Descartes había inventado la Geometría Analítica unos años antes, redujo el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a determinar su *pendiente*, puesto que ya se conocían las coordenadas del punto *P*. Con esta certeza, Leibniz encontró que esta pendiente podía *aproximarse* calculando la pendiente de otras rectas que pasan por *P* y por otro punto *Q* de la curva. Estas rectas reciben el nombre de *rectas secantes* (del latín secare que significa cortar).

Concluyó, entonces Leibniz que: **"la pendiente de la recta tangente es el límite de la pendiente de la secante, cuando *Q* se aproxima a *P*" (Ver Ilustración 18).** La anterior es una descripción gráfica de la solución del problema de la recta tangente.

Luego si una función ***f*** **es derivable en un intervalo abierto** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ si lo es en todos los números *c* de (a, b). También se considerarán funciones que son derivables en un intervalo infinito $(a, \infty), (-\infty, a)$ o bien $(-\infty, \infty)$. Para intervalos cerrados usamos la siguiente convención que es análoga a la definición de continuidad en un intervalo cerrado.

Una función f es derivable en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ***si lo es en el intervalo abierto*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ***y los límites:*** $\boldsymbol{lim_{h\to 0^+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\boldsymbol{lim_{h\to 0^-}} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$***, existen.***

Los límites por la derecha y por la izquierda en la definición se llaman **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda** de *f* en *a* y *b*, respectivamente. Nótese que para la derivada por la derecha se tiene $h \to 0^+$ y $a + h$ tiende a *a por la derecha.* Para la derivada por la izquierda se tiene que $h \to 0^-$ y $b + h$ tiende a *b por la izquierda.*

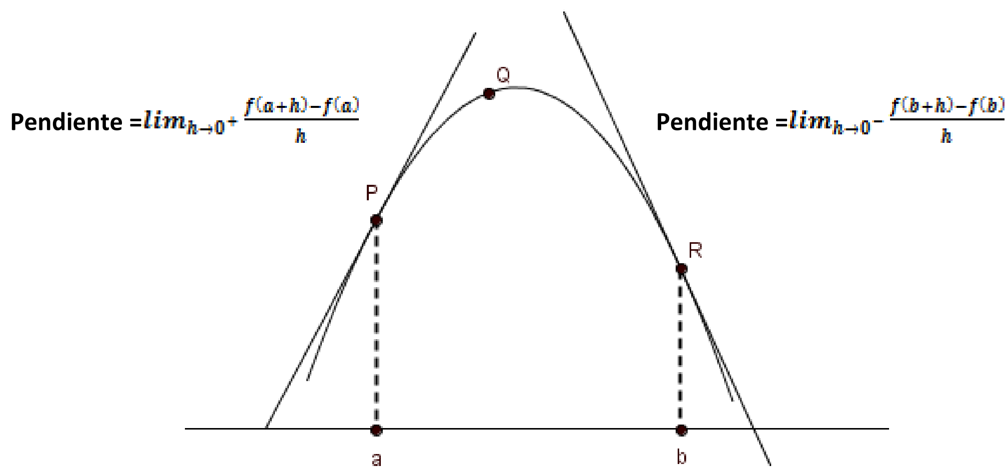


Ilustración 18. Límites unilaterales o derivada por la derecha de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ y derivada por la izquierda de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{b}$.

Si *f* es una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y no está definida fuera de él, entonces las derivadas por la derecha y por la izquierda permiten definir las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $P(a, f(a))$ y $R(b, f(b))$, respectivamente, como se representa en la Ilustración 22. Por lo tanto, para obtener la pendiente de la recta tangente en *P* se toma el valor límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por *P* y *Q* cuando *Q* tiende a *P* por la derecha. Para la recta tangente en *R*, el punto *Q* tiende a *R* por la izquierda.

La derivabilidad de una función en intervalos de la forma $[a, b), [a, \infty), (a, b]$, o bien $(-\infty, b]$ se define usando los límites por la izquierda o por la derecha en uno de los puntos extremos.

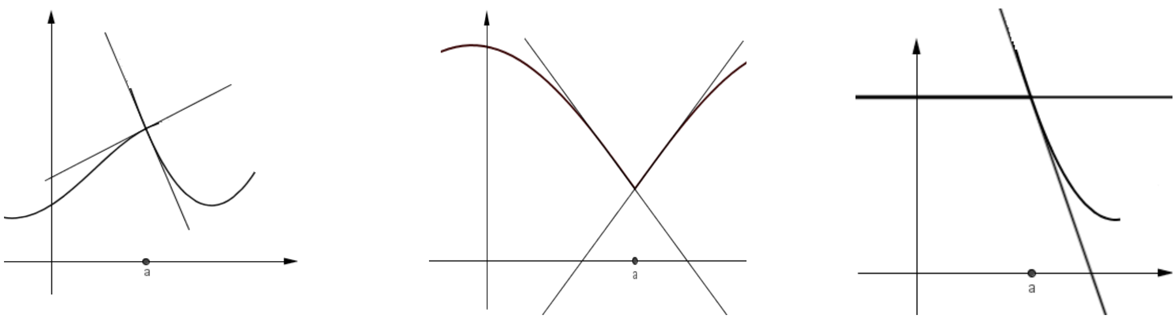


Tabla 1. Pendientes diferentes de las rectas $\boldsymbol{l_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$. Luego $\boldsymbol{f'(a)}$) no existe.

Si *f* está definida en un intervalo abierto que contiene a *a*, entonces $\boldsymbol{f'(a)}$***existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.*** Las funciones cuyas gráficas se muestran en la Tabla 1, tienen derivadas por la derecha y por la izquierda en ***a***que corresponden a las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente. Sin embargo, como las pendientes de l_1 y l_2 no son iguales, $\boldsymbol{f'(a)}$ ***no existe***.En general, si la gráfica *f* tiene un *pico* en el punto $P(a, f(a))$, entonces *f* no es derivable en ***a***.

Si *f* es derivable para todo *x* en un intervalo entonces, asociando a cada *x* el número $f'(x)$, se obtiene una función f' llamada **derivada de *f***. El valor de f' en *x* está dado por el siguiente límite (o por un límite unilateral).

Derivada de *f*.	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2.7 OBSTÁCULOS Y DIFICULTADES PRESENTES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS

> *Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra* (Bachelard,2000, p.15).

2.7.1 INTRODUCCIÓN

En el aprendizaje de los conceptos científicos fue Gastón Bachelard, al identificar elementos correspondientes al entendimiento que dificultan el conocimiento de lo real, quien realizó aportes de fundamental importancia. Su definición de obstáculos epistemológicos permitió a la teoría del conocimiento involucrar en alguna el conocimiento de la psicología, puesto que dichos obstáculos acontecen como dificultades psicológicas que intervienen, sustancial y denegadamente, en la asimilación adecuada del conocimiento formal. Estos conflictos de carácter psicológico se convierten en obstáculos que se identifican con las inherentes limitaciones de la capacidad orgánica de los sentidos, presente en los seres humanos, para dar cuenta y aprehender los diferentes fenómenos presentes en la naturaleza o con el empleo inadecuado de dispositivos materiales al momento de participar en la investigación y estudio de los eventos naturales.

Por tal, los obstáculos epistemológicos no hacen referencia a la dificultad o a lo complejidad en sí del conocimiento que se quiere aprehender, sino a las circunstancias psicológicas que no permiten la evolución en la formación del mismo, originando limitaciones o restricciones que llevan al menoscabo la capacidad de los estudiantes al momento de aproximarse al aprendizaje y por ende a la comprensión de un concepto.

2.7.2 CLASIFICACIÓN DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Bachelard (2000) identifica los siguientes como los principales obstáculos epistemológicos:

- El obstáculo de la experiencia primera: o los conocimientos previos, es decir el conjunto de pre-juicios o ideas primeras con las que el individuo se acerca al cómo y al por qué de los eventos o del concepto.
- El obstáculo de la generalización: o la tendencia a generalizar los conceptos para aplicarlos o dar razón a fenómenos generales que incluso se encuentran lejanas del concepto.
- El obstáculo de la noción real: o el tomar una única noción del evento o concepto estudiado como una realidad científica.
- El obstáculo verbal: o el léxico con el cual se presentan determinados términos y que inciden en una falsa explicación mediante una sola palabra o una imagen.
- El obstáculo del conocimiento unitario y pragmático: o el tomar la unidad total de un evento sin hacer objeto de estudio a sus partes. O simplemente se incurre en el error de ofrecerle definición o significado al evento o concepto que tiene un valor de utilidad, desconociendo otros aspectos u otras referencias de investigación.
- El obstáculo de la sustancialidad: o el estudio exclusivo de la superficie del evento, de la sustancia exterior del mismo sin profundizar en las partes más internas.
- El obstáculo animista: o la tendencia a explicar ciertos fenómenos o conceptos haciendo analogías con la naturaleza animada.
- El obstáculo de la libido: o el tomar como conocimiento científico cualquier idea equivocada de un investigador científico con poder o prestigio.

- El obstáculo de lo cuantitativo: o la tendencia a considerar exclusivamente todo lo que puede ser medible o cuantificable en detrimento de las apreciaciones u observaciones cualitativas.

2.7.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

La mayor parte de las limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la construcción de conceptos se encuentran inscritas al interior del proceso de formación mismo. Aparecen en el acto propio del conocer suscitando inercias, embotamientos o confusiones.

Para D'Amore y Fandiño (2010) en la didáctica de las matemáticas se distinguen, de acuerdo a su origen, tres tipos de obstáculos: obstáculos de naturaleza ontogenética (están más en afinidad con la evolución individual del estudiante y tienen que ver con el desarrollo de la inteligencia, de los sentidos y de los sistemas perceptivos), obstáculos didácticos (originados por los procedimientos de enseñanza, puesto que cada docente elige un proyecto, una metodología e interpreta de forma personal la transposición didáctica de acuerdo con sus convicciones ya sean científicas o didácticas) y obstáculos epistemológicos (provenientes de la historia de la evolución del concepto, de la naturaleza misma del argumento, gracias a una no continuidad, una fractura, un cambio radical de la concepción).

En perspectiva de Bachelard los errores son los síntomas de los obstáculos epistemológicos, aunque es necesario considerar también que estos, además obedecen a causas didácticas y cognitivas. D’Amore y Fandiño (2010) plantea que: en didáctica de las Matemáticas el concepto de obstáculo epistemológico fue adoptado por Brousseau, para quien el conocimiento se manifiesta cuando el obstáculo ha sido superado.

A continuación y en perspectiva al trabajo realizado por Dolores (2000), se hacen mención de algunos errores y obstáculos en los que incurren los estudiantes al momento de profundizar en el estudio del concepto de la derivada.

Algunos de estos errores y obstáculos se presentan en el trabajo desarrollado por Dolores (2000) en donde se reportan los resultados arrojados por estudiantes después de haber terminado un curso de calculo diferencial.

Las observaciones a este respecto señalan el dominio razonable de los algoritmos algebraicos, alcanzado por los estudiantes, para determinar el cálculo de límites y derivadas, pero persisten dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite aplicado a la noción de derivada y hace hincapié en la existencia de dificultades aún mayores en la resolución de problemas de aplicación del concepto de derivada.

En el trabajo de Dolores (2000) un gran número de estudiantes demuestran habilidad para obtener la derivada de una función algebraica mediante el empleo de fórmulas, pero a su vez evidencian dificultad para comprender y problematizar la aplicación de esos algoritmos y el significado del concepto. De otro lado es escasa la asociación de ideas claves del cálculo en la solución de problemas elementales sobre la variación, no obstante el sentido, en la perspectiva histórica, y evolución del concepto.

Además, en la organización de los contenidos se observa una fuerte inclinación y preponderancia hacia la estructura formal del análisis matemático, permitiendo en exlusivo, un enfoque abstracto del concepto con una muy pequeña transversalidad con los fenómenos de la variación física, se impone un predominio sobre el trabajo algorítmico conjuntamente con una escasa orientación metodológica.

Aunque algunos escenarios de aprendizaje plantean la interpretación geométrica del concepto, lo hacen alejados de la cuantificación de la rapidez de la variación, en la cual encuentra su razón de ser el concepto y con la que se podría facilitar la comprensión esencial del mismo.

En este sentido una de las dificultades en la formación del concepto de derivada, con la geometría como herramienta, es la concepción griega de tangente que persiste en los estudiantes desde sus cursos elementales. La concepción como tal obstaculiza notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo. Asimismo, obstaculiza la comprensión fundamental de que la recta tangente pueda "tocar" y también "cortar" a la curva y continuar siendo tangente en la zona de corte. Además, su carácter estático en perspectiva de la geometría euclidiana, al ser concebida como un lugar geométrico, deviene también en obstáculo cuando su concepción se intenta desde un sentido dinámico, a través de la sucesión de secantes (haz de secantes).

Finalmente, otro de los obstáculos principales en la comprensión del concepto, se infieren al considerar la derivada desde su noción de límite. Para un grueso número de estudiantes es difícil comprender que se pueda llegar a la recta tangente a través de una sucesión de secantes. En estos, existe una fuerte inclinación a evadir los procesos infinitos, considerando la noción de límite como una aproximación que se obtiene evaluando la función en el valor deseado. Este obstáculo se ve reforzado con el escaso manejo de la simbología y el lenguaje formal propio de la matemática.

3 DISEÑO, PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS DE INTERVENCIÓN PARA LA EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

3.1 DISEÑO Y PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

En dirección a la inquietud de la pregunta de investigación: **¿Cómo promover avances en la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de un curso de cálculo, sobre la base del modelo de Pirie y Kieren?** Y en consideración a un proceso sistemático y de indagación a un acto educativo, en el cual se pretende considerar a los actores de directa intervención en el proceso como un todo de expresión y de manifestación, y en lo absoluto, reducirlos a una sola variable. En congruencia con las características anteriores y sin desvirtuar otros enfoques el presente trabajo de investigación se ubica dentro de la metodología cualitativa.

Según lo considera Albert Gómez (2007), en el enfoque cualitativo, la recolección de datos tiene como objetivo obtener información de sujetos, comunidades, contextos o situaciones. El investigador adopta una postura reflexiva y trata de minimizar sus creencias o experiencia de vida asociadas con el tema. Los datos cualitativos consiste por lo común en la descripción profunda y completa de eventos, situaciones, imágenes mentales percepciones, experiencias de las personas ya sea de manera individual o colectiva.

En el diseño y procedimiento de la metodología del presente trabajo, se pretende mostrar la evolución en la comprensión del concepto de la derivada sobre la base del modelo ya mencionado, utilizando métodos e instrumentos de recolección, selección e interpretación de la información de carácter descriptivo.

Los estudiantes del grupo a intervenir cursaban, en la I.E. Pbro. Antonio José Bernal Londoño el tercer o último período y en la Universidad de Medellín, el curso de cálculo diferencial ofrecido para el segundo semestre de las carreras de ingenierías. El curso se desarrolló durante el primer semestre del año 2013 según fechas establecidas por la institución, éste era orientado por el docente – asesor del presente trabajo de investigación y estaba conformado por 13 estudiantes, de los cuales se seleccionaron aleatoriamente cuatro para realizar el proceso de análisis y sistematización en perspectiva a la evolución en la comprensión del concepto. Mientras que en la I.E el tema correspondiente al concepto de Derivada estaba siendo acompañado por la docente Diana Lucia Londoño Londoño en el grado Undécimo A de los cuales se eligieron algunos estudiantes dadas sus características y habilidades observadas con los conceptos previos.

Las categorías de investigación permitieron más que la generalización, la identificación de necesidades y avances en el proceso de construcción del saber, por ello se procede a organizar la información, validación y a realizar un análisis minucioso y sistematizado de la misma, con procedimientos rigurosos aunque no necesariamente estandarizados, que permiten la valoración e interpretación de la evolución en la comprensión de los estudiantes del concepto de la derivada en su componente geométrico y la implicación de la recta tangente. Adicionalmente, la investigación es descriptiva, porque permite sistematizar de forma detallada y flexible a partir de las propias palabras de los estudiantes, habladas o escritas y de sus conductas observables, la forma como el grupo experimental avanza en la temática.

3.1.1 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El método en tanto enfoque de la investigación permite una reflexión teórica y metodológica sobre los diferentes fenómenos que intervienen en el proceso educativo, tales como en la relación del estudiante con el medio y la incidencia de éste en los procesos cualitativos de socialización, transformación y acercamiento al conocimiento, en la producción y contrastación del saber traducidos en los espacios de la práctica pedagógica, como resultado de una actividad, que en tanto humana, se encuentra condicionada por las circunstancias e historias presentes en el devenir de los grupos humanos. De ahí, que la contextualización del concepto se convierte en el espacio donde el conocimiento puede ser dotado de sentido y significación, por tanto, no puede desligarse de la realidad sociocultural en la que se encuentra inmerso el estudiante.

Según Fred Erickson, la característica más distintiva de la indagación cualitativa es el énfasis en la interpretación (Stake, 2007). En este sentido se puede entender que la investigación cualitativa es un arte, que permite al investigador, a partir de la selección y análisis de la información, identificar fenómenos del objeto de estudio. Por tal, el método deviene en medio y apoyo para su proceso de indagación, de ahí, que su función como agente cualitativo en el proceso de recolección de datos es mantener con claridad una interpretación fundamentada.

Un método o enfoque utilizado por el paradigma cualitativo es el llamado estudio de casos, cuyo objetivo es analizar y describir situaciones que se presentan en el contexto de la actividad investigativa con cierta intensidad en un periodo de tiempo corto. Su funcionalidad prevalece, a diferencia de otros métodos, porque existe una pregunta problematizadora que demanda solución, la cual se presenta, indistintamente, en un individuo, grupos de individuos, circunstancia o en un fenómeno en particular.

A propósito Albert Gómez (2007) enuncia que el potencial del estudio de casos radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos interactivos que lo conforman, así como su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales. Sin duda alguna, este método implica un fuerte proceso de indagación, interpretación y sistematización del caso objeto de interés.

En lo particular, la investigación pretende estudiar el caso de la evolución en la comprensión del concepto de derivada en su componente geométrica, en un curso de cálculo para estudiantes del segundo semestre de ingeniería. Este se hace teniendo en cuenta los factores que intervienen en el proceso de indagación de saberes previos fundamentales para la intención del objeto de estudio, describiendo la relación que el estudiante hace entre el concepto y las representaciones en las que se apoya para dar cuenta de él o para justificar el procedimiento, en perspectiva a la definición formal del concepto.

3.1.2 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Una de las tareas más importantes de la etapa de análisis y de sistematización del proceso de intervención es poder contar con el uso de técnicas e instrumentos para recopilar la información acerca del objeto de investigación, pues de ello depende la adecuada orientación hermenéutica que se deriva de la lectura de los eventos y circunstancias que puedan aparecer en la actividad investigativa.

En el caso de la investigación cualitativa el interés es dotar de sentido los datos a través del análisis crítico-reflexivo, los cuales puede ser recogidos, según el modelo propuesto por los autores quienes fundamentan su teoría en experimentos de enseñanza en ambientes constructivistas, mediante entrevistas individuales, grabaciones en video y audio de actividades desarrolladas por los estudiantes, a la vez que del análisis de sus respuestas a las diferentes intervenciones escritas u orales (Rendón, 2011)

Se trata de organizar los datos recogidos a través de las notas de campo, entrevistas en profundidad, conversatorios, observaciones, presunciones, interpretaciones de registros sincrónicos y asincrónicos, verificaciones de datos nuevos y evaluaciones, que permiten la posibilidad de analizar, comprender o hacer comprensibles a la luz del modelo sus manifestaciones de acción y expresión, hasta llegar a una serie de descriptores que permitan estructurar, y analizar el proceso de evolución de la comprensión para lograr llegar a conclusiones que permitan dar cuenta de un posicionamiento en algún nivel de acuerdo al modelo.

La triangulación de la información obtenida en el proceso de intervención, a partir de los instrumentos descritos con antelación, sumados al empleo de los mapas conceptuales, el uso de artefactos dinámicos como el Geogebra ®, permiten visualizar e identificar de manera significativa los avances conceptuales, las representaciones mentales, el cambio de actitudes y comportamientos que se manifiestan en los estudiantes que en definitiva ayudan a interpretar la transformación en las estructuras cognitivas, finalidad de la presente investigación.

Las técnicas e instrumentos de recolección de información utilizada en el proceso de intervención fueron: Mapas conceptuales, guías de trabajo, conversatorios, interacción con el software dinámico, archivos audiovisuales intencionadas según se describe a continuación.

- **Mapas Conceptuales:** Esta herramienta pedagógica se utilizó como estrategia de aprendizaje y como elemento de gestión del conocimiento, por la posibilidad que ofrece para personalizar y evidenciar el saber. Además, fue de utilidad para identificar avances, compartir conceptos, indagar por la información y por el conocimiento intuitivo con el que llega el estudiante para abordar el objeto de estudio. Asimismo, para valorar la evolución con relación al estado inicial de la intervención en la comprensión del objeto de estudio, como lo es en este caso la conceptualización geométrica de la derivada.

- **Conversatorios:** Esta técnica se utilizó para generar discusión, participación espontánea, motivación y socialización de ideas, aciertos y desaciertos en las mismas. A través de él, se dinamizaron ideas relacionadas a la temática abordada, se identificaron estudiantes comprometidos con todo el proceso investigativo, se valoró su discusión y deliberación al poner en común sus inquietudes, reflexiones y planteamientos.

- **Técnicas de análisis documental:** Se ejecutó desde la perspectiva de los investigadores (bibliofichas), teniendo presente la necesidad de darle reflexión y sustentación teórica al planteamiento, desarrollo y solución de la pregunta de investigación. En el proceso del análisis documental se seleccionaron las temáticas de acuerdo a categorías y se procedió a la revisión crítica de la información permitiendo la orientación de los argumentos descriptivos, el planteamiento y desarrollo de las guías de intervención pedagógica y la elaboración del marco teórico que sustenta el presente trabajo de profundización conceptual. Es conveniente resaltar aquí, que en encuentros programados previamente por el equipo de investigación, se hizo socialización continua de los avances teóricos de acuerdo a una participación crítica y conjunta de maestrandos y asesor.

- **Software dinámico:** El instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ® se utilizó para exponer y justificar los componentes conceptuales de la derivada por medio de métodos geométricos. Diferentes actividades propuestas de simulación, contrastación, exploración, verificación y relación conexa entre la geometría y el cálculo, especialmente entre la recta tangente y la derivada, fueron desarrolladas por los participantes.

Se ofreció un espacio en el que el estudiante a través de la aplicación y apropiación del Geogebra ®, como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pudo relacionar elementos del cálculo diferencial, como es el caso de la derivada como aproximación local, a partir de métodos puramente geométricos. La modelación en el Geogebra ® permitió al estudiante, además de reconocer elementos geométricos y establecer relaciones adecuadas con el cálculo, también facilitó la comprensión y por consiguiente la solución de problemas a partir de diferentes registros de representación.

- **Guías de intervención.** Estas se elaboraron orientadas por los descriptores que darán cuenta del avance y evolución de la conceptualización de la derivada durante el proceso de la actividad pedagógica. Se emplearon para identificar y recoger información de los estudiantes en lo que concierne al aprendizaje adquirido del objeto temático, motivo de interés de este trabajo. Inicialmente se aplicó una prueba diagnóstico y luego otras 4 guías complementarias al trabajo, teniendo en cuenta las acciones que se develaban en torno al desarrollo, interiorización, análisis y comprensión en los estudiantes. Las guías constaban de una fase de motivación y exploración inicial, una fase de desarrollo de nuevas ideas y una fase de consolidación y ajuste de ritmos, diseño propuesto en uno de los seminarios de la maestría.

En síntesis para el desarrollo de la investigación, se tuvo como punto de partida la construcción de referentes teóricos a través de categorías deductivas. Posteriormente se diseñó una propuestas metodológica que permitiera dar respuesta a la pregunta de investigación**,** adicionalmente, se incluyó el diseño de instrumentos tanto para la recolección como para el procesamiento de la información en el proceso de la actividad pedagógica; después, se realizó el proceso de intervención y desarrollo de las guías e incorporación de los diferentes instrumentos, luego se hicieron los ajustes necesarios en perspectiva a los resultados y condiciones encontradas en la ejecución de la propuesta.

Posteriormente se centrará la atención en el análisis, procesamiento y sistematización de la información en relación a la claridad que permite la solución de la pregunta de investigación formulada. (Aún no se ha hecho)

3.1.3 COMPROMISOS ÉTICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Es de anotar que el equipo de investigadores (maestrandos y asesor), informo a los estudiantes que participaron en el presente trabajo con claridad y veracidad debida respecto al mismo, sus objetivos y procedimientos. Cada uno de ellos actuó consciente, libre y voluntariamente como participantes contribuyendo a la fase de recolección de información. Para tal efecto se asumió un compromiso de confidencialidad e intimidad de la información suministrada, respetar y no revelar sus identidades, mantener un trato cordial y favorecer la libertad de expresión y de resolución de actividades. Se les valora y agradece la disposición manifiesta para desarrollar, aportar y participar en las diferentes actividades propuestas y la amplitud de la información ofrecida e inferida que contribuyó con los objetivos propuestos.

Así pues, se garantiza ética en el manejo y publicación de la información suministrada por los estudiantes que participaron del trabajo, tales como fotografías, grabaciones, imágenes, trabajos y demás evidencias que permitieron el análisis de las categorías emergentes en el diseño metodológico.

3.1.4 NIVELES Y DESCRIPTORES PARA IDENTIFICAR LA EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

Luego de haber realizado una descripción general de los presupuestos de los niveles del Modelo de Pirie y Kieren, y en igual sentido, de haber identificado las características propias del mismo, se hizo necesario, definir los descriptores, algunos parámetros transversales a las instancias teóricas propias del modelo y a las categorías necesarias para abordar el objeto de estudio, que permitieran, en primer lugar elementos de lectura y de verificación, siempre a la luz de la teoría, de las acciones propuestas en el desarrollo de las actividades de intervención.

Además, el cuerpo de descriptores para cada nivel aparecen como instrumentos metodológicos empleados, ya sea para hacer identificar obstáculos en alguno de los niveles, o para determinar la movilización o paso de un nivel a otro, permitiendo con ello la visibilización, de las características esenciales del Modelo, en lo particular, y en lo general, la evolución de la Comprensión del concepto por parte del estudiante; toda vez que se cumplieran las intenciones didácticas y de aprendizaje, subyacentes en ellos y tendientes a favorecer los procedimientos, los razonamientos y la Comprensión misma, en lo local o global del concepto de estudio.

Para tal efecto, en perspectiva de la teoría del Modelo de Pirie y Kieren y teniendo en cuenta la preocupación de la investigación en referencia al componente geométrico del concepto, aspecto que cobra relevante fuerza e importancia en los niveles de Creación y Comprensión de la Imagen, se propuso una definición de descriptores para los primeros tres niveles. A continuación se presentan los tres grupos de descriptores definidos para la evolución del concepto de la derivada en su componente geométrico bajo el Modelo de Pirie y Kieren.

Nivel 1. Conocimiento primitivo

Desde el contexto de la teoría, según lo expone Meel (2003) el proceso de la comprensión se inicia en el centro del modelo, allí como punto inicial se tienen en cuenta todos los conocimientos e informaciones, además de las experiencias de aprendizaje previas, que trae el estudiante para iniciar su recorrido. Para este nivel se definieron los siguientes descriptores:

- Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica
- Reconoce formas de representaciones de funciones reales apoyados en las propiedades de la recta tangente.
- Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local
- Realiza representaciones gráficas de funciones elementales
- Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes...)

- Expresa una idea informal del concepto de tangencia.
- Hace uso de los mapas conceptuales para evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto de derivada

Nivel 2. Creación de la imagen

En este nivel la búsqueda ha de hacerse teniendo en cuenta la capacidad del estudiante para realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos previos. Las imágenes, presentes aquí no son exclusivamente representaciones pictóricas, acontecen como imágenes mentales que transmiten significado, buscando relaciones entre los referentes y los símbolos. En correspondencia, se intencionan como descriptores los siguientes:

- Reconoce y diferencia la representación gráfica de una función y la de su derivada.
- Determina la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación.
- Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica.
- Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético.
- Reconoce el mecanismo del haz de secantes como instrumento para validar el concepto formal de la derivada.

Nivel 3. Comprensión de la imagen

La expectativa teórica de este nivel está orientada en reconocer la forma en que las imágenes asociadas con una sola actividad son reemplazadas por una imagen mental, la cual, a su vez, se precisa como imagen orientadora de un proceso mental. Los descriptores definidos para este nivel son:

- Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada en su componente geométrica.
- Caracteriza y grafica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada.
- Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos.

- Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes.
- Elabora un mapa conceptual que refleja los conocimientos adquiridos y contenidos abordados sobre el concepto de derivada.

En la siguiente tabla se referencian las características de los niveles y los descriptores que permiten determinar el paso de un nivel a otro, anteriormente descritos:

3.2 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS INSTRUMENTOS DEL PROCESO DE INTERVENCIÓN

La intención dela presente sección es revelar los resultados obtenidos en los estudiantes, en cuanto a la evolución de la comprensión del concepto de derivada como aproximación local, a partir del análisis del trabajo realizado por éstos con base en el Modelo propuesto por Pirie y Kieren. Ésta temática es considerada como fundamento matemático para el desarrollo y razonamiento del cálculo infinitesimal, su estructura y tratamiento requiere del uso de procesos cognitivos propios de las matemáticas, como lo son la abstracción, la formalización, la deducción y el análisis.

De acuerdo a lo propuesto en los referentes conceptuales, analizados en el capítulo II, una de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada y temáticas asociadas, que aparece con mayor recurrencia en los estudiantes en relación a las rectas tangentes a una curva, es aquella que atañe al trazo de la tangente a una circunferencia como representación mental generalizada y que impide la aplicación del concepto a otras curvas. En este sentido, la distancia conceptual y de aplicación en referencia a la imagen del concepto y definición del mismo (Tall y Vinner, 1981) entre una recta secante y tangente a una curva.

De igual manera, el fundamento teórico también aduce que sumado a lo anterior, las concepciones de derivada y de función, como característica variacional y límite como consecuencia de tendencia, se presentan como dificultades que limitan fuertemente la comprensión.

Es así, como a partir de lo anterior se considera necesario, en primer lugar proponer acciones que permitan indagar los conceptos primitivos con los que cuentan los estudiantes para abordar el concepto de la derivada en su componente geométrico como aproximación local, que permitan identificar las dificultades y errores de tipo cognitivo que poseen los estudiantes para el aprendizaje de los mismos y que de alguna manera determinan o condicionan el alcance de los objetivos planteados en el trabajo de investigación.

En segundo lugar, se encuentran las actividades de intervención orientadas a determinar la pendiente de las rectas tangentes a una curva por medio del haz de secantes, y la identificación de la existencia o no de la derivada a partir de los criterios del límite y de las tangentes. En esta fase los estudiantes desarrollarán las acciones propuestas en los instrumentos anteriormente descritos, los cuales utilizarán la herramienta dinámica del Geogebra ® ®, para representar los objetos matemáticos. Estas acciones tienen la intención de promover las concepciones iniciales de los estudiantes observadas en la fase de la observación y diagnóstico del grupo, para profundizar en el concepto objeto de estudio del presente trabajo y significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre elementos constitutivos, como tangente, pendiente, aproximación, límite, entre otras, para reconocer las propiedades globales del objeto matemático de la derivada y a partir del desempeño del estudiante tener elementos para identificar su nivel de comprensión a la luz del modelo.

Y por último, se encuentra la fase de consolidación y ajuste de ritmos, en la que la aplicación de las teorías abordadas y especialmente la valoración del nivel de comprensión de los estudiantes se encuentran directamente asociados a la experiencia y significancia de los estudiantes al objeto de estudio y afines, puesto que la idea es desarrollar, evolucionar secuencialmente las estructuras cognitivas para acceder a conceptos cada vez más elaborados como es el de la derivada. Por ello se propondrán actividades finales como el instrumento evaluativo, el mapa conceptual final y actividades a través del software, que permitan determinar y validar las propiedades del objeto matemático, identificar la evolución en la comprensión matemática sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico y la relación con el valor de la pendiente de la recta tangente. Estas actividades en definitiva permitirán rastrear el manejo del lenguaje matemático, la comprensión conceptual de los elementos constitutivos del objeto geométrico de la derivada y la progresión en las definiciones y argumentos verbales, escritos y gráficos de los cuales se vale el estudiante en el desarrollo de las mismas.

Las anteriores fases tienen su sustento teórico en el modelo para la comprensión propuesto por Pirie y Kieren (Meel, 2003), donde el organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión. Y en las representaciones semióticas, propuesta por Raymond Duval (1999), en la cual se afirma que la comprensión de un concepto matemático debe aplicar la coherente articulación entre diferentes registros de representación y es menester del docente propiciar experiencias de aprendizaje que posibiliten la visualización del objeto de estudio. En la actividad propuesta, el estudiante tiene la posibilidad de identificar diferencias a partir de sus capacidades y poner en evidencia los conocimientos anteriores desde diferentes representaciones del concepto anteriormente mencionado.

No obstante, el análisis de los instrumentos que permitieron la recolección de la información se realizará por bloques. En el primer bloque se encuentran las actividades iniciales de intervención: Los mapas conceptuales y la prueba diagnóstica. En el segundo bloque se encuentran la intervención en la que se define analíticamente el concepto objeto de la presente investigación, y el proceso de caracterización y formalización del mismo través del mecanismo del haz de secantes y su pertinente verificación con el software Geogebra ®. Finalmente, en el bloque tres se encuentran los instrumentos finales de validación de las teorías abordadas y que permiten la valoración del nivel de comprensión de los estudiantes, estos son el mapa conceptual final, el instrumento evaluativo y el aplicativo en Geogebra ®.

BLOQUES	ACTIVIDADES
BLOQUE 1	• Mapas conceptuales iníciales. • Prueba diagnóstica.
BLOQUE 2	• Intervención y construcción analítica del concepto de la derivada en su componente geométrico. • Intervención 3: Pendiente y Haz de Secantes.
BLOQUE 3.	• Aplicativo en el Geogebra ®. • Instrumento evaluativo • Mapa conceptual final.

Tabla 2. Bloques y actividades a analizar.

El análisis de las fuentes de información devenidas en su mayoría de todas las producciones orales, gestuales y escritas de los estudiantes, que a su vez se registraban a través de diarios de campo de los investigadores, grabaciones en audio y video y en las producciones escritas por los estudiantes en cada una de las actividades de intervención fueron sistematizadas con rigurosidad durante todo el proceso de investigación.

3.2.1 ANÁLISIS BLOQUE 1

3.2.1.1 ANÁLISIS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES INICIALES

El conocimiento previo de los estudiantes es un factor de relevante importancia durante el proceso de aprendizaje y enseñanza, a través de éste, se establece el punto de partida y se identifica el manejo conceptual con el cual dispone el estudiante, para movilizar su estructura cognitiva en relación al objeto de estudio a tratar, como es el de derivada. De otro lado, y en dirección al proceso de enseñanza es de notable utilidad para el docente, puesto que al tomar éste como lente, le permite hacer lecturas y por ende, diseñar y aplicar estrategias y acciones con las cuales pueda movilizar y promover niveles de comprensión. Según lo propone Novak (1988), el profesor puede utilizar los mapas conceptuales para determinar qué rutas se siguen para organizar los significados y negociarlos con los estudiantes, así como para señalar las concepciones equivocadas que se puedan tener.

Consecuente con esto, se propone a los estudiantes la construcción de un mapa conceptual utilizando los siguientes conceptos matemáticos: recta, tangente, secante, figuras, curvas, frontera, función, pendiente, punto, y el uso, si lo consideran necesario de otros términos que complementen en mejor forma la estructura del mapa.

Es así como la propuesta del diseño del mapa conceptual, es una herramienta para visualizar la relación y la jerarquización que el estudiante hace de los conocimientos a priori, requisito indispensable para favorecer aprendizajes significativos del concepto que se espera sea aprendido. Su utilización da cuenta del cambio y evolución del aprendizaje antes, durante y posterior a las actividades de intervención.

Así pues, cuando se les pide a los estudiantes realizar un mapa conceptual con base en los conceptos expuestos, se da el caso de encontrar estudiantes que buscan el concepto más general que relacione los otros. Las vinculaciones de las palabras dadas en su mayoría, evidencian una propuesta de acercamiento a los registros de representación algebraica y geométrica. En el primero, porque las definiciones y los enlaces utilizados apuntan a temáticas propias a la de función lineal e identificación de sus propiedades como punto, término independiente, pendiente, relación, ecuación, posiciones relativa de dos rectas en el plano, entre otras. En cuanto a la representación geométrica, se destaca la asociación de los conceptos punto, recta y curva de la geometría euclidiana, teniendo al punto como unidad elemental y continua que determina las demás.

Los mapas conceptuales que se analizarán a continuación, traen consigo una estructuración realizada por los estudiantes, de los conceptos matemáticos dados. Se observará la jerarquización de los mismos y las relaciones que establecen para dar a conocer en parte los conocimientos primitivos que traen consigo como punto de partida para abordar el objeto de estudio comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

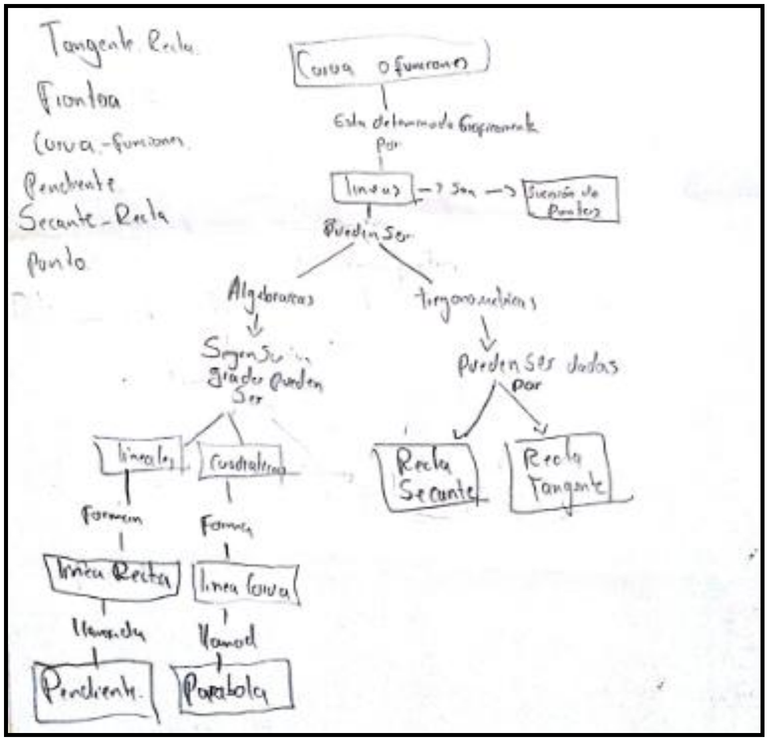


Ilustración 19. Mapa conceptual realizado por Julián.

En el mapa conceptual realizado por Julián, a partir de conceptos relevantes seleccionados de los contenidos previos a la temática de la derivada, está encabezado con la palabra función, la cual según él está determinada gráficamente por líneas, definiéndolas como una sucesión de puntos y que pueden ser algebraicas y trigonométricas. Se percibe una relación de los conceptos matemáticos como una mención de los temas propios de los grados noveno y décimo. Las palabras claves como frontera y curva, no las incluyó en el mapa conceptual, las cuales son propias del cálculo visto en el último año de secundaria y los primeros de universidad. En este mismo sentido, el lenguaje propio del estudiante utilizado para relacionar y jerarquizar el concepto de función en lineales y cuadráticas da cuenta de poca claridad en lo correspondiente a su definición, a la imagen de la misma y a su relación con las demás funciones.

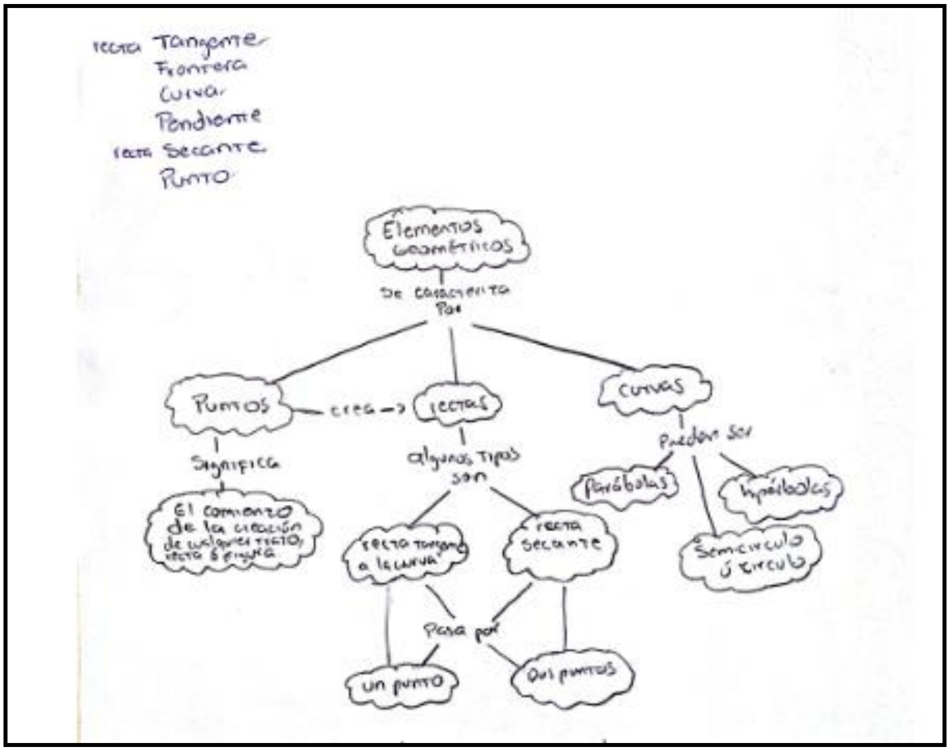


Ilustración 20. Mapa conceptual realizado por Ángela.

Por otro lado, en la propuesta del mapa conceptual de Ángela, en su jerarquización y presentación de los conceptos, permiten observar la forma como los entiende y los relaciona, asociando su representación y significación a los registros de representación geométrica. El enfoque del concepto de la tangente está más orientado, a la posición y relación de la recta respecto a una curva específica, identificando en ella el punto de relación local. No se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente a los fundamentos del cálculo.

Ángela encabeza el Mapa conceptual con las palabras *elementos geométricos* afirmando que ellos se caracterizan por puntos y que éstos crean las líneas rectas y curvas, proporcionando un acercamiento al concepto de punto y a la clasificación de algunos tipos de rectas y curvas, éstas últimas las clasifica en lugares geométricos parábolas, hipérbolas, semicírculo o círculo. Se centra más en sus componentes visuales que en sus elementos conceptuales y lógicos. La jerarquización de las palabras que apuntan a conceptos básicos del cálculo, está intencionada y articulada en parte con el objeto de estudio (comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico), pues se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente más a los fundamentos geométricos y la representación explícita empleada, permea sus puntos de vista sobre la validez de los vínculos proposicionales, arriesgando poco en la utilización de palabras que la comprometieran más con los fundamentos del cálculo y que fueron propuestas para la elaboración del mapa, tales como: límite, frontera y función.

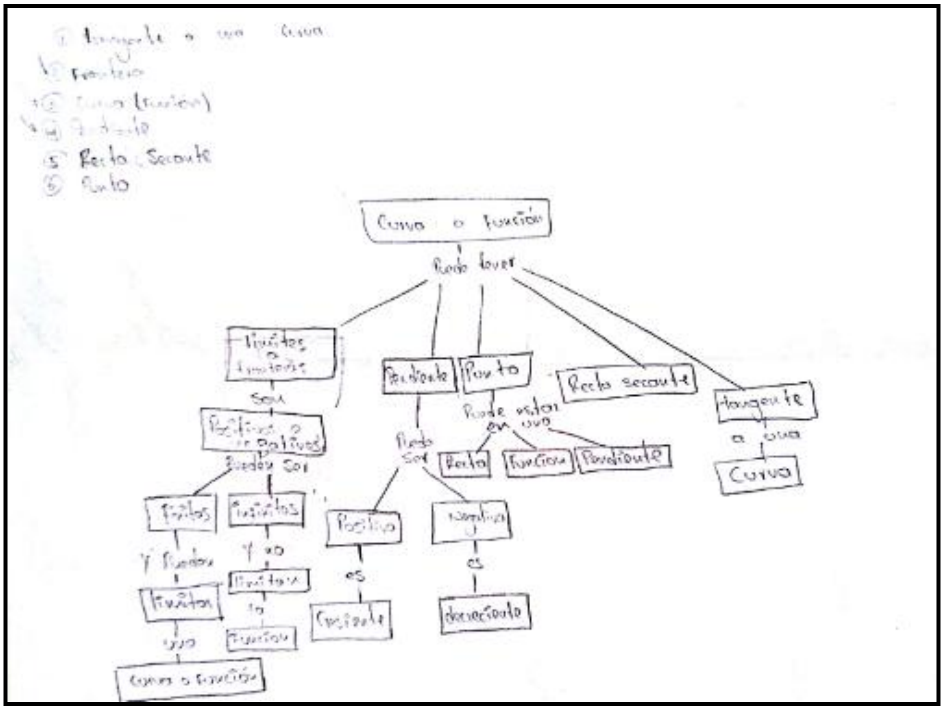


Ilustración 21. Mapa conceptual realizado por Evin.

Por su lado, el estudiante Evin, denota que la palabra clave de mayor jerarquía es *curva o función,* afirmando que puede tener pendiente positiva - creciente o negativa – decreciente. Según el estudiante la curva puede tener límites o fronteras positivas y negativas, finitas o infinitas, establece diferencia entre recta secante y recta tangente.

En su planteamiento representativo, trata de abordar todo el listado de palabras dadas, denotando acercamiento al lenguaje propio de los conceptos relevantes que intervienen en el concepto del objeto de estudio, aun así falta exponer otras relaciones de significado como el de aproximación local y su relación con las rectas secantes y tangentes a una curva en un punto dado sobre ella, para dar paso al concepto de límite.

A partir del esquema del mapa conceptual propuesto por Evin, se identifica un dominio de las características particulares de una función lineal, especialmente de la categoría de pendiente, signándola de una estimación creciente o decreciente. Por otro lado, hace evidente la separación del concepto de recta tangente a una circunferencia denotándolo a una curva, lo que permite que el proceso de comprensión del objeto de estudio pueda continuar.

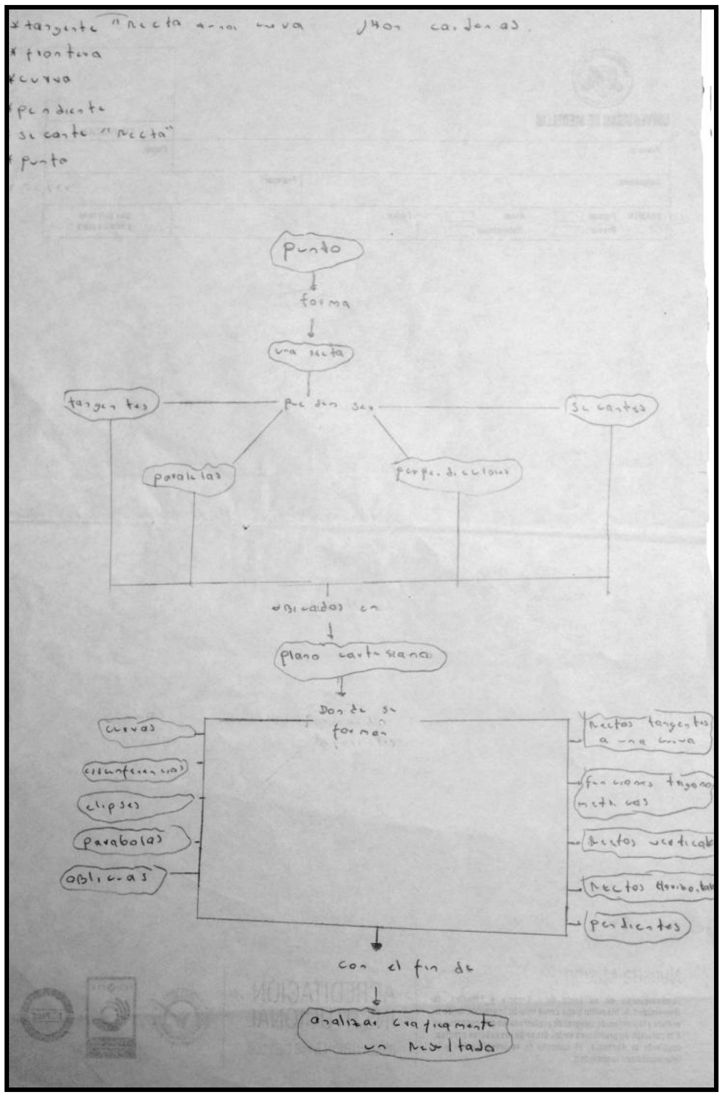


Ilustración 22. Mapa conceptual realizado por Jhon.

En cuanto al mapa de Jhon, su propuesta de organización presenta, además de los contenidos referenciados, otros que tienen que ver más con los lugares geométricos. Su ordenamiento general muestra una estructura evidenciando relaciones verticales y horizontales realizando agrupación de conceptos como una forma de ofrecer visiblemente una integración mental de ellos. Sin embargo, la distribución jerárquica que hace entre conceptos generales, subordinados y específicos deja entrever relaciones erradas y asociaciones difusas. Muestra clara de este aspecto, por ejemplo, se infiere a partir del empleo que hace y de la ubicación “espacial” en el diagrama al hacer referencia a la clasificación de la recta y las representaciones de estas en el plano.

Ahora bien, en dirección al objeto de estudio de la investigación y con base en la propuesta teórica que ofrece el Modelo, se observa la necesidad de realizar intervención, ya sea con retroalimentación expositiva o con el empleo de diferentes representaciones, tendientes a movilizar estructuras cognitivas y reconocer los obstáculos de carácter epistemológicos (obstáculo verbal) y los que son propios del sistema didácticos que emergen, anunciando, por medio del instrumento, la potencial inclinación que subsiste en el estudiante de cometer error o manifestar dificultad en cada oportunidad que se vea enfrentado al concepto objeto de estudio.

Es notable la necesidad de acudir a otras estrategias didácticas o representacionales para facilitar la evolución de la comprensión del concepto de recta tangente y pendiente de una recta. Además, para hacer presente la relación que existe entre el valor de la pendiente de una recta y su incidencia gráfica en el plano cartesiano.

Por otro lado, la apropiación del lenguaje matemático utilizado por los estudiantes y la interrelación de conceptos, se inscriben en un nivel básico en la profundidad y jerarquización con la cual se intenta dar cuenta del proceso y nivel de comprensión en el aprendizaje de los conceptos del pensamiento de la matemática avanzada tal y como lo propone el Modelo.

En cuanto a lo anterior, Duval (1999) propone que el contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas. Para alcanzar los fines comunes y corrientes de la comunicación o del tratamiento de la información, casi siempre parece ser suficiente la movilización de un solo sistema; esto no niega que en ocasiones sea necesario cambiar de sistema de representación para explicitar o mostrar propiedades diferentes de un mismo objeto. Esto es, existe la necesidad de centrar la atención en los diferentes registros de representación, que emplea el estudiante al momento de comunicar su idea o apropiación de los contenidos abordados, es decir la no coincidencia entre la imagen del concepto y la definición del concepto; teoría presentada ampliamente por Tall y Vinner (Meel, 2003).

En este sentido, el instrumento de los mapas conceptuales en tanto estrategia de aprendizaje y sistema de representación, da cuenta de la comprensión del estudiante en una forma más pertinente y didáctica, en contravía al aprendizaje repetitivo y memorístico, que busca la mecanización y solución de algoritmos. Según Novak y Gowin (1988), el aspecto más distintivo del aprendizaje humano es nuestra notable capacidad de emplear símbolos orales y escritos para representar las regularidades que percibimos en los acontecimientos y los objetos que nos rodean. Los mapas conceptuales ayudan al que aprende a hacer más evidentes los conceptos claves o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugiere conexiones entre los nuevos conocimientos y lo que ya sabe el estudiante.

Además de los mapas conceptuales como instrumento de indagación de los conocimientos previos del grupo donde se realizó la experiencia de intervención, se tienen otros elementos de observación e identificación, como por ejemplo la actividad diagnóstica (Ver Anexo 1), para hacer lectura del lenguaje y apropiación de conceptos básicos, preliminares al concepto de derivada, como lo son: funciones y sus representaciones gráficas y algebraicas, concepto de pendiente, tangente, tendencia, aproximación local, entre otros.

Si se hace el análisis bajo la luz del modelo para la comprensión de Piere y Kieren, los mapas conceptuales de los estudiantes, revelan que el dominio conceptual y el lenguaje matemático empleado en relación al objeto de estudio y necesario en los procesos básicos en dirección a movilizar estructuras acordes al propio nivel presenta digresiones, y que además el conocimiento primitivo con el cual el estudiante llega para abordar el objeto de estudio necesita la creación de maneras alternativas para orientar las intervenciones que permitan la evolución a un conocimiento ideal.

3.2.1.2 ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

El siguiente análisis de la actividad diagnóstica se hace con base en la relación entre la información recogida, los descriptores presentados en el diseño metodológico y los objetivos que apuntan a dar respuesta a la pregunta de investigación, con el propósito de rastrear las manifestaciones de los cuatro estudiantes (Julián, Ángela, Evin y Jhon) que den cuenta de los conocimientos primitivos que poseen con respecto al objeto de estudio.

Esta actividad tiene seis acciones propuestas, que tenían por objetivo determinar el alcance y/o manejo de los saberes previos de los estudiantes para abordar el concepto de la derivada en su componente geométrico y fue complementaria a la actividad inicial de los mapas conceptuales. A partir del análisis de ambas se buscaba identificar el dominio conceptual y los conocimientos que habían logrado los estudiantes previo a la actividad de intervención y además observar las dificultades y errores que están relacionados con el aprendizaje de los mismos, especialmente aquellos de corte cognitivo que requieren de mayor esfuerzo para ser superados y que determinan el alcance de los objetivos propuestos en el presente trabajo de investigación.

Inicialmente se describirá cada acción de la Actividad Diagnóstica (Ver Anexo 1), luego se presentará como los cuatro estudiantes respondieron a las preguntas y finalmente se analizará las preguntas y respuestas de forma individual.

En la acción 1, los estudiantes debían asociar las representaciones gráficas de un conjunto de funciones con su respectiva expresión algebraica, pues se considera fundamental que con relación al concepto de función y a la luz del Modelo, el estudiante tenga comprensión del mismo desde las diferentes definiciones y representaciones utilizadas en el contexto de la enseñanza, especialmente aquella en términos de variable y para procesos de pensamiento matemático avanzado la definición de la teoría conjuntista o teoría de las estructuras matemáticas.

Después, la acción dos buscaba que los estudiantes pudieran determinar el valor numérico de la pendiente de dos rectas y a partir de los resultados caracterizar cada una. Sin lugar a dudas, el manejo adecuado de procedimientos algorítmicos como prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un resultado particular es necesario, y esta acción permitía identificar el dominio de esta consecución por parte de los estudiantes. No obstante, lo significativo del proceso era el análisis cualitativo del resultado obtenido, es aquí donde está la prueba detallada que permite vislumbrar el razonamiento deductivo y comprensión conceptual de los estudiantes para caracterizar cada uno de los elementos que componen los objetos matemáticos, en este caso con el comportamiento de las rectas horizontales y las rectas verticales.

En esta misma acción, se planteó una situación para que los estudiantes pudieran escribir la expresión algebraica que representa la pendiente de una recta en términos de las coordenadas de dos puntos. El presente ejercicio intenta que el estudiante pueda pasar del examen de las características particulares y comportamientos de un conjunto limitado de objetos matemáticos a uno más general y extenso que lo contenga, facilita la interpretación, sistematización y validación que se llevan a cabo en los procesos cognitivos superiores de la matemática.

Luego de esta acción, se encuentra la acción 3, donde a partir de una representación gráfica, los estudiantes debían interpretar el comportamiento de la pendiente de una recta y sus respectivas componentes horizontal y vertical en un plano, a partir del movimiento de un punto. Este tipo de representación señala el potencial didáctico que se puede utilizar cuando se abordan determinados ejercicios que sugieren la utilización de esquemas mentales o modelos matemáticos a través de la simulación del mismo. Con la utilización de software y la representación dinámica, el concepto de la derivada en su componente geométrico se puede presentar en forma ágil y atractiva para los estudiantes. Es así como mediante esta acción se buscaba rescatar las ideas intuitivas de los mismos que permitan llegar a la abstracción y formalización del concepto.

Por otro lado, las acciones 4 y 5 presentan dos situaciones respectivamente, la primera busca que el estudiante intente definir y/o argumentar el concepto de recta tangente a una curva, y la segunda situación tiene como propósito indagar por la manera cómo los estudiantes representan gráficamente el concepto definido en la situación anterior. Estas percepciones de la recta tangente a una curva se convirtieron en el conocimiento primitivo que los estudiantes poseían para abordar la temática central de ésta investigación.

Por último, la actividad diagnóstica planteaba una situación en la que los estudiantes a partir del trazo de rectas secantes a una curva con respecto a un punto fijo determinado y la consecución del valor de sus pendientes, verifican que éstas pueden aproximarse al valor de la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto. Este procedimiento se define como mecanismo del Haz de Secantes y es útil para el trazado de rectas tangentes en puntos dados sobre curvas.

A partir de las descripciones anteriores la actividad diagnóstica contiene diferentes acciones, de tal manera que se recogieran respuestas desde distintas modalidades. Se incluyeron acciones donde se esperaba que el estudiante interpretara gráficos, escribiera fórmulas o realizara procedimientos algebraicos breves para dar un solo resultado, respondiera y representara en forma gráfica una situación planteada.

A continuación, en la tabla 1 se especifica los resultados generales de los estudiantes encontrados en la comprensión de los elementos asociados al concepto de la derivada en su componente geométrico y la relación con su correspondiente descriptor. Para cada estudiante se muestran las acciones correspondientes a las planteadas en la actividad diagnóstica; así por ejemplo, A2a, significa el ítem a de la acción 2.

Descriptor	**Jhon**	**Ángela**	**Evin**	**Julián**
Asocia la representación gráfica con la expresión algebraica	A1	A1	A1	A1
Determina el valor de la pendiente de una función lineal		A2a	A2a	A2a
Interpreta el valor de la pendiente de una función lineal				
Utiliza un lenguaje formal para representar el valor de la pendiente en términos de las coordenadas de dos puntos		A2c		
Manifiesta una idea intuitiva de tendencia				A3a, A3b
Presenta una idea intuitiva de recta tangente a una curva		A4a		

Traza rectas tangentes a una curva		A4b, A5a		
Identifica rectas secantes a una curva		A6	A6	A6

Tabla 3. Resultados generales de los estudiantes en la Prueba Diagnóstica.

A continuación se presentará un análisis más detallado de los resultados encontrados en el desarrollo de la prueba y su correspondiente socialización - reflexión grupal, que se hizo posterior a la aplicación de la misma.

Cómo se puede observar, los cuatro estudiantes (Ángela, Julián, Evin y Jhon) identifican y asocian las funciones en su expresión algebraica con su representación gráfica. Lo anterior, el paso de un registro algebraico a uno gráfico del concepto de función, es una característica importante para los procesos de construcción del concepto de la derivada en su componente geométrico, pues el poder identificar las diversas formas y usos de representación, además del verbal, de la actividad matemática, permite avanzar en otros procesos más rigurosos y complejos que permitan en los estudiantes la comprensión del objeto matemático propuesto. Debe entenderse, como se ha planteado a lo largo de la sistematización del presente trabajo, que las representaciones semióticas son las formas simbólicas, específicas para cada noción, mediante la que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos como así sus características y propiedades más relevantes. Según Duval (1999), el cambio de registro, es decir, la conversión de las representaciones, permite definir, luego introducir, un principio de variación cognitiva que hace visibles las unidades significantes pertinentes del contenido de las representaciones de un registro escogido. Se pueden así definir las variables cognitivas esenciales para analizar cognitivamente y a priori las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes.

Es necesario aclarar que la definición de función que se llevó con los estudiantes en clase correspondió a la planteada por Dennis Zill y James Dewar, y que alude a: *Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x de un conjunto llamado dominio un valor único f(x) de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenido se llama rango de la función.*(Zill & Dewar, 1998).

En los resultados obtenidos en la acción 1, se interpreta que Jhon diferencia entre funciones continuas y discontinuas en su dominio. Tanto Jhon como Evin, realizan una pertinente relación entre la representación gráfica de una función real con su correspondiente expresión algebraica, con lo cual permite inferir su fortaleza en los conocimientos previos respecto al concepto de función para identificar la imagen mental con su definición algebraica. Hecho que permite inferir la relación y valoración que realizan los estudiantes para colocar en diálogo sus representaciones internas (mentales) con las que se le presentan en calidad de representaciones externas (semióticas) en dirección a lo que se intenciona indagar con el empleo del descriptor.

Evin en el desarrollo de la actividad da a entender que tiene claridad del comportamiento y características de las funciones y puede pasar de un registro a otro, sin mayor dificultad, por ejemplo de la expresión algebraica a la representación gráfica y viceversa (Ver resultados Tabla 3).

Por su lado, Julián diferencia entre funciones lineales, valor absoluto, continuas, cuadráticas, cúbicas y otras. Se observa que le cuesta determinar la representación gráfica de las rectas cuando tienen pendiente negativa y a la vez se encuentran trasladadas verticalmente. Lo que hace evidente que no hay relación entre la imagen del concepto con la imagen evocada al dar respuesta de la relación entre la representación gráfica de la recta con su representación algebraica. De acuerdo con Vinner (1991), citado por Meel (2003), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una *imagen del concepto*.

Del ejercicio anterior se puede decir que el estudiante relaciona la representación gráfica de una función real con su respectiva representación algebraica, presentando en general concordancia con el descriptor propuesto, aunque no se puede determinar si en verdad hay una verdadera comprensión.

Schoreder (1987) citado por Meel (2003), dice que existen pruebas de que la comunidad de educación matemática no ha alcanzado un acuerdo unilateral respecto al significado de "comprensión" y expresa que la mayoría de las definiciones enunciadas por diversos autores derivan de la perspectiva constructivista subyacente de que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos.

La estudiante Ángela realiza una asociación entre la expresión algebraica de una función y las propiedades de su traza en un sistema de coordenadas. Además utiliza un lenguaje apropiado para identificar propiedades gráficas, no solo de funciones elementales, lineal, cuadrática, de grado tres, sino también para funciones trascendentales, como la exponencial y de funciones racionales, considerando sus respectivas asíntotas. Respecto con el quehacer de la estudiante y su forma de presentar las relaciones, se infiere que el concepto imagen, entendido aquí como la representación y, a su vez, la definición del concepto, la expresión algebraica, se evidencia en concordancia y por tal permiten identificar un perfil de fortaleza hacia la pesquisa que se pretende con el descriptor.

Los estudiantes, en su mayoría, determinaron el valor de la pendiente de las rectas, pero no dieron la interpretación correcta de ésta, es posible que preserven la definición estática y particular de pendiente como inclinación de la recta, que se les es transferida a lo largo del proceso educativo y donde no se les permite reinterpretar el texto o el concepto matemático abordado.

Otra explicación que puede aclarar esta situación es aquélla que se refiere a los individuos que poseen una definición general de un concepto y una imagen conceptual desligada de la primera, esto puede ocasionar obstáculos en la comprensión del concepto. Situaciones similares se mencionan en trabajos de Tall y Vinner (Meel, 2003), donde los estudiantes no establecen conexión con la definición, ni con la imagen ni con el concepto.

Como se describió anteriormente, la acción 2 de la actividad diagnóstica planteó tres momentos, tres acciones cuyo propósito era indagar sobre el concepto de pendiente y algunas de sus características. En el primer momento se lo examina como razón, la relación de cambio existente entre la ordenada y la abscisa a una curva. Para tal efecto se proponen las coordenadas cartesianas de tres puntos y se pregunta por el valor de la pendiente. En el segundo momento se exhorta a emplear el valor numérico de la pendiente para caracterizar ambas rectas. Finalmente, se aborda el concepto de pendiente desde una perspectiva algebraica.

A este respecto, Jhon muestra dificultad en el procedimiento para identificar los valores que determinan las abscisas y las ordenadas para cada punto, manifestando a su vez obstáculo en la comprensión del concepto del valor de la pendiente a una recta, como razón de cambio, ya sea con el empleo de la aritmética o del algebra. Para caracterizar las rectas se aleja del valor obtenido para las pendientes y en su lugar intenta hacer análisis comparando separadamente los valores de las ordenas y las abscisas.

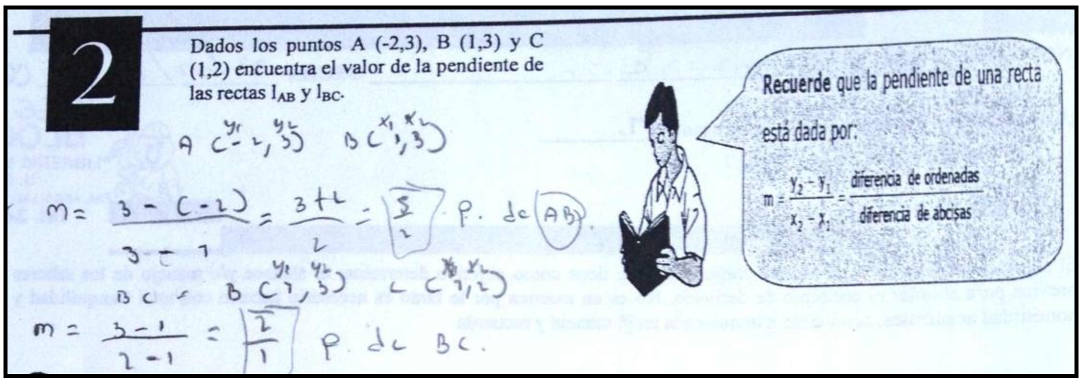
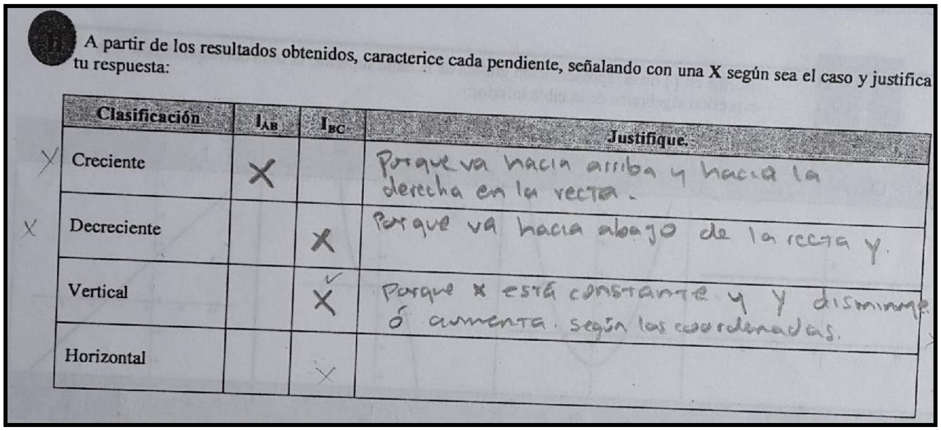


Ilustración 23. Valor de la pendiente de la recta que contiene dos puntos propuesto por Ángela.

Ángela identifica los correspondientes valores para las ordenadas y las abscisas, procediendo en forma acertada a la aplicación del algoritmo para determinar el valor de la pendiente de las dos rectas sugeridas. Allí evidencia claridad procedimental, en la aritmética empleada, y conceptual, al identificar las implicaciones de interpretación cuando la cantidad nula, “el cero”, aparece bien sea en el numerador o en el denominador. Manifestando con ello la posibilidad de Comprender el concepto del valor de la pendiente de una recta, como razón de cambio.



A partir de los resultados obtenidos, caracterice cada pendiente, señalando con una X según sea el caso y justifica tu respuesta:

Clasificación	I_{AB}	I_{BC}	Justifique.
Creciente	X		Porque va hacia arriba y hacia la derecha en la recta.
Decreciente		X	Porque va hacia abajo de la recta y.
Vertical		X	Porque x está constante y y disminuye ó aumenta. según las coordenadas.
Horizontal		x	

Ilustración 24. Caracterización de las rectas sugeridas en la acción.

En la caracterización de las rectas, Ángela, ayudándose de una gráfica auxiliar, intenta hacerlo a partir de las coordenadas que determinan los puntos y al parecer visualiza un “sentido” para las rectas: arriba, abajo, derecha, manifestando dificultad para aprovechar las bondades del valor de la pendiente en relación a identificar la posición de la recta en el eje de coordenadas (vertical, horizontal) o si por el contrario la función lineal que determina la recta es creciente o decreciente.

En relación al Modelo, sustento teórico de esta investigación, los conocimientos primitivos corresponden a la información en dirección a las ideas que “trae” el estudiante y las emplea para enfrentarse al objeto de estudio, pero en definitiva terminan siendo instancias que este ofrece, según su experiencia de aprendizaje, para hacer lectura, tanto de las fortalezas, a nivel de entendimiento y aplicación de los procedimientos, así como de las debilidades y obstáculos que emergen en la interrelación entre el estudiante y la acción propuesta para decidir la mejor forma de plantear estrategias para gestionar acciones que favorezca la evolución de la comprensión del estudiante, con relación al objeto de estudio.

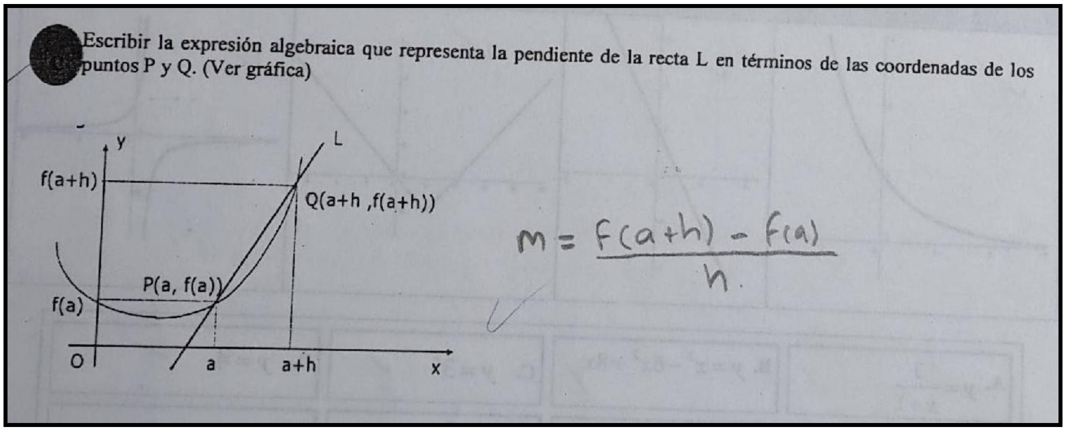


Ilustración 25. Expresión algebraica para la pendiente de la recta L presentada por Ángela.

En el caso de Ángela, en este apartado, para confrontar, y en lo posible superar, esta dificultad, se hace necesario aprovechar el empleo de otras representaciones, que permitan abiertamente, nuevas discusiones, y por tal movilizaciones cognitivas, respecto a la imagen del concepto y a la definición del concepto para enriquecer, en mejor forma, la aproximación formal del concepto de pendiente y las otras características asociadas a la función lineal que se pueden hacer visibles con ella.

Al rastrear el conocimiento inicial con respecto al concepto de tangencia a partir del cálculo del valor numérico de la pendiente de una recta dados dos puntos, Julián demuestra manejo de la fórmula y halla el valor de la pendiente, diferenciando las componentes de la abscisa y la ordenada de una pareja ordenada. Lo cual denota que tiene manejo algebraico de la fórmula dada para calcular el valor de la pendiente de una recta, dados dos puntos específicamente.

De manera continua con base en el valor numérico de la pendiente de las rectas encontrado, Julián caracteriza la correspondiente a una recta horizontal pues dicho valor numérico es de cero, pero se le dificultó interpretar el valor indeterminado, de la pendiente de la recta conformada por los puntos de coordenadas B y C, con su representación gráfica. Se sigue observando que al estudiante se le dificulta relacionar, el valor numérico de la pendiente de una recta tangente con sus características. Lo anterior según el Modelo, Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan sólo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente estrato, es decir, hay ausencia de la acción complementaria en el proceso de expresión (Meel, 2003).

No obstante, Evin aunque realiza correctamente el algoritmo que le permite determinar los valores numéricos de las pendientes de las rectas, se le dificulta la caracterización de las mismas a partir de los hallazgos obtenidos. Según el modelo propuesto por Pirie y Kieren es necesario que pase por la complementariedad de la acción, pues aunque realiza un constructo mental y representativo de la ecuación que determina la pendiente de una recta, debe lograr identificar las características asociadas al objeto.

En particular, Evin construye una imagen mental y externa del algoritmo para determinar la pendiente de una recta y sigue las instrucciones dadas por e investigador sin ningún tipo de análisis. Es necesario que Evin examine los resultados obtenidos para que pueda avanzar en su proceso de comprensión. En palabras del modelo, se queda en la propiedad de la acción y se le dificulta la propiedad de la expresión al no caracterizar las rectas a partir de los resultados obtenidos.

Por otro lado, es evidente la dificultad de los estudiantes en utilizar un lenguaje formal para representar objetos matemáticos, inicialmente todos tuvieron éxito en determinar el valor de la pendiente de una recta a partir de sus coordenadas numéricas, pero en actividades siguientes donde debían utilizar expresiones algebraicas para la obtención de estas en rectas secantes a una curva y generalizar su notación. Parece contradictorio que tengan dominio en procedimientos algorítmicos breves, pero la transferencia a situaciones que cumplen la misma característica se les presenta de manera compleja y difícil.

Muchas veces en los procesos de aula los conceptos se restringen a las variables que intervienen en ese momento y no se hace claridad sobre la importancia de la generalización a otros eventos, en la medida que permite el desarrollo de habilidades que dan sentido a dicho proceso y significan en primera instancia los objetos matemáticos. Con frecuencia el análisis de éstos se hace de una manera limitada, tanto en la conceptualización como en el desarrollo de las estructuras cognitivas de quien aprende. Para el Grupo Azarquiel (1993), generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe ni tampoco es definir, a partir de las propiedades de un objeto un campo de objetos caracterizados por cumplirlas. También se generaliza cuando se transfiere a situaciones propiedades que se cumplen en otras y en general cuando se amplía el ámbito de definición de una ley(AZARQUIEL, 1993).

En correspondencia con la teoría del Modelo, es muy complejo saber exactamente cuál es el estado actual de los conocimientos primitivos, así como de la información con la que los cuatro estudiantes realizan la acción propuesta; no obstante, es posible abordar una interpretación al respecto y afirmar la necesidad de profundizar en procesos que permitan, en relación a Tall y Vinner (1981), coherencia entre el concepto imagen y el concepto definición, para superar la dificultad en el empleo del lenguaje algebraico y aritmético, así como llevar a otros escenarios, más allá de lo operativo, la interpretación de la pendiente como valor numérico, como característica de una recta y como aplicación variacional.

De los tres momentos descritos se puede decir que los cuatro estudiantes, parcialmente establecen una relación coherente entre el concepto imagen y el concepto definición de la pendiente de una recta, a la vez que manifiestan una comprensión basada más en la mecanización de la parte algorítmica, que en la interpretación de su representación gráfica.

En Duval (2004), se dice que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Es pertinente denotar entonces, que a Julián la comprensión de la función lineal como tal, todavía está en proceso, pues falta coherencia en el manejo acertado del concepto en sus diversas representaciones, pues toda confusión entre el objeto de estudio y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión.

En la acción 3 del instrumento, propuesta en dos literales, se intentaba averiguar sobre la noción de variación a través del concepto de aproximación y tendencia, intencionando con ello la posibilidad de indagar cuando la recta secante tiende a convertirse en una recta tangente. Para tal efecto, sobre la curva planteada se indica el trazo de la secante determinada por los puntos P y Q y se pide observar lo que sucede al dejar a P fijo, al tiempo que Q se hace próximo a él.

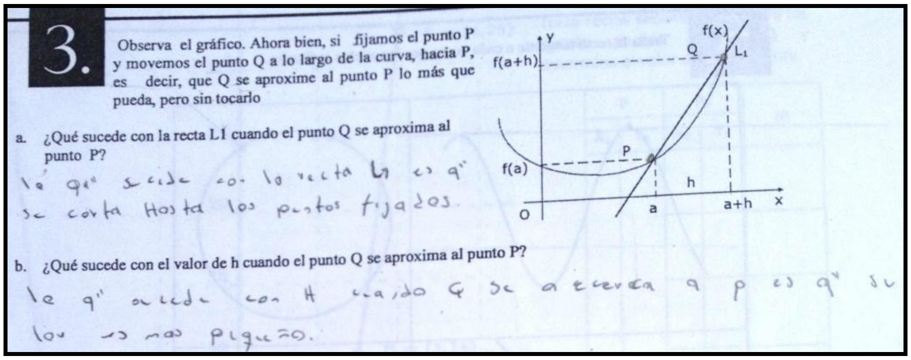


Ilustración 26. Conceptos de tendencia y aproximación a partir de la situación planteada.

Aunque Jhon manifiesta una idea de aproximación, cómo se evidencia en sus respuestas, enfoca su apreciación en determinar confusamente partes de intersección o corte entre la recta secante y la curva dada. Silencia, puesto que no la expresa, la noción conceptual entre tendencia y aproximación, así como también, la tendencia de la recta secante a convertirse en recta tangente toda vez que el punto Q se haga más próximo a P. En particular, cuando el estudiante identifica propiedades o elementos notables de tendencia y no lo expresa, logra identificar como lo afirma Pirie y Kieren, elementos discrepantes no relacionados de la imagen mental del estudiante con la imagen asociada al concepto, es decir los elementos complementarios de acción y expresión están desvinculados. Dejando entrever, error conceptual entre de la definición de recta tangente y recta secante; la noción de tangencia local se confunde con la de recta secante en ámbito global.

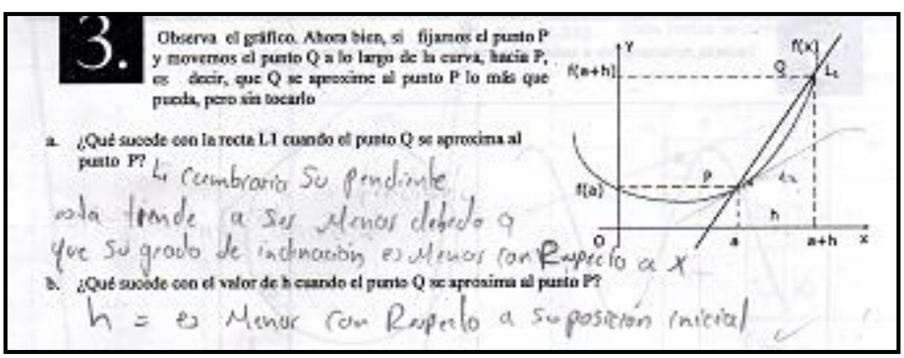


Ilustración 27. Conceptos de tendencia y aproximación según Julián

En cuanto a Julián, se puede observar que se acerca a la interpretación del concepto de tendencia, pero es difusa la visualización que hace con relación al valor numérico del límite de las pendientes de las rectas secantes con respecto al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto fijo P, lo que indica que es impreciso el concepto de aproximación local que manifiesta.

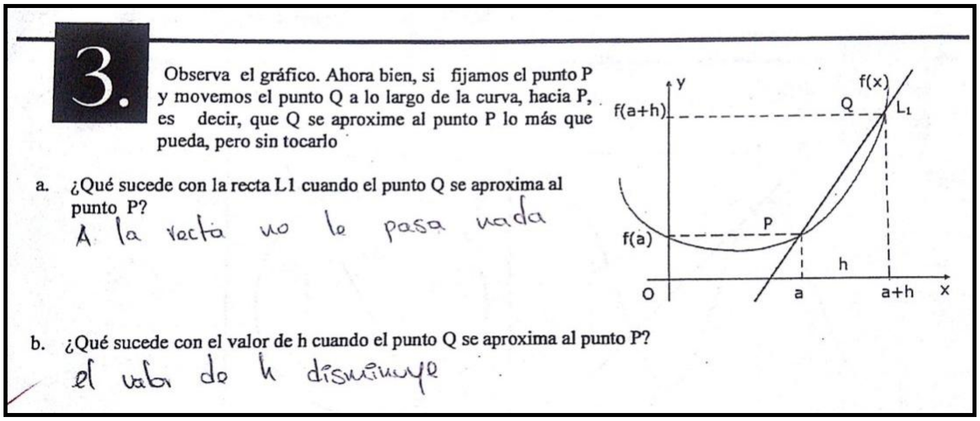
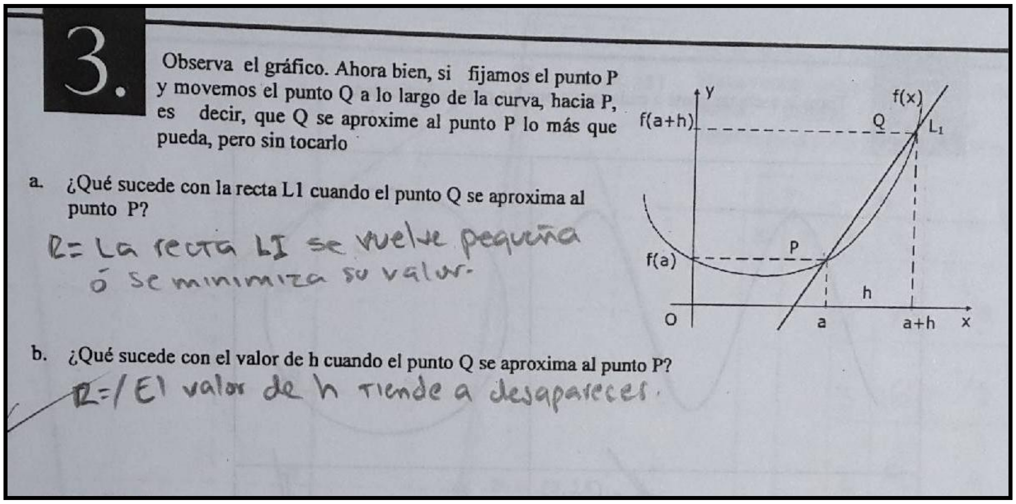


Ilustración 28. Conceptos de tendencia y aproximación según Evin.

Evin manifiesta un dominio al efectuar variaciones de la variable dependiente en términos de la variable independiente, aunque se le dificulta la visualización e inferencia de la utilización de la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia. Siendo así, se puede decir que Evin presenta dificultad para asociar los conceptos de variación y aproximación ligados al concepto de función. Podría inferirse también que la dificultad para reconocer los cambios en las variables representados en la figura es por estático y estandarizado de la misma.

Bishop (1994) dice que: *el individuo cuenta con un amplio rango de imágenes visuales cuando se restringe a actividades matemáticas* y referente a esta aseveración Presmeg (1986), consideró cinco tipos de imágenes visuales que el estudiante puede incluir en sus estrategias: imágenes concretas y pictóricas, imágenes modelo, imágenes memorísticas de fórmulas, imágenes cinestéticas e imágenes dinámicas. Las imágenes mentales pueden ser en algunos momentos no beneficiosas. Una imagen de una figura estándar puede inducir el pensamiento inflexible, el cual impedirá el reconocimiento de un concepto en un diagrama no estándar (Presmeg, 1986).


3\. Observa el gráfico. Ahora bien, si fijamos el punto P y movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P lo más que pueda, pero sin tocarlo

a. ¿Qué sucede con la recta L1 cuando el punto Q se aproxima al punto P?

R= La recta LI se vuelve pequeña ó se minimiza su valor.

b. ¿Qué sucede con el valor de h cuando el punto Q se aproxima al punto P?

R=/ El valor de h tiende a desaparecer.

Ilustración 29. Conceptos de tendencia y aproximación según Ángela.

En la indagación de esta acción, Ángela permite entrever su dificultad para comprender el concepto de densidad lineal, toda recta contiene infinitos puntos, puesto que, al proponer la variación del punto Q, dota de “tamaño” a la recta, afirmando: *la recta L_1 se vuelve pequeña o se minimiza su valor*”. A este respecto, la evidencia del obstáculo epistemológico de la experiencia primera cobra validez proporcionando error y dificultad en los razonamientos ofrecidos por Ángela. Además, cuando se le invita a inferir sobre la eventualidad del acercamiento a una región específica de la curva, hace uso del concepto de tendencia para caracterizar el valor de *h* cuando el punto Q se aproxima al punto P.

En cuanto a la definición o ideas intuitivas de los estudiantes frente al concepto de tangente y, de acuerdo a algunas definiciones que se pueden leer en la tabla 3, se encuentra en, términos de Tall y Vinner, una ruptura entre el concepto-imagen mal concebido y el concepto-definición de recta tangente.

PREGUNTA	RESPUESTAS
¿Qué es la recta tangente a una curva?	(Evin): *es la que toca la curva cortándola.* (Ángela): *Es la recta que pasa por uno y sólo un punto de la curva… sin cortarla* (Julián): *es la recta que toca un punto o varios sobre la recta función.* (Jhon): *Es la recta que va desde su extremo hasta infinito según la tangente.*

Tabla 4. Definiciones de los estudiantes de recta tangente.

El ejercicio invita a los estudiantes a emplear el lenguaje verbal para dar cuenta del concepto de recta tangente. Además, para que realice el trazado de rectas tangentes a una curva en un punto dado. Si observamos la definición de Jhon, aunque emplea las categorías de recta y de tangente, es confusa al intentar nombrar su característica esencial. Acto que muestra evidencia, en el apartado siguiente del ejercicio, pues al trazar la recta tangente al punto A y al punto B lo hace como si la recta, para él segmento, empezara justo en esos puntos, es decir, para él, el punto A y el punto B son extremos que dan "inicio" a la "recta tangente" (Ver Ilustración 30). En el punto C muestra duda al trazar la recta y borrarla seguidamente al corroborar que su trazo interceptaba a la curva, cortándola precisamente en ese punto.

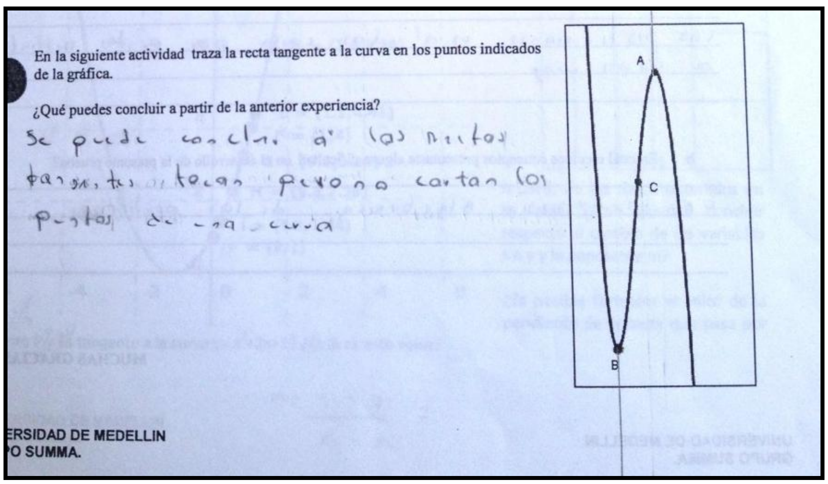


Ilustración 30. Trazo que realiza Jhon de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Finalmente Jhon expone como conclusión, la siguiente afirmación: *"las rectas tangentes tocan pero no cortan los puntos de una curva"*, colocando en evidencia y verbalizando el obstáculo presente, el que tiene que ver con la definición exclusiva y excluyente de la recta tangente de la geometría Euclidiana presentada en los cursos básicos. Aquí, la comprensión y evolución del concepto de recta tangente se dificulta por la falta de hacer uso de otras representaciones que permitan movilizarlo.

En cuanto al trazo de las rectas tangentes sobre las representaciones gráficas en los puntos indicados, el estudiante contradice la afirmación realizada en el punto anterior puesto que en la representación sinusoidal una de sus trazas "corta" en varios puntos a la curva dada. En las restantes representaciones propuestas insiste nuevamente en trazar las “rectas” o segmentos de recta, tomando el punto de tangencia como extremo. Además, en la justificación, cambia sustancialmente su definición de recta tangente al afirmar: *“las distinciones es que las corta* (en referencia al trazo de la recta tangente) *por partes distintas a cada una”.*

Luego, Julián al redactar el concepto que trae sobre recta tangente a una curva, se rastrea confusión con respecto a la precisión de la definición, pues no aclara si está hablando de una función en especial o si está generalizando, ya que su respuesta apunta al caso de trazo de la recta tangente a un punto de una recta.

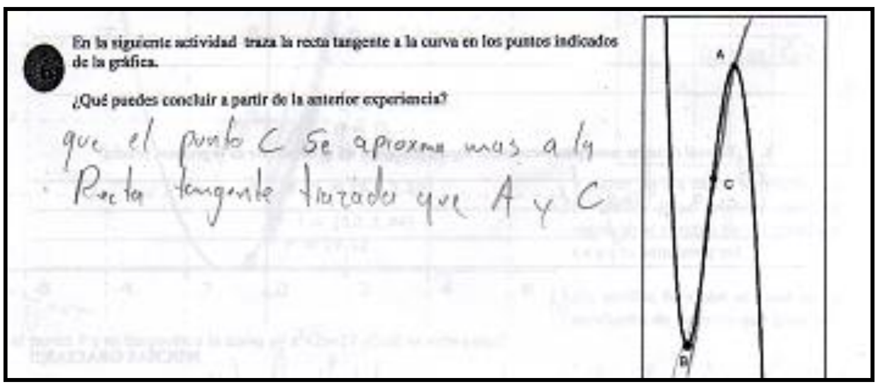


Ilustración 31. Trazo que realiza Julián de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

De igual forma la interiorización del concepto de recta tangente a una curva en un punto dado al tenerla que trazar en varios puntos de la misma, es confusa, pues traza una recta que pasa por los tres puntos dados de la curva y la conclusión escrita de la acción implementada evidencia confusión entre rectas secantes y rectas tangentes a una curva. Esta representación semiótica que tiene como característica ser consciente y externa revela la no objetivación del objeto de estudio. Duval (2004) dice que la función de objetivación (para sí) casi siempre se asimila a la expresión (para otro), a pesar de que son independientes.

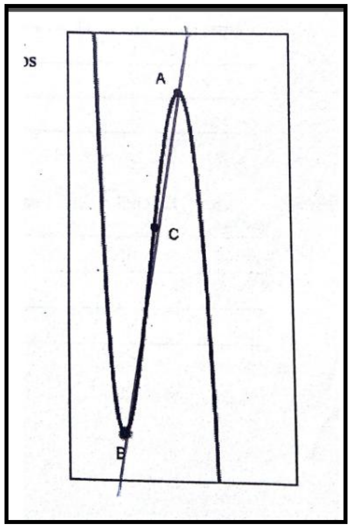


Ilustración 32. Trazo que realiza Evin de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Evin es uno de los estudiantes que más se aproxima a la definición de recta tangente a una curva, aunque le faltó precisar en su respuesta, ésta está en contraposición a las expresiones intuitivas como la de la recta que pasa por un punto y no “corta” a la curva. Pero la representación gráfica evidencia una dificultad en la comprensión de la instrucción, pues Evin en lugar de realizar rectas tangentes a la curva por cada uno de los puntos indicados, procedió a realizar una sola recta que pasara por los tres puntos. La comprensión en la instrucción es necesaria para poder transmitir el significado entre el objeto y su representación, es una habilidad fundamentalmente comunicativa y su desarrollo permite la adecuada relación de los elementos en la actividad matemática.

Evin, en su descripción de recta tangente alude que *es la que toca la curva cortándola.* Cómo se puede observar hace precisión de dos términos necesarios para la definición del concepto, “toca” y “corta”, de lo que se puede identificar que reconoce las propiedades del objeto matemático, en este caso el de recta tangente, para llegar así a concebir imágenes más globales. A propósito Godino (2003) afirma que la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.(Godino, 2003).

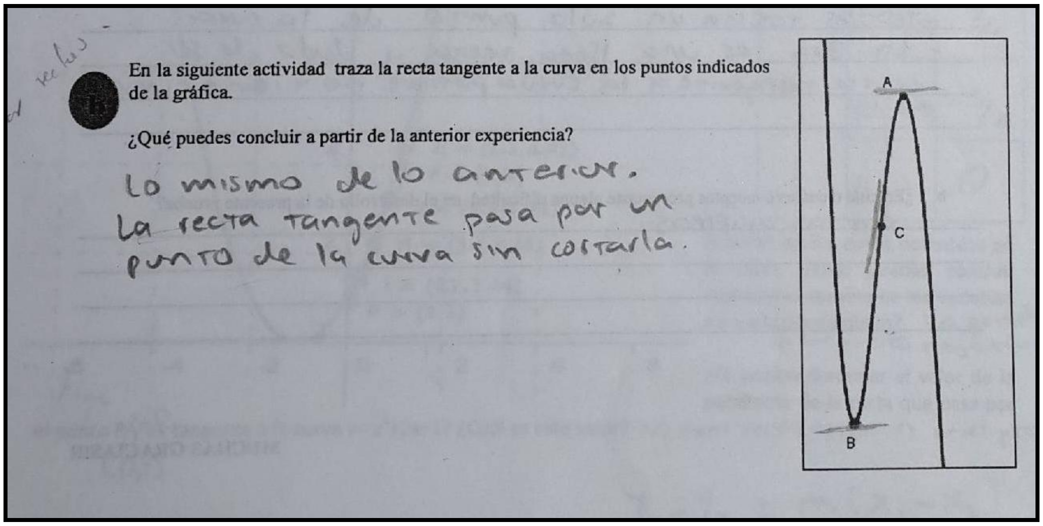


Ilustración 33. Trazo que realiza Ángela de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Por su parte, para esclarecer su definición de recta tangente a una curva, Ángela se apoya en la definición que se hace desde la geometría Euclidiana en cursos elementales. Aquella que es específica de la recta tangente a una circunferencia. Es así como presenta una idea muy particular para ilustrar gráfica y verbalmente la noción de recta tangente. Al realizar la caracterización de la recta, emplea términos de doble implicación al expresar "pasa por uno y solo uno" y concede a la región de tangencia la precisión exclusiva de "rose" o contacto, pero a su vez excluye, enfáticamente, la condición de corte.

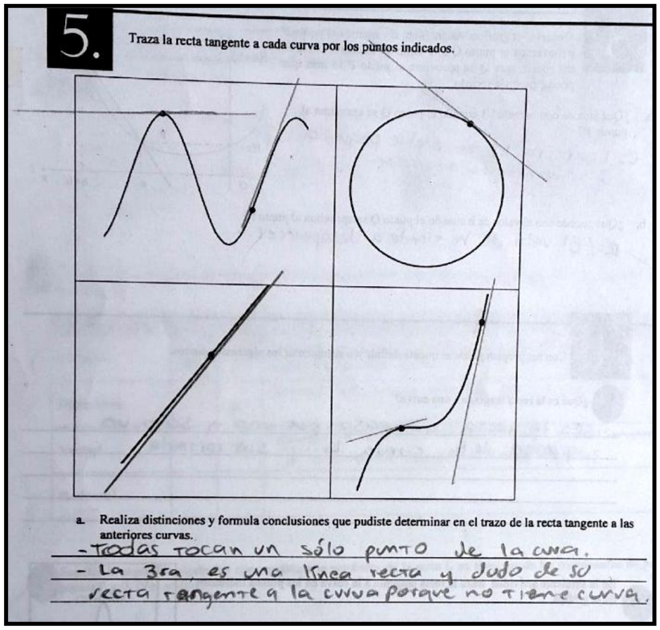


Ilustración 34. Trazo que realiza Ángela de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Asimismo, cuando aborda como aplicación el concepto de recta tangente exterioriza su representación, realizando pequeños y tímidos trazos, no de rectas sino de segmentos, con los que verifica su definición: "*la recta tangente pasa por un punto de la curva sin cortarla*". Evidentemente, el obstáculo verbal hace presencia, pues el léxico con el cual la estudiante presenta los términos de tangencia incide en una falsa explicación, según la imagen. Lo anterior le da fuerza a lo que Dolores (2000) denuncia como dificultad para entender el concepto de la derivada en su componente geométrico, valga recordar, considerar la recta tangente desde una caracterización estática y global en perspectiva de la geometría Euclidiana de los primeros cursos, cuya definición, y representación, permite una aproximación, aunque bastante admitida, muy débil en la presentación del concepto, puesto que hace referencia sólo a la recta tangente a una circunferencia, originando un vasto panorama de borrosidad cognitiva y que aleja de la posibilidad de entender , en el sentido en que lo presenta (Bedoya Beltrán, Jorge Alberto; Esteban Duarte, Pedro Esteban; Vasco Agudelo, Edison Dario;, 2006), *" la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella es una manifestación del concepto de aproximación local".*

En cuanto al trazo de las rectas tangentes sobre las representaciones gráficas en los puntos indicados, Ángela, continúa con la dificultad y realiza su trazo según el procedimiento y conservando las “características” de sus experiencias de aprendizaje previas, para obtener la recta tangente a una circunferencia, reafirmando su argumento, visual y verbal, respecto a su concepto e imagen, la recta tangente “toca” sólo en un punto a la curva, de lo que se deriva su inconveniente procedimental y su afirmación categórica, en relación a la línea recta: “*la 3ra es una línea recta y dudo de su recta tangente a la curva, porque no tiene curva*”.

De lo anterior se pueden deducir las siguientes aseveraciones: Los aspectos complementarios de la acción y la expresión hacen manifiesto la fuerte distancia que existe, en dirección al Modelo propuesto por Pirie y Kieren y a la teoría de Tall y Vinner (Meel, 2003), entre la imagen del concepto y la definición del concepto. Lo anterior se evidenció, puesto que el acto de la expresión de una imagen asociada a patrones previamente concebidos es desarticulada. Los registros dados por los estudiantes resaltan la importancia de dar respuestas a las situaciones planteadas, logrando identificar propiedades de los conceptos matemáticos abordados a partir de las imágenes, por ejemplo, los conceptos de tangencia, tendencia, pendiente, entre otros; pero éstas distan de estar relacionadas con el lenguaje formal.Además, para promover la evolución en la comprensión en los primeros niveles según presupuestos del Modelo, se hace necesaria la necesidad, de mostrar otras representaciones de la noción de recta tangente, dado que, en términos de Duval (1999) entre más representaciones se empleen para el estudio de un concepto matemático, se incrementa la posibilidad de comprenderlo. Es decir, el empleo de diversas representaciones semióticas respecto a un mismo contenido que se desea estudiar potencia considerablemente la comprensión de los sujetos.

Según las respuestas de los estudiantes es posible que preserven una imagen textual o visual de la definición y representación de recta tangente a una curva. Puede ser una imagen memorística que se ha transferido en el proceso educativo. Ángela, Evin y Julián tienen la idea de la definición, pero fallan al centrarse en el término “en un sólo punto” o en “toca a la curva”. Se ha argumentado que en la enseñanza se constituyen ciertos obstáculos que entorpecen la capacidad de reconocer un objeto matemático y sus características, error que se evidencia en esta ocasión no de una manera figurativa sino en una expresión escrita fija que no permite reconocer un objeto cuando hay un tratamiento.

En el último trabajo de Hitt (2003) en relación con perdurabilidad de esquemas o imágenes, señaló que:

La construcción del conocimiento que implica desempeños erróneos, crea desde el punto de vista que estamos tratando, esquemas y conexiones permanentes que se contraponen a la construcción adecuada de cierto concepto. Pero nuestra opinión es que esos esquemas no desaparecen, aún y cuando se construya un esquema alternativo. Ya que en algunos casos, esos esquemas puedan resurgir de manera que un individuo pueda repetir ese error que prevalecía en el pasado, en el momento en que se le presenta una actividad más compleja. (p. 15)

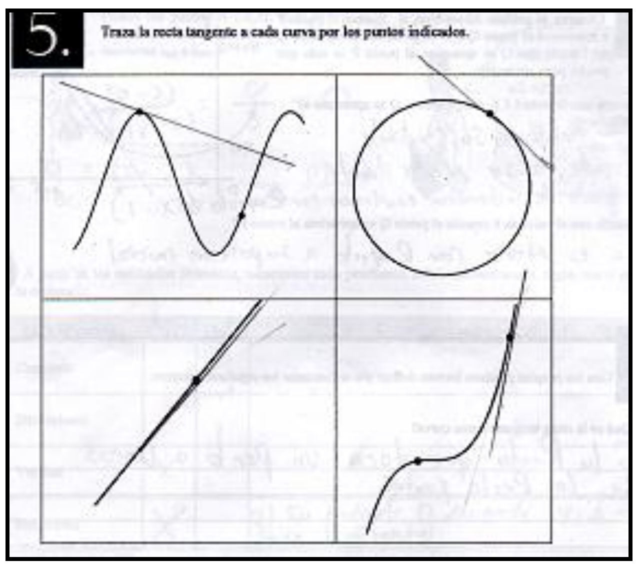


Ilustración 35. Trazo que realiza Julián de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Al trazar rectas tangentes a una curva dado un punto de tangencia, Julián la realiza sin tener presente el mecanismo del haz de secantes, logrando así realizar trazos de segmentos de rectas que pasan por el punto dado, dejando otros puntos sin su trazo. En la gráfica senoidal traza de manera incorrecta la recta tangente a la curva en un punto máximo. En el momento de Julián realizar distinciones y formular conclusiones con respecto al primer momento de la acción, con el fin de rastrear el empleo de un lenguaje propio que ayude a visualizar y a reunir más información del nivel propio del Modelo de Pirie y Kieren en el que se encuentra, decide no hacerlo. Aunque en el tercer momento se le invita a enumerar los conceptos que visualizó que aún se le dificultaba manejar, después de haber aplicado la prueba y Julián responde que es el concepto de recta tangente.

Hasta este momento de la investigación han hecho considerable presencia diversos obstáculos epistemológicos, Bachelard (2000), en referencia a la noción de recta tangente: el obstáculo de la experiencia primera o los pre-juicios empleados en la definición y en la representación gráfica; el obstáculo de la generalización, la dificultad presente para realizar el trazo cuando la curva no es una circunferencia y el obstáculo verbal, al relacionar la definición de tangencia con una especie de contacto, de "rose" o de "toque "un único punto entre dos elementos geométricos.

Esto se evidencia, básicamente, en el empleo de las representaciones gráficas y en las narraciones escritas presentadas por Ángela. No obstante, este es uno de los presupuestos que tiene en cuenta el Modelo, pues en este, según lo expresa Rendón (2011), se encuentra sobrentendida la idea de que al acercarse al objeto de estudio, el estudiante se encuentra con diversos obstáculos que impiden la evolución de la Comprensión y por tal el paso de un nivel a otro. En este sentido, las actividades del nivel 1 se presentan precisamente para eso, para indagar sobre el conjunto de concepciones previas, evocación de imágenes o ideas intuitivas que ofrece el estudiante al momento de dar cuenta de la aplicación del concepto.

De acuerdo a esto y para generar movilización de los procesos cognitivos hacia el contenido matemático abordado se presentó el desarrollo manual (lápiz y regla) del método del haz de secantes como instancia para generar la necesidad de definir, en términos como lo presentan Bedoya,Jorge y Otros (2006), "*la recta tangente a través de una propiedad adicional que esta tiene: la de ser recta de estabilización del proceso del haz de secantes*".

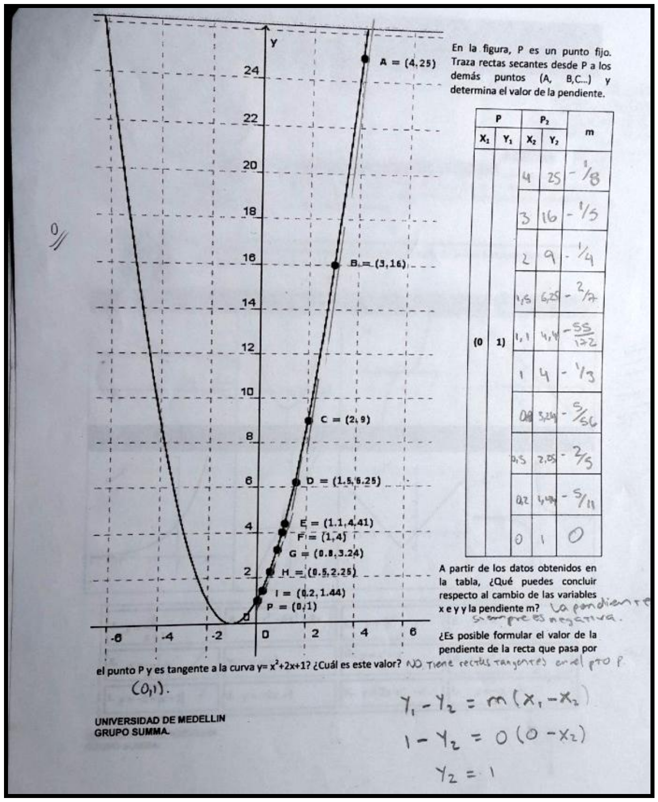


Ilustración 36. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Ángela.

En esta acción en el desarrollo que presentó Ángela, en su representación externa, se observa que el trazado de las secantes lo hace no a partir de rectas sino de pequeños segmentos que "rosan" y rodean la proximidad gráfica del punto que dista de *P* como punto de referencia fijo. Es decir, traza la recta, para ella segmento, sin tener en cuenta el punto *P*, sólo en el punto con el cual es posible formar la recta secante con *P*. Es decir, el obstáculo persiste e imposibilita la propiedad adicional de poder visualizar y descubrir que la recta tangente deviene en recta estabilizadora para el mecanismo empleado.

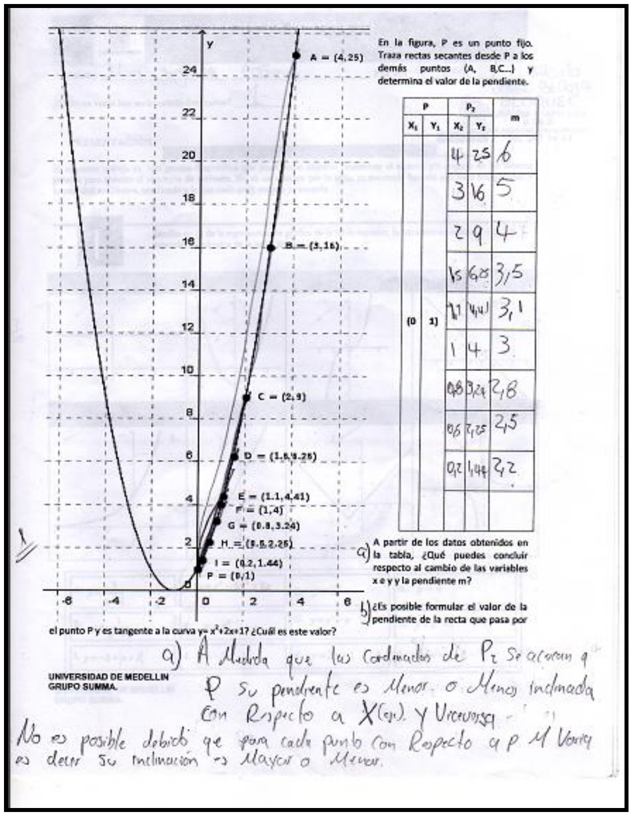


Ilustración 37. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Julián.

En esta acción, en la que se le propone al estudiante trazar rectas secantes desde un punto fijo P sobre la curva a otros puntos dados y a la vez determinar el valor numérico de las pendientes. Tanto Julián como Evin, trazan segmentos de rectas que unen al punto *P* con los otros puntos dados, calculan asertivamente el valor numérico de la pendiente y Julián concluye que a medida que las coordenadas del punto P_2 se acercan al punto *P*, el valor numérico de la pendiente disminuye a la vez que observa que las rectas secantes están menos inclinadas con respecto el eje *x*.

A Evin se le dificulta seguir las orientaciones dadas por el investigador, pues debía construir rectas secantes a la función que pasaran por el punto P, pero el estudiante realiza segmentos de recta, de ahí que Evin debe distinguir y realizar conexión acertada de las características de la imagen para formar y poder realizar clasificaciones oportunas del concepto objeto de estudio.

El trabajo realizado por Julián permea que el mecanismo del haz de secantes no le proporciona información para concluir el posible valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado P, lo cual denota nuevamente que el concepto de límite, de aproximación local y el de recta tangente a una curva, no lo relaciona, con el de la derivada de una función, se visualiza que los tiene como casos aislados, no coordinados y a la vez confusos. Duval (2004), expresa que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación.

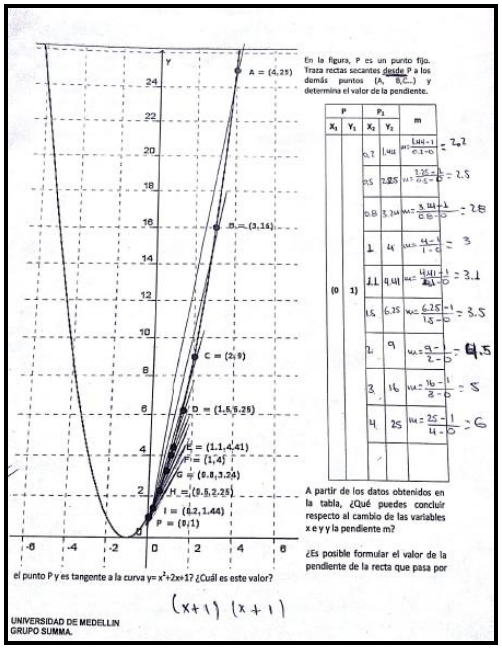


Ilustración 38. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Evin.

En cuanto a Evin, adicionalmente, se le dificulta establecer conclusiones a partir de la actividad que enuncien el cambio de las variables y permitan identificar las posiciones relativas entre rectas y una curva, dejando entrever una vez más la ruptura cognitiva frente a los conceptos de tendencia y aproximación local propios del objeto matemático a abordar.

Se observa la necesidad de implementar actividades y retroalimentarlas bajo la luz del modelo de Pirie y Kieren, que conduzcan a la superación de las dificultades descritas, basadas en el manejo de las diferentes representaciones y que le permitan evolucionar en la comprensión de la definición y en las características propias de la recta tangente.

Al finalizar el desarrollo de la prueba, se realiza socialización de la misma con los estudiantes, como mecanismo complementario a la actividad escrita y adicionalmente permitía determinar el manejo de los saberes previos que hace uso el estudiante para abordar los conceptos de pendiente, recta secante y tangente a una curva, representación gráfica y algebraica de funciones, noción de tendencia o aproximación, entre otras, que se hacen evidentes a través del lenguaje verbal.

Una de las dificultades en la formación del concepto de derivada, con la geometría como herramienta, es la concepción griega de tangente que persiste en los estudiantes desde sus cursos elementales. La concepción como tal obstaculiza notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo. Asimismo, obstaculiza la comprensión fundamental de que la recta tangente pueda "tocar" y también "cortar" a la curva y continuar siendo tangente en la zona de corte. Además, su carácter estático en perspectiva de la geometría Euclidiana, al ser concebida como un lugar geométrico, deviene también en obstáculo cuando su concepción se intenta desde un sentido dinámico, a través de la sucesión de secantes (haz de secantes).

En ese sentido se socializa con los estudiantes la acción 5, de la actividad diagnóstica para identificar las distinciones y conclusiones que los estudiantes pudieron determinar en el trazo de la recta tangente a las curvas que se ilustran en la tabla 5.

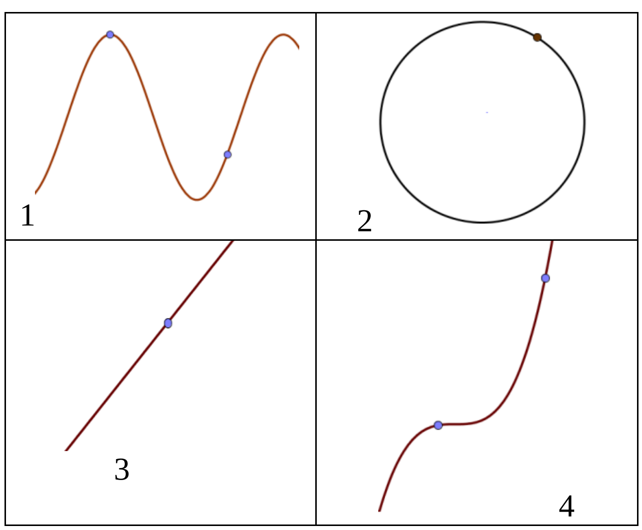


Tabla 5. Trazo de rectas tangentes a la curva por el punto indicado.

En palabras de Tall y Vinner, lo que los estudiantes evidencian es una ruptura entre la imagen del concepto mal concebido e interiorizado y la definición de los conceptos de función y de recta tangente, que parece interpretarse como una constante en el siguiente diálogo retomado de la socialización grupal:

Investigador: *¿Qué distinciones conclusiones pudiste determinar en el trazo de la recta tangente a las anteriores curvas?*

Participante 1: *Yo creo que manejo la definición entre recta tangente y secante. La tangente sólo corta un punto, mientras que la secante atraviesa cuando es con respecto a una circunferencia, pero en otras curvas ¿Cómo aplica?*

Investigador: *Frente a la experiencia del trabajo del punto 5 de la prueba diagnóstica, ¿Qué conclusiones obtuviste?*

Participante 1: *Mis conclusiones fueron preguntas, ¿Una recta tangente puede ser secante?, ¿eso es posible?*

Investigador: *¿Puede en algún momento una recta tangente ser secante?*

Participante 1: *¿Si puede?*

Participante 3: *Si es en una línea recta si se puede.*

Investigador: [Dibuja en el tablero las cuatro curvas del punto 5]. *Alguien quiere compartirnos y mostrarnos ¿Cómo realizaron el trazado de la recta tangente a esas curvas en el punto señalado?*

Participante 1: *Yo lo hice así*(Ilustración 39). [Muestra seguridad en el trazado de la recta tangente correspondiente a la curva 2 y en el punto máximo de la figura 1. Sin embargo al momento del trazo del punto B manifiesta inseguridad y su trazo de la recta tangente en ese punto es confusa.]

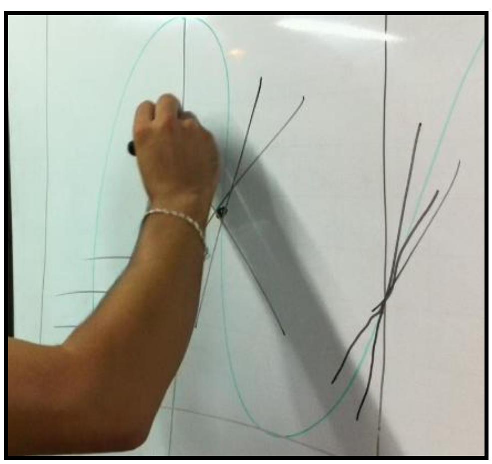


Ilustración 39. Participante 1 construyendo una recta tangente a una curva.

Investigador: *¿Alguien más?*

Participante 4: [Traza dos rectas horizontales sobre la curva 1y las llama verticales, para el punto A, limita el trazo de la recta cuidando de no “tocar” otra región de la curva, en tanto que para el punto B, no cuida lo anterior y busca trazar la recta hasta cortar por el punto indicado].
Yo las tracé de esa manera porque en la prueba no decía, ni especificaba la posición de la recta si era vertical, diagonal u horizontal, aunque sé que se pedía el trazo de una recta tangente.

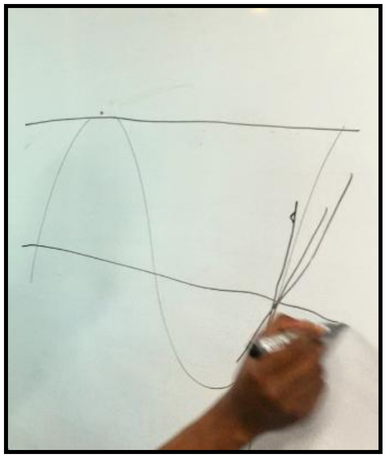


Ilustración 40. Participante 4 construyendo rectas tangentes.

Participante 2: *Yo todas las rectas tangentes las tracé de manera vertical, así*. [Realiza la representación gráfica en el tablero]

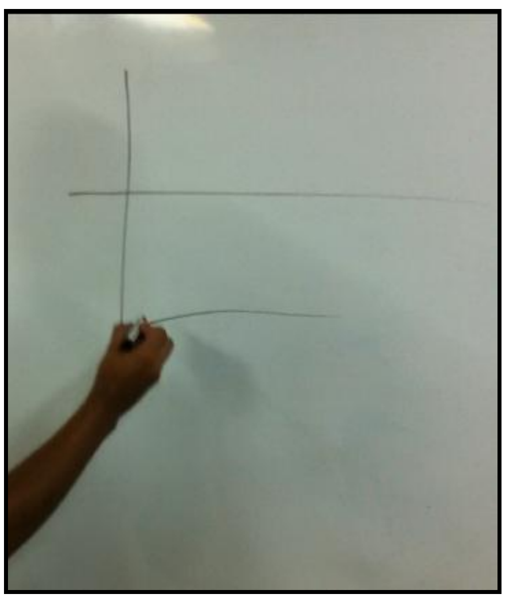


Ilustración 41. Participante 2 construyendo rectas tangentes.

Investigador: *¿Entonces, que podemos decir sobre la recta tangente a una curva en un punto?*

Participante 2: *La tangente solamente toca en un solo punto y solamente toca ese punto en la curva y debe ser una función, de tal manera que esa recta vertical no es función porque para un solo valor de x* [Señala la representación de la recta vertical hecha en el tablero] *le corresponde varios valores de y.*

Participante 3: *La curva si es función, pero la recta vertical no lo es, porque es como de la forma de x=4 y afirma que x es un valor absoluto.*

Investigador: *¿Y si la curva es una función lineal, como la propuesta en la actividad diagnóstica, entonces como sería la recta tangente, digamos en un punto sobre esta?*

Participante 5: *Pasa muy cerquita pero no la toca, yo la hice así.*(Ilustración 42)[Realiza la representación gráfica en el tablero], luego *afirma que no son la misma recta.*

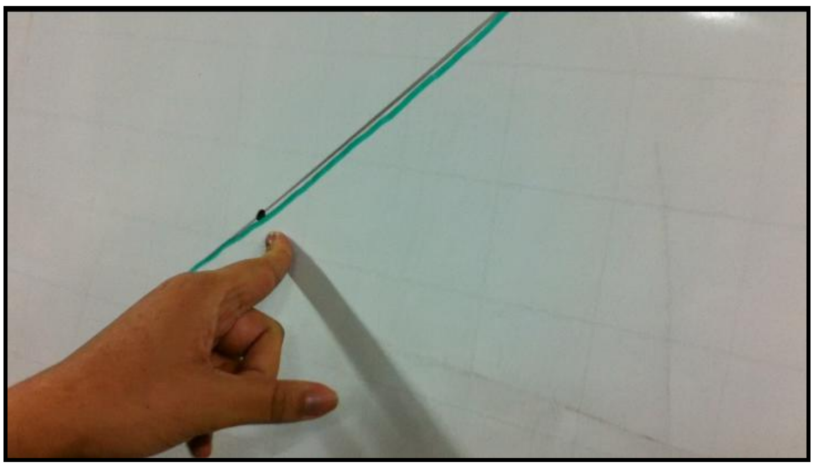


Ilustración 42. Participante 5 construyendo rectas tangentes.

Participante 6: *Yo creo que corta a la recta por ese punto.*(Ilustración 43)

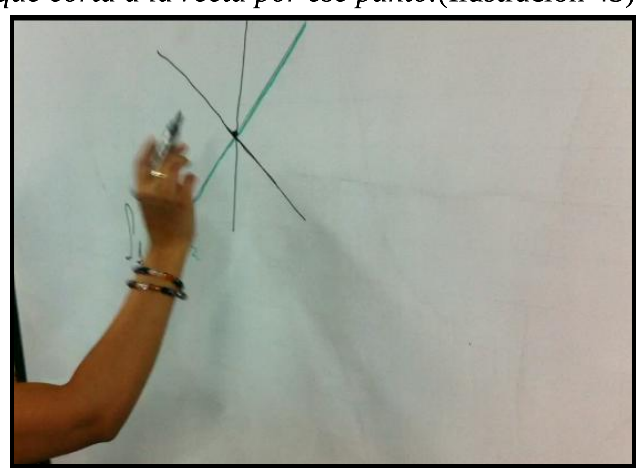


Ilustración 43. Participante 6 construyendo rectas tangentes.

Participante 6: *Afirma que aunque ese punto no lo realizó en la guía de trabajo proporcionada, pero la recta tangente pasaría cortando* [Traza, dos rectas que pasan por el punto señalado, cortando a la recta dada].

[Lo anterior generó polémica en el grupo y toma la palabra el participante 2.]

Participante 2: *Sería imposible que la recta tangente tocara solamente en ese punto a la recta dada.*

Participante 6: [De pie frente al tablero le pregunta al grupo] *¿Cómo trazaron la recta tangente al círculo?, si también ésta estaba pasando por un pedacito del círculo.*

[Se observa el obstáculo generado por la definición exclusiva y excluyente de la recta tangente de la geometría Euclidiana presentada en los cursos básicos.]

Participante 2: E*n ese caso la recta tangente toca al punto y no tiene que seguir tocando. Si usted le traza una recta tangente a una recta queda la misma recta.*

Investigador: *El objetivo de la socialización del trabajo realizado no es señalar quien tiene o no la razón, lo que se pretende es que con todas las intervenciones y acciones movilizar el pensamiento para que puedan aclarar las dudas y construir el concepto objeto de estudio.*

Los resultados de este apartado muestran entonces que las ideas intuitivas que tienen los estudiantes de tangente a una curva, pueden establecer dificultades y errores de tipo cognitivo para abordar el objeto de estudio de la presente investigación. Una de las dificultades identificadas y que aparece con mayor recurrencia en los estudiantes en relación a las rectas tangentes a una curva, es aquella que atañe al trazo de la tangente a una circunferencia como representación mental generalizada y que impide la aplicación del concepto a otras curvas. Para el imaginario de algunos estudiantes la recta tangente debe ser horizontal y para otros debe ser vertical. Otra dificultad observada es cuando la curva es una línea recta, el trazo de la recta tangente a la curva por el punto indicado es otra recta que pasa cerquita a la recta dada, toca el punto, pero no a la recta. En este sentido, se observa la distancia conceptual y de aplicación en referencia a la imagen del concepto y definición del mismo (Tall y Vinner) entre una recta secante y tangente a una curva.

Otros problemas persistentes en los estudiantes es la dificultad para establecer diferencias entre las diversas representaciones de las funciones (polinómicas, trascendentales…), no diferencian si la representación gráfica de las rectas horizontales y verticales en el plano cartesiano cumplen la condición de ser función, además se dificulta para algunos la correspondencia entre la representación gráfica de las rectas verticales, con su representación algebraica y el dominio conceptual para referirse a objetos propios de la actividad matemática está difuso, por ejemplo al referirse a una función constante enunciándolo como un valor absoluto y en el momento de trazar rectas tangentes a una curva en un punto determinado, varios estudiantes trazaban de manera temerosa segmentos pequeños y los reteñían hasta tocar el punto indicado, parecían estar exteriorizando una representación mental evocada. El esquema utilizado por el participante 1, para relacionar el conjunto de rectas que concurren en un punto; denominadas haz de rectas, evidencia una distorsión entre el postulado que dice que por un punto pasan infinitas rectas con la propiedad de la recta como recta tangente a una curva en un punto.

Es así como a partir de las intervenciones de los estudiantes y la orientación del investigador se pudo apreciar obstáculos de tipo cognitivo que entorpecían el avance en la comprensión del objeto de estudio. En esta situación, los estudiantes experimentaron un *Folding Back*, en lo que respecta al concepto de recta tangente y secante y las correspondientes asociaciones mentales de las que se vale cada uno para establecer semejanzas y diferencias. Los estudiantes además del *Folding Back*, descrito anteriormente también transitaron por el mismo al analizar el comportamiento de las funciones, estableciendo, en primer lugar las características de una función, haciéndose necesario que reexaminen los conceptos y propiedades de algunos elementos matemáticos básicos como:

- Criterios de paralelismo entre rectas.
- Posiciones relativas de una curva y una recta.
- Propiedades de función.

En la actividad de socialización, también se muestra un *Folding Back* en Julián, Ángela, Jhon y Evin, cuando se les indaga por las ideas intuitivas de recta tangente y se les da la instrucción de realizarlas a algunas curvas, la primera manifestación fue el no poder realizar distinciones y formular conclusiones al no inferir el concepto de recta tangente a una circunferencia a otras curvas en general. Se destaca la guía y acompañamiento del docente y del grupo de investigadores que permiten a los estudiantes reflexiones y críticas argumentadas ante sus confusiones para ser superadas, por ejemplo, en la errónea concepción de que la recta tangente de una recta en punto, es otra que pasa muy cerquita sin tocarla excepto en el punto indicado. Concepción que también es superada y por lo tanto se puede avanzar en la comprensión de la temática objeto de estudio.

Para explicar este tipo de respuestas, es pertinente el estudio de Hitt (2000) donde incluye en sus consideraciones teóricas, líneas que se enmarcan en la construcción del concepto. Hitt (2000) analizó la teoría de Skemp (1971) quien considera a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales llamadas esquemas. También desde la posición de Hierbert y Carpenter (1992) [citado en Hitt, en prensa] quienes señalan que *una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones.* Se puede decir que el estudiante (o los estudiantes) que transitan de una representación mental a un diagrama para aplicar representar funciones y rectas tangentes a estas curvas, entran en una red de conocimiento o adaptan estos conocimientos a estructuras conceptuales y plantean tratamientos y conversiones encaminados a la construcción del concepto.

Los estudios de la comprensión no han sido ajenos al concepto de las representaciones mentales. En efecto, la mayoría de las teorías proponen que la apropiación de los diferentes sistemas de representación del concepto y el reconocimiento de sus características y elementos constitutivos, contribuye a favorecer una extensión de la capacidad de representación mental de los sujetos (Tall y Vinner, Duval y Pirie y Kieren). Estas estructuras representacionales, tienen por objetivo organizar coherentemente el tipo de información que posee el individuo y que les permitirá obtener una comprensión a niveles más avanzados.

3.2.2 ANÁLISIS DEL BLOQUE 2

3.2.2.1 ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN Y CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO.

Con las actividades planteadas y la interacción y visualización en el procesador dinámico del Geogebra ® se pretende observar las relaciones que pueden establecer los estudiantes del comportamiento de la recta tangente a una curva y la condición de existencia de la derivada. Esta intervención comprendía 3 actividades:

1. Caracterización de las rectas a partir del valor de su pendiente (creciente y decreciente)
2. Trazo de rectas tangentes a una curva con ayuda del software.
3. Generalización del valor de la pendiente de la recta tangente a una curva a partir del límite de las pendientes de la recta secantes.

Cada una de las preguntas plantean interrogantes acerca de situaciones específicas. Se pide a los estudiantes que relacionen las proposiciones textuales con las gráficas dinámicas representadas en el software.

En la actividad 1, se plantea una situación gráfica representada en la Ilustración 44, la cual describe diferentes posiciones de rectas en el plano. Los estudiantes deben identificar y caracterizar el conjunto de rectas a partir de su posición en el plano cartesiano y responder las preguntas formuladas.

En este tránsito de lo gráfico a lo verbal, se involucran una serie de variables, valga mencionar: valor numérico de la pendiente de una recta, pendiente de una recta a partir de la medida del ángulo, crecimiento y decrecimiento de una recta, entre otros, que requieren relación y análisis a partir del pensamiento figurativo y operacional del estudiante.

Se observa que en esta coordinación que se establece entre estos dos mecanismos de representación existe una correspondencia, donde las variables a considerar son los elementos constitutivos del objeto matemático, y la asertividad en el paso de un registro a otro determina el proceso de comprensión del mismo, tal y como lo plantea Duval (2004) en su teoría.

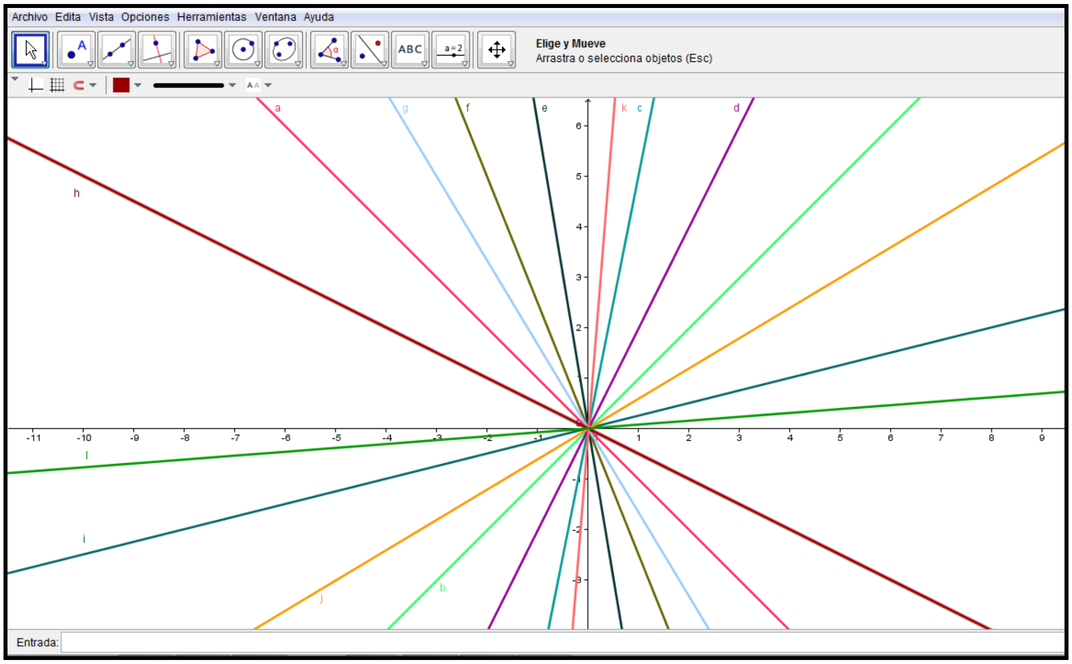


Ilustración 44. Rectas coincidentes en un punto, con diferentes pendientes.

A partir de la situación ilustrada en la figura anterior, se les plantea a los estudiantes que identifiquen cuál es la recta de mayor pendiente y cuál es la recta de menor pendiente. Como se puede observar, se realizaron representaciones gráficas de rectas con pendientes positivas y negativas.

Ángela, Evin, Jhony y Julián coincidieron en responder que son las rectas k y l respectivamente. Su respuesta fue acompañada del siguiente argumento:

Si observamos allá [señalando el primer cuadrante del plano cartesiano], la recta k es la que tiene mayor inclinación y la recta l está más cerca al eje x.

Si se tiene en cuenta la observación dada anteriormente, la visualización de estos estudiantes estuvo dirigida al primer cuadrante y en comparar "posibles"[12] valores de las pendientes de las rectas de acuerdo a la inclinación de las mismas respecto al eje y. Ninguno

[12] Se dice posibles, porque no hay valores numéricos para las coordenadas que permitan calcular con precisión el valor de las pendientes

precisó en el ángulo formado entre éstas y el eje horizontal x , así como tampoco tuvieron en cuenta aquellas rectas de pendiente negativa.

Aun teniendo los estudiantes algo de veracidad en la respuesta, pues si se comparan en la gráfica, las rectas k y l, se observa que la recta k tiene mayor inclinación que la recta l, el ángulo con respecto al eje x es mayor para la primera con el origen como punto en común, el desconocimiento de las propiedades de las demás rectas es evidente, especialmente para aquellas que coinciden en valores de pendientes negativas. Los estudiantes se inclinaron a interpretar visualmente en la gráfica y responder lo pedido, siguiendo contornos o subespacios del plano.

Pero cuando se les pide que identifiquen las rectas que son crecientes (pendiente positiva) y las rectas decrecientes (con pendiente negativa), los cuatro responden acertadamente. Al igual que en la actividad dos, en la que al construir la representación gráfica de la función $y = x^2$ en el Geogebra ®, determinaron correctamente el comportamiento de las rectas tangentes a la función en diferentes puntos de la misma, mencionando características como:

- *Entre* $-\infty < x < 0$ *las rectas tangentes a la curva son decrecientes.*
- *En el vértice de la parábola, la recta tangente a la curva es horizontal y no tiene pendiente (para mencionar que el valor de la pendiente es igual a 0)*
- *Entre* $0 < x < \infty$ *las rectas tangentes a la curva sin crecientes.*

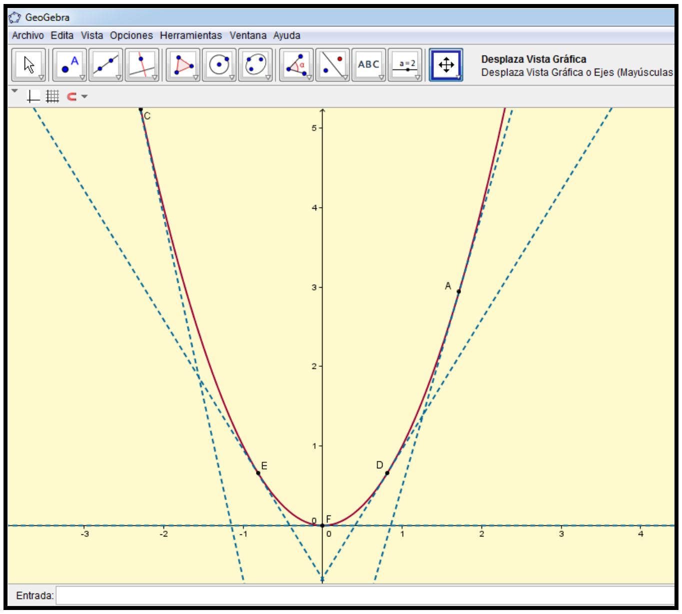


Ilustración 45. Construcción de la función cuadrática.

En la actividad 3, propuesta en esta intervención, con ayuda del software dinámico Geogebra ® se traza la curva $f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{3x^3}{4}-\frac{5x^2}{4}-\frac{7x}{4}-1$. Y en ésta se toma un punto de referencia $P\ (a, f(a))$, y otro $Q\ (b, f(b))$(no muy cercano a P) que pertenezca a la curva. Se traza la recta tangente a la curva en el punto P y la recta que pasa por P y Q. Se mueve el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P, tanto como sea posible.

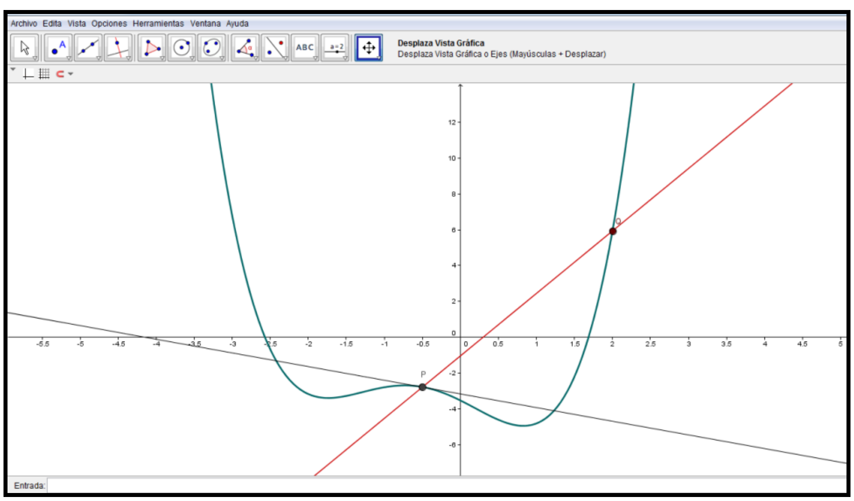


Ilustración 46. Gráfica de la función $f(x)$. Aproximación local.

Se procede a preguntarle a los estudiantes, ¿Qué sucede con el valor de la pendiente de la recta PQ, a medida que el punto Q se aproxima al punto P? Para profundizar en las comprensiones de los estudiantes a partir de la representación y visualización en el software, se describe a continuación el episodio en el cual los estudiantes y el investigador generan un diálogo en torno a la situación descrita:

Investigador: *Miremos, si movemos el punto* Q *a lo largo de la curva, lo suficiente que se aproxime al punto* P*, ¿Qué está pasando con la recta* PQ*?.*
[El investigador con ayuda de los comandos del software, mueve el punto Q a lo largo de la curva mientras los estudiantes observan]

Alexander: *Cambia la pendiente de la recta.*

Investigador: *Y cómo son las posiciones de las dos rectas que pasan por P con respecto a la curva.*
[El investigador señala las dos rectas]

Julián: *Una es secante y la otra es tangente a la curva.*

Alexander: *Todas dos son secantes a la curva, sólo que en el punto P, esta es tangente* [señala la gráfica].

Julián: *Ummm*

Investigador: *¿Entonces una recta tangente a la curva puede ser secante a la vez?*

Estudiantes: *Sí.*

Investigador: *Además de estar cambiando la inclinación de la recta* PQ*, a medida que movemos el punto Q, ¿Qué más pueden visualizar?*

Ángela: *Que las rectas se van aproximando.*

Investigador: *¿Cómo qué aproximando?*

Ángela: *Sí, se aproximan tanto que la recta* PQ *se va a montar sobre la otra recta que es tangente en P.*

Investigador: *¿Quién recuerda, cómo se nombran a las rectas que tienen la particularidad a la que se refiere la compañera?*

Estudiantes: [Guardan silencio].

Investigador: *¿Recuerdan?*

Julián: *Paralelas.*

Investigador: *¿Cómo son las rectas paralelas?*

Julián: *Tienen la misma pendiente.*

Investigador: *Bueno, en intervenciones anteriores teníamos la siguiente situación.* [El investigador realiza ilustración en el tablero].

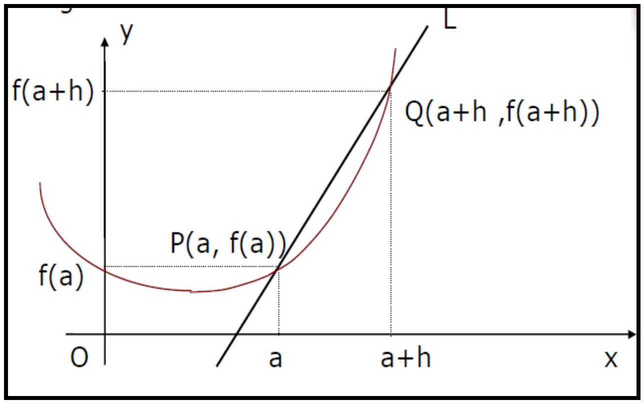


Ilustración 47. Gráfica presentada en la Acción 2c de la intervención 1.

Cuando teníamos que la pendiente de la recta PQ estaba dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(h)}{(a+h) - h}$$

¿Recuerdan?

Estudiantes: *Sí*

Investigador: *¿Qué sucede con el valor de h cuando el punto Q se aproxima al punto P?*

Alexander: *La distancia h se vuelve 0.*

Investigador: *Pensemos en la siguiente situación, si tenemos una tirilla de papel y la dividimos a la mitad, luego uno de ellos otra vez a la mitad y así sucesivamente, podremos tener unidades cada vez más pequeñas e infinitas en cantidad y medida.*

Estudiantes: *Ummmm*

Investigador: *Si observamos estos dos puntos [el investigador señala los puntos $a+h$ y a en la figura del tablero], h tiende a 0, pero nunca se hace 0, porque siempre vamos a tener distancias infinitamente pequeñas. Concluimos que $a+h$ tiende a a, pero no coinciden.*

Ahora, ¿Qué podemos concluir de las rectas: Secante y tangente, ilustradas en el software?

Por razones de tipo temporal, se les pide a los estudiantes que escriban en la guía de trabajo propuesta para esta intervención (Ver anexo 4), la conclusión de lo interpretado en la situación descrita por medio del software, estas fueron:

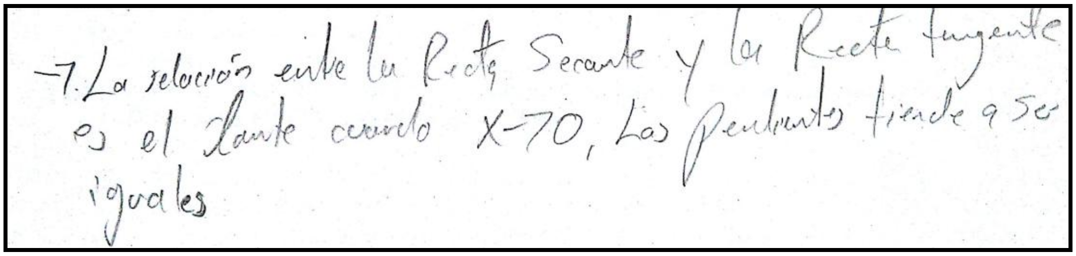

7. La relación entre la Recta Secante y la Recta tangente es el límite cuando $X \to 0$, Las pendientes tiende a ser iguales

Ilustración 48. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Julián.

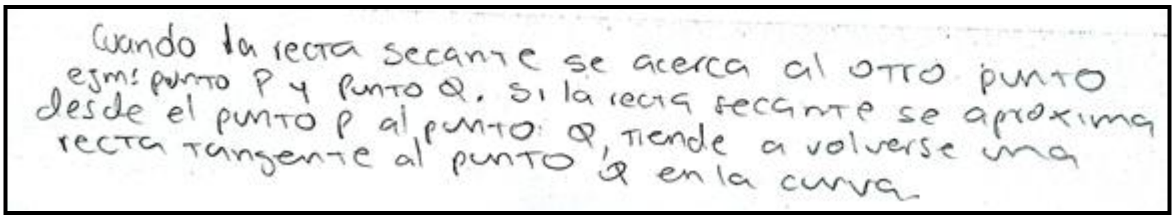

Cuando la recta secante se acerca al otro punto ejm: punto P y punto Q. Si la recta secante se aproxima desde el punto P al punto Q, tiende a volverse una recta tangente al punto Q en la curva.

Ilustración 49. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Ángela.

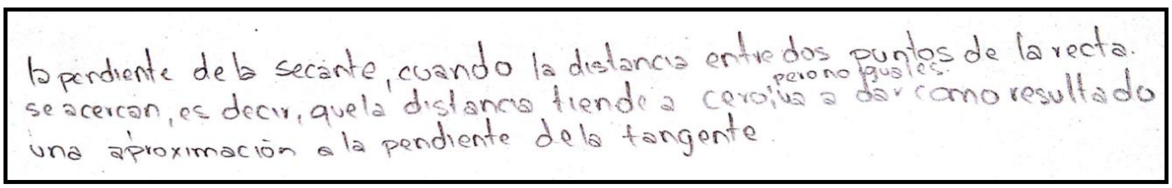

la pendiente de la secante, cuando la distancia entre dos puntos de la recta pero no iguales se acercan, es decir, que la distancia tiende a cero, va a dar como resultado una aproximación a la pendiente de la tangente.

Ilustración 50. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Evin.

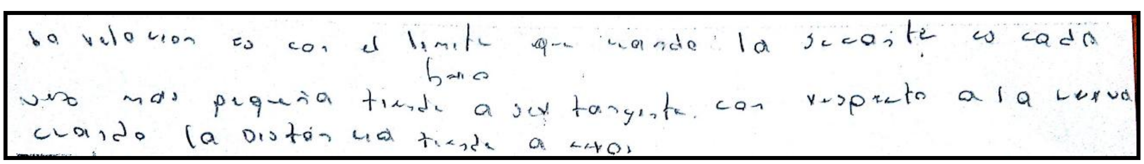

la relacion es con el limite que cuando la secante es cada vez mas pequeña tiende a ser tangente con respecto a la curva cuando la distancia tiende a cero

Ilustración 51. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Jhon.

El trasladar las interpretaciones verbales y escritas de los estudiantes a la representación algebraica permitió establecer las relaciones de la recta tangente a una curva en un punto dado y las pendientes de las rectas secantes, para caracterizar la derivada de una función en dicho punto, así:

La pendiente (m) de la recta tangente a la curva en P, es igual al límite de las pendientes de las rectas secantes cuando h tiende a 0 y esto es igual a la derivada de la función en dicho punto.

$$m_{tangente} = \lim_{h \to 0} m_{secantes} = f'(a)$$

A propósito de este apartado, Duval (1999) señala que:

Las unidades significantes en los registros de los gráficos están determinadas por ocho valores visuales que corresponde a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de inclinación de la recta, la posición de intersección con el eje de coordenadas y su posición con un reparto simétrico de los dos cuadrantes opuestos (p.75.)

En las alternativas gráficas propuestas se resalta una de las variables: el sentido de inclinación de la recta. Esta variable visual representa el valor de la pendiente, pero a su vez vinculada a la representación algebraica, permite en este sentido entenderla como la representación de la derivada de la función en un punto. La visualización juega entonces un papel importante; está ligada a acciones cognitivas necesarias que permiten, empleando una adecuada asociación, dar respuestas que partan de lo verbal a lo gráfico y de éste a lo algebraico, tal es el sentido intencionado de este tipo de preguntas.

Las conclusiones de los estudiantes a la situación planteada ofrece la oportunidad de considerar que la interpretación de las componentes constitutivas de los elementos matemáticos, en este caso, la recta tangente a una curva en un punto, se facilita cuando existe una adecuada interacción y asociación de las representaciones gráficas, verbal, escrita, entre otras y la visualización del proceso matemático en la transferencia del conocimiento.

Por tal razón, en las actividades propuestas se ha tenido en cuenta la importancia de acudir a varias representaciones visuales para abordar un mismo concepto y progresar en la Comprensión de este, pues de acuerdo con las consideraciones teóricas de Duval (1999), para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también que ha de pensarse en la tarea de conversión de una representación a otra. Son estas, en última instancia las que favorecen la construcción de los conceptos matemáticos.

En conclusión, cuando se le indaga a los estudiantes por la pendiente de las rectas y el comportamiento de las rectas tangentes a una curva surge un *Folding Back*, que es una de las particularidades más importantes del Modelo de Pirie y Kieren, pues recuerdan y reconocen las características analizadas con anterioridad. A partir de las intervenciones de los investigadores, los estudiantes evidencian una mayor confianza para realizar y plantear asociaciones de la pendiente de una recta con el término inclinación y pueden calcular el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto indicado haciendo uso de procedimientos geométricos y aritméticos. Aunque al principio de la intervención los estudiantes se mostraban confusos en algunas conceptualizaciones y procedimientos específicos del objeto de estudio, a partir de la visualización dinámica pueden relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Además, consiguieron aproximarse aritméticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes.

3.2.2.2 ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN 3: PENDIENTE Y HAZ DE SECANTES.

Previo al desarrollo de la actividad de “Pendientes y Haz de secantes”(Ver Anexo 2), el grupo de estudiantes participó en la socialización del procedimiento y la profundización en la aplicación del mecanismo del haz de secantes como instrumento para determinar, con la intervención del concepto del límite, el trazo de la recta tangente a un punto. Con esta situación se buscaba que el estudiante pudiera calcular, a través de la herramienta dinámica del Geogebra ® y la representación gráfica en la actividad, el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto específico, haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético; además que pudiese emplear el haz de secantes para determinar el trazo de la recta tangente a una curva y el valor de su pendiente.

Se pide ingresar al programa la expresión algebraica y apoyarse en la aplicación del mecanismo del haz de secantes por medio del software dinámico Geogebra ® para determinar, manualmente, el trazo de la recta tangente según los puntos indicados en algunas curvas que se le presentan en las acciones de la intervención, valga decir la representación gráfica de cuatro funciones una trascendental definida por medio del logaritmo natural y tres algebraicas: una cuadrática y dos cúbicas. Al mismo tiempo identificar intervalos que definan el valor de la pendiente de la recta tangente como positiva, negativa o nula.

El uso e incorporación de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje permite el desarrollo de las competencias de los estudiantes, en la medida que los capacita en los conocimientos científicos y técnicos, además que permite la conceptualización de los temas abordados de una manera más ágil y rápida. La representación a partir de actividades dinámicas que pueden ser interpretadas, manipuladas, experimentadas y analizadas por el estudiante, favorece el proceso por el cual los estudiantes construyen representaciones mentales en la medida que expande, en términos de movilización, las estructuras que permiten la evolución en la Comprensión.

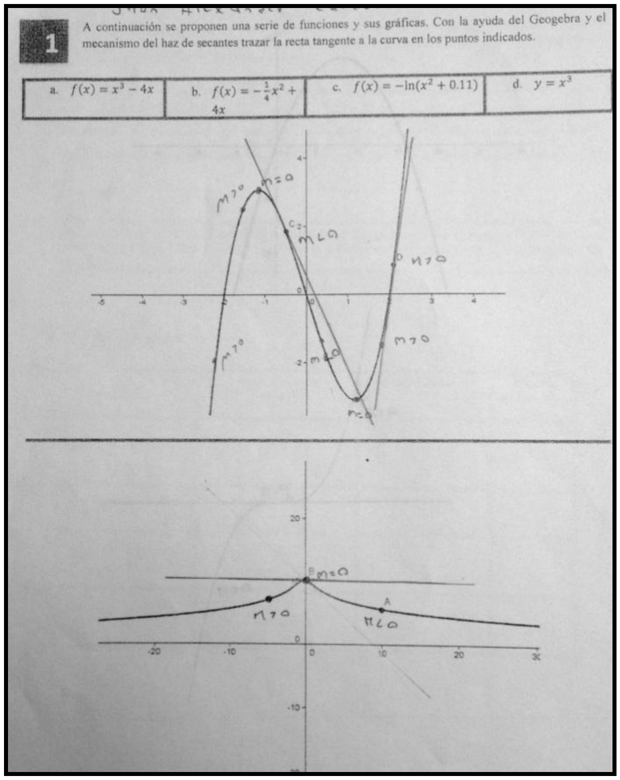


Ilustración 52. Trazo presentado por Jhon de la recta tangente a través del mecanismo del haz de secantes.

La actividad aporta la siguiente información: se observa que Jhon realiza un trazo de la recta tangente en las tres funciones algebraicas. Además, emplea la información que aporta dicho trazo para identificar los intervalos, en lo “extenso” de la representación gráfica, en los cuales el valor de la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero. Lo anterior corrobora, en alguna forma, la incidencia, en positivo, que origina el empleo de diferentes representaciones para la comprensión de un concepto en consonancia con la propuesta teórica de Duval (2004).

En la función trascendental, se apoya nuevamente en el trazo de la recta tangente para identificar, en algunos intervalos, la correspondiente relación de orden entre el valor de su pendiente y cero. Sin embargo, demuestra dificultad para determinar la no existencia de la recta tangente en el punto de no diferenciabilidad, en $x = 0$. Observándose, tal como lo propone Dolores (2000), la presencia aún del obstáculo de la definición de pendiente como el límite de la variación entre el cambio de la ordenada y el cambio de la abscisa. La noción de límite continúa siendo un fuerte obstáculo para comprender el concepto de la derivada en su componente geométrico.

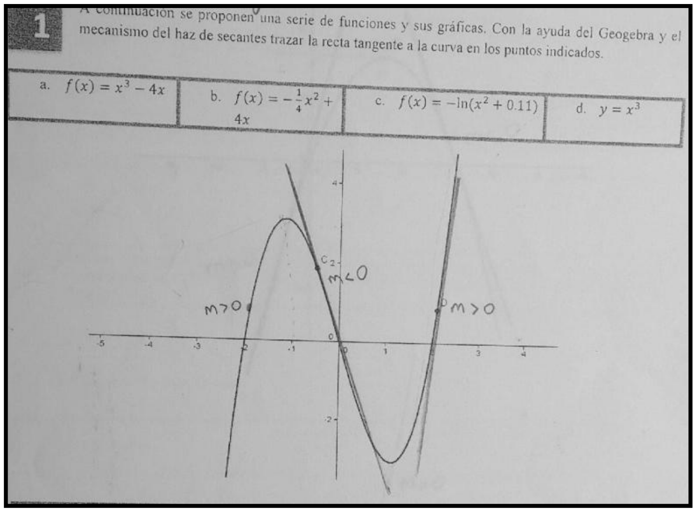


Ilustración 53. Trazo presentado por Ángela de la recta tangente a través del mecanismo del haz de secantes.

Por su lado en el proceso de Ángela, se observa evolución en el trazo de las rectas tangentes, su representación, en una considerable parte de la curva, la expresa más con “longitud” de recta y no con pequeños segmentos de recta, como solía hacerlo en acciones anteriores. Además, en su paso por el punto de tangencia, la tangente aparece conteniendo al punto, pasa sobre él, no “rozándolo” como lo presentaba previamente. Asimismo, se observa la emergencia de un evento, que desborda sus definiciones previas: en algunas gráficas su representación de recta tangente “corta” la curva. Es decir, el instrumento de aplicación, en este caso el software dinámico, le acompaña, en su movilización de estructuras cognitivas y de paso le permite confrontar su concepto imagen y el concepto definición de recta tangente y aplicar *Folding Back* hacia el nivel anterior para revisar la comprensión de ese concepto.

En este sentido, y en el caso de Ángela en particular, haber empleado el software Geogebra ® como instrumento de construcción y de visualización le permitió, además de establecer otras condiciones de potencial valor para ganar precisión en la definición formal del concepto, corroborar la propuesta de Miguel de Guzmán (2001, citado por Rendón, 2011. *p,* 46) respecto a las bondades que se espera ocurran mediante el empleo de las variables y representaciones visuales, “*la visualización debe permitir acercar al sujeto a la gran riqueza de contenidos visuales que encierran las representaciones geométricas, y conducirlo intuitivamente al estudio y comprensión de los conceptos”.*

Además, al invitar a la estudiante a emplear el instrumento en la aplicación del mecanismo del haz de secantes y concluir con su propio trazo el recorrido de la recta tangente, se la estimula, física y mentalmente, pues según el Modelo propuesto por Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos, un primer momento para la comprensión emerge cuando se realizan acciones físicas o mentales con el fin de crear una idea nueva del concepto, y en este sentido pueda ampliar, en buena forma, su sistema de representaciones, para que alcance, sino superar sus obstáculos al menos si generar conflicto cognitivo que le permita buscar coherencia en su concepto imagen y concepto definición para alcanzar evolución en la Comprensión de la noción de tangente.

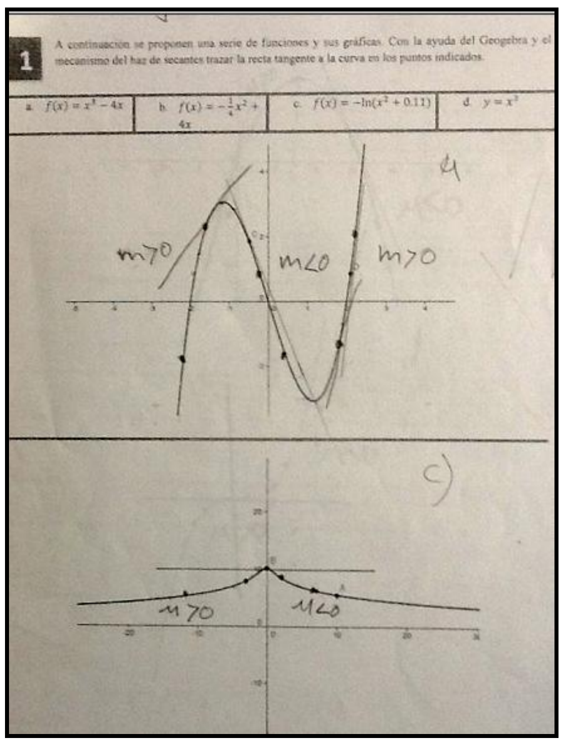


Ilustración 54. Trazo presentado por Julián de la recta a través del mecanismo del haz de secantes.

Julián a través del recurso del software dinámico Geogebra ®, construye las gráficas de cada una de las funciones sugeridas y emplea el mecanismo del haz de secantes para trazar las rectas tangentes a la curva en los puntos indicados, se basa en el valor de la pendiente que muestra el software a medida que la recta tangente a la curva recorre la misma para identificar los intervalos en los cuales el valor de la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero. Lo anterior denota que el uso del Geogebra ® contribuye a la construcción del conocimiento, en este caso a comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica, pues favoreció la visualización de la representación del concepto de recta tangente a una curva en un punto determinado y a la comunicación del conocimiento, lo dicho va en concordancia con lo que defiende la UNESCO (2004), "*Los alumnos deberán moverse en un entorno rico en información, ser capaces de analizar y tomar decisiones, y dominar nuevos ámbitos del conocimiento".* En este caso el estudiante con la ayuda de la herramienta tecnológica, pudo reconocer y verificar la imagen mental que tenía de la estructura algebraica de la función dada, con su representación gráfica proporcionada con la ayuda del Geogebra ®.

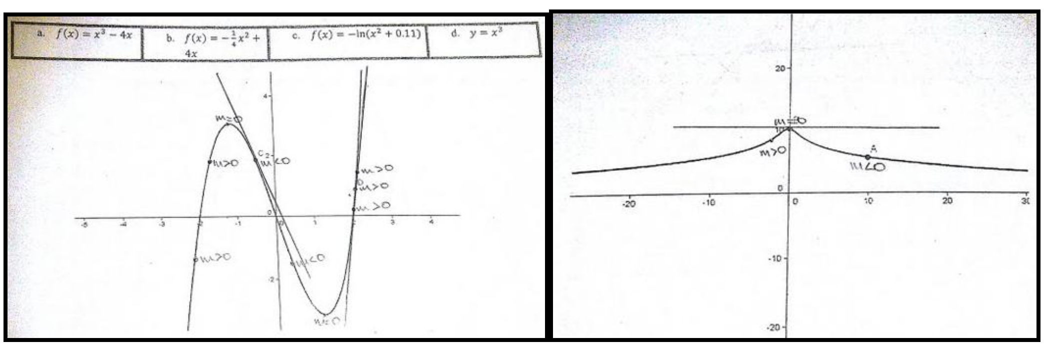
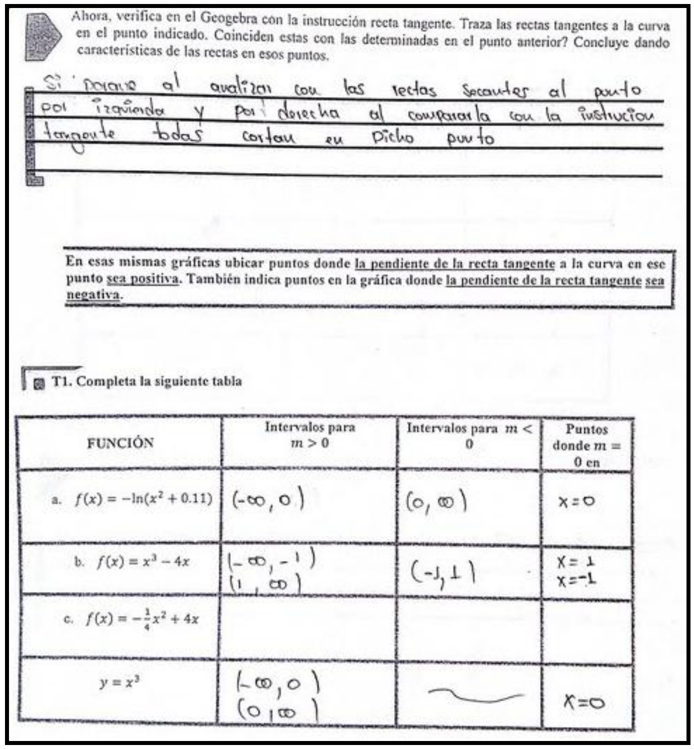


Ilustración 55. Trazo presentado por Evin de la recta tangente **a través d**el mecanismo del haz de secantes**.**

A partir de la representación de Evin y los elementos que referencia en cada una de las gráficas se puede inferir que estima el comportamiento de las rectas tangentes a una curva a partir de sus pendientes, que en definitiva es una de las dificultades que ocurre con mayor frecuencia en el estudio de la derivada. Se examina con interés que en esencia Evin puede caracterizar la recta tangente a una curva en un punto determinado, con lo cual identifica que este proceso se reduce a determinar la pendiente en ese punto. Además, a través del trazo de las tangentes, puede inferir y estudiar el comportamiento de una función sobre un intervalo de la misma, al calcular de manera correcta identifica los valores máximos, mínimos, así como los intervalos dónde la función es creciente y decreciente, apoyándose a partir del criterio de las tangentes y las aplicaciones del concepto de la derivada en su componente geométrico.



Ahora, verifica en el Geogebra con la instrucción recta tangente. Traza las rectas tangentes a la curva en el punto indicado. Coinciden estas con las determinadas en el punto anterior? Concluye dando características de las rectas en esos puntos.

Si porque al analizar con las rectas secantes al punto por izquierda y por derecha al compararla con la instrucción tangente todas cortan en dicho punto

En esas mismas gráficas ubicar puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea positiva. También indica puntos en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente sea negativa.

T1. Completa la siguiente tabla

FUNCIÓN	Intervalos para $m > 0$	Intervalos para $m < 0$	Puntos donde $m = 0$ en
a. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$x = 0$
b. $f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$	$(-1, 1)$	$x = 1$ $x = -1$
c. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$			
$y = x^3$	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$	~	$x = 0$

Ilustración 56. Identificación del valor de la pendiente en algunos intervalos presentados por Evin.

En cuanto a las intervenciones anteriores se evidencia un avance en la comprensión del objeto de estudio, pues Evin determina los elementos que lo componen y examina de manera asertiva su comportamiento en el análisis de funciones. Sin embargo, es necesario revisar más a fondo la progresión en la comprensión de Evin, pues el paso de un nivel al siguiente no se caracteriza por el aumento de los conocimientos respecto al nivel anterior, sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales, los mecanismos del progreso del conocimiento pueden ser aprehendidos en las transiciones que conducen de un nivel de organización de menor adaptación del sujeto al medio (por conocer), a los niveles secundarios ulteriores (Pirie y Kieren en Meel (2003)).

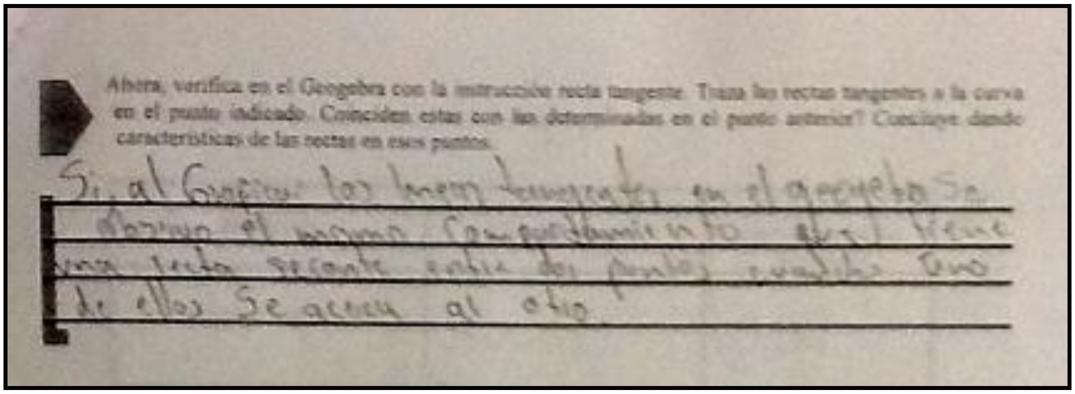


Ilustración 57. Conclusión realizada por Julián respecto a la instrucción del Software.

El estudiante pudo encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente en los intervalos de la gráfica construida, interpretando coherentemente la representación gráfica, con la representación algebraica, conceptualizando los intervalos en los que la pendiente es mayor, menor o igual a cero. De la misma forma, identifica el valor que toma la variable *x* en el punto de coordenadas donde la pendiente es igual a 0. De acuerdo con Vinner (1991), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, es decir la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto.

En su conclusión el estudiante relaciona y presenta un acercamiento alaidea de aproximación local, cuando expresa, según sus palabras, que el "comportamiento" de la recta tangente, es el mismo que el presentado con las rectas secantes; pero falta mayor precisión en su conclusión.

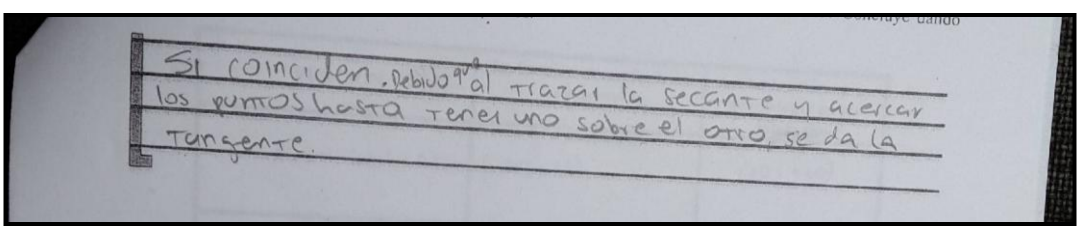


Ilustración 58. Conclusión realizada por Ángela respecto a la instrucción del Software.

De otro lado, la estudiante, usa las características propias de la pendiente en cuanto a otras informaciones que aporta, evidenciando capacidad para realizar distinciones con base en conocimientos anteriores o por la evolución de la Comprensión en los mismos gracias a su proceso. Por ejemplo, identifica en cuáles intervalos, para cada representación gráfica, la pendiente es positiva, negativa o nula y relaciona la característica que esta información ofrece para determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento en las regiones de cada gráfica. En Ángela emerge otra asociación para trascender la magnitud, el valor numérico de la pendiente. En este sentido y en perspectiva del Modelo, Thom y Pirie (2006, citado por Villa-Ochoa, 2012. p 46) afirman:

Que en este estrato se comienza la evolución de la comprensión al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física.

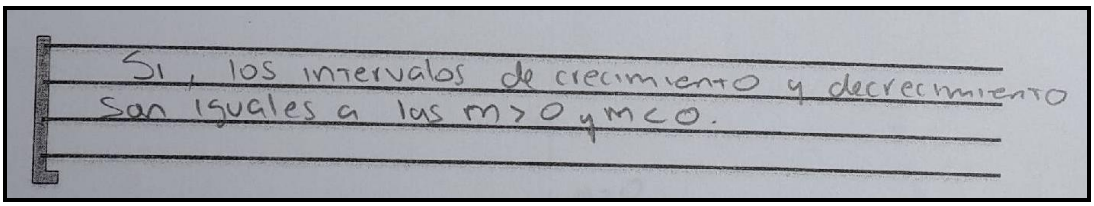


Ilustración 59. Asociación del valor de la pendiente con los intervalos de crecimiento y decrecimiento según Ángela.

En su propuesta textual de conclusión, en la figura anterior, Ángela en correspondencia con la teoría del Modelo permite distinguir cambio cualitativo en la evolución de la comprensión, característica presente en todos los niveles. La complementariedad de la acción y la expresión, una de las características diferenciales del Modelo, cobra plena vigencia, particularmente en esta actividad, ya que la estudiante, según la comunicación que emite, diferencia los procesos mentales de los procesos físicos, se muestra como sujeto actuante afrontando el desarrollo de la actividad propuesta, y empleando, a su vez, en los razonamientos y los argumentos expuestos, un lenguaje "más cercano" al contexto formal del concepto abordado.

Finalmente, en la función trascendental, función logaritmo natural, aplica nuevamente el mecanismo del haz de secantes para determinar, en primera instancia el valor de la pendiente de cada secante, una vez identificada esta particularidad define intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Evidencia no detenerse en la agudeza interpretativa que, al respecto, tiene el mecanismo del haz de secantes, para este tipo de curvas reconocidas, en el contexto, como funciones patológicas, en las que la aplicación del concepto de derivada no se puede garantizar en todo su dominio, porque en ella subsisten valores no diferenciables, números críticos que conllevan a indeterminaciones. Sin embargo, Ángela traza, erróneamente, la recta tangente y determina que el valor de la pendiente en ese número crítico es cero, lo cual indica que se le dificulta el concepto de límite, que encierra la aplicación del mecanismo del Haz de Secantes, pues el valor de las pendientes de las rectas secantes por derecha, difiere del valor de las pendientes de las rectas secantes por izquierda, por tanto en ese punto no existe las condiciones que determinan las rectas tangentes.

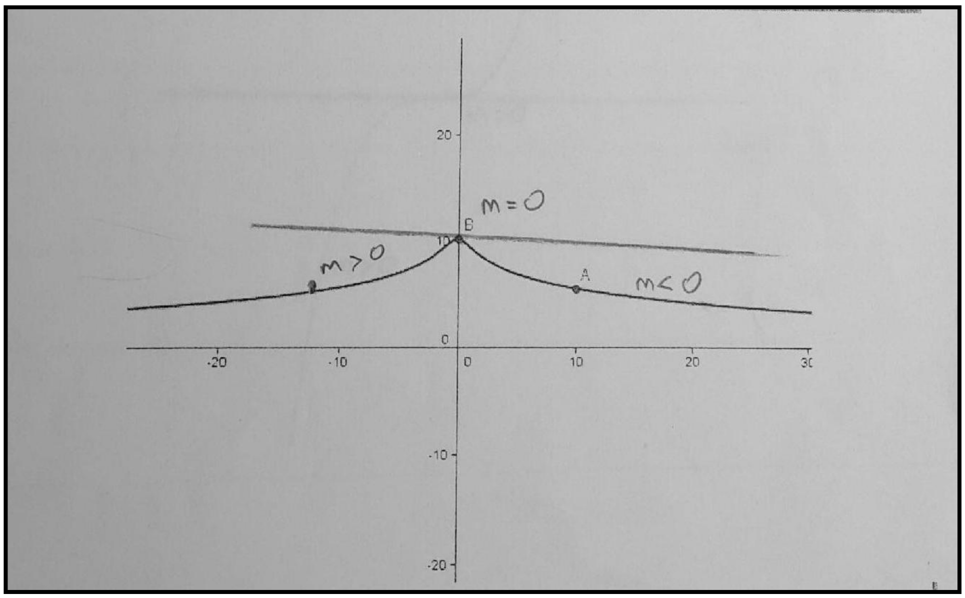
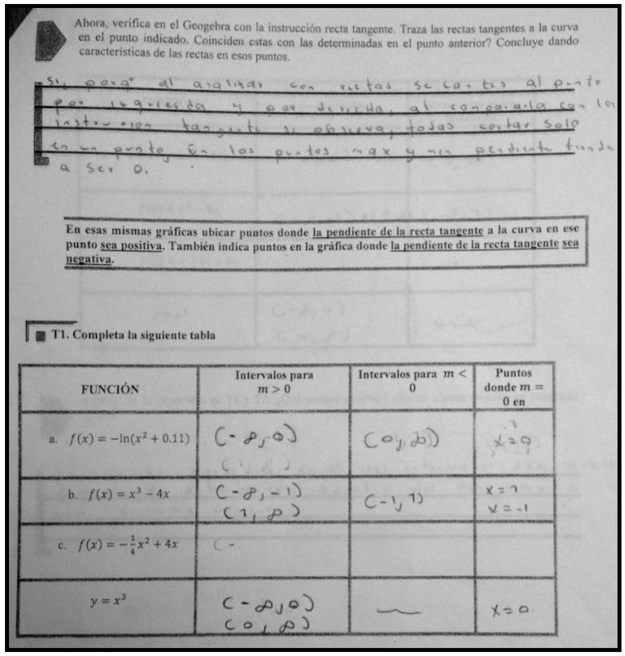


Ilustración 60. Trazo de la recta tangente a un número crítico propuesto por Ángela.

En este apartado, y para este tipo de funciones, el error es apenas lógico que aparezca, en caso de no tener el cuidado conceptual debido, porque, tal como se presenta en el trabajo de Bedoya y Otros (2006), es necesario involucrar el proceso del paso al límite, además, y en ese mismo sentido, frente a las situaciones patológicas, aquellas en las que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación, el estudiante, no ofrecerá, en general, respuesta suficiente.

No obstante, para la estudiante, el mecanismo del haz de secantes, le permitió definir la recta tangente empleando aspectos geométricos y no algebraicos y este es el aprendizaje que alcanzó y entrará a formar parte de sus conocimientos y experiencias de aprendizaje.


Ahora, verifica en el Geogebra con la instrucción recta tangente. Traza las rectas tangentes a la curva en el punto indicado. Coinciden estas con las determinadas en el punto anterior? Concluye dando características de las rectas en esos puntos.

Si, porq al analizar con rectas secantes al punto por izquierda y por derecha, al compararla con la instrucion tangente se observa, todas cortan solo en un punto. En los puntos max y min pendiente tiende a ser 0.

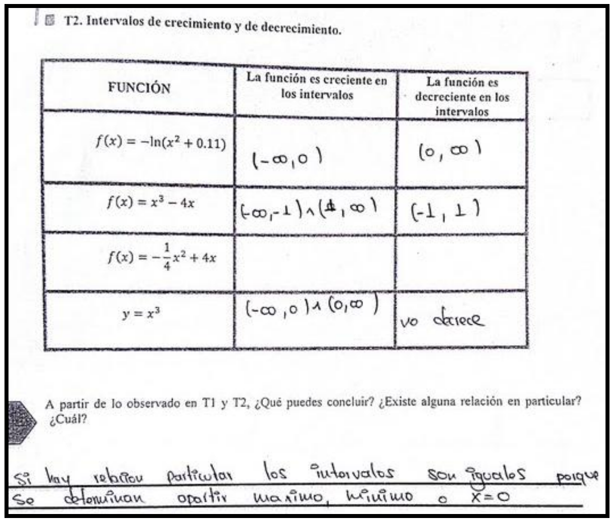
En esas mismas gráficas ubicar puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea positiva. También indica puntos en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente sea negativa.

T1. Completa la siguiente tabla

FUNCIÓN	Intervalos para $m > 0$	Intervalos para $m < 0$	Puntos donde $m = 0$ en
a. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$x = 0$
b. $f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$	$(-1, 1)$	$x = 1$ $x = -1$
c. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$	(-		
$y = x^3$	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$	~	$x = 0$

Ilustración 61. Identificación del valor de la pendiente en algunos intervalos presentados por Jhon.

Con el empleo de Geogebra ® Jhon verifica que, efectivamente, el trazo de la recta tangente determinado por el mecanismo del haz de secantes coincide con el de la instrucción recta tangente del software. En su conclusión el estudiante indica la aplicación del concepto de tendencia y la noción de límite de las secantes para justificar, la existencia de la recta tangente, como aquella que se obtiene después de haber aplicado el método de haz de secantes y realizado aproximaciones a derecha y a izquierda de un punto. Además, se percata y no duda en resaltarlo, del concepto de tangencia local y acepta que una recta tangente puede "cortar" a la curva en el punto de tangencia, evidenciando la aplicación de una de las características del Modelo, el *Folding Back* o retroceso para contrastar y movilizar su definición de recta tangente presente en el nivel previo. Igualmente, identifica que en los puntos críticos en donde se originan extremos de máximos y mínimos el valor de la pendiente puede ser cero. Al mismo tiempo, se apoya en la representación gráfica para identificar los intervalos en los que la pendiente muestra valor positivo o negativo, y estipula los valores de las abscisas para los cuales el valor de la pendiente es nula. Asimismo, considera la posibilidad de asociar el concepto de pendiente y su relación directa en la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función.



T2. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

FUNCIÓN	La función es creciente en los intervalos	La función es decreciente en los intervalos
$f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1) \wedge (1, \infty)$	$(-1, 1)$
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$		
$y = x^3$	$(-\infty, 0) \wedge (0, \infty)$	no decrece

A partir de lo observado en T1 y T2, ¿Qué puedes concluir? ¿Existe alguna relación en particular? ¿Cuál?

Si hay relacion particular los intervalos son iguales porque se determinan apartir maximo, minimo o $x = 0$

Ilustración 62. Identificación de intervalos de crecimiento y de decrecimiento presentados por Evin.

A partir del análisis de las intervenciones de Evin, se puede verificar que analiza de manera correcta las funciones, para ello debió haber regresado al primer nivel y experimentado así el *Folding Back,* hecho que se constata al describir el comportamiento de las funciones, y que por su parte es necesario para la comprensión consecuente de la derivada a partir de los signos de la misma y de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Cuando a Evin se le propone concluir a partir de los intervalos hallados y sobre el comportamiento de las rectas tangentes a fragmentos de curvas de las funciones dadas, él actúa y enuncia de manera asertiva sobre las valoraciones encontradas, no obstante, se hace necesario profundizar en los criterios de existencia de la derivada. Por último, es debido señalar algunas valoraciones descubiertas en Evin, como lo son sus indicadores de avances o dificultades en las fases de intervención en la evolución de la comprensión, también, rescatar las ventajas que el estudiante tiene en la manipulación de ordenadores para comprender mejor situaciones matemáticas (Ver Evolución en la Comprensión del concepto de derivada. Ilustración 82)

Desde el mismo momento en que Evin puede caracterizar de manera correcta los valores y los tramos de la recta tangente a la curva, se evidencia que logra asociar visualmente las características de la función a partir de la interacción con la herramienta del Geogebra ®

El uso del Geogebra ® le permitió un cambio de contexto permitiéndole la aplicación de nociones o propiedades del concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilitando con ello la *complementariedad en la acción*, tal y como lo propone el modelo de Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos. En esta dirección, el Geogebra ® actúa como una verdadera herramienta que permite la visualización y posibilita la formalización de los objetos matemáticos. No obstante, el estudiante no comprende las características de la derivada para los puntos o intervalos donde no está definida, criterio que puede analizarse a partir de la construcción de las rectas tangentes por derecha y por izquierda. Aunque, con esta situación presente, el estudiante llega a una comprensión mediante el trabajo de modelización en el software y el mecanismo del haz de secantes aplicando los criterios de crecimiento y decrecimiento sobre la función para clasificar los extremos relativos como máximos o mínimos.

La complementariedad en la acción y la expresión, propuestos por Pirie y Kieren (1994), se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles. En este sentido, los autores, Pirie y Kieren (1994, b) afirman que:

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel".

Según Meel (2003), Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y por tal, no es posible garantizar su paso al siguiente nivel.

3.2.3 ANÁLISIS BLOQUE 3

3.2.3.1 ANÁLISIS DEL APLICATIVO GEOGEBRA ®

En la actualidad, al interior de las sociedades del conocimiento y la información, es innegable, toda vez que sorprendente, el cúmulo de transformaciones y metamorfosis sociales que se han originado gracias al desarrollo de la ciencia y la tecnología. En efecto, el empleo de la TIC ha permeado todo el tejido social del actuar humano. La educación, y en especial la educación matemática, no han estado exentas de estos cambios y transformaciones, por el contrario sus escenarios y posibilidades didácticas para el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de sustanciales mutaciones que permiten, en el mejor de los casos, un notable enriquecimiento de las representaciones semióticas con componentes dinámicos y principalmente de las lógicas en las prácticas e interacciones de los diferentes actores que intervienen en los procedimientos de construcción y Comprensión de los conocimientos.

En tanto tecnología para la visualización y como acontecimiento didáctico aplicado en las experiencias de aprendizaje, el software dinámico, en este caso el Geogebra ®, contribuye a presentar otras, o si se quiere nuevas, posibilidades respecto a las tradicionales, para la enseñanza o construcción de un objeto de estudio que redundan en aproximaciones para alcanzar evolución en la Comprensión de los conceptos de las matemáticas avanzadas. En efecto, en el sentido en que lo proponen Bedoya, Jorge y Otros (2006), con relación a la importancia de utilizar las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos, el Geogebra ® como herramienta dinámica y como instrumento empleado para hacer lectura de las variables visuales permite otros acercamientos al dinamismo intrínseco que habita el concepto objeto de estudio, permitiendo con ello develar en forma cualitativa características o propiedades, globales o locales, fundamentales del mismo, y que a su vez, son difusas, invisibles o de difícil reconocimiento desde los otros recursos didácticos con atributo estático, como el papel, el texto o el tablero.

En resumen, el empleo del software dinámico en las experiencias de aprendizaje, representa en sí mismo la eventualidad de otras posibilidades didáctico-pedagógicas, puesto que ofrece un amplio paisaje, en el empleo de recurso, metodologías, estrategias y procesos de mediación en la educación matemática, permitiendo el constructo de otro espacio, y por tal de otras dinámicas de interacción entre los sujetos y los objetos de conocimiento, lo que deriva, fundamentalmente, en la proporcionar otras dialógicas de problematización entre profesor y estudiante para construir y descubrir conceptos significativos.

Finalmente, la investigación se inclina hacia el empleo del Geogebra ® como software dinámico principalmente porque es un procesador geométrico de acceso libre que ofrece la posibilidad de utilizar la Geometría y el Álgebra simultánea y dinámicamente. Además, por el conocimiento previo, en cuanto al manejo básico del programa por parte de los estudiantes que participaron como actores en las intervenciones.

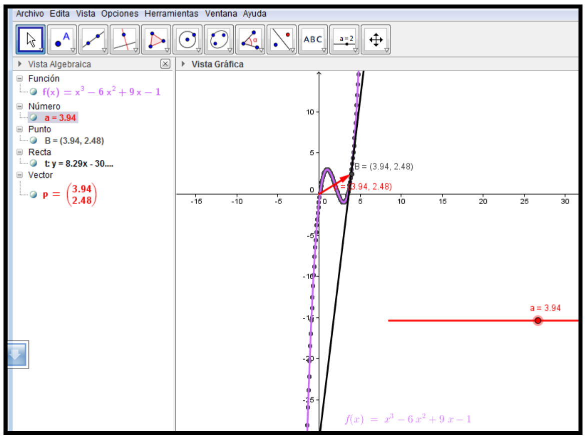
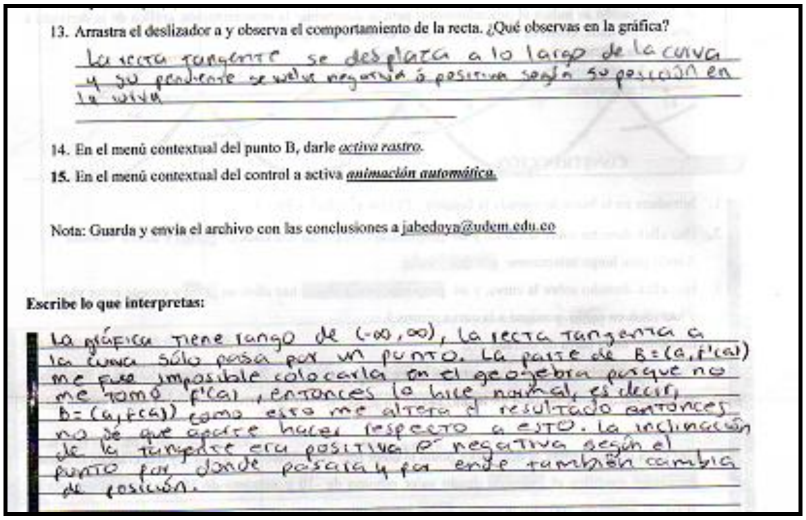


Ilustración 63. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Ángela.

La construcción realizada por Ángela con la ayuda del software dinámico, en general cumple con las instrucciones dadas en la guía de trabajo, aunque se le dificultó interpretar la referente al color que debe tomar la recta tangente cuando el valor de la pendiente es mayor que cero, el cual difiere cuando el valor de la pendiente es menor que cero, tampoco construyó la representación de la función derivada ni el cálculo del valor de la pendiente.

A continuación se presenta la expresión escrita sobre lo que la estudiante puede concluir de la función construida.



13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

La recta tangente se desplaza a lo largo de la curva y su pendiente se vuelve negativa ó positiva según su posición en la curva

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.

15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática***.

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

La gráfica tiene rango de $(-\infty, \infty)$, la recta tangente a la curva sólo pasa por un punto. La parte de $B=(a, f'(a))$ me fue imposible colocarla en el geogebra porque no me tomó $f'(a)$, entonces lo hice normal, es decir, $B=(a, f(a))$ como esto me altera el resultado entonces no sé que aporte hacer respecto a esto. La inclinación de la tangente era positiva ó negativa según el punto por donde pasaba y por ende también cambia de posición.

Ilustración 64. Análisis de la aplicación en el software Geogebra ® realizada por Ángela.

En efecto Ángela expresa la relación entre el comportamiento de la recta a lo largo de la curva, con el valor numérico de su pendiente, identificando el rango de la función, pero no interpreta la información que proporciona la construcción. Se puede decir con base en las interpretaciones descritas, que los elementos complementarios propios del tercer nivel para la evolución de la comprensión, se encuentran difusos.

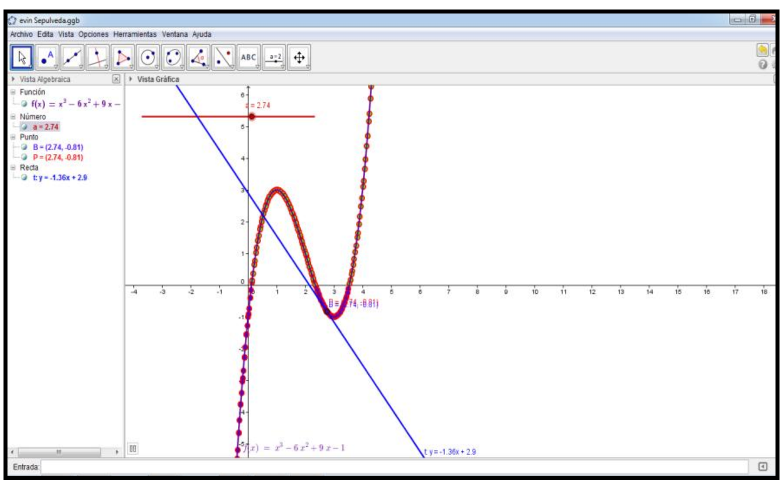
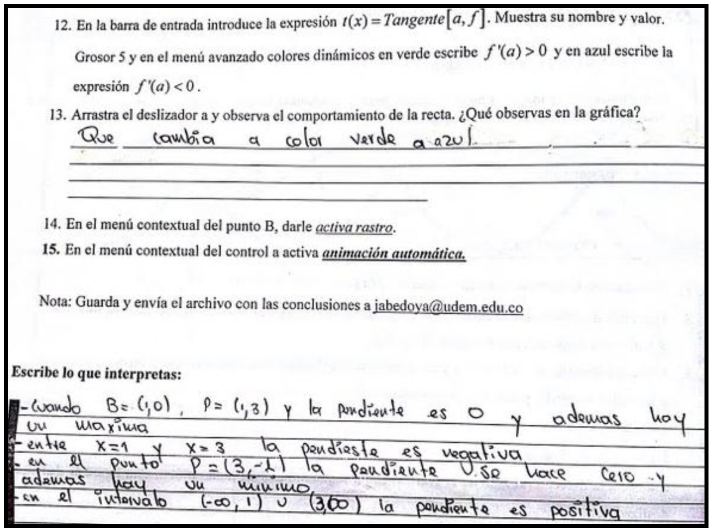


Ilustración 65. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Evin.

En la transición de realizar la actividad en el software y el análisis correspondiente, se evidencia que Evin utiliza el poder visual de la tecnología para comprender mejor la situación matemática en cuestión. Aunque se le dificulta representar la relación de la función antiderivada, la recta tangente y la función derivada por medio de la herramienta dinámica del Geogebra ®. El uso tecnológico le permitió un cambio de contexto permitiéndole aplicación de nociones o propiedades del concepto, objeto de estudio. El estudiante no llega a una solución correcta mediante el trabajo de aplicación realizado.



12. En la barra de entrada introduce la expresión $t(x) = Tangente[a, f]$. Muestra su nombre y valor. Grosor 5 y en el menú avanzado colores dinámicos en verde escribe $f'(a) > 0$ y en azul escribe la expresión $f'(a) < 0$.
13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

Que cambia a color verde a azul.

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.
15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

- cuando B=(1,0), P=(1,3) y la pendiente es 0 y ademas hoy un maxima
- entre x=1 y x=3 la pendiesta es negativa
- en el punto P=(3,-1) la pendiente se hace cero y ademas hay un minimo
- en el intervalo (-∞,1) ∪ (3,∞) la pendiente es positiva

Ilustración 66. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Evin.

En la representación y en el análisis final hace notar que en su resolución sí se produce la identificación de estrategias de representación y fue capaz de identificar los procesos algebraicos y fórmulas simbólicas requeridas. Establece un diálogo entre el modelo algebraico y el que usó mediante el Geogebra ®. Diferencia claramente elementos de la función derivada, como intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos máximos y mínimos relativos, valores y signos de la pendiente de la recta tangente, entre otros. Por lo anterior se puede concluir que Evin logra asociar visualmente la representación gráfica de la derivada con la función original y la relación a partir de la recta tangente.

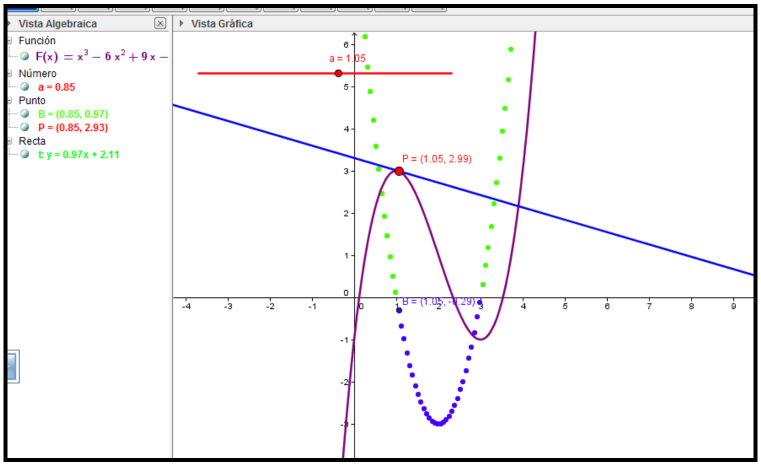
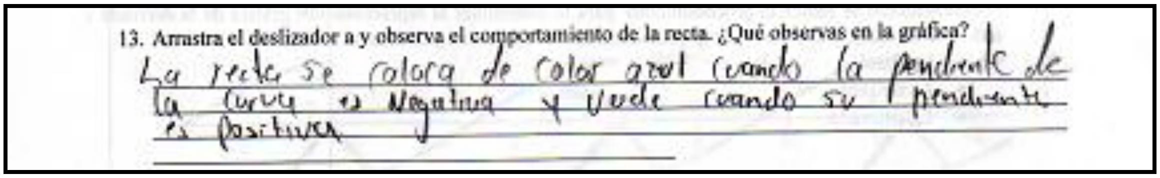


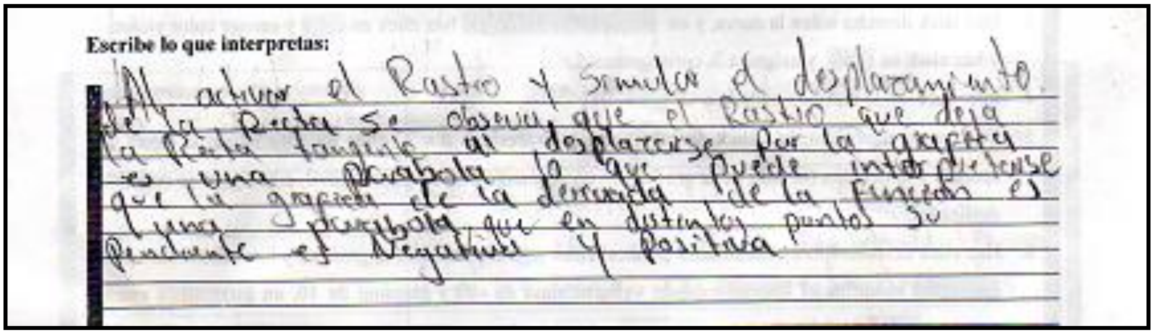
Ilustración 67. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Julián.

Al estudiante se le indica el procedimiento para determinar la representación gráfica de la derivada de una función para observar parámetros determinados. Esta es una práctica alternativa de carácter didáctico, apoyada en el uso de las TIC, que ayuda a analizar y entender con más objetividad y profundidad cómo evoluciona el proceso de comprensión. El estudiante se basa en la representación dinámica proporcionada por el software geométrico del Geogebra ® , expresando el cambio de color que experimenta la recta tangente a la curva cuando cambia su valor numérico de mayor a menor que cero, pero a la expresión escrita le falta claridad y precisión. En Meel (2003) se habla de una característica propia del segundo nivel del modelo para la comprensión, se dice que como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos, mientras el estudiante emplea el lenguaje propio para analizar y registrar las acciones.



13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

La recta se colora de color azul cuando la pendiente de la curva es Negativa y verde cuando su pendiente es positiva



Escribe lo que interpretas:

Al activar el Rastro y Simular el desplazamiento de la Recta se observa que el Rastro que deja la Recta tangente al desplazarse por la grafica es una parabola lo que puede interpretarse que la grafica de la derivada de la funcion es una parabola que en distintos puntos su pendiente es Negativa y positiva

Ilustración 68. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Julián.

En la interpretación hecha por Julián se aprecia en esta respuesta los elementos complementarios propios del segundo nivel de comprensión *creación de la imagen* que describe el modelo llamados en (Pirie y Kieren (1991), citado por Meel 2003) *realización de la imagen y análisis de la imagen* , pues el estudiante realiza una imagen, observa el trabajo previo como un trabajo completo, y no regresará a él, para estar convencido de que el rastro que deja la recta tangente al desplazarse por la curva es el de una parábola.

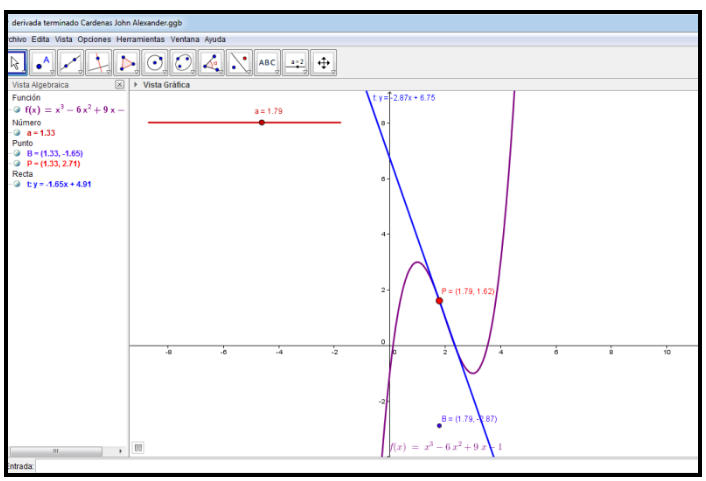
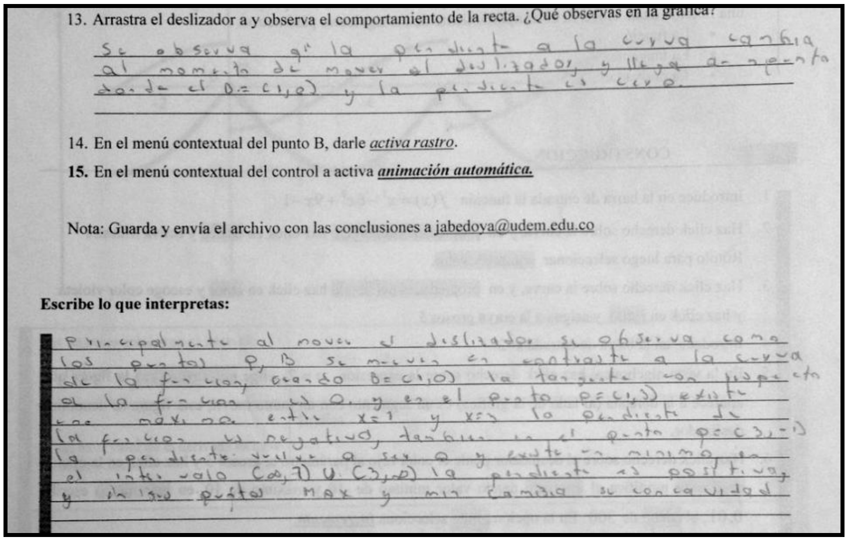


Ilustración 69. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Jhon.


13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la grafica?

Se observa q' la pendiente a la curva cambia al momento de mover el deslizador, y llega a un punto donde el B=(1,0) y la pendiente es cero.

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.

15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

Principalmente al mover el deslizador se observa como los puntos P, B se mueven en contraste a la curva de la función, cuando B=(1,0) la tangente con respecto a la función es 0, y en el punto P=(1,3) existe un máximo entre x=1 y x=3 la pendiente de la función es negativo, también en el punto P=(3,-1) la pendiente vuelve a ser 0 y existe un mínimo en el intervalo (-∞,1) U (3,∞) la pendiente es positiva, y en esos puntos MAX y min cambia su concavidad

Ilustración 70. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Jhon.

El empleo que el estudiante hace del instrumento, como otra forma de representación, a partir de los procedimientos indicados lo enfoca a observar la riqueza gráfica y las posibilidades que ofrece el programa en dirección a incluir la variable visual, para evidenciar, dinámicamente, el comportamiento de la recta tangente en su recorrido por todo el trayecto de la función y su derivada, identificando eficazmente las características y propiedades del objeto de estudio. Además, en su justificación emplea el beneficio didáctico que ofrece la herramienta para justificar y deliberar nuevamente sobre su Comprensión hacia el concepto de recta tangente y el de derivada de una función.

3.2.3.2 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO EVALUATIVO

El Instrumento de Evaluación (Ver Anexo 3) es una guía de trabajo intencionada para que el estudiante a través de su desarrollo consciente y responsable pueda evolucionar en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. Para su elaboración se tuvo presente los análisis, aciertos y obstáculos presentados en las diferentes actividades de intervención realizadas a los estudiantes del grado Undécimo A de la I.E Pbro. Antonio José Bernal Londoño y a sus pares del segundo semestre de ingeniería en un curso de cálculo de la Universidad de Medellín sobre la base del modelo de Pirie y Kieren.

Esta actividad le facilita al estudiante avanzar en la construcción del conocimiento con base en un aprendizaje autónomo, apoyado en la tecnología a través del uso del software libre y dinámico Geogebra ®, el cual está encargado de recrear las diversas representaciones de conceptos matemáticos para que el estudiante pueda desarrollar competencias que favorezcan el avance cognitivo que se encuentra asociado con el aprendizaje.

El Instrumento de Evaluación está conformado por acciones relacionadas con los tres primeros niveles del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren. La primera parte del mismo corresponde a las acciones diseñadas para promover la evolución en la comprensión de conocimientos propios del primer nivel llamado Conocimientos Primitivos. En estas acciones, los estudiantes debían asociar las representaciones gráficas de algunas funciones para trazar rectas tangentes a ellas e indagar por características propias de las mismas. Pues se considera fundamental que el estudiante infiera del trazo de una recta tangente a una circunferencia a otras curvas.

Luego aparecen las acciones para el segundo nivel para la evolución de la comprensión del modelo, llamado Creación de la Imagen. Este nivel les proporciona a los estudiantes aspectos importantes con respecto a características propias de la función y de su función derivada, para luego aplicarlas en las actividades propuestas. Se destacan ejercicios que demandan la construcción de representaciones mentales relacionadas con el concepto y la aplicación de la antiderivada, también se destaca el trazo de rectas secantes a una curva con respecto a un punto fijo determinado y el cálculo del valor de sus pendientes, para acercar al estudiante a una experiencia que involucra el concepto de aproximación local y límite. Por último trae una actividad para que el estudiante defina conceptos relacionados con el objeto de estudio.

Por último aparecen las acciones para el tercer nivel para la evolución de la comprensión del modelo, llamado Comprensión de la Imagen. En este grupo de acciones el estudiante debe elaborar una representación mental de la posible gráfica de la función derivada de una función y justificar sus respuestas con base en características propias de las mismas. Luego se les proporciona una representación gráfica de una función de orden superior, en la cual se evidenciará el trazo y el valor numérico de rectas tangentes a la curva en puntos determinados para que el estudiante de cuenta de los intervalos donde la derivada de la función es mayor, igual o menor a cero, identifiquen números críticos en intervalos dados y por último relacionen y justifiquen los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

Se proporciona una actividad en donde el estudiante debe seguir las instrucciones dadas en la guía de trabajo para la construcción de una función continua, en la cual se ubica un punto P sobre la curva que está condicionado a un deslizador y que contribuirá a la construcción de la recta tangente a la curva, ésta al recorrer la misma va a describir la función derivada de la función continua dada inicialmente. Por último se le pide al estudiante elaborar un mapa conceptual el cual es una herramienta pedagógica y una estrategia de aprendizaje, encargada de potencializar, personalizar y reflejar los conocimientos adquiridos y los contenidos abordados sobre el concepto de derivada.

El instrumento de evaluación facilita entonces la interpretación, sistematización y validación de los procesos cognitivos superiores que intervienen en el proceso de la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. Además, las actividades estaban organizadas para que los estudiantes pudieran establecer las relaciones matemáticas existentes entre los elementos matemáticos de la derivada, la recta tangente y la función antiderivada a través de la utilización de diferentes formas de representación: algebraica, geométrica y analítica.

Los resultados que se datan en la tabla 1, corresponden a las respuestas cerradas dadas por los estudiantes en el desarrollo del instrumento en cada uno de los niveles. Con este bloque de preguntas se pretendió observar cómo los estudiantes respondieron a preguntas que comprendían:

- Trazo de funciones a partir de la recta tangente.
- Empleo del haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.
- Reconocimiento de las características de una función a partir de la derivada y viceversa. Los resultados se exponen como aparece en la siguiente tabla:

Nivel	Descriptor	Acciones	Jhon	Ángela	Evin	Julián
Conocimiento Primitivo.	Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica Reconoce formas de representaciones de funciones reales empleando diferentes instrumentos Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local Realiza representaciones gráficas de funciones elementales Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes...) Expresa una idea informal del concepto de tangencia Hace uso de los mapas conceptuales para dar cuenta del concepto de derivada.	A1	B	D	NR	**C**
		A2	A	D	C	D
		A3	C	**D**	**D**	**D**
		A4	A	**D**	**D**	**D**
		A5	B	D	**C**	D
Creación de la Imagen	Reconoce y diferencia una función y su derivada. Establece la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación. Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica. Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético. Emplea el haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.	A1	**D**	C	**D**	B
		A2	**A**	**A**	NR	C
		A3	A	D	D	D
		A4	Dada la necesidad de análisis y en orientación a singularizar el procesos de cada estudiantes, estas acciones se analizaran como aparece en la tabla 8.			
		A5				
		A6				
		A7				
		A8				
Comprensión de la imagen	Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada. Caracteriza y grafica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada. Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos. Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes. Elabora un mapa conceptual amplio que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.	A1	**C**	A	**C**	B
		A2	Dada la necesidad de análisis y en orientación a singularizar el procesos de cada estudiantes, estas acciones se analizaran como aparece en la tabla 8.			
		A3				
		A4				
		A5				
		A6				
		A7				

Tabla 6. Respuestas dadas por los 4 estudiantes a las preguntas cerradas en el Instrumento Evaluativo.

Estas comprensiones asociadas al concepto de la derivada en su componente geométrico y en perspectiva del Modelo de Pirie y Kieren, se convirtieron en un esquema que permitió interpretar de manera global el progreso de los estudiantes. A continuación se presentará un análisis más detallado de los resultados encontrados. Vale la pena resaltar que en la tabulación de las preguntas cerradas, aquellas que están resaltadas en negrilla son las respuestas correctas.

Las primeras acciones muestran las gráficas de una función algebraica ya sean de segundo o tercer grado y, a su vez, otras representaciones de funciones lineales, en el mismo plano, que permiten al estudiante, según sea su necesidad o evolución de Comprensión recurrir adecuadamente a la asociación de imágenes, para reconocer las propiedades características correspondientes a la derivada y a la función que la origina.

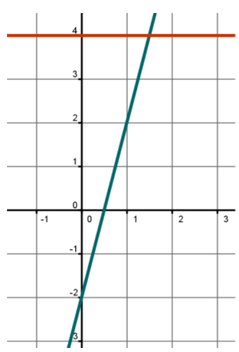
Según las respuestas de los estudiantes es posible que preserven una imagen visual y textual con la palabra "único" y "sólo" punto de la definición de recta tangente a una curva. Puede ser la imagen memorística a la cual se refiere la mayoría de los libros de cálculo y que son transferidas a los estudiantes de una manera estática, sin posibilidad de reinterpretación del texto. Esto se puede afirmar porque tanto en la acción uno (A1) como en la acción 2 (A2), del nivel Conocimiento Primitivo, los estudiantes evidenciaron dificultad al identificar la relación entre la recta tangente y la curva alrededor de un punto de tangencia, al dar respuestas como las siguientes: *"no cumple la condición de tangencia porque toca la curva en más de un punto", "una recta secante a una curva nunca puede una recta tangente a la misma", "para que sea recta tangente a cualquier curva, sólo debe tocarla en un solo punto".*

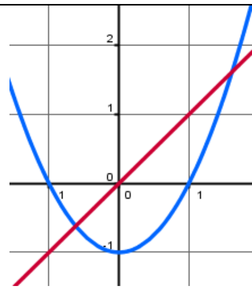
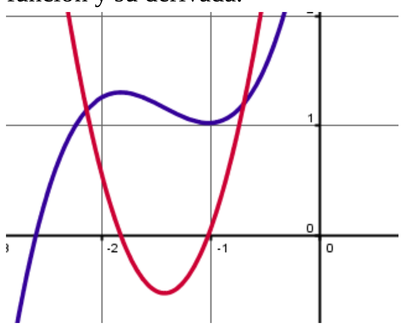
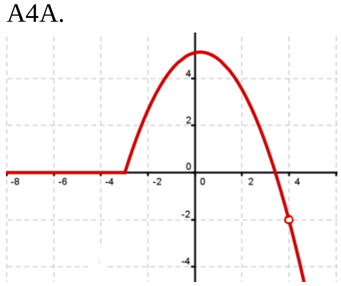
Otra explicación que puede dar una interpretación a esta situación es aquella que se refiere a la separación de la definición del concepto y la imagen conceptual del mismo, esto puede ocasionar obstáculos en la comprensión del concepto, tal y como lo argumentan Tall y Vinner(Meel, 2003). Se evidencia también en los estudiantes una evolución en la comprensión, al concebir que la recta tangente a una función lineal es ella misma, al responder de manera correcta, la acción tres (A3), del nivel mencionado anteriormente, que describía esta situación matemática por medio de un gráfico, *"la recta tangente a la función en el punto P coincide con la función lineal".*

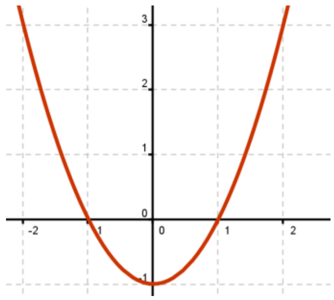
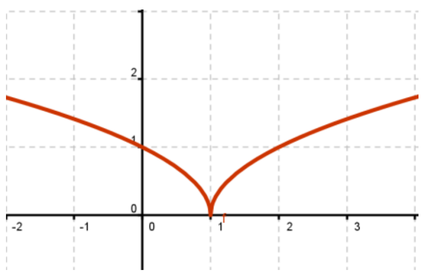
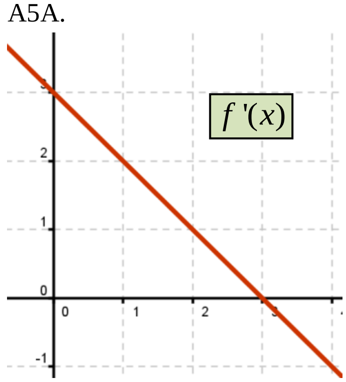
Por su lado, en los niveles dos y tres, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen, respectivamente, se observa que los estudiantes reconocen claramente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del trazo de tangentes a la curva. La mayoría de los estudiantes calculan de manera correcta el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético y establecen la derivada de una función, de manera gráfica y analítica, como se evidencia en los resultados obtenidos en la acción uno (A1), del nivel tres, pero se les dificulta el proceso de reversibilidad, es decir, pasar de la función derivada a la función original. Con lo anterior se puede decir, que a los estudiantes presentan dificultad para reconocer y realizar inferencias y relaciones a partir del concepto de derivada para llegar a las características particulares de la función antiderivada.

Se puede decir que a partir de las observaciones realizadas a los resultados obtenidos por los estudiantes en las preguntas cerradas del instrumento evaluativo y tal como aparece a continuación en el análisis a las preguntas abiertas, en estos apartados las observaciones realizadas por los estudiantes permiten identificar debilidad, precisamente en una de las características fundaméntales del nivel, en la comprensión de la imagen, puesto que las asociaciones que realiza, de acuerdo a sus justificaciones por medio de expresiones verbales, respecto a las imágenes mentales sobre la función y su derivada al parecer no son reemplazadas por una única imagen mental a partir de la cual reconocer conexamente las propiedades globales del concepto, principalmente en el efecto gráfico y conceptual, para la función y su derivada, que originan la presencia de números críticos en relación a los extremos relativos y su incidencia general en el valor de la pendiente en estos puntos de interés local. Algunas de las respuestas se pueden leer en la siguiente tabla 2:

NIVEL	PREGUNTAS	ALGUNAS RESPUESTAS
	A5a. A partir de los datos obtenidos en la tabla, ¿Qué puedes concluir respecto al cambio de las variables x e y y la pendiente m ?	**(Jhon):***“La pendiente va disminuyendo en cada uno de los puntos”* **(Evin) :***“Que la pendiente es positiva pero disminuye cuando se acerca a P”* **(Ángela):** *Las pendientes del lado derecho son positivas y las del lado izquierdo son negativas con excepción del punto O (-2,1) en el cual la pendiente no está definida.* **(Julián):** *A medida que los puntos se acercan más a P. Su pendiente es menor.*
Creación de la Imagen	A5b. Es posible formular el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto P y es tangente a la curva $y = x^2 + 2x + 1$? ¿Cuál es este valor?	**(Jhon):***“$y = 2x + 2$ y P (0,1* *$y = 2(0) + 2y$ 1≠2”. No porque la recta tangente no pasa por el punto P.* **(Evin) :***“La pendiente sería el valor de x y la pendiente sería $x = 1$”* **(Ángela):** $y' = 2x + 2$ $\quad$ $y_{0-1=-1(x_0-0)}$ $x = -1$ $\quad$ $y_{0-1=-1x_0}$ $P_{1=}(0,1)$ $\quad$ $y_{0+x-1=0}$ $P_{2=}(-1,0)$ $m = \frac{0-1}{-1-0} = -1$ **(Julián):** *Aplicando método derivada se tiene* $y = x^2 + 2x + 1$ $y' = 2x + 2$ $y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 2$ $x = -1$
	A8. Con tus propias palabras define los siguientes elementos matemáticos: Pendiente, tangente y función creciente o decreciente.	**Pendiente** **(Jhon):***es la recta representada por la derivada de una función donde la recta tiene cierta inclinación.* **(Evin) :** *Puede ser positiva o negativa y es la inclinación de una recta que varía en el eje horizontal.* **(Ángela):***Es la inclinación de una recta o la derivada de $f(x)$* **(Julián):** *Es el grado de inclinación de una recta con respecto al eje x (horizontal)*
		Tangente **(Jhon):***es la recta que toca a la función en un único punto tangente a este.* **(Evin) :***Recta que corta a una curva en un solo*

		punto. **(Ángela***):Es la derivada de una función en un punto determinado* **(Julián***): Es la recta que toca en un solo punto a una curva o función.*
		Función creciente o decreciente **(Jhon):** Creciente: *tiene una inclinación menor que 90º y crece.* *Decreciente: es que tiene una inclinación mayor a 90º y tiende a decrecer.* **(Evin)** : *Que varía con respecto al signo si es positiva crece, si es negativa decrece.* **(Ángela***): Es una función que es positiva, en ese caso creciente y en caso contrario es negativa.* **(Julián***): Es el rango de intervalo dado por los números críticos de una función al conocerse su primera derivada, donde se determina el signo de la pendiente la función, crece si es positiva y decrece si es negativa.*
Comprensión de la imagen	A2A. La gráfica corresponde a una función lineal, una linea recta cuya pendiente es 4. De lo que se puede deducir su derivada es $f'(x) = y' = 4$. Entonces las gráficas representan a una función y su derivada.  **F** | V	**(Jhon)***V, porque en una función lineal la derivada es el número que acompañe el argumento."* **(Evin)** :*"F, en la función sólo se muestra que $y = 4$, pero no que su pendiente sea 4."* **(Ángela***):"F, $f(x) = 4x + c$ en este caso la gráfica no coincide con $f(x)$.* **(Julián***): "V, Es correcta, la gráfica muestra la función y su derivada de la función algebraicamente."* $y = 4x - 2$ $y' = 4$
	A2B. En $x = 0$ la función tiene un mínimo; la derivada es nula. La recta tangente tendría que pasar por el punto de coordenadas $(0, -1)$. Estas gráficas no corresponden a una función y su derivada.	**(Jhon)***V, porque no hay forma de hallar su recta tangente"* **(Evin)**:*"V, esta gráfica no corresponde a la gráfica de la derivada."* **(Ángela***):"F, La gráfica si representa una función y su derivada."* $f(x) = x^2 - 1$ $f'(x) = 2x$

	 **F** V	**(Julián):** *"V, La recta trazada es una línea secante a la función, corta la curva en dos puntos, por lo tanto no es tangente."*
	A2C. En $x=-1$, la función tiene un mínimo; la derivada es nula y está tendría que pasar por el punto (-1,0). Las gráficas no representan a una función y su derivada.  **F** V	**(Jhon):** *"F, la función en $x=-1$ no tiene ningún mínimo"* **(Evin)**: *"F, la derivada no tiene mínimo relativo en $x=-1$ y las gráficas no corresponde a la función."* **(Ángela)**: *"V, estoy de acuerdo con lo descrito."* **(Julián):** *"V, debería pasar por el punto $(-1,1)$*
	A4A.  ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x? Si____ NO____ ¿Porque?	**(Jhon):** *"No, porque en $y=-2$ existe una asíntota horizontal, por lo tanto no existe la derivada en todo x"* **(Evin)** : *No responde.* **(Ángela)**: *"No, porque en el punto $(4,-2)$ No hay derivada y en el punto máximo la derivada puede existir o no"* **(Julián):** *"Sí, porque existe puntos de tangencia en la función que para este caso es una parábola"*

	A4B.  ¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):** *"No, porque en $x=1$y $x=-1$la función se hace cero, por lo tanto no existe la derivada en todo x "* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"No, porque $g'(x)$ en el punto $(0,-1)$la derivada es cero o no existe."* **(Julián):** *"Sí, porque cada punto de la parábola tiene puntos que son tangentes y cortan en un solo punto la función."*
	A4C  ¿Existe la derivada de $h(x)$ para todo x? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**" *No, porque en los picos no existe la derivada"* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"No, porque existe la posibilidad que en el punto $(0,0.75)$ no exista su derivada."* **(Julián):** *" No, porque en el punto $x=-1$ por no haber una curva, a la función pueden presentarse varias rectas secantes, pero ninguna sería tangente."*
	A5A.  ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**" *Si, porque la derivada de esta función lineal es su pendiente, por tanto no existe la derivada para todo x ."* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"Sí, porque la función es continua y por tratarse de una recta la $f'(x)$existe para toda x."* **(Julián):** *No, porque la recta tangente a la función tocaría en varios puntos la función."*

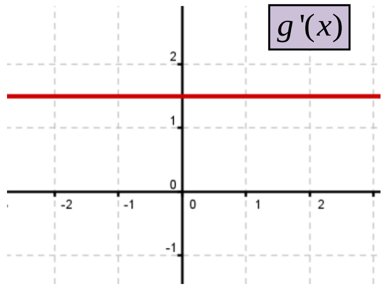
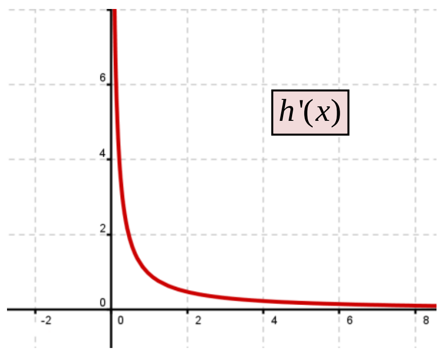
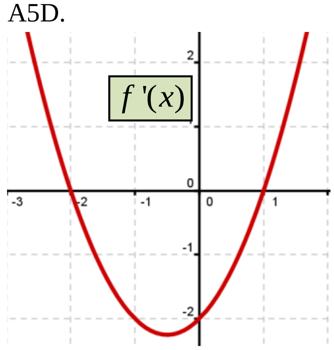
	A5B.  ¿Existe la derivada de g(x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**" *No, porque para todo valor de x no existe un y, por lo tanto no existe la derivada para todo x."* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"No, porque no existe por tratarse de una recta horizontal"* **(Julián):** *"No, porque $g'(x)$ = No es función, por lo tanto no es posible determinar su derivada en este punto."*
	A5C.  ¿Existe la derivada de *h* (x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**" *NO, porque hay dos asíntotas una vertical en cero y una horizontal en cero."* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"Sí, porque su derivada es cero"* **(Julián):** *"Sí, porque la función tiene puntos que son tangentes a la curva de la función $h'(x)$."*
	A5D.  ¿Existe la derivada de *f* (x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**" *Si, porque si existe derivada porque para todo x existe un punto en y."* **(Evin)** :*No responde* **(Ángela)**:*"No, porque no debe existir cuando su derivada se hace cero"* **(Julián):** *"Sí, porque existen rectas secantes a la curva que son a su vez rectas tangentes a la función."*

Tabla 7. Algunas respuestas dadas por los 4 estudiantes a las preguntas abiertas en el Instrumento Evaluativo.

Los resultados del instrumento evaluativo especialmente las justificaciones y argumentos dados por los estudiantes, dan la oportunidad de considerar que asocian de manera correcta la pendiente de una recta con el término inclinación y como consecuencia del objeto matemático de la derivada, asignando adicionalmente, algunos la propiedad del signo, en afirmaciones como : *"Es la recta representada por la derivada de una función donde la recta tiene cierta inclinación", " Puede ser positiva o negativa y es la inclinación de una recta que varía en el eje horizontal", "Es la inclinación de una recta o la derivada de $f(x)$", "Es el grado de inclinación de una recta con respecto al eje x (horizontal)".* Pero persiste la dificultad de conocer las propiedades de la recta tangente a una curva y concebir una idea más global, abstracta o generalizada. Es tal la precisión hacia la definición, en términos de unicidad en el punto de tangencia, que los estudiantes al preguntársele la definición de recta tangente responden: *"Es la recta que toca a la función en un único punto tangente a este", "Recta que corta a una curva en un solo punto", "Es la derivada de una función en un punto determinado" y "Es la recta que toca en un solo punto a una curva o función".* Se ha argumentado que en la enseñanza se constituyen ciertas disposiciones hacia determinadas figuras que entorpecen la capacidad de reconocer un objeto matemático, pero en este caso, la precisión de la mayoría de los estudiantes no es figurativa sino una expresión verbal y escrita fija y estándar, que no permite reconocer el objeto cuando hay un tratamiento. Si lo que consideramos como definición es un sistema de un registro semiótico, no cabe duda que haya que realizar un tratamiento en las definiciones, que es lo que se pretendía en estas preguntas.

Al igual que en la interpretación de los resultados de las preguntas cerradas, se evidencia en los estudiantes debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se les dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hacen a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación (entre la acción y la expresión) de la definición del concepto con la imagen del mismo.

Aquí la complementariedad de la acción y la expresión, como otra de las características del Modelo, se visibiliza, aunque parcialmente, en la necesidad y actuar del estudiante para presentar desde su quehacer los progresos en la Comprensión del objeto de estudio. Sin embargo, en el otro componente de esta característica, la expresión, se evidencia dificultad para expresar verbalmente, en lenguaje cotidiano o algebraico, la justificación de su actuar y conceptualizar alrededor de las actividades que lo demandan. Por tanto, desde la perspectiva teórica del Modelo, es a penas lógico y expresamente manifiesto el surgimiento de la dificultad para que el estudiante pueda alcanzar la Comprensión de la imagen, pues, para Pirie y Kieren, según se plantea en el trabajo realizado por Villa-Ochoa (2011):

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel". Pirie y Kieren (1994, b)

El ejercicio se plantea con el objeto de observar y analizar la forma en que el estudiante obtiene, sustenta y desarrolla imágenes particulares que puedan dar debida cuenta de su evolución en la Comprensión matemática del objeto. Para corroborar nuevamente, en el estudiante, la forma en que son asociadas las imágenes, las diferentes representaciones, de función, pendiente y derivada en una única imagen orientada por un proceso mental, el concepto de derivada.

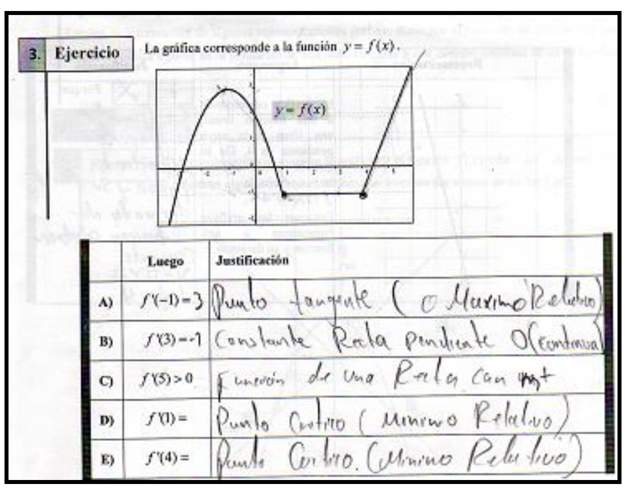
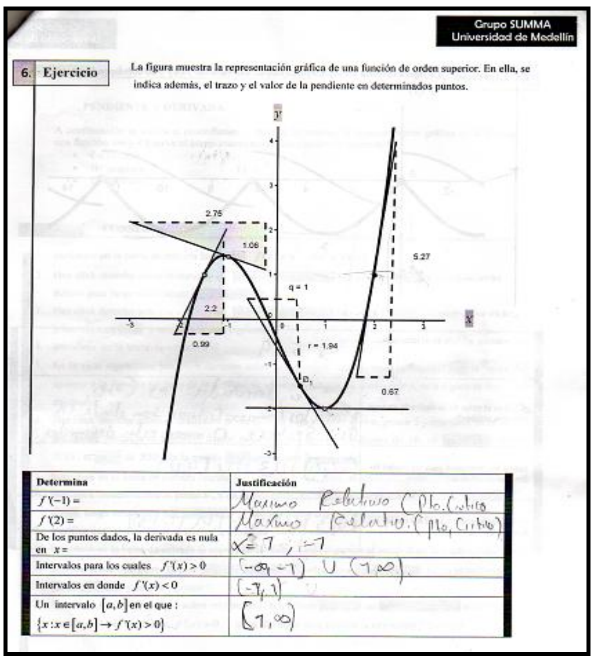


Ilustración 71. Análisis realizado por Julián a la acción 3 del nivel 3.

En esta actividad donde intervenía la capacidad de observación, para luego analizar y a la vez inferir, el estudiante presenta incoherencias, denotando altibajos en la comprensión de la representación dada y su relación con el objeto de estudio, dando respuestas como que la recta trazada es una recta secante a la curva, cuando el argumento de la pregunta se refiere a la representación de una función y la de su derivada, a Julián le falta claridad entre una recta secante a la función y la representación gráfica de la derivada de la función, el acto de la expresión de una imagen propia del tercer nivel del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren. y los elementos complementarios propios del nivel *visualización de una imagen y expresión de una imagen*, para esta interpretación carece de articulación y coherencia.

A continuación se presenta otra interpretación que apunta a la representación gráfica de una función de orden superior, en donde se muestra el trazo de la recta tangente a la curva y su valor numérico, para que se analice y a la vez interprete lo que está sucediendo en diferentes tramos de la misma.


Grupo SUMMA
Universidad de Medellín

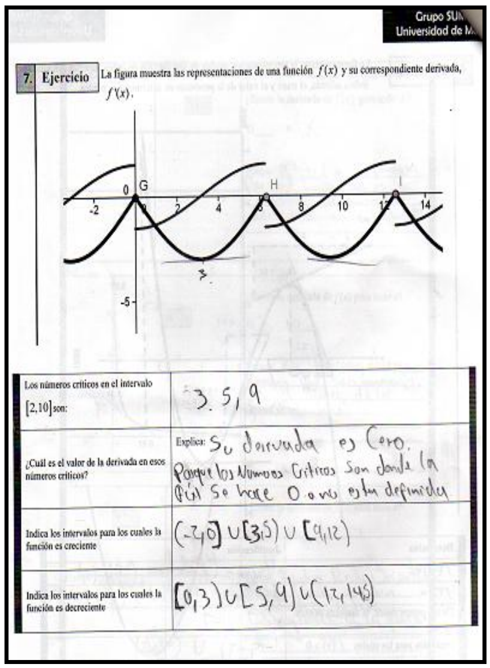
6. Ejercicio

La figura muestra la representación gráfica de una función de orden superior. En ella, se indica además, el trazo y el valor de la pendiente en determinados puntos.

Determina	Justificación
$f'(-1) =$	Maximo Relativo (Pto. Critico
$f'(2) =$	Maximo Relativo. (Pto, Critico)
De los puntos dados, la derivada es nula en $x =$	$x = 1 ; -1$
Intervalos para los cuales $f'(x) > 0$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Intervalos en donde $f'(x) < 0$	$(-1, 1)$
Un intervalo $[a,b]$ en el que : $\{x : x \in [a,b] \rightarrow f'(x) > 0\}$	$[1, \infty)$

Ilustración 72. Análisis realizado por Julián a la acción 6 del nivel 3.

La descripción realizada por el estudiante del comportamiento de los valores de las pendientes de las rectas tangentes a la función y la relación con la interpretación de de la representación de su función derivada, deja entrever la confusión que se presenta en el momento de relacionar el concepto de punto crítico, máximo relativo utilizados por Julián, al tener que responder por el valor de la derivada en esos puntos, que se reduce a calcular el valor de la pendiente de la recta tangente y con base en ello, inferir lo que está pasando en la función dada. De nuevo presenta la desarticulación y la poca claridad en la comprensión de la imagen, dejando a un lado la interpretación y las bondades ofrecidas, cuando se determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la función.

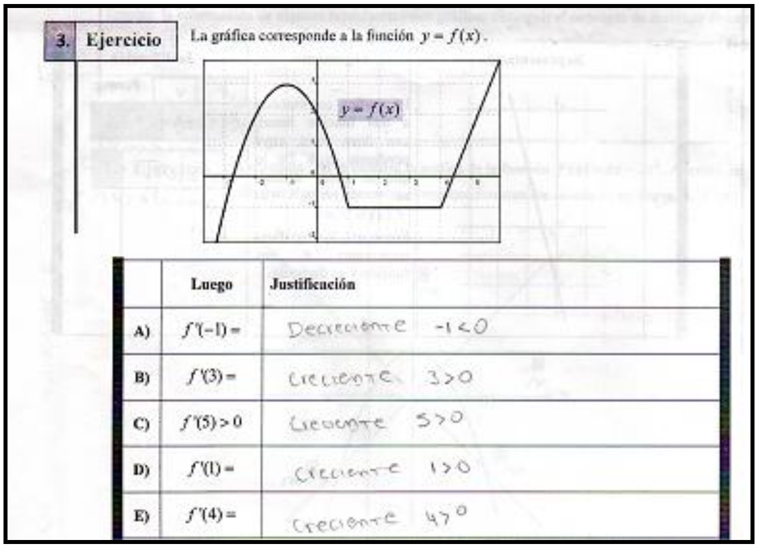


7. Ejercicio La figura muestra las representaciones de una función $f(x)$ y su correspondiente derivada, $f'(x)$.

Los números críticos en el intervalo $[2,10]$ son:	3. 5, 9
¿Cuál es el valor de la derivada en esos números críticos?	Explica: Su derivada es Cero. Porque los Numeros Criticos Son donde la f'(x) Se hace 0 o no esta definida
Indica los intervalos para los cuales la función es creciente	$(-2,0] \cup [3,5) \cup [9,12)$
Indica los intervalos para los cuales la función es decreciente	$[0,3) \cup [5,9) \cup (12,14.5)$

Ilustración 73. Análisis realizado por Julián a la acción 7 del nivel 3.

En esta situación en particular donde se da la representación gráfica de una función y la de su función derivada. Al interpretar la información que se le proporciona Julián presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en la gráfica, con la definición proporcionada por el mismo, es decir se sabe la definición de puntos críticos de una función pero no los identifica en la misma, lo mismo que con los criterios de la primera derivada para determinar los intervalos donde la función es creciente, y/o decreciente.



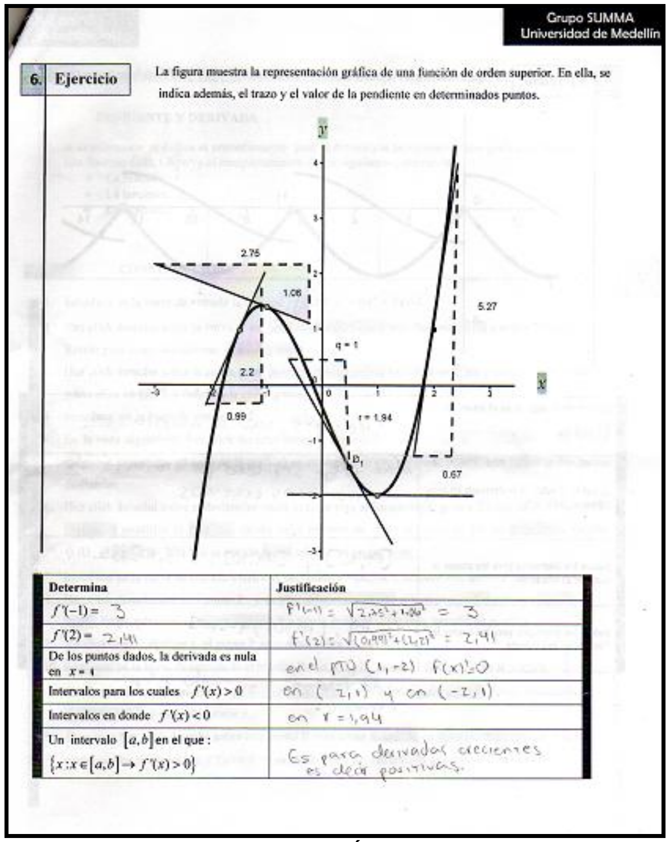
3. Ejercicio La gráfica corresponde a la función $y = f(x)$.

	Luego	Justificación
A)	$f'(-1) =$	Decreciente $-1<0$
B)	$f'(3) =$	creciente $3>0$
C)	$f'(5) > 0$	creciente $5>0$
D)	$f'(1) =$	creciente $1>0$
E)	$f'(4) =$	creciente $4>0$

Ilustración 74. Análisis realizado por Ángela a la acción 3 del nivel 3.

Para esta actividad es necesario que la estudiante diferencie la representación gráfica de una función y la de su derivada, distinguiendo las representaciones de la función cúbica con la de su derivada y aceptando criterios de la primera derivada como los valores mínimos de la función, aunque denota altibajos en la comprensión pues no articuló la gráfica de la función cuadrática con la de su derivada, aunque intuyó que efectivamente era una función lineal, no tuvo presente el efecto que tenía el hecho de que la función estaba desplazada del origen. Se puede decir que tiene mayor acercamiento al paso del descriptor del nivel.

Se observa además Ángela tiene poca claridad en la descripción realizada por la estudiante del comportamiento de los valores de las pendientes de las rectas tangentes a la función y la relación con la interpretación de la representación de su función derivada, dificultándosele interpretar los intervalos donde la derivada de la función es mayor y/o que cero, aunque distingue los valores de *x* donde la derivada es nula, expresión de la imagen fundamental y propia del tercer nivel del modelo para la comprensión de P y K, pues articula los elementos complementarios propios del nivel *visualización de una imagen y expresión de una imagen*. Es propio resaltar que no relaciona el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado con el valor numérico de la primera derivada.

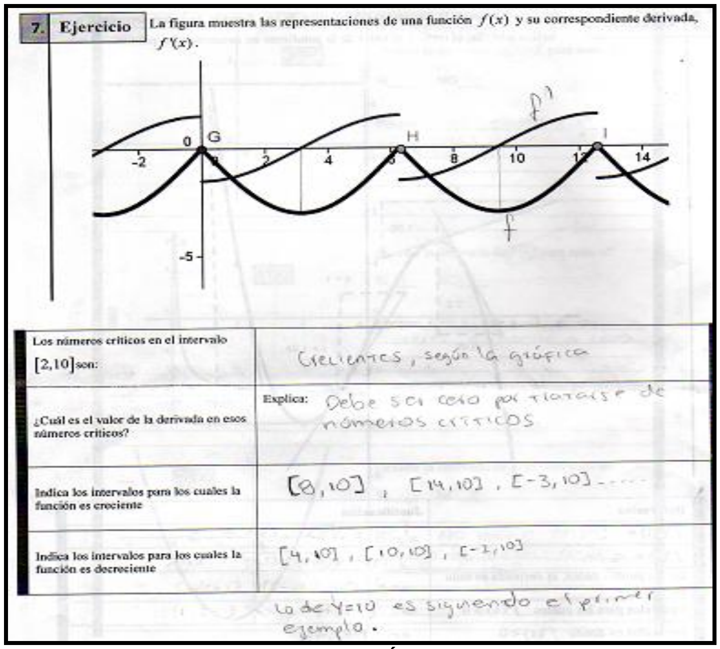

Grupo SUMMA
Universidad de Medellín

6. Ejercicio La figura muestra la representación gráfica de una función de orden superior. En ella, se indica además, el trazo y el valor de la pendiente en determinados puntos.

Determina	Justificación
$f'(-1)=$ 3	$f'(-1)=\sqrt{2{,}75^2+1{,}06^2}=3$
$f'(2)=$ 2,41	$f'(2)=\sqrt{(0{,}99)^2+(2{,}2)^2}=2{,}41$
De los puntos dados, la derivada es nula en $x=1$	en el pto $(1,-2)$ $f(x)'=0$
Intervalos para los cuales $f'(x)>0$	en $(2,1)$ y en $(-2,1)$
Intervalos en donde $f'(x)<0$	en $r=1{,}94$
Un intervalo $[a,b]$ en el que : $\{x:x\in[a,b]\rightarrow f'(x)>0\}$	Es para derivadas crecientes es decir positivas.

Ilustración 75. Análisis realizado por Ángela a la acción 6 del nivel 3.

Al explicar la información que se le proporciona a Ángela en la actividad, presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en la gráfica, pues no los determina en el intervalo cerrado dado, aunque tiene claro el valor de la derivada en esos números críticos. Es difusa la comprensión de la imagen para los cuales la función es creciente y decreciente.



7. Ejercicio La figura muestra las representaciones de una función $f(x)$ y su correspondiente derivada, $f'(x)$.

Los números críticos en el intervalo $[2,10]$ son:	Crecientes, según la gráfica
¿Cuál es el valor de la derivada en esos números críticos?	Explica: Debe ser cero por tratarse de números críticos
Indica los intervalos para los cuales la función es creciente	[8,10] , [14,10] , [-3,10] ....
Indica los intervalos para los cuales la función es decreciente	[4,10] , [10,10] , [-2,10]

lo de Y=10 es siguiendo el primer ejemplo.

Ilustración 76. Análisis realizado por Ángela a la acción 7 del nivel 3.

Por su lado Evin, no desarrolla completamente el Instrumento Evaluativo, siendo esto un obstáculo para valorar el progreso en la comprensión del concepto. De las pocas acciones a las que les dio solución, en su mayoría comprendidas entre el nivel 1 y 2, Conocimientos Primitivos y Creación de la Imagen respectivamente, se puede inferir que presenta dificultad para emplear la información de algunas gráficas para distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básicas a partir de las propiedades de la recta tangente a la función en un punto dado.

Pirie y Kieren (1991) citado por Meel (2003) expresa que el acto de la expresión de una imagen ha unido ejemplos previos y tiene un patrón, mientras que la conducta de expresión de la imagen articula el patrón asociado con una imagen. Lo anterior permite establecer que la estudiante no acude a un patrón y por ende se le dificulta expresar y articular lo visualizado en la imagen.

En esta misma fase se hizo el análisis del al mapa conceptual que junto con el aplicativo en el Geogebra ® y el instrumento evaluativo permitió complementar la información y poder hacer una interpretación global del esquema que tiene construido cada estudiante del concepto de la derivada en su componente geométrico.

3.2.3.3 ANÁLISIS DEL MAPA CONCEPTUAL FINAL

El mapa conceptual es una actividad de valoración final e individual que se realizó previo a la culminación del proceso de intervención con los estudiantes. Algunos estudiantes ya tenían la noción de cómo elaborar un mapa conceptual, por orientaciones dadas en sesiones pasadas apoyados en las propuestas de Novak y Gowin (1988), el cual considera que el profesor puede utilizar los mapas conceptuales para determinar qué rutas se siguen para organizar los significados y negociarlos con los estudiantes, así como para señalar las concepciones equivocadas que se puedan tener.

Por otro lado, Huerta, Galán y Granel (2000), afirman que un mapa conceptual de Matemáticas en un sentido amplio, es una representación de una estructura matemática, el pensamiento en términos de conceptos matemáticos y las relaciones entre los conceptos matemáticos, es decir, proposiciones matemáticas. Ambas posturas muy pertinentes para el trabajo de investigación.

A cada estudiante se le pidió que elaborara un mapa conceptual, que reflejara los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico. Lo anterior con el fin de comparar la imagen mental que tenían los estudiantes del concepto con respecto al estado inicial. El siguiente es el mapa conceptual elaborado por Evin.

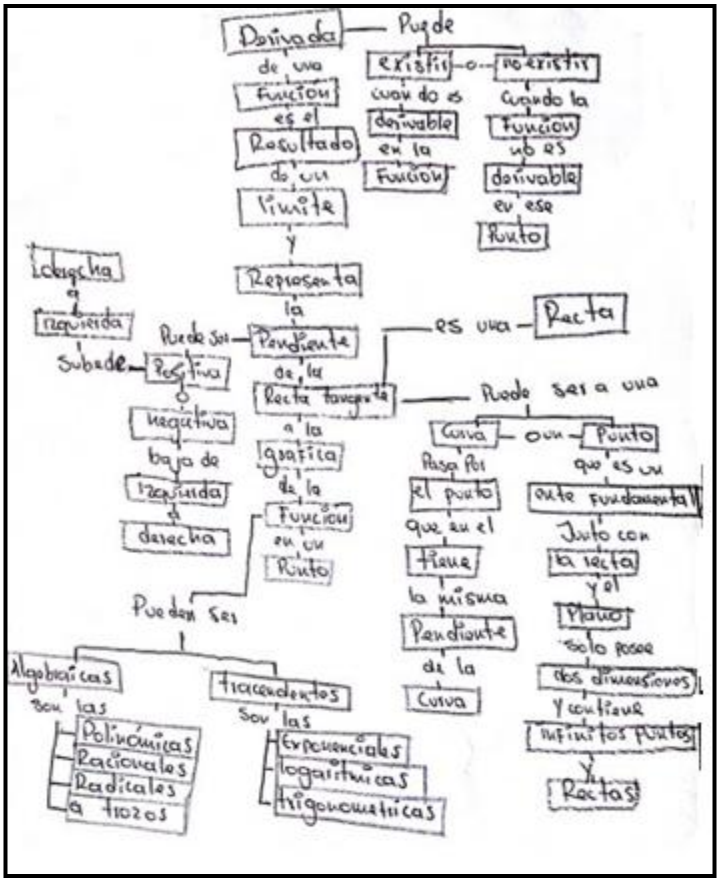


Ilustración 77. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Evin.

Este mapa conceptual pone de manifiesto la imagen del concepto de Derivada. Los elementos matemáticos que configuran el concepto de Derivada de Evin son función, límite, pendiente, recta tangente y funciones algebraicas y trascendentales. Como puede notarse aparece en el mapa explícitamente el concepto de **Pendiente,** caracterizándola según su inclinación y planteando su definición y relación en el contexto de la derivada, tal y como se enuncia *la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.*

Evin reconoce la clasificación de las funciones y tiene claridad de la existencia o no de la derivada en un punto y concibe la función del límite en este proceso, al precisar con un lenguaje claro que *la derivada de una función es un resultado del límite.*

En general lo que expuso el estudiante en el mapa conceptual incluyó los elementos matemáticos considerados en el transcurso de la intervención y que utilizó en el desarrollo de cada una de las guías y en el instrumento evaluativo; aunque muchos de estos elementos los recuerda tiene dificultad con algunos para utilizarlos de forma correcta en la resolución de las tareas. Por todo lo anterior, tanto el desarrollo de las guías, como la experiencia con el software y el mapa conceptual (inicial y final) proporcionan información relevante sobre la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de la derivada en su componente geométrico.

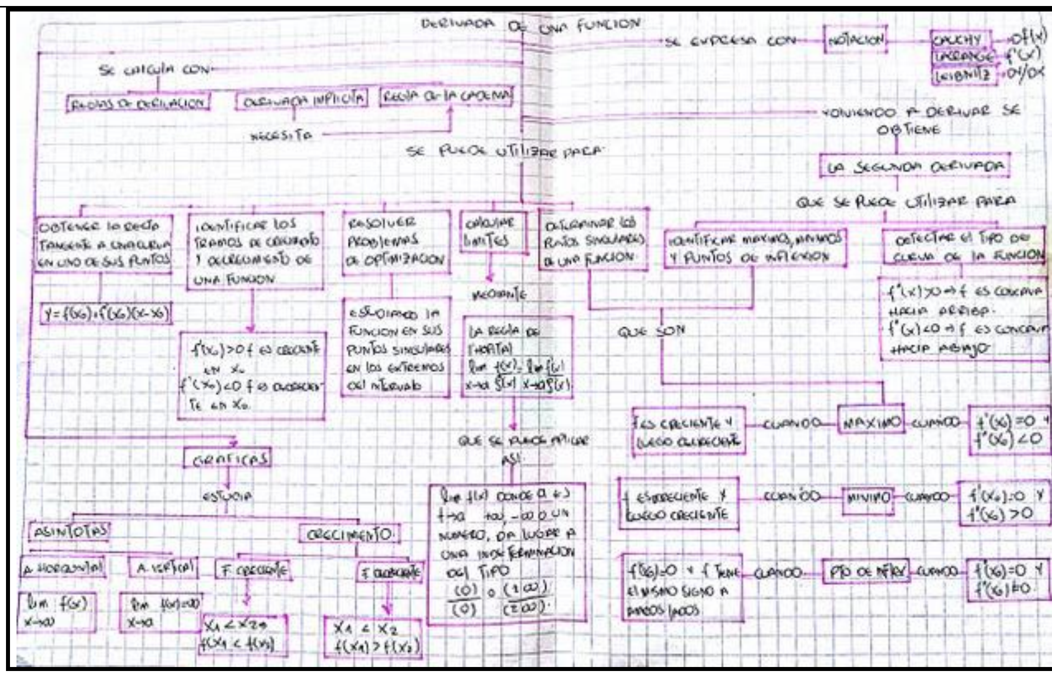


Ilustración 78. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Ángela.

De otro lado, por la representación mental que la estudiante Ángela hace de este concepto matemático se aprecia que recuerda los elementos matemáticos abordados, cuando menciona cada una de las notaciones de la derivada, su definición y aplicaciones de la misma. Hace un recorrido riguroso describiendo los elementos de notación, reglas de derivación, primera derivada, segunda derivada, entre otros. Estos elementos los plantea en un registro algebraico y escrito que demuestra dominio y distinción de los mismos para formar y hacer posibles clasificaciones del concepto objeto de estudio.

El mapa conceptual de Ángela pone de manifiesto que la estudiante muestra, en la columna izquierda, además de los procedimientos para calcular la derivada o reglas de derivación, que *la derivada de una función se puede utilizar para:*

- *Obtener la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.*
- *Identificar los tramos de crecimiento y de decrecimiento de una función.*
- *Resolver problemas de optimización.*
- *Calcular límites.*
- *Determinar los puntos singulares de una función.*

Y en la columna de la derecha menciona las aplicaciones de la segunda derivada.

En conclusión, el esquema presentado por Ángela permite inferir que hay un reconocimiento e identificación de las propiedades comunes y aplicaciones del concepto en cuestión y así concebir una imagen global y rigurosa del mismo. La estudiante adquiere en su mente una definición matemática del concepto y es capaz de verbalizarlo y representarlo en producción escrita. Justifica clara y coherentemente cada una de sus afirmaciones haciendo uso de un lenguaje formal.

En Novak y Gowin (1999) citado por Bedoya, Jorge y Otros (2006), los mapas conceptuales son una herramienta que permite analizar los avances a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje, pues los mapas conceptuales ayudan a desarrollar destrezas cognitivas como las conexiones que hace con ideas previas, tanto al inicio del proceso, como después de su conclusión, la capacidad de inclusión, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel que implica su relación, la diferenciación progresiva entre conceptos y la integración de nuevos conceptos a través de relaciones cruzadas válidas entre ellos.

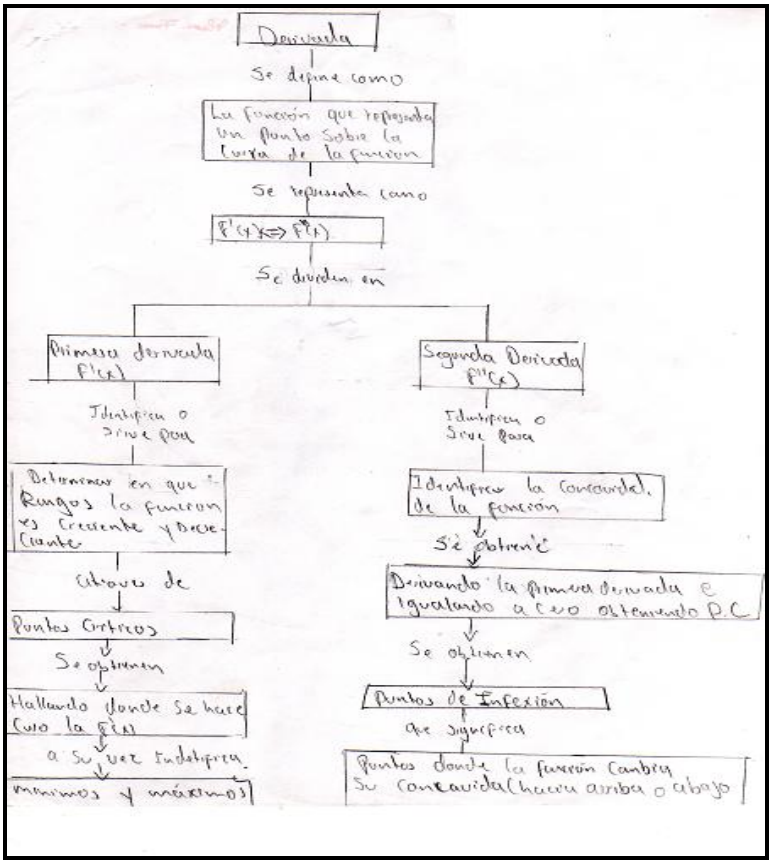


Ilustración 79. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Julián.

Julián en su mapa conceptual final, jerarquiza colocando como palabra principal Derivada y la define como la función que representa un punto sobre la curva de la función, utiliza un lenguaje simbólico para representarla y la divide en dos partes, la primera derivada y la segunda, describiendo los criterios para la primera y la segunda derivada.

Lo anterior denota que el estudiante relaciona el objeto de estudio con la aplicabilidad que tiene la derivada para graficar de forma aproximada una función y analizar su comportamiento, mostrando falta de precisión del concepto y la propiedad de la recta tangente, como la recta de estabilización del proceso del haz de secantes, aunque se aprecia evolución en lenguaje y una integración del nuevo conocimiento adquirido en el curso, ampliando su red de relaciones en torno al concepto de la derivada en su componente geométrico.

Comparando el trabajo realizado en el mapa conceptual final con el que realizó al comienzo, se observa mayor apropiación del lenguaje propio del cálculo, también hay más coherencia con las relaciones jerárquicas que establece, la reexaminación de la comprensión a partir de las acciones nuevas , de las conexiones hechas, de la forma en que expresa la imagen del objeto de estudio, denota que el estudiante comienza a reconocer propiedades, realizar distinciones con base en conocimientos anteriores. Características propias del segundo nivel llamado *creación de la imagen*.

El instrumento tal como lo propone Novak y Gowin (1988), efectivamente, deviene en estrategia de aprendizaje, enseñanza, evaluación y particularmente como medio para planificar acciones. La estructura del mapa conceptual final presentado por el estudiante permite leer entre otras las siguientes movilizaciones: la jerarquía que le ofrece a los conceptos, así como el empleo de los elementos proposicionales y de enlace tratan de dar cuenta de la visibilización que presenta el estudiante frente a otros contenidos más cercanos al objeto de estudio.

En el mapa propuesto por Jhon, el estudiante evidencia notablemente, la adecuada correspondencia que subsiste entre el concepto de la derivada y sus connotaciones geométricas y variacionales, al relacionarla con la pendiente de una función y abordarla como razón de cambio. Así mismo, intenta indicar correspondencia entre la pendiente de una función y la recta tangente, así como la incidencia de esta última para "designar" máximos y mínimos.

No obstante, orienta parte de su esquema, a un enfoque algebraico-algorítmico de la derivada, la fuerza de su argumento en este organizador gráfico, no se queda allí sino que la moviliza para tener en cuenta otras representaciones del concepto.

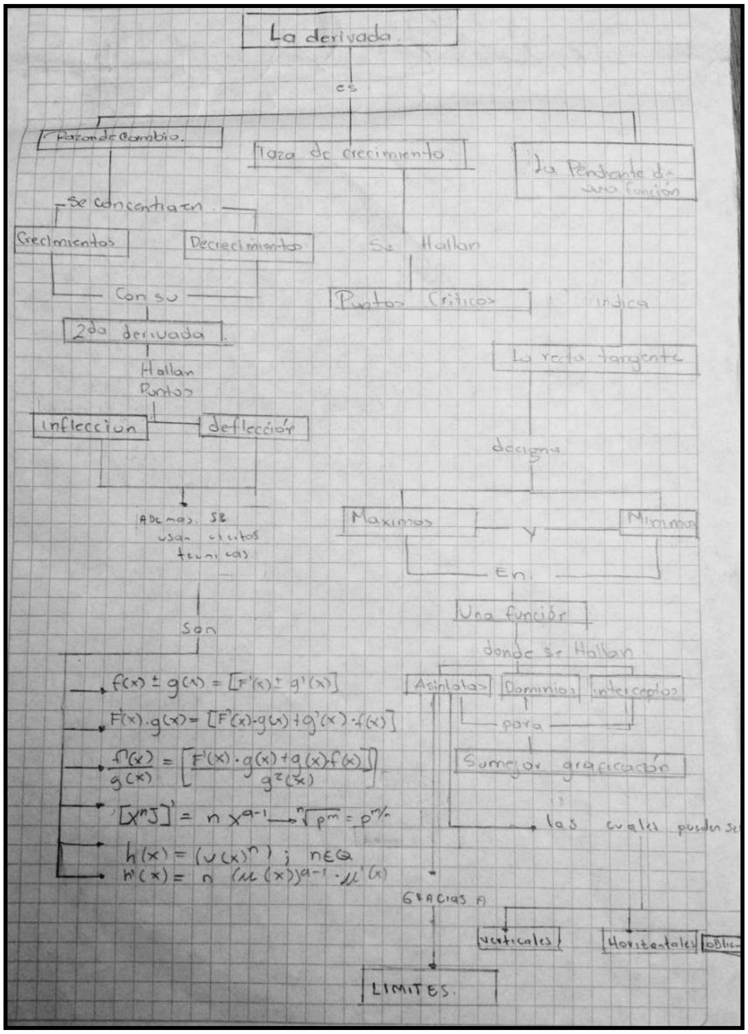


Ilustración 80. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Jhon.

La forma en que aborda la jerarquía de los conceptos y presenta sus relaciones revelan los conceptos que hacen presencia y sobre los cuales se profundizó a lo largo del tiempo de la investigación evidenciando cierta movilización de los significados idiosincráticos para aproximarlos más al concepto imagen, a pesar de ello, es al parecer necesario hacer *Folding Back* hacia los niveles previos para que el estudiante pueda hacer conciliación entre el concepto imagen y el concepto definición, en aras a evidenciar progresos en la Comprensión de la imagen característica fundamental de este nivel.

3.3 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN SOBRE ELCONCEPTO OBJETO DE ESTUDIO A PARTIR DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

3.3.1 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN JHON.

A través del empleo de los mapas conceptuales Jhon deja entrever con cuales conceptos y con qué información se va a enfrentar para el desarrollo de las acciones propuestas en el primer nivel. Antes de dar iniciar a su trayectoria, el estudiante hace empleo del instrumento de los mapas conceptuales realizando una adecuada agrupación de algunos de los conceptos necesarios, como lo son: la pendiente y la identificación de rectas tangentes, secantes, verticales y horizontales, permitiendo inferir, por lo menos una evocación en cuanto a imagen o concepto de ellos, sustentada, según se espera en el modelo, en experiencias previas de aprendizaje. Sin embargo, en la distribución jerárquica de conceptos generales y subordinados ofrece relaciones difusas, hecho, que por demás, permite inferir la necesidad de realizar Folding Back en el transcurso de su recorrido.

Jhon inicia su trayectoria, en los niveles del Modelo, evidenciando en los Conocimientos Primitivos una pertinente información previa, respecto al concepto de función, lo que le permite relacionar, en forma adecuada, una expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica. No obstante, dado lo confuso de sus definiciones y aplicaciones, y gracias a la experiencia de la acción 5, la cual le genera conflicto referente a su idea pre-concebida de tangencia, se siente obligado, dada la necesidad de claridad, en realizar *Folding Back*, para confrontar el obstáculo que le origina la imagen del concepto y la definición del concepto respecto, fundamentalmente, a la noción de recta tangente y, además, a la de pendiente, recta secante y tendencia o aproximación.

Prosiguiendo el camino trazado por Jhon, hacia el nivel 2 del Modelo, Creación de la Imagen, se puede constatar que allí, el empleo del software dinámico y la actividad recursiva del haz de secantes, le permiten una fuerte riqueza, visual y conceptual, para hacer *Folding Back*, regresar al nivel previo revisar y replantear su imagen y definición en relación a los conceptos de recta tangente, recta secante y pendiente.

Ahora, con otros referentes conceptuales para discernir y mayor claridad procedimental, el estudiante, aborda y atiende sus obstáculos y conflictos originados por sus *concepciones falsas* (Meel, 2003) e interviene sobre ellos, a través de la acción y la expresión, tal como lo plantea el modelo, realiza distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores, y a partir de la Creación de la Imagen y análisis de la imagen empieza a especificar correctamente la aplicación del concepto de tendencia y la noción de recta tangente como límite de las secantes, aceptando, además, el concepto de tangencia local y valiéndose del concepto de la pendiente para identificar puntos críticos que originan extremos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento en una función.

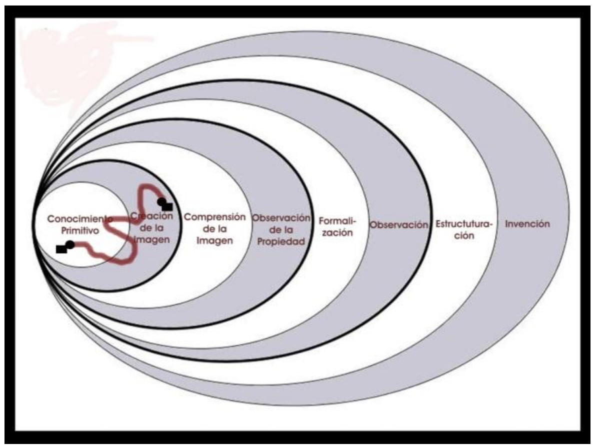


Ilustración 81. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Jhon.

Finalmente, en su exposición por el nivel 3, Comprensión de la Imagen, el estudiante evidencia no haber superado los límites de falta de necesidad, puesto que frente a actividades que demandan procesos de mayor Comprensión, respecto al objeto de estudio, como por ejemplo representar una función a partir del comportamiento gráfico de su derivada, se hace evidente la dificultad que presente en él para reemplazar imágenes asociadas con una única imagen mental y la de reconocer propiedades globales obvias en las acciones e imágenes presentadas. Este acontecimiento, sumado a que Jhon no alcanzó a superar los descriptores propuestos en el nivel 3, permite concluir que el estudiante alcanza el nivel 2 en su evolución de la Comprensión del concepto abordado.

3.3.2 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN EVIN

Evin inicia su recorrido en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico, en el nivel 1: Conocimientos Primitivos, evidenciando *Folding Back* en el concepto *función*, asociándole las propiedades de pendiente positiva - creciente o negativa – decreciente y estableciendo diferencia entre recta secante y recta tangente, aunque ésta última, con una bajo dominio del lenguaje matemático formal. Vale la pena resaltar que Evin presentaba dificultad para asociar los conceptos de variación y aproximación ligados al concepto de función, obstáculo de tipo cognitivo que fue superado. El estudiante además identifica y asocia las representaciones de funciones en su expresión algebraica y forma gráfica, mostrando que puede pasar de un registro a otro, sin mayor dificultad. Se aproxima a la definición de recta tangente a una curva, ésta estaba en contraposición a las expresiones intuitivas como la de la recta que pasa por un punto y no "corta" a la curva.

El estudiante además de los *Folding Back,* descritos anteriormente, también transitó por el mismo al analizar el comportamiento de las posiciones relativas de una curva y una recta. Hace evidente la separación del concepto de recta tangente a una circunferencia denotándolo a una curva, lo que permite, además de lo anterior, que el proceso de comprensión del objeto de estudio pueda continuar.

Posteriormente pasa al nivel de Creación de la Imagen, y allí experimenta tres*Folding Back* que hacen que regrese al nivel 1, a los Conocimientos Primitivos, uno de los casos fue para revisar la definición de recta tangente a una curva en un punto, otro para analizar las características de pendiente de las rectas *y* también se constata al describir el comportamiento de las funciones.

Evin logra plantear asociaciones de la pendiente de una recta con el término inclinación y puede calcular el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto indicado haciendo uso de procedimientos geométricos y aritméticos. A partir de la visualización dinámica puede relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Desde el mismo momento en que Evin puede caracterizar de manera correcta los valores y los tramos de la recta tangente a la curva, se evidencia que logra asociar visualmente las características de la función a partir de la interacción con la herramienta del Geogebra ®. Además, consiguió aproximarse analíticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes y estimar el comportamiento de las rectas tangentes a una curva a partir de sus pendientes. Logra inferir y estudiar el comportamiento de una función sobre un intervalo de la misma, al calcular de manera correcta los valores máximos, mínimos, así como los intervalos dónde la función es creciente y decreciente, apoyándose a partir del criterio de las tangentes y las aplicaciones del concepto de la derivada en su componente geométrico. Por lo anterior, se puede concluir que Evin logra asociar visualmente de forma correcta la representación gráfica de la derivada con la función original y la relación a partir de la recta tangente.

En cuanto a las anotaciones anteriores se evidencia un avance en la comprensión del objeto de estudio, que permiten ubicar a Evin en el nivel 3, sin embargo más adelante el estudiante evidencia una fuerte debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se le dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hace a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación de la definición del concepto con la imagen del mismo. Se le dificulta el proceso de reversibilidad, es decir, pasar de la función derivada a la función original.

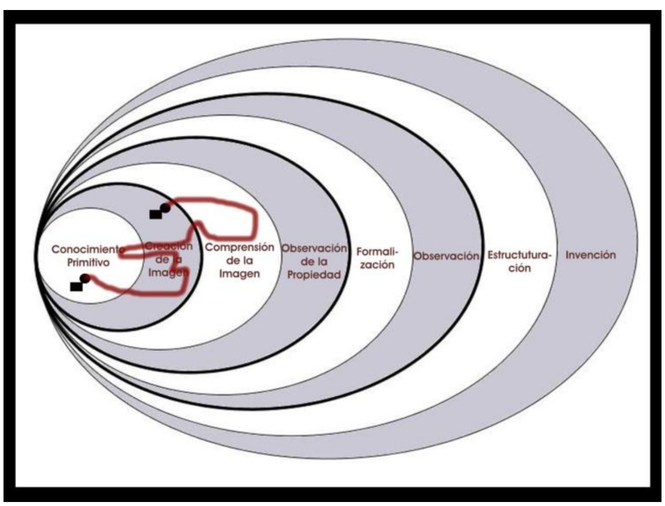


Ilustración 82. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Evin.

Evin presenta dificultad para emplear la información de algunas gráficas para distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básicas a partir de las propiedades de la recta tangente a la función en un punto dado, lo que lo obliga a regresar al nivel 2 de Creación de la imagen para revisar las relaciones y diferencias de una función y su derivada, estimación de pendientes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, signos de la derivada o en su defecto de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado y análisis de algunos trazos de rectas tangentes en porciones de curvas. Lo anterior con la finalidad de que pueda asociar la derivada y la función original, especialmente las características fundamentales de cada una. Finalmente al Evin no poder superar las dificultades anteriormente descritas y por ende no alcanzar los descriptores propuestos en el nivel 3, se concluye que avanza a un nivel de comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico que permite ubicarlo en la elevación de Creación de la Imagen (Nivel 2).

3.3.3 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN ÁNGELA

De este análisis cualitativo, se puede decir que Ángela comienza su recorrido por la comprensión en el Nivel 1: Conocimientos Primitivos, demostrando *Folding Back* en el trazo de rectas tangentes, haciendo evidente el obstáculo relacionado con la idea que la recta tangente solamente toca a la curva en un punto y presentando dificultad para trazar la recta tangente a una recta en un punto fijo, la estudiante se ve entorpecida por el concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia que regresa a su mente y participa en la socialización de la actividad diagnóstica, expone a nivel grupal el error, superándolo en la discusión generada al comprender que la recta tangente en un punto determinado de una recta, es la misma recta, otros momentos de *Folding Backs* se basan en el reconocimiento de ideas y conceptos como los correspondientes a: segmento de recta, punto, recta secante y concepto de función, estableciendo relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas de las mismas, a la vez que asocia el valor numérico de las pendientes de las rectas con algunas de sus características, también se rastrea *Folding Backs* en la actividad inicial, referente a la construcción del mapa conceptual al categorizar la información, y al tratar de usar un lenguaje propio del cálculo.

En cuanto a la evolución de la comprensión, Ángela se promueve al Nivel 2: *Creación de la imagen* con la ayuda del Geogebra ®, evidenciando en la actividad con rectas coincidentes en un punto y con medida de pendientes diferentes, reconocimiento de los valores de las pendientes de las rectas de acuerdo a la inclinación de las mismas, aunque le faltó precisión en el tránsito de lo gráfico a lo verbal, para determinar lo referente al crecimiento y decrecimiento de una recta.

Ángela ubica puntos donde la recta tangente a la curva es creciente y las traza acertadamente, experimentando otro *Folding Back* al remitirse al obstáculo superado en el nivel de los conocimientos primitivos, al hacer los trazos mencionados.

La estudiante no se puede promover al Nivel 3: *Creación de la Imagen*, pues presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en una gráfica, y al determinarlos en un intervalo cerrado dado, aunque tiene claro el valor numérico de la derivada en esos números críticos. Además es difusa la comprensión de la imagen para los cuales la función es creciente y decreciente. Es propio resaltar que se le dificulta relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado con el valor numérico de la primera derivada.

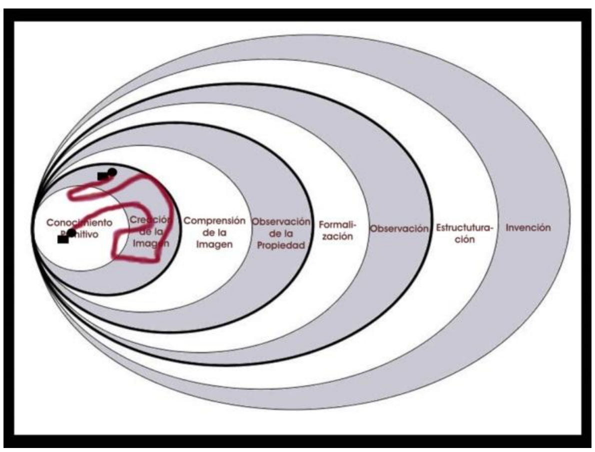


Ilustración 83. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Ángela.

3.3.4 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN JULIÁN.

De este análisis cualitativo, se puede decir que Julián en su recorrido por la comprensión del Nivel 1: Conocimientos Primitivos, evidencia un *Folding Back* en el concepto de función, estableciendo relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas de las mismas, a la vez que asocia el valor numérico de las pendientes de las rectas con sus características. Es de resaltar que Julián evidenció dificultad para relacionar la representación gráfica de rectas trasladadas con su representación algebraica. Otros momentos de *Folding Back*, se presentan en actividades relacionadas con el trazo de rectas tangentes a la curva en un punto determinado y con las imágenes evocadas para establecer relaciones y particularizar conclusiones, a la vez cuando el estudiante se ve en la necesidad de invocar conceptos y establecer diferencias entre rectas tangentes y secantes a una curva, también en el mapa conceptual al categorizar la información, y al tratar de usar un lenguaje propio del cálculo.

En cuanto a la evolución de la comprensión, Julián se ubica en el Nivel 2, pues con la ayuda de la actividad propuesta en el Geogebra ®, el estudiante fue capaz de hacer abstracciones más allá del nivel del conocimiento primitivo, reconociendo los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es mayor y/o igual a cero y los intervalos donde la función es creciente y /o decreciente, es aquí donde Julián logra relacionar y asociar lo que visualiza en las construcciones realizadas con la ayuda del software dinámico con criterios propios de la primera derivada de una función.

En este nivel experimenta *Folding Back*, para reforzar el concepto de función y sus propiedades, que lo hace regresar al nivel de los *Conocimientos Primitivos* y evocar saberes adquiridos para calcular el valor de las pendientes de rectas secantes en la actividad relacionada con el mecanismo del haz de secantes. Mediante las complementariedades de la acción y la expresión, Julián logra razonar de nuevo en el nivel *Creación de la Imagen* en el momento que caracteriza el valor numérico de la pendiente de la recta que pasa por un punto fijo P y es tangente a una curva a través del cálculo de la primera derivada, lo que hace que reconstruya su concepto de recta tangente, independizándolo del concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia, lo que hace que el estudiante sea promovido al Nivel 3 en el cual es capaz de reconocer algunas características fundamentales de una función a partir de la derivada como son los máximos y los mínimos de algunas funciones, pero de otras no, la representación gráfica de algunas funciones, dada la gráfica de su función derivada, presentándose situaciones donde se le dificulta establecer dicha relación, lo que lo obliga a regresar al Nivel 2 de *Creación de la Imagen.*

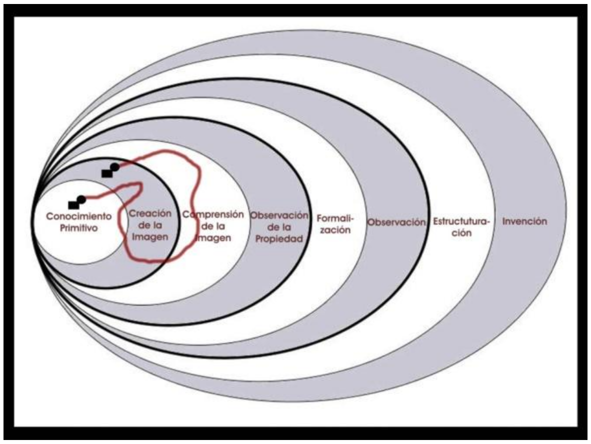


Ilustración 84. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada en Julián.

En la misma línea, la jerarquización y presentación de los conceptos en el anterior mapa de Ángela, permiten entender la elaboración mental a la cual acude la estudiante para comunicar una interpretación de los mismos, asociando su representación y significación a los registros de representación geométrica. El enfoque del concepto de la tangente está más orientado, a la posición y relación de la recta respecto a una curva específica, identificando en ella el punto de relación local. No se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente a los fundamentos del cálculo.

4 HALLAZGOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como se señaló al inicio de este trabajo de investigación, éste se inscribe en el marco teórico del Modelo para la Comprensión de los conceptos matemáticos de Pirie y Kieren. En la revisión y análisis de los antecedentes presentados en el primer capítulo de este trabajo se evidenció que aunque la derivada como objeto matemático ha sido referente de investigación desde diferentes consideraciones, las unidades de análisis en torno a la comprensión conceptual desde un enfoque geométrico, es un espacio que permite la exploración y la creación de estrategias y herramientas pertinentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los componentes constitutivos del pensamiento matemático avanzado.

En este capítulo se expondrán los hallazgos, las conclusiones basadas en el análisis de cada uno de los instrumentos cualitativos utilizados en la recolección de la información, sobre el desarrollo y evolución del concepto de la derivada en su componente geométrico que tienen los estudiantes participantes de este trabajo, las implicaciones de la investigación en la enseñanza del concepto objeto de estudio, y finalmente las limitaciones y las recomendaciones para futuras investigaciones en torno al tema.

4.1 HALLAZGOS

Las fases del análisis, descritas en el capítulo anterior, permitieron encontrar evidencias de cómo evolucionan en procesos de comprensión y cómo utilizan los estudiantes los elementos matemáticos relativos al concepto de la derivada en su componente geométrico. En el análisis de los instrumentos de recolección de la información y los teóricos, especialmente en el marco del Modelo de Pirie y Kieren, se pudo comprobar que la construcción del conocimiento es progresivo y continuo, y el paso de un nivel al siguiente se evidencia a través de las relaciones que el estudiante es capaz de realizar entre los elementos constitutivos del objeto matemático y la manera cómo los utiliza en la resolución de distintas tareas.

Los elementos matemáticos que utilizan, se podría concluir, que son los mismos, aunque varían de un estudiante a otro por la forma cómo los usan en la solución de las actividades propuestas, muchos de estos son recordados y por ende utilizados de forma incorrecta y/o con concepciones erróneas, tal y como se describe a continuación:

- Aunque los estudiantes, en su mayoría, determinaban el valor de la pendiente de las rectas, se les dificulta presentar una interpretación formal de ésta; es posible que preserven la definición estática y particular de pendiente como inclinación de la recta, que se les es transferida a lo largo del proceso educativo y donde no se les permite reinterpretar el texto o el concepto matemático abordado.

- La presentación del Obstáculo Euclídeo para la comprensión de la recta tangente es recurrente. Los estudiantes tienen una concepción griega de tangente que persiste desde sus cursos elementales, en la cual la recta tangente a una curva la toca en un solo punto de la misma, al dar respuestas como la siguiente: *"no cumple la condición de tangencia porque toca la curva en más de un punto"*. Además persiste la imagen visual de la recta tangente a una circunferencia. Tanto la concepción como la imagen mental, como tal obstaculizan notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo.

- Tienen dificultad para establecer diferencias entre las diversas representaciones de las funciones (polinómicas, trascendentales…) y no diferencian si la representación gráfica de las rectas horizontales y verticales en el plano cartesiano cumplen la condición de ser función.

- El uso que hacen de los elementos geométricos dista de la manera convencional, es decir confunden los conceptos preliminares y propiedades fundamentales de la Geometría Euclidiana, por ejemplo recta con segmentos de recta. Además evidencian una distorsión entre el postulado que dice que por un punto pasan infinitas rectas con la propiedad de la recta como recta tangente a una curva en un punto.

- Tienen la errónea concepción de que la recta tangente de una recta en punto, es otra que pasa muy cerquita sin tocarla excepto en el punto indicado. Y preservan una imagen visual y textual con la palabra “único” y “sólo” punto de la definición de recta tangente a una curva

- Debilidad al realizar asociaciones incorrectas entre las representaciones algebraicas, geométricas y analíticas de un objeto matemático, por ejemplo el de derivada.

- Dificultad para reconocer relaciones entre las propiedades globales del concepto de derivada y las propiedades de la recta tangente, que originan la presencia de números críticos en relación a los extremos relativos y puntos de inflexión y su incidencia general en el valor de la pendiente en estos puntos de interés local.

- Confusión para reconocer las características y comportamiento de una función a partir de la función derivada.

En un comienzo de desarrollo de las actividades, en el nivel 1 de los Conocimientos primitivos, se evidencia que la apropiación del lenguaje matemático utilizado por los estudiantes y la interrelación de conceptos, se inscriben en un nivel básico en la profundidad y jerarquización con la cual se intenta dar cuenta del proceso y nivel de comprensión en el aprendizaje de los conceptos del pensamiento de la matemática avanzada tal y como lo propone el modelo. Presentaban dificultad en utilizar un lenguaje formal para representar objetos matemáticos, especialmente en actividades donde debían utilizar expresiones algebraicas para la obtención de expresiones que permitieran la generalización de un concepto. Preservaban una imagen textual o visual de la definición y representación de recta tangente a una curva, delimitada por la representación de la recta tangente a una circunferencia. Este último, en palabras de Tall y Vinner, lo que los estudiantes evidenciaban una ruptura entre la imagen del concepto y la definición de los conceptos de función y de recta tangente.

En el nivel 2, en la Creación de la Imagen, se evidencian las primeras apariciones de un intento de relación entre la función, la recta tangente y la derivada, aunque de manera aislada, difusa e inconclusa. Pero a partir de las actividades propuestas pudieron evolucionar en la comprensión y así pudieron relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Además, consiguieron aproximarse analíticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes. De forma creciente y progresiva en los niveles de Conocimientos Primitivos, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen se van incrementando las relaciones de una función y su derivada haciendo uso de diferentes formas de representación, llegando a comprensiones más avanzadas del concepto objeto de estudio.

Aunque algunos de los estudiantes recuerdan con facilidad los elementos o propiedades de la recta tangente a una curva como producto de una instrucción previa, al utilizarlos en el desarrollo de las tareas algunos lo hacen con errores, porque demuestran que aún no han evolucionado en el concepto de derivada como un objeto matemático y con propiedades geométricas; otros, a pesar de establecer un intento de relación entre estos elementos, al concluir la resolución de algunas tareas y manifiestan dificultad al establecer una síntesis entre los diferentes sistemas de representación, principalmente el gráfico. Pues se evidencia en los estudiantes debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se les dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hacen a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación de la definición del concepto con la imagen del mismo.

No obstante, el interés en los estudiantes existe la necesidad de profundizar en otras actividades que permitan, por un lado caracterizar una función a partir de la derivada y además establecer parcialmente una síntesis entre los sistemas de representación geométrico, algebraico y analítico de estos objetos matemáticos, por lo que finalmente, se ubica a los cuatro participantes del trabajo en un nivel 2, al no alcanzar un nivel más avanzado de comprensión del objeto geométrico de la derivada.

Según lo anterior, se observó la necesidad de implementar actividades y retroalimentarlas bajo la luz del modelo de Pirie y Kieren, que condujeran a la superación de las dificultades descritas, basadas en el manejo de las diferentes representaciones y que le permitieran evolucionar en la comprensión del concepto, en la aplicación y en las características propias de la recta tangente y su directa relación con la derivada. Por ello los instrumentos estuvieron pensados de manera que permitieran al estudiante asumir un papel activo y reflexivo en el procesamiento y adquisición de la información, interpretando y verificando acontecimientos, en un esfuerzo de atribuir significado a las actividades que se le proponían. Así pues, las actividades de intervención, sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilitaron el trabajar en un ambiente donde fue posible la discusión y la argumentación, la representación y la confrontación del contenido enseñado, favoreciendo el desarrollo intelectual del estudiante, posibilitando así el entendimiento y comprensión de los conceptos, en éste caso el de derivada como concepto local.

Asimismo, la incorporación de las TIC como actividad dinámica, generó un ambiente en el que el estudiante, en cada una de las Instituciones en las que se intervino con el proyecto, tuvo la oportunidad para aprender a producir demostraciones formales como la noción de límite, el valor de la pendiente de la recta tangente como aproximación de las rectas secantes, entre otras, a través de la exploración dinámica que proporcionan los sistemas computacionales, en este caso la herramienta dinámica del Geogebra ®. La utilización de éste software interactivo para la representación y exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, le permitió a los estudiantes conocer las propiedades de la recta tangente a una curva y concebir una idea más global, abstracta o generalizada, analizar el comportamiento de funciones y sus derivadas, obteniéndose así la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

Se evidenció, la advertencia de la teoría, respecto al manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de la derivada en su componente geométrico. Por ejemplo, cuando a los estudiantes se les presentaron gráficas de funciones y su correspondiente derivada en el Instrumento Evaluativo (Ver Anexo 3), la primera reacción de algunos estudiantes fue identificar puntos comunes entre las dos representaciones. Duval señaló que estos errores, por lo general, se pueden interpretar como la falta de coordinación de los sistemas de representación.

4.2 CONCLUSIONES

En Novak y Gowin (1999) citado por Bedoya, Jorge y Otros (2006), los mapas conceptuales son una herramienta que permite analizar los avances a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje, pues los mapas conceptuales ayudan a desarrollar destrezas cognitivas como las conexiones que hace con ideas previas, tanto al inicio del proceso, como después de su conclusión, la capacidad de inclusión, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel que implica su relación, la diferenciación progresiva entre ellos y la integración de otros nuevosa través de relaciones cruzadas válidas entre ellos.

El instrumento tal como lo propone Novak y Gowin (1988), efectivamente, deviene en estrategia de aprendizaje, enseñanza, evaluación y particularmente como medio para planificar acciones. La estructura de los mapas conceptuales presentados por los estudiantes permite leer entre otras las siguientes movilizaciones: la jerarquía que le ofrecen a los conceptos, así como el empleo de los elementos proposicionales y de enlace tratan de dar cuenta de la visibilización que presentan los estudiantes frente a otros contenidos más cercanos al objeto de estudio.

4.2.1 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

En relación al objetivo general

La presente investigación tuvo su génesis a partir de la praxis de sus investigadores, pues en ella había sido recurrente la consideración de la problemática que subyace en el acto del aprendizaje de las matemáticas, en términos de indagación hacia los procesos cognitivos, que desde el quehacer de la enseñanza, son de relevante importancia tener en viva cuenta, al momento de volcar el interés pedagógico y didáctico hacia el proceso de la Comprensión, más que al de la simple adquisición de habilidad procedimental, como es lo usual, incluso ahora, en algunas de las prácticas y experiencias de aprendizaje.

La búsqueda del objetivo general, consistía en cómo promover avances en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico, empleando representaciones semióticas, mapas conceptuales y el software dinámico y con la aplicación del Modelo de Pirie y Kieren hacer visible la evolución de la Comprensión de los cuatro estudiantes. El objetivo se pudo alcanzar puesto que el empleo del mapa conceptual inicial permitió orientar las acciones para cada nivel, mientras que con el mapa conceptual final cada estudiante lo logró emplear como estrategia de aprendizaje y para comunicar la relación global del concepto. Además, el empleo de otras representaciones y el software dinámico contribuyeron notablemente, en tanto variables visuales, a la superación de la dificultad en los estudiantes para Comprender el trazo y el concepto formal de la recta tangente a un punto, desde su definición local y global.

Respecto a la teoría del Modelo, se evidenció la evolución de la Comprensión del concepto como proceso dinámico, especialmente en los niveles Conocimientos Primitivos, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen, cobrando importancia considerable, para el progreso en los niveles, la característica del *Folding Back* como instancia de retroalimentación, y la *Complementariedad de la acción y la expresión,* con el fin de re-construir la Comprensión de un concepto para potenciar la coherencia entre la imagen del concepto y la definición del concepto, principalmente en las acciones del nivel 2. No obstante, se debe dejar constancia de la dificultad presente en algunos de los estudiantes en su trayecto para el nivel 3 respecto a la comprensión de la imagen, siendo el reconocimiento de las características fundamentales de una función a partir de la representación gráfica de la derivada el obstáculo de mayor incidencia para superar dicho nivel y que garantiza, ciertamente, evolución en la Comprensión de la definición formal del concepto.

Finalmente, es necesario hacer hincapié en las bondades que ofrece el Modelo de Pirie y Kieren para hacer visible y promover la evolución en la Comprensión de un concepto matemático. Estas se encuentran básicamente en las características propias de la teoría que permiten, además, de movilizaciones cognitivas, hacer objeto de estudio el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de Comprensión de los objetos o contenidos de estudio. También permite, reconocer la acción y la expresión que acontece en el estudiante, para comunicar, para razonar y para dar cuenta con argumentos propios las relaciones y asociaciones que se encuentra en capacidad de hacer toda vez que se le presenta una situación.

En relación a los objetivos específicos

Para el desarrollo del trabajo de investigación y en apoyo al objetivo general, se definieron cuatro objetivos específicos que permitieron perfilar una búsqueda de estrategias e instrumentos que hicieran posible la construcción de nexos y asociaciones útiles para hacer intervención adecuada en el escenario sobre el cual se desarrollaría la experiencia de aprendizaje. Además, de orientar la mirada y la indagación analítica hacia el complejo mundo de la comprensión humana en relación a los conceptos matemáticos.

El siguiente fue el panorama de estos objetivos: dos cuya acción estaba dirigida, el primero al diseño de actividades para la intervención en el aula como espacio de encuentro con los estudiantes que a su vez sirviera como elemento para explorar y recoger información; y un segundo tendiente a crear una propuesta de Instrumento Evaluativo con un grupo de acciones, destinadas a los tres primeros niveles del Modelo de Pirie y Kieren, que permitiera, en tanto el estudiante realizara una intervención completa, tener una idea sobre el progreso de la Comprensión. Un tercer objetivo centralizó su acción en describir cómo se da, en los estudiantes, la evolución en la Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico con el empleo de las representaciones semióticas, los mapas conceptuales y el software dinámico. El tercer objetivo concentró su interés en identificar los obstáculos cognitivos y epistemológicos presentes en los estudiantes en relación a la conceptualización y comprensión de la derivada.

En este sentido, el encuentro y la forma observada en los estudiantes para afrontar y dar respuesta a las diferentes acciones propuestas en las intervenciones, permite concluir que dicho objetivo fue alcanzado, puesto que gracias a lo que se alcanzó evidenciar en esos procedimientos, en tanto medio de comunicación y visibilización, y a la riqueza valorativa inherente a ellos, en virtud del proceso hermenéutico, fue posible explorarlos y reflexionarlos a la luz de la teoría del Modelo para tomar conciencia de las diversas dificultades, en contravía a permitir evolución en la Comprensión, que aún subsisten arraigadas frente a la categoría conceptual estudiada y a la red de significantes que determina.

Por su parte y como constancia de haber sido alcanzado, en el anexo se presenta el diseño planteado como Instrumento Evaluativo, el cual puede ser tenido en cuanta como un instrumento de significativa utilidad cuando la praxis educativa en general y la del aprendizaje en particular se encuentran orientadas con mayor interés hacia la Comprensión de los conceptos, que a la aplicación algorítmica de los mismos. O si se quiere para cuando la preocupación didáctica y pedagógica se encuentra orientada hacia el justo medio entre Comprensión y procedimiento.

En los análisis presentados para cada uno de los estudiantes participantes en la investigación se da viva cuenta, a través de un proceso de detallada descripción y apoyados en la teoría del Modelo de Pirie y Kieren, de la forma en que acontece la evolución de la Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. El objetivo en este sentido queda verificado, puesto que es posible observar, con base en los instrumentos, las acciones y las consideraciones tenidas en cuenta, el trayecto que cada uno de los actores de la investigación realizó en su tránsito por los tres primeros niveles del Modelo, valga decir, por el nivel de los Conocimientos Primitivos, en donde los mapas conceptuales tuvieron considerable efecto, como estrategia de aprendizaje y medio de comunicación para asociar conceptos importantes; luego en la Creación de la Imagen, el mecanismo del haz de secantes y la herramienta del software dinámico intervinieron con notable incidencia, fundamentalmente para permitir claridad en el trazo y definición formal del concepto de recta tangente y en la identificación de características geométricas importantes y necesarias al momento de presentar el concepto de derivada; finalmente, en la Comprensión de la Imagen , el más exigente de los tres, se da cuenta sobre el por qué algunos de los estudiantes no alcanzaron los descriptores. Además, las acciones para los tres niveles se plantearon con conciencia y en perspectiva de la importancia que tiene, gracias a su ayuda para la Comprensión, el empleo de varios registros semióticos para un mismo concepto.

La metodología cualitativa de la presente investigación, en su enfoque estudio de casos, permitió a la vez que identificar, corroborar la existencia de los obstáculos epistemológicos (la experiencia primera, la generalización, el verbal y el cuantitativo) y didácticos (la asociación del concepto de derivada con la variación y la noción de límite, la primacía de los procedimientos algorítmicos sobre la problematización y Comprensión del mismo, y uno de los de mayor dificultad, dado su arraigo en las estructuras mentales del estudiante, la concepción global que excluye el concepto de tangencia local) presentados, en su momento por Bachelard (2000), D'Amore (2006) y Dolores (2000), como elementos en los que se estructuran el cúmulo de errores y dificultades que impiden, con marcada incidencia, el progreso o la evolución en la Comprensión de los conceptos matemáticos.

Algunas de estas dificultadas, principalmente el concepto global y local de tangencia y la derivada como el límite de las secantes se vieron confrontadas y en alguna forma superadas, gracias al empleo de las diferentes representaciones y, principalmente, a la visualización ofrecida por la intervención del software y el mecanismo del haz de secantes, la cual permitió generar conflicto cognitivo y con ello movilización de esos obstáculos.

4.3 RECOMENDACIONES

- Se recomienda que en la enseñanza de los conceptos de la matemática avanzada, independiente de cuál sea el escenario de la aplicación como experiencia de aula Institucional de educación Media o Superior, se aborde el concepto de derivada desde distintas representaciones para la consecución y comprensión del mismo. En ese sentido, se pueden incorporar metodologías y estrategias que respondan y faciliten los procesos de conversión entre representaciones que faciliten la evolución en la comprensión del concepto, por ejemplo, el empleo de los mapas conceptuales.

- Incluir en los programas de cálculo diferencial aplicaciones del concepto de derivada a partir de situaciones geométricas, donde los estudiantes puedan comprender el concepto desde otro contexto, por ejemplo a través del mecanismo del haz de secantes.

- Es notable la necesidad de acudir a otras estrategias didácticas o representacionales para valorar el proceso de comprensión de los estudiantes de los objetos matemáticos. Sin lugar a dudas los mapas conceptuales revelan el dominio conceptual y el lenguaje matemático empleado por el estudiante en relación al objeto de estudio. Además ofrecen la posibilidad de personalizar y evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto.

- El aprendizaje y el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante, como el razonamiento, la comprensión, la abstracción, entre otras, se ha convertido en uno de los mayores desafíos de la sociedad, por ello se hace necesario el desarrollo de propuestas orientadas a la incorporación de nuevos y variados métodos de enseñanza o de las nuevas tecnologías o software como el Geogebra ® , de tal manera que se pueda lograr en el estudiante, del grado Undécimo o de los primeros semestres de Universidad, una mayor integración del conocimiento, la capacidad de resolver problemas acertadamente, fomentar el trabajo colaborativo e incentivar la autonomía y la creatividad, además de la exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, deben permitir la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

- Se debe incorporar la representación como una estrategia y herramienta didáctica que permita a los estudiantes acercarse a los objetos matemáticos y relacionarlos a imágenes mentales adecuadas de tal manera que los acerquen al concepto.

- Las actividades que se planeen para rastrear los conocimientos primitivos, deben ser sencillas, graduales y no extensas, para que el estudiante se sienta en confianza, cómodo, pueda evidenciar los conocimientos matemáticos que trae y participar en actividades de socialización a nivel grupal, para propiciar un ambiente favorable y motivante que invite al grupo de estudiantes a contrastar, reestructurar y construir el conocimiento, de igual forma esta estrategia para la evolución en el proceso de la comprensión se puede hacer extensiva para los demás niveles del Modelo de Pirie y Kieren.

- Finalmente, intervenir en el universo escolar, en aras al despliegue amplio de lo educativo en cuanto a sus acciones y sus prácticas, para fomentar una reflexión-acción de tipo pedagógica, en las Instituciones de Educación Media adscritas a la Secretaría de Educación de Medellín como en el caso de la Institución Educativa Pbro. Antonio José Bernal Londoño, el empleo de algún Marco Teórico apropiado, que pueda ser tomado como un recurso educativo fundamental y el punto de partida necesario para cualquier indagación pedagógica, al interior del proceso educativo; que permita, además, de aproximar en diferentes formas, los contenidos propios del área de Matemáticas, a su vez también facilite visibilizar otras variables, inherentes al proceso de enseñanza-aprendizaje y que por las lógicas relacionales y trayectos compartidos al interior del aula quedan silenciadas, olvidadas o demandando otro tipo de lecturas e interpretaciones, dificultando con ello el descubrimiento o redescubrimiento de otros panoramas, la búsqueda de nuevos horizontes disciplinares, conceptuales o metodológicos que sean condescendientes con una actitud educativa como un estado vivencial con espíritu de impulso creativo e investigativo.

BIBLIOGRAFÍA

Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas.* España: Mc Graw Hill.

Apostol, T. M. (1988). *Calculus. Cálculo confunciones de una variable, con una introducción al algebra lineal.* Barcelona: Reverté.

AZARQUIEL, G. (1993). *Ideas y actividades ara trabajar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Bachelard, G. (2000). *La formación del Espíritu Científico.* México: Siglo XXI .

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (1996). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* México, D.F.: Limusa, S.A.

Bedoya Beltrán, J. A., Esteban Duarte, P. E., & Vasco Agudelo, E. D. (2006). *Los mapas conceptuales en las fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele.* . San José de Costa Rica: D. N. A.J Cañas.

Bell, E. T. (1995). *Historia de las Matemáticas.* Nueva York.: McGraw-Hill.

Bishop, A. (1994). *Implicaciones didácticas de la investigación matemática.Antología en educacón matemática.* Compiladores: Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G.

Castañeda, S. (2009). *Diseño de un modelo de Estrategias Cognitivas que permitan el desarrollo del pensamiento creativo.* Perú: Universidad Nacional Pedro Riuz Gallo.

Cienfuegos, A. G. (2012). *Desarrollo de procesos cognitivos.* Bogotá: Kimpres Ltda.

D'Amore, B., & Fandiño., M. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

De la Torre Gómez, A. (2003, Volumen 24). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas,* 99-121.

De Zubiria, J. (1994). *Tratado de pedagogía conceptual: Los modelos pedagógicos.* Bogotá: Fundación Merani.

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didactica para la enseñanza de la derivada. En El futuro del cálculo infinetesimal.* México: Grupo editorial Iberoamerica.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D.* Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1999). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Santiago de Cali: Unversidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Santiago de Cali: PeterLang S.A; Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Echeverría, J. (2008). Apropiación social de las tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad.*, 171-182.

Esteban D, P. V., Vasco A, E. D., & Bedoya B, J. A. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas, 28*, 77 - 95.

Esteban Duarte, P. V. (2006). *Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables.* Medellin: Educacion y pedagogia , XVIII (45), 119-131.

Flórez Ochoa, R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento.* Bogotá: McGraw-Hill.

Godino, J. D. (2003). *TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: Claves teóricas.* Aravaca (Madrid): Mc Graw Hill.

Gutierrez, J. A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. (S. S. Linnares, Ed.) *Teoría y práctica en educacion matemática (Colección "Ciencia de la educación"n°4)*(4), 295-384.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezuela, Volumen X*(Número 2).

Huerta, M., Galán, E., & Granell, R. (2000). *Concept Maps in Mathematics Education: A Possible Framework for Students' Assessment.* Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (Today Ministerio de Ciencia y Tecnología),.

Karelin, O., Rondero, C. G., & Tarasenko, A. (2008). *Desigualdades. Métodos de cálculo n tradicionales.* Madrid, Buenos Aires, México: Diaz de Santos.

Llinares, S., Sanchez-Matamoros, G., & García, M. (Mayo de 2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.* Recuperado el 13 de Junio de 2013, de Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Redalyc): http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511205

Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre las cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Lozano, Y. A. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite.* Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Facultad de Matemáticas e Ingenierías.

Lyndon, S. P. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal., 12 (2)*, 127-146.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 221- 271.

Morin, E. (1994). *El Método. El conocimiento del conocimiento.* Madrid: Cátedra.

Newman, J. R. (1994). *El mundo de las matemáticas 1*. Barcelona: Grijalbo.

Novak, J., & Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca. S.A.

Pirie, S. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics , 26 (2/3)*, 165-190.

Posada, F. &.-O. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Medellín: Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia.

Posada, F. &.-O. (2006b). Razonamiento algebraico y la modelación matemática. (&. G. En F. Posada, Ed.) *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico , Vol. 2*, págs. 127 - 163.

Presmeg, N. (1986). *Visualization and Mathematical Giftedness. Educational Studies in Mathematics.*

Rendon Ramírez, R. A. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Resnick, L. B. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós-MEC.

Rivas Navarro, M. (2008). *Procesos Cognitivos y Aprendizaje Significativo.* Madrid: Organización Educativa de la Comunidad de Madrid.

Romero, J. G. (2004). *Diagnóstico y Evaluación de la Comprensión del Conocimiento Matematico.* Málaga: Universidad de Málaga.

Ruiz, A. (2002). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Madrid: EUNED.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Estados Unidos de América: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tall, D. y. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.[31].

Tünnerman, C. (2005). *Modelos Educativos.* México: BUAP.

UNESCO. (2004). *Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación docente. Guía de planificación.* Paris: UNESCO.

Uribe Calad, J. A. (2001). *Matemática Experimental 11.* Medellin: Uros Editores.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). *La comprensión de la tasa de variación para una aroximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Villa-Ochoa, J. A., & Posada Balvin, F. A. (2004). *Una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Zill, D., & Dewar, J. (1998). *Algebra y Trigonometría.* México.: McGraw Hill.

ANEXO N° 1

PRUEBA DIAGNÓSTICA

ACCIONES PROYECTO

NOMBRE ____ **FECHA** ______________

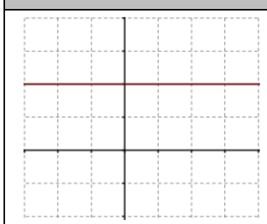
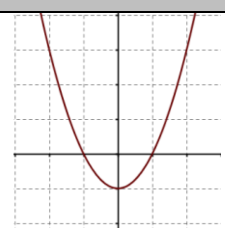
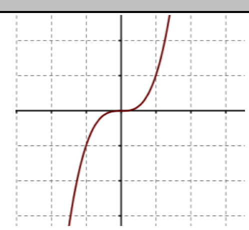
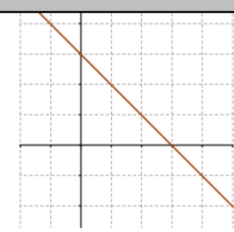
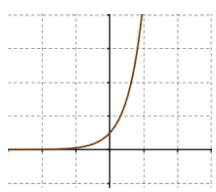
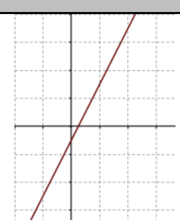
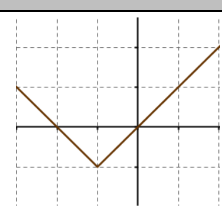
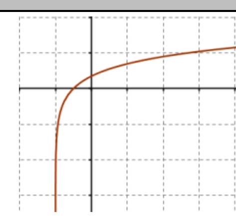
Número de veces que ha cursado la asignatura____________

PRESENTACIÓN

El siguiente trabajo es una prueba diagnóstica que tiene como objetivo determinar el alcance y/o manejo de los saberes previos para abordar el concepto de derivada. No es un examen por lo tanto es necesario hacerlo con total tranquilidad y honestidad académica, acudiendo a lo que cada un@ maneja y recuerda

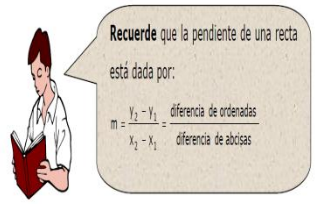
1.

Escribe en **[ ]** de la representación grafica de la tabla superior, la letra Correspondiente a la expresión algebraica de la tabla inferior.

1. [ ]	**2. [ ]**	**3. [ ]**	**4. [ ]**
			
5. [ ]	**6. [ ]**	**7. [ ]**	**8. [ ]**
			

A. $y=\frac{3}{x+1}$	**B.** $y=x^3-6x^2+8x$	**C.** $y=3^x$	**D.** $y=4$
E. $y=\frac{1}{x^2+1}$	**F.** $y=x^3$	**G.** $y=x^2-x$	**H.** $y=x^2-1$
I. $y=-2+\lvert x+2\rvert$	**J.** $y=-2x-1$	**K.** $y=2x+1$	**L.** $y=-x+3$

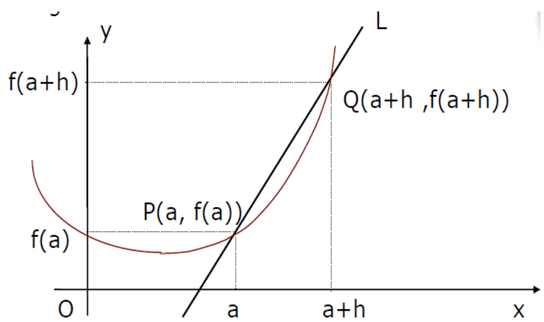
2 **a** Dados los puntos A (-2,3), B(1,3) y C (1,2) encuentra el valor de la pendiente de las rectas la ecuación de la recta que l_{AB} y I_{BC}



b A partir de cada uno de los resultados obtenidos podemos decir que las rectas son:

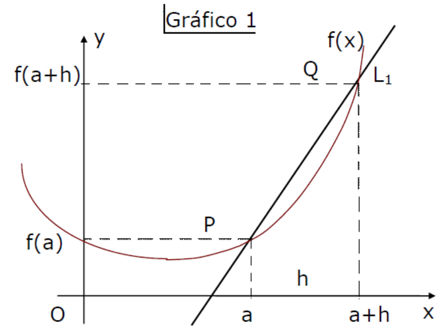
Clasificación	l_{AB}	I_{BC}
Creciente		
Decreciente		
Vertical		
Horizontal		

c Escribir la expresión que representa la pendiente de la recta L en términos de las coordenadas de los puntos P y Q. (Ver gráfica)



3.

Observa el gráfico 1. Ahora bien, fijamos el punto P y movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P lo más que pueda, pero sin tocarlo



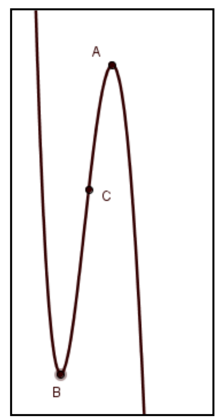
a ¿Qué sucede con la recta L1 cuando el punto Q se aproxima al punto P?

b ¿Qué sucede con el valor de h cuando el punto Q se aproxima al punto P?

4.

Con tus propias palabras intenta definir o argumentar los siguientes puntos:

a é es la recta tangente a una curva?

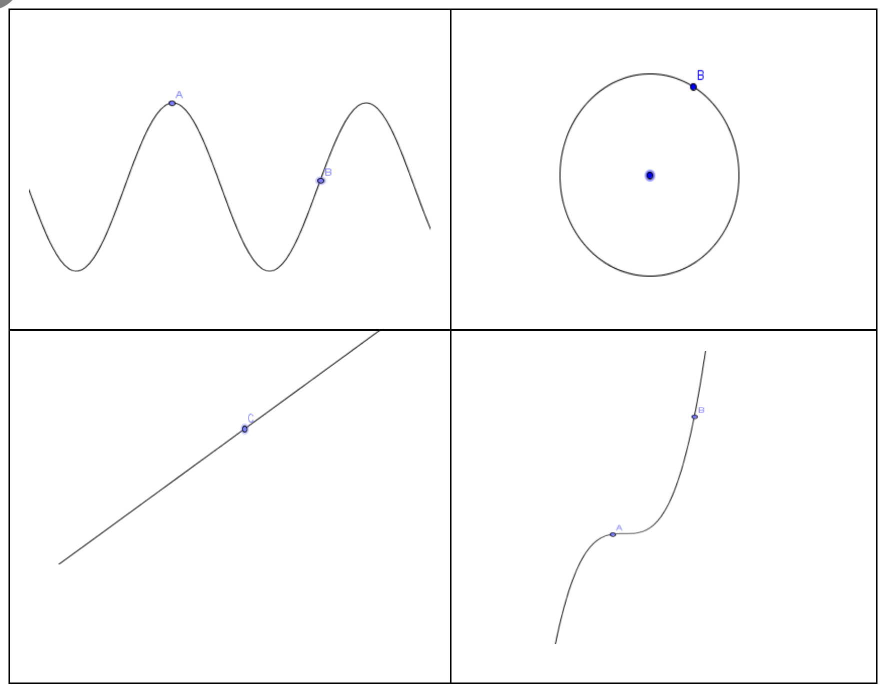


b En la siguiente actividad traza la recta tangente a la curva en los puntos indicados de la gráfica.

¿Qué puedes concluir a partir de la anterior experiencia?

5.

a Traza la recta tangente a cada curva por los puntos indicados.



b Realiza distinciones y formula conclusiones que pudiste determinar en el trazo de la recta tangente a las anteriores curvas.

____

____

____

____

c ¿En cuál o cuáles conceptos presentaste alguna dificultad en el desarrollo de la presente prueba?

____

____

____

____

MUCHAS GRACIAS!!!

ANEXO N° 2

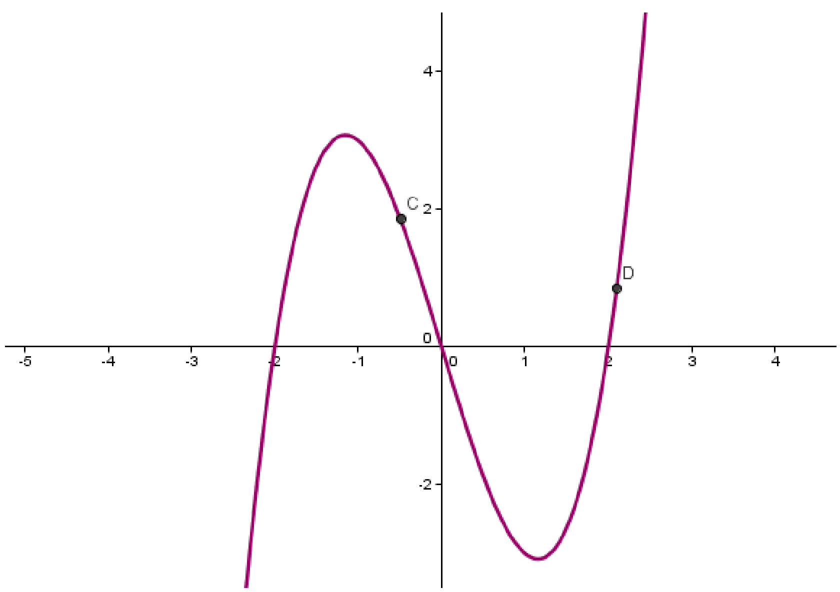
INTERVENCIÓN 2: PENDIENTE Y HAZ DE SECANTES

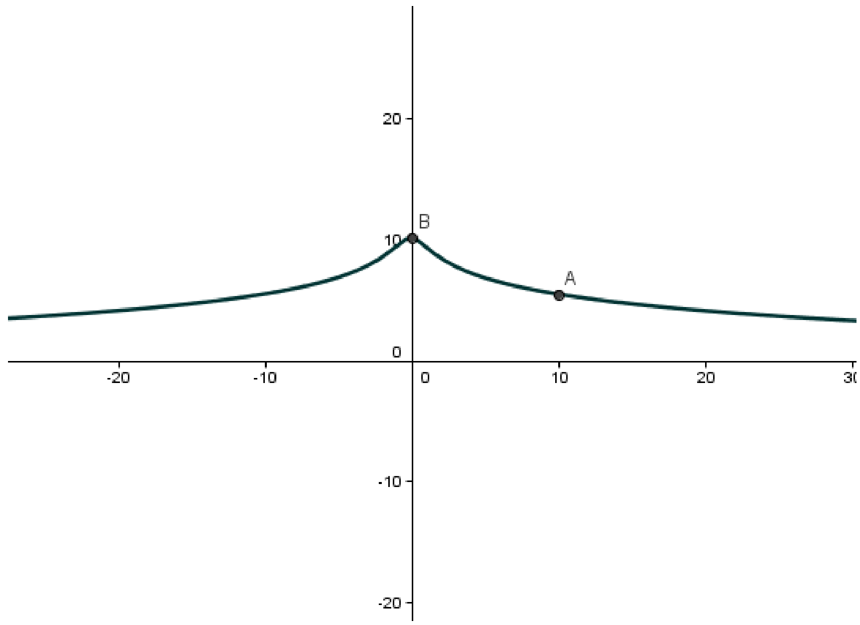
INTERVENCIÒN 2

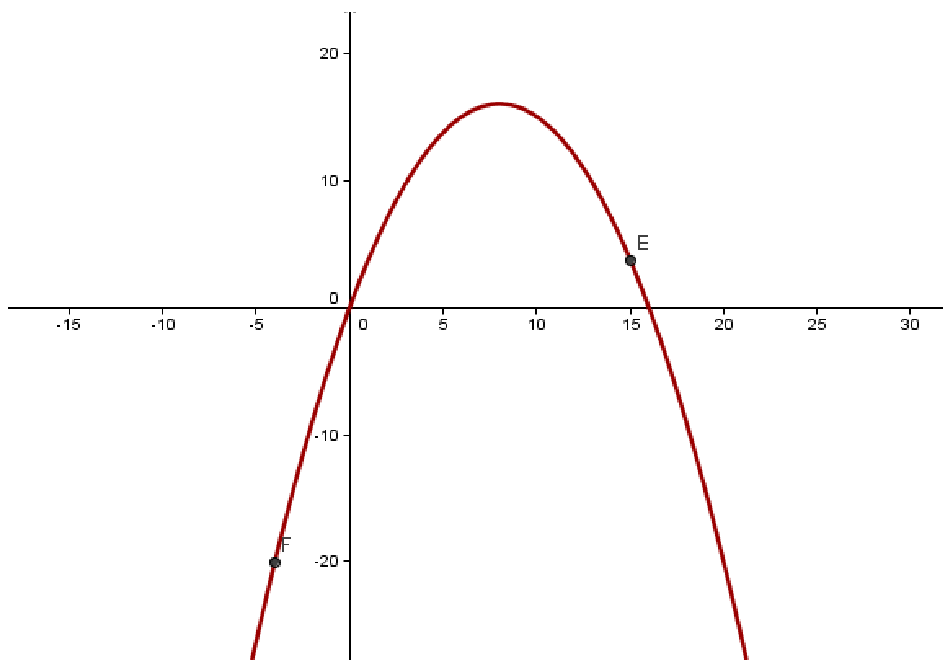
Pendiente y Haz de Secantes

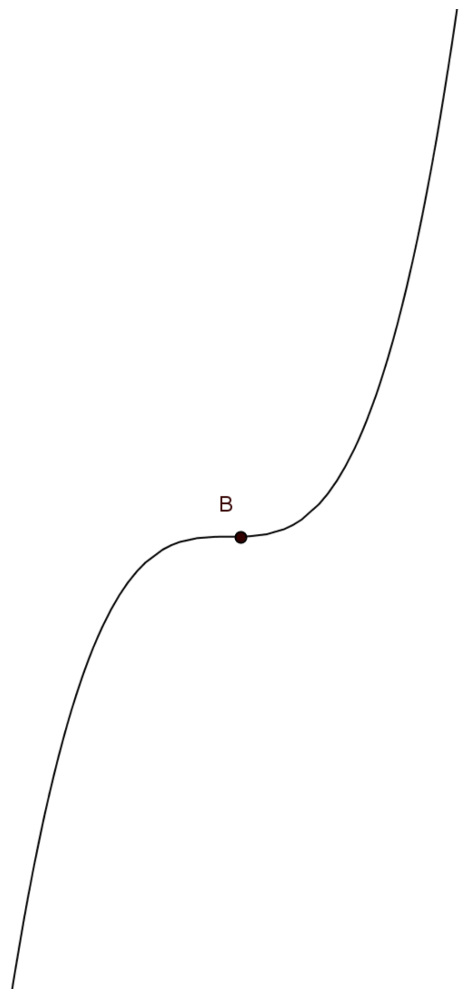
1 A continuación se proponen una serie de funciones y sus gráficas. Con la ayuda del Geogebra ® y el mecanismo del haz de secantes trazar la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

a. $f(x) = x^3 - 4x$	b. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$	c. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	d. $y = x^3$




20
B
10
A
0
-20
-10
0
10
20
30
-10
-20


20
10
E
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
-10
F
-20


B

2

a) Ahora, verifica en el Geogebra ® con la instrucción recta tangente. Traza las rectas tangentes a la curva en el punto indicado. Coinciden estas con las determinadas en el punto anterior? Concluye dando características de las rectas en esos puntos.

b) En esas mismas gráficas ubicar puntos donde <u>la pendiente de la recta tangente</u> a la curva en ese punto <u>sea positiva</u>. También indica puntos en la gráfica donde <u>la pendiente de la recta tangentesea negativa</u>.

3

a.) T1.Completa la siguiente tabla

FUNCIÓN	**Intervalos para $m > 0$**	**Intervalos para$m < 0$**	**Puntos donde $m = 0$ en**
a. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$			
b. $f(x) = x^3 - 4x$			
c. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$			

b.) T2. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

FUNCIÓN	La función es creciente en los intervalos	La función es decreciente en los intervalos
d. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$		
e. $f(x) = x^3 - 4x$		
f. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$		

c.) A partir de lo observado en T1 y T2, ¿Qué puedes concluir? ¿Existe alguna relación en particular? ¿Cuál?

ANEXO N° 3

INSTRUMENTO EVALUATIVO

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

INSTRUMENTO EVALUATIVO

ESTUDIANTE

ASIGNATURA

DOCENTE Y ASESOR

JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

ELABORADO POR

DIANA LUCÍA LONDOÑO LONDOÑO
SILVIA INÉS MORALES OSPINA
DIEGO IVÁN VILLA CHICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
GRUPO DE INVESTIGACIÓN SUMMA

2013

Nivel 1

Conocimiento primitivo

OBJETIVO

Reconocer aspectos esenciales del CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO previos al cálculo diferencial, mediante el trazo de tangentes en un punto determinado de una curva.

Aprendizajes Esperados

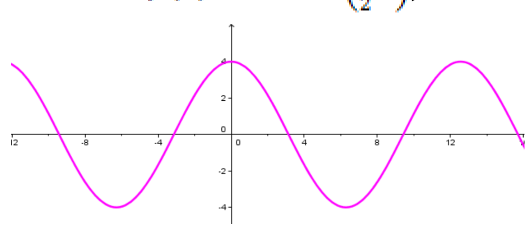
Con base en los resultados arrojados del estudio y del análisis de la prueba diagnóstica realizada por los estudiantes, se requiere que éstos emerjan sus ideas intuitivas y muestren evidencia de los procesos de aprendizaje que tienen que ver con los siguientes descriptores:

Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica.
Reconoce formas de representaciones de funciones reales empleando diferentes instrumentos.
Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local.
Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes, …)
Expresa una idea informal del concepto de tangencia.

Acciones

El grupo de investigación agradece tu participación y compromiso con el desarrollo de las actividades propuestas.

1. Ejercicio Observa la función $f(x) = 4\ Cos\left(\frac{1}{2}x\right)$, descrita en la siguiente figura



Si se gráfica la recta $f(x) = 4$, sobre la figura, se puede afirmar correctamente que

A.) es una recta tangente porque toca a la curva únicamente en el punto (0,4).

B.) no cumplir la condición de tangencia porque toca a la curva en más de un punto.

C.) es tangente a la curva en el punto (0,4).

D.) no es una recta tangente puesto que el valor de la pendiente es igual a 0.

2. Ejercicio

La afirmación correcta es

A. para que una recta sea tangente a cualquier curva, sólo debe tocarla en un solo punto.

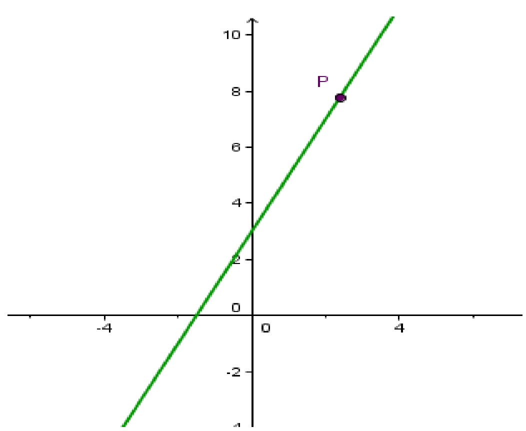
B. en toda circunferencia la recta tangente no puede ser a la vez recta secante.

C. una recta secante a una curva nunca puede ser una recta tangente a la misma.

D. A y B son correctas.

3. Ejercicio

Observa el punto P marcado en la función lineal $f(x) = 2x + 3$, que se ilustra en la siguiente figura



De las siguientes afirmaciones, la correcta es

A.) no es posible determinar una recta tangente a la función que pase por el punto P.

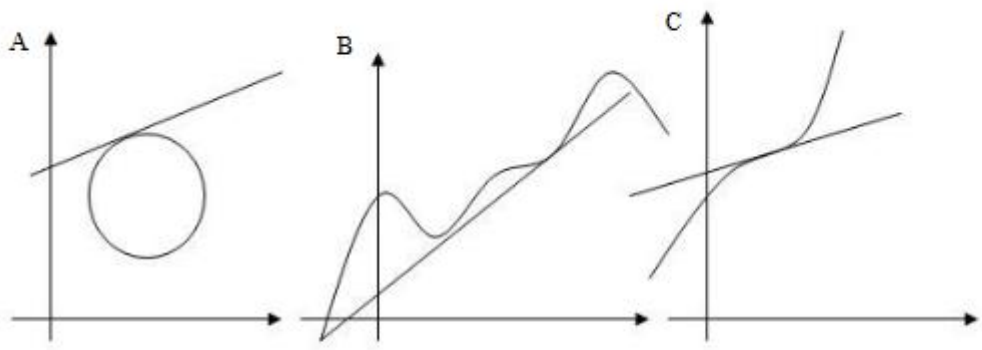
B.) la recta tangente a la función en el punto P pasa muy cerca de ella pero sólo la toca en P.

C.) la reca tangente a la función en el punto P toca a la función únicamente en el punto P.

D.) la recta tangente a la función en el punto P coincide con la función lineal.

4. Ejercicio

De las siguientes gráficas, la afirmación correcta es



A.) solamente la gráfica A representa la recta tangente a la curva en un punto.

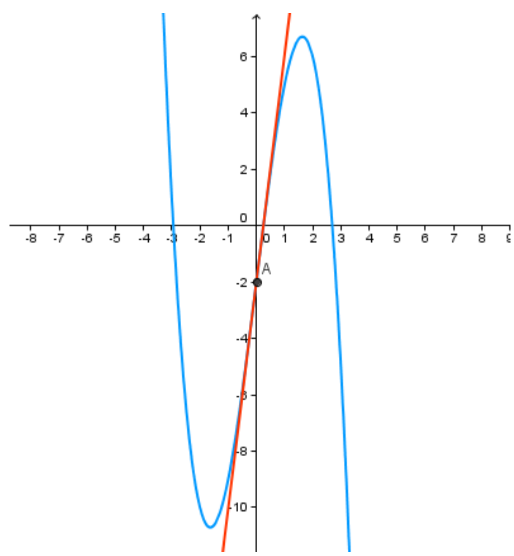
B.) B y C no son rectas tangentes a la curva, porque cortan a la curva.

C.) la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia es negativa.

D.) las rectas son tangentes a la curva en al menos un punto.

5. Ejercicio

De la siguiente gráfica, la afirmación falsa con respecto al punto A es



A.) la función es creciente, en torno al punto A.

B.) la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A es positiva.

C.) el conjunto numérico de los enteros determina el conjunto rango de la curva y de la recta tangente a la curva en el punto A.

D.) en torno a A se presenta un cambio de concavidad.

Nivel 2

Creación de la imagen

Realizar distinciones de una función y su derivada con base en características y propiedades de la recta tangente.

OBJETIVO

Aprendizajes Esperados

Reconoce y diferencia una función y su derivada.

Establece la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación.

Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica.

Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético.

Emplea el haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.

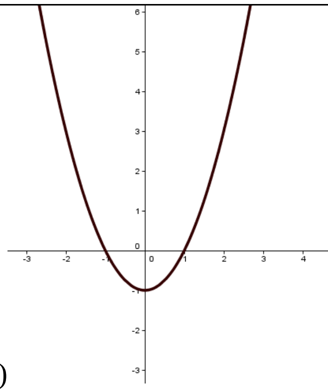
Acciones

IMPORTANTE Se dice que una función $f(x)$ es creciente en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ con $x_1, x_2 \in I$.

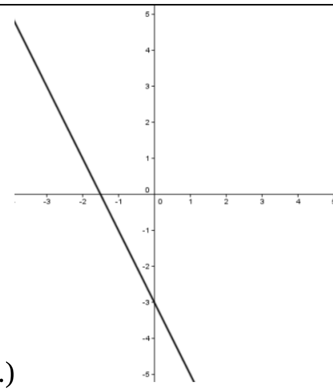
EJEMPLO: La función $f(x) = 3x + 2$ es creciente en todo su dominio, porque si tomamos dos valores cualesquiera del dominio $x = -2$ y $x = 4$ con $-2 < 4$, entonces las imágenes serían $f(-2) = -4$ y $f(4) = 12$, donde se puede verificar que $f(-2) < f(4)$.

1. Ejercicio

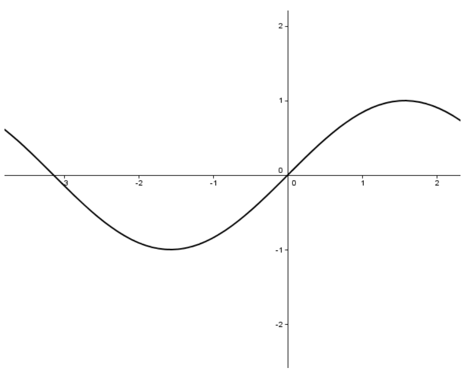
Según lo anterior, entre las siguientes gráficas, la que representa una función creciente en todo su dominio es



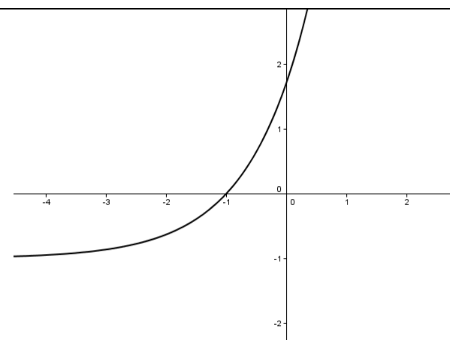
A.)



B.)



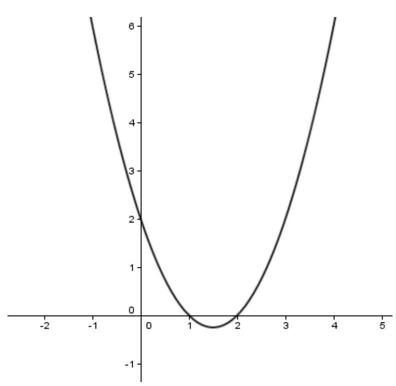
C.)



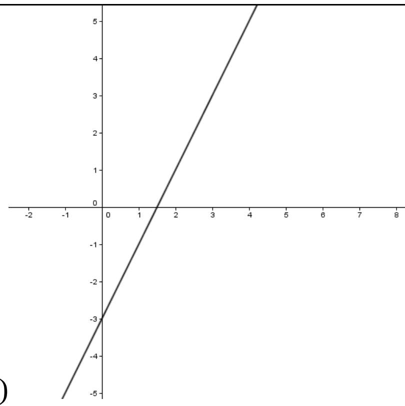
D.)

IMPORTANTE Si f está definida en c, se dice que c es un **número critico** de f, si $f'(c)=0$ o si f' no está definida en c. Es decir, se entiende por punto crítico, un punto donde no esta definida la derivada o es nula.

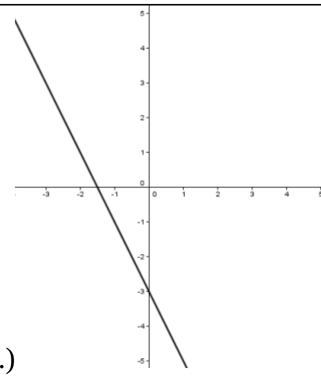
2. Ejercicio áfica de la función $f(x)=(x-2)(x-1)$ que aparece a continuación



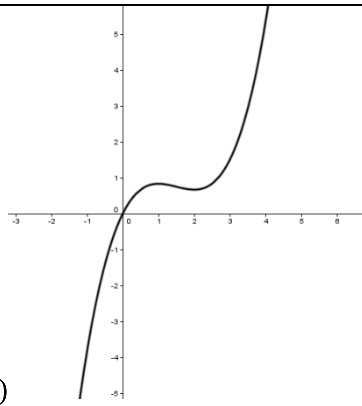
La gráfica de la función derivada está dada por:



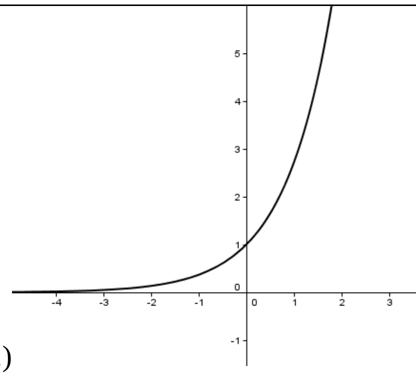
A.)



B.)



C.)



D.)

IMPORTANTE El uso de la derivada de una función puede ayudar a determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo dado.

Sea f una función continua en un intervalo I que contiene a c, y f' existe en todos los puntos del intervalo I excepto posiblemente en c:

- Si f'(x) >0 $paratodaxenI, entoncesfescrecienteeneseintevalo.$
- Si f'(x) <0 $paratodaxenI, entoncesfesdecrecienteeneseintevalo.$
- Si f'(x) = 0 $paratodaxenI, entoncesfes$ constan$teeneseintevalo.$

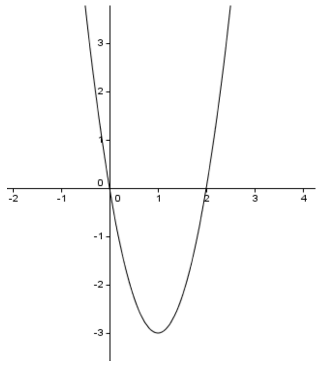
Además:

- f(c) es un mínimo si f(c) ≤ f(x)para todo $xenI$.
- f(c) es un máximo si f(c) ≥ f(x) para todo $xenI$.

El mínimo o el máximo de una función en un intervalo se llaman valores extremos o extremos de la función.

3. Ejercicio

Si la siguiente gráfica corresponde a la función derivada de una función f (x), entonces sepuede afirmar con respecto a la función inicial f (x) que



A.) tiene un valor máximo relativo en x = 2.

B.) tiene un valor mínimo relativo en x = 2.

C.) tiene un valor mínimo relativo en x = 0.

D.) no tiene máximos ni mínimos relativos

4. Ejercicio

La relación $x^2 + y^2 = 4$ representa una circunferencia con centro en $(0,0)$ y $r = 2$.

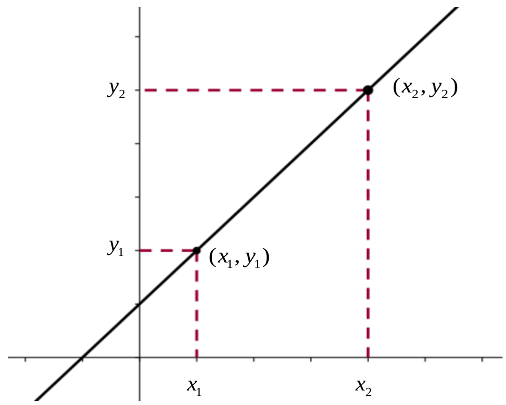
Identifique si la pendiente de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en: positiva, negativa, cero o no definida. En las siguientes coordenadas:

COORDENADAS	**SIGNO DE LA PENDIENTE DE LA TANGENTE**	**Grafique la circunferencia, ubique los puntos y trace las tangentes**
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$		
$(-2, 0)$		
$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$		
$(0, 2)$		

IMPORTANTE

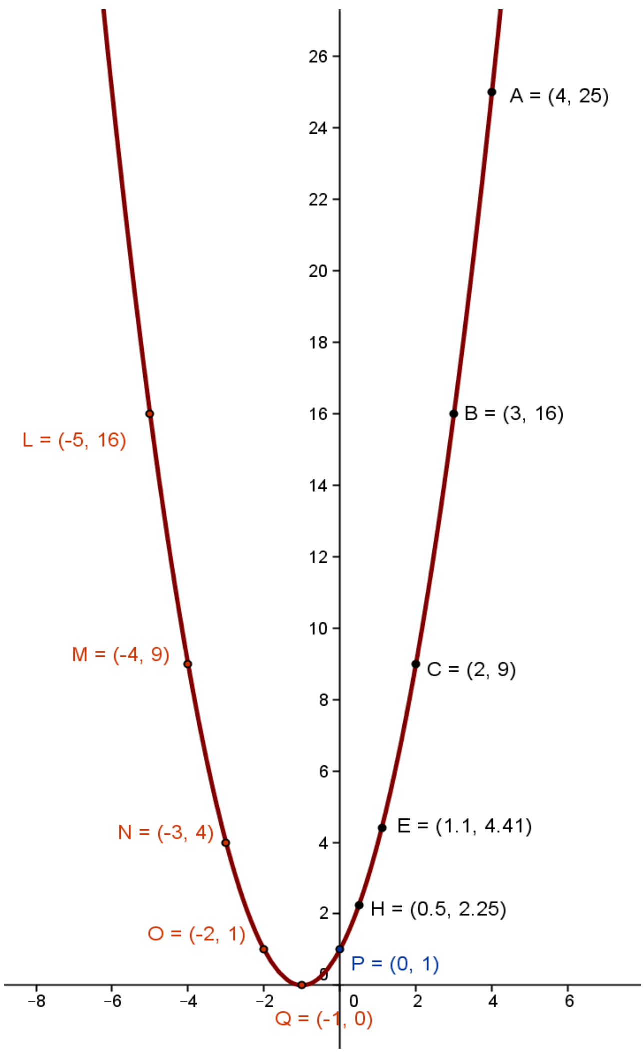
Dados dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) la pendiente, m, de la recta que los contiene se encuentra determinada por la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



5. Ejercicio

En la figura, P es un punto fijo



Traza rectas secantes desde P a los demás puntos (A,B,C…I) y determina el valor de la pendiente.

P		P_1		m
x_1	y_1	x_2	y_2	
(0	1)			

Traza rectas secantes desde P a los demás puntos (L,M,N…R) y determina el valor de la pendiente.

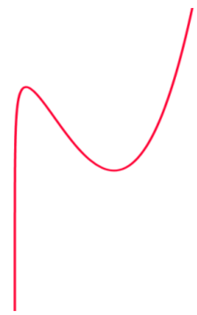
P		P_1		m
x_1	y_1	x_2	y_2	
(0	1)			

A partir de los datos obtenidos en la tabla, ¿Qué puedes concluir respecto al cambio de las variables x e y y la pendiente m?

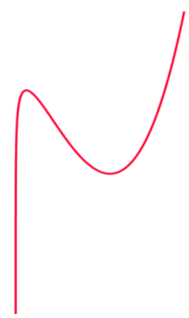
¿Es posible formular el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto P y es tangente a la curva $y = x^2 + 2x + 1$? ¿Cuál es este valor?

IMPORTANTE El tomar un punto P sobre una curva y trazar rectas secantes por puntos cada vez más cercanos a P, es llamado el **MECANISMO HAZ DE SECANTES** y es útil para el trazado de rectas tangentes en puntos dados sobre curvas.

6. Ejercicio Ubique un punto de la curva $f(x) = 1 / (10x^3 - 3x + \ln(x))$, donde la pendiente de la recta tangente sea positiva y trace la tangente en ese punto haciendo uso del mecanismo del haz de secantes.



7. Ejercicio En la misma curva anterior ubique puntos donde la recta tangente a la curva es creciente. Trace la recta tangente en los puntos indicados.



8. Ejercicio Con tus propias palabras define los siguientes elementos matemáticos.

PENDIENTE	TANGENTE	FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE

Nivel 3

Comprensión de la imagen

OBJETIVO

Distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básica a través de la pendiente de una recta tangente a una función continua en un punto dado.

Aprendizajes Esperados

Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada.

Caracteriza y gráfica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada.

Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos.

Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

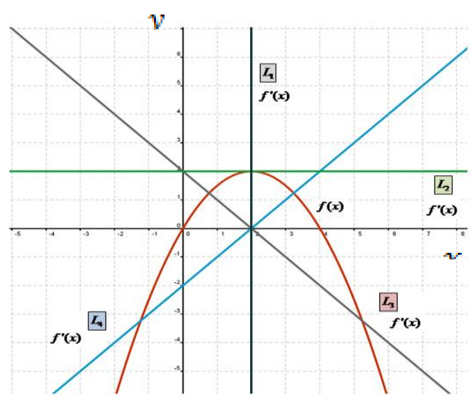
Elabora un mapa conceptual amplio (con al menos 30 conceptos relacionados) que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.

Acciones

1. Ejercicio

A continuación se muestra la gráfica de la función $f(x) = bx - ax^2$.

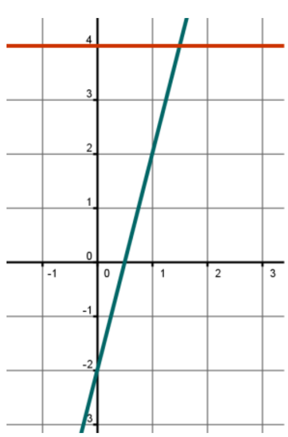
Además, se ilustran algunas representaciones que intentan dar cuenta de su derivada, $f'(x)$

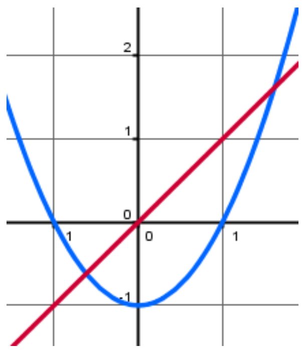
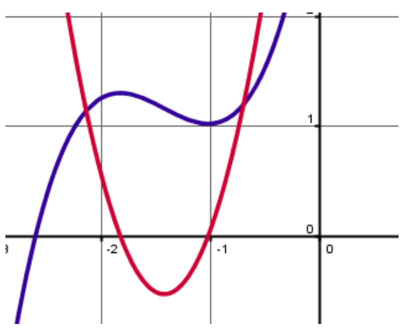


La función lineal que indica la derivada de $f(x)$, es		
		Justificación
A.)	L_1	Porque la expresión algebraica de la derivada corresponde a una función lineal y en el punto de maximo (x =2) valor la pendiente puede ser horizontal
B.)	L_2	Porque en x =2 existe un máximo de la función y en este valor, es claro, que la derivada es la recta tangente
C.)	L_3	Porque, además de corresponder a una recta con pendiente negativa; en el punto (2,2), la función tiene un máximo, y por tal el valor de la derivada debe ser cero.
D.)	L_4	Porque, además de corresponder a una recta con pendiente positiva; en el punto (2,2), la función tiene un máximo, y por tal el valor de la derivada debe ser cero.
A.)	L_1	Porque la expresión algebraica de la derivada corresponde a una función lineal y en el punto de maximo (x =2) valor la pendiente puede ser horizontal

2 Ejercicio

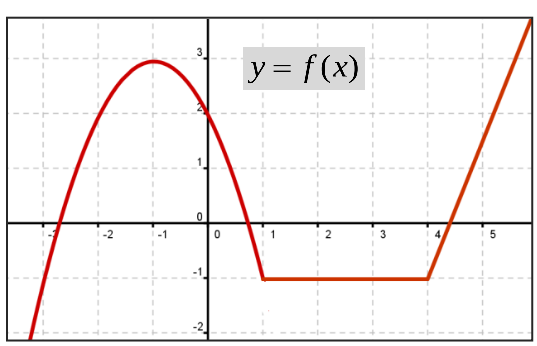
A continuación se presenta una función $f(x)$ y su correspondiente derivada $f'(x)$. Según el argumento ¿Cuál de estas gráficas es la representación correcta? Justifique su opción

	Representación	Argumento	Justificación
A.)		La gráfica corresponde a una función lineal, una linea recta cuya pendiente es 4. De lo que se puede deducir su derivada es $f'(x) = y' = 4$. Entonces las gráficas representan a una función y su derivada.	Porque: F V

	Representación	Argumento	Justificación
B.)		En $x=0$ la función tiene un mínimo; la derivada es nula. La recta tangente tendría que pasar por el punto de coordenadas $(0,-1)$. Estas gráficas no corresponden a una función y su derivada.	F V Porque:
C.)		En $x=-1$, la función tiene un mínimo; la derivada es nula y está tendría que pasar por el punto (-1,0). Las gráficas no representan a una función y su derivada.	F V Porque:

3. Ejercicio

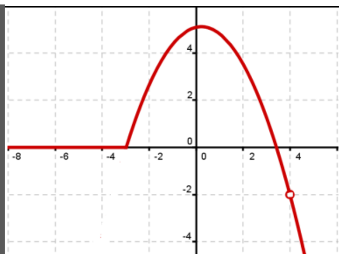
La gráfica corresponde a la función $y = f(x)$.



	Luego	Justificación
A)	$f\,'(-1) =$	
B)	$f\,'(3) =$	
C)	$f\,'(5) > 0$	
D)	$f\,'(1) =$	
E)	$f\,'(4) =$	

4. Ejercicio

Observa las gráficas de las siguientes funciones. Indica en que puntos no es posible que exista la derivada



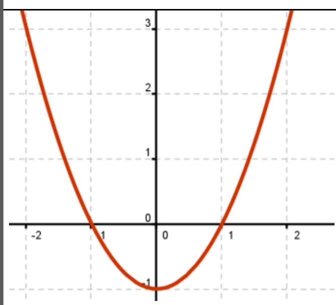
A.) ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x?

Si____ NO____

Porque:____

____

____



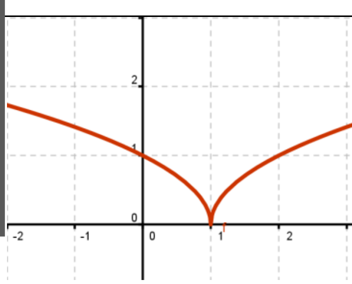
B.) ¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x?

Si____ NO____

Porque:____

____

____



C.) ¿Existe la derivada de $h(x)$ para todo x?

Si____ NO____

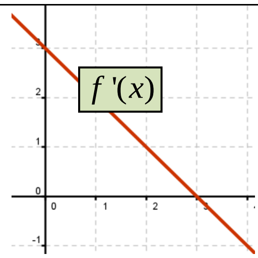
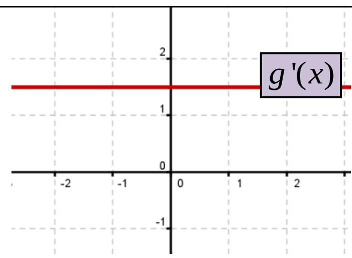
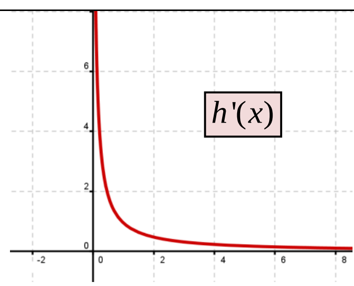
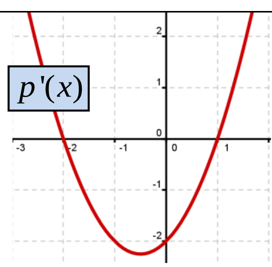
Porque:____

____

____

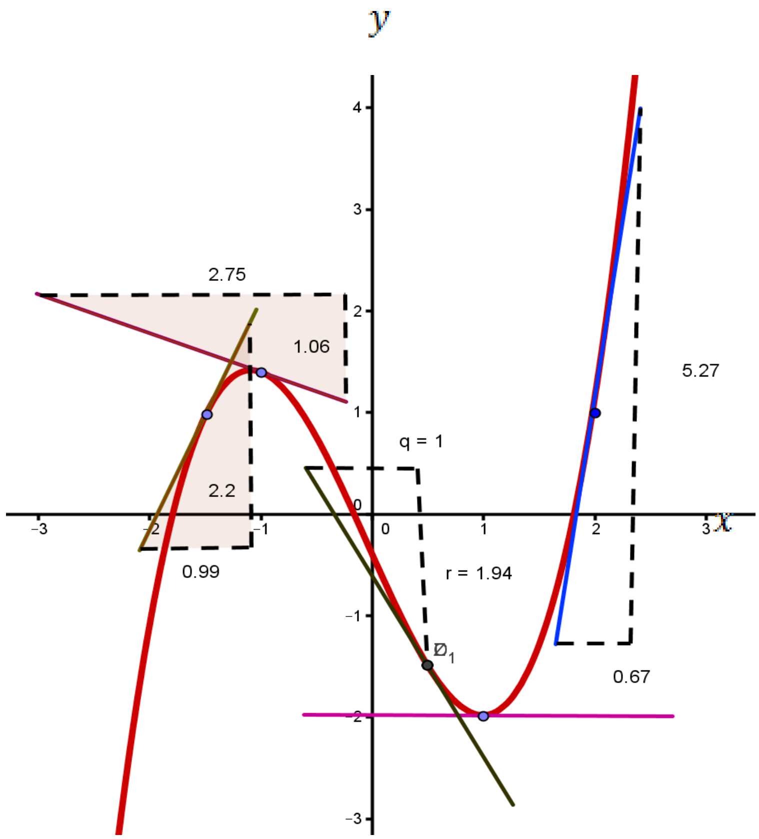
5.	**Ejercicio**

Las gráficas corresponden a las representaciones de las funciones derivadas de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $p(x)$

A)	
	¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x? Si____ NO____ Porque:______________________________ ______________________________ ______________________________
B)	
	¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x? Si____ NO____ Porque:______________________________ ______________________________ ______________________________
C)	
	¿Existe la derivada de h(x) para todo x? Si____ NO____ Porque:______________________________ ______________________________ ______________________________
D)	
	¿Existe la derivada de p(x) para todo x? Si____ NO____ Porque:______________________________ ______________________________ ______________________________

6. **Ejercicio**

La figura muestra la representación gráfica de una función de orden superior. En ella, se indica además, el trazo y el valor de la pendiente en determinados puntos.

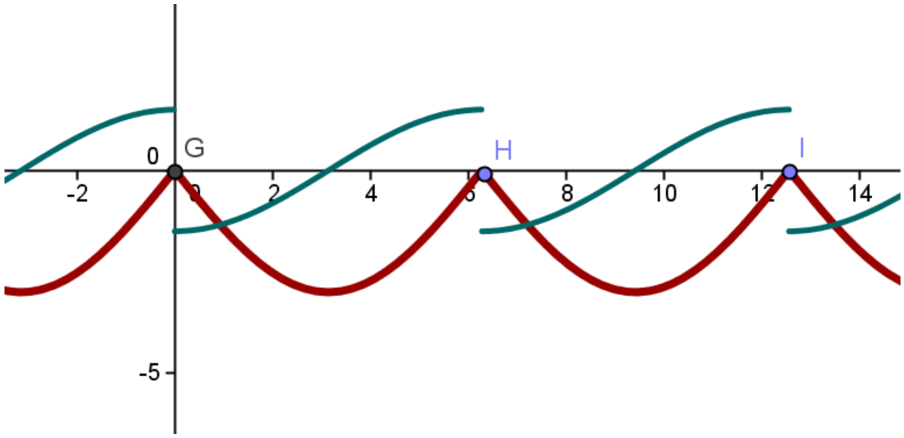


Determina	**Justificación**
$f'(-1) =$	
$f'(2) =$	
De los puntos dados, la derivada es nula en $x =$	
Intervalos para los cuales $f'(x) > 0$	
Intervalos en donde $f'(x) < 0$	
Un intervalo $[a,b]$ en el que : $\{x : x \in [a,b] \to f'(x) > 0\}$	

7. Ejercicio

La figura muestra las representaciones de una función $f(x)$ y su correspondiente derivada $f\,'(x)$.

.



Los números críticos en el intervalo $[2,10]$ son:	
¿Cuál es el valor de la derivada en esos números críticos?	Explica:
Indica los intervalos para los cuales la función es creciente	
Indica los intervalos para los cuales la función es decreciente	

8. Actividad final

Elabora un mapa conceptual amplio (con al menos 30 conceptos relacionados) que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.

Este documento y el mapa conceptual lo entregas el próximo lunes en el horario programado para la entrega del examen final.

Amable estudiante, agradecemos y valoramos tu importante disposición y participación en el proceso de ejecución del presente proyecto de investigación.

APLICATIVO	SOFTWARE DINÁMICO

LA DERIVADA EN GEOGEBRA ®

PENDIENTE Y DERIVADA

A continuación se indica el procedimiento para la determinar la representación gráfica de la derivada a una función dada. Observa el comportamiento de los siguientes parámetros:

- La función.
- La tangente.
- La derivada.

CONSTRUCCIÓN

1. Introduce en la barra de entrada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
2. Haz clic derecho sobre la curva, y en propiedades del objeto haz clic en básico y activa Muestra Rótulo para luego seleccionar nombre y valor.
3. Haz clic derecho sobre la curva, y en propiedades del objeto haz clic en color y escoge color violeta
   y haz clic en estilo y asigna a la curva grosos 5.
4. Introduce en la barra de entrada a=2
5. En la vista algebraica, haz clic derecho sobre la expresión $a = 2$, elige *muestra objeto* la figura que aparece a la derecha (al lado de la gráfica) es un segmento con un punto móvil, esta figura se denomina deslizador.
6. Haz clic derecho sobre el deslizador ponle el color rojo al parámetro a, grosor 5 y haz clic en la opción deslizador modifica el intervalo dando valor mínimo de -10 y máximo de 10, en incremento escribe $0{,}01$, el ancho de 300. En la opción repite selecciona ***incremento.***
7. Introduce en la barra de entrada escribe la expresión P **=(a, *f(a)*),** aparece este punto P sobre la curva,
8. Haz clic derecho sobre el punto P , y en propiedades del objeto selecciona básico y activa muestra rótulo, luego selecciona nombre y valor. Y además ponle el color rojo, tamaño de punto 5.
9. Verifica que al deslizar a, el punto P se moverá sobre la curva.

10. Introduce en la barra de entrada la expresión B=$(a, f\,'(a))$. Aparece el punto B en la gráfica, haz clic derecho sobre este punto B y en propiedades del objeto selecciona muestra rótulo, luego selecciona nombre y valor, y asígnale grosor 3.
11. De nuevo haz clic derecho sobre este punto B selecciona avanzado en colores dinámicos en la fila verde escribe la expresión $f\,'(a) > 0$ y en la fila color azul escribe la expresión $f\,'(a) < 0$.
12. En la barra de entrada introduce la expresión $t(x) = Tangente[a, f]$. Muestra su nombre y valor. Grosor 5 y en el menú avanzado colores dinámicos en verde escribe $f\,'(a) > 0$ y en azul escribe la expresión $f\,'(a) < 0$.
13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

____
____
____
____

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.
15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

ANEXO N° 4

EL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE UN ENFOQUE SEMIÓTICO Y DINÁMICO

EL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE UN ENFOQUE SEMIÓTICO Y DINÁMICO

INTERVENCIÓN N°2

And I dare say that this is not only the most useful and most general problem in geometry that I know, but even that I ever desired to know.
Descartes

RECTAS Y PENDIENTES

La siguiente actividad tiene como propósito que el estudiante pueda establecer relaciones y diferencias a partir del comportamiento de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado.

ACTIVIDAD

1. En la situación *Conjunto de Rectas*

Identifica:

a. Cuál es la recta de mayor pendiente ___________________

b. Cuál es la recta de mayor pendiente ___________________

c. Consideraciones respecto al ángulo.	¿Cuál es el comportamiento de m?
$si\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	
$si\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	
$si\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	
$si\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$	

REPRESENTACIONES GRAFICAS

2. Con ayuda del Geogebra ® , construir la representación gráfica de la función $y = x^2$ Emplea los comandos: punto y tangente de una curva del software, para trazar rectas tangentes a la curva dada en varios puntos e identificar el valor de la pendiente.

¿Cuál es comportamiento de las rectas tangentes para los intervalos indicados?

$-\infty < x < 0$	En el vértice de la parábola	$0 < x < \infty$

Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es de pendiente indefinida.

3. Se traza la curva $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{3x^3}{4} - \frac{5x^2}{4} - \frac{7x}{4} - 1$ Se toma un punto de referencia P (a, f(a)), y otro Q (b, f(b)) (no muy cercano a P) que pertenezcan a la curva. Se traza la recta tangente a la curva en el punto P, traza la recta que pasa por P y Q, movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P, tanto como sea posible,

¿Qué sucede con el valor de la pendiente de la recta PQ, a medida que el punto Q se aproxima al punto P?

RECONOCIMIENTOS

Cualquier proyecto, especialmente si se trata de un requisito para optar a un título en un programa específico de educación superior, es el producto del esfuerzo de muchas personasque con su denodado esfuerzo, su notable actividad, su aprestado tiempo y su significativo acompañamiento se hacen presentes, y muy participes en la construcción de una investigación. Evidentemente éste no escapa a la regla.

En primera instancia agradecemos a Dios, por habernos dado la fuerza necesaria para llevar a la excelencia y el perfeccionamiento continuo al presente trabajo.

Nuestro más especial reconocimiento a la SECRETARÍA DE EDUCACIÓN de la Ciudad de Medellín y a su Programa de Formación Avanzada para Docentes de 2011, por ofrecernos la posibilidad de adelantar nuestros estudios de Maestría y, más aún, por su destacado apoyo financiero, en cuanto a las facilidades económicas otorgadas, permitiendo con ello la profundización y cualificación de nuestra formación y quehacer profesional.

Hacemos un llamado de reconocimiento y agradecimiento para: Ana Celi Tamayo Acevedo (coordinadora de la Maestría), al grupo SUMMA de la Universidad de Medellín (grupo de investigación y discusión). De igual manera a los estudiantes del grado Undécimo A de la INSTITUCIÓN EDUCATIVA PBRO. ANTONIO JOSÉ BERNAL LONDOÑO y de la UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN quienes fueron partícipes e hicieron posible con su disciplina, reflexión y aceptación el desarrollo del proyecto; su gran interés en las actividades planteadas y las discusiones en clase fueron una gran motivación para la preparación y realización del mismo.

En esta plenitud de acontecimientos es nuestro mayor deseo, con toda alma razón y corazón, reconocer, además, en Jorge Alberto Bedoya Beltrán (Asesor y compañero de investigación) su nobleza, dimensionalidad humana, su ayuda, que tanto acompañaron y contribuyeron, su irrestricta asistencia y todo su punto de apoyo académico, intelectual y humano para poder fundar esta propuesta; características que fueron apareciendo en el *modus vivendi* de este trabajo. En él, consideramos: su perseverancia, el valor y la voluntad siempre dispuesta, con fuerza para elevar el ánimo con amistad, ideas e intelecto humano que continuamente ofreció para revertir avenencia mental y tranquilidad académica. Bellas experiencias que se extienden con corriente vital, serena amplitud y estado espiritual pleno. Sus enseñanzas, asesorías y compañía han sido, para nosotros, modelo de aspiraciones honrosas, de claro carácter decidido y fuerza de vigor en los complicados senderos de la vida.

Un agradecimiento muy especial a nuestras familias, por su paciencia y apoyo, por su fe y aliento constante.

A estas personas, a quienes les debemos para toda la vida, todo nuestro crecimiento y formación, profesional, intelectual y humana acaecida en este período de existencia, el más caluroso agradecimiento y el respeto más cordial. Ojalá, la vida y el ser humano del tiempo que viene reconozcan también lo más bello, lo más justo, lo más iluminado y lo más agradable de su condición humana.

Ahora, quedamos con teorías, prácticas y metodologías inquietando nuestra reflexión y gravitando en nuestro corazón. El resultado de esta investigación es apenas el comienzo.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIÓNES

TABLAS

INTRODUCCIÓN

Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del Modelo de Pirie y Kieren, es un proyecto de investigación que a la luz de la teoría propia del modelo, pretende promover el nivel de comprensión en los estudiantes, a través de actividades que permitan la profundización conceptual de ésta temática propia de las matemáticas avanzadas desde un enfoque geométrico. El interés de implementar y desarrollar una propuesta de investigación e intervención pedagógica en este campo, subyace en las necesidades y dificultades de tipo cognitivo que presentan los estudiantes, especialmente en los primeros semestres de estudios universitarios, al abordar éste campo matemático.

Esta propuesta se considera pertinente, ya que a través de los métodos y estrategias utilizadas, en su mayoría de carácter cualitativo, se busca la interpretación, análisis y sistematización del proceso de aprendizaje de los estudiantes, permitiendo más que la generalización, la identificación de necesidades y avances en el proceso de construcción del saber. Las herramientas de intervención pedagógica como los mapas conceptuales, el uso de artefactos dinámicos como el Geogebra®, permiten visualizar e identificar de manera significativa los avances conceptuales con respecto al estado inicial, las representaciones mentales, el cambio de actitudes y comportamientos que se manifiestan en los estudiantes que en definitiva ayudan a interpretar la transformación en las estructuras cognitivas, finalidad de la presente investigación.

De igual manera, la importancia de los diferentes registros de representación que pueda tener el estudiante de los conceptos matemáticos y la relación directa en su proceso de construcción, es en primera instancia, un objetivo para alcanzar en ellos aprendizajes significativos; es así como lo sustentan diferentes autores como Duval (1999), Novak & Gowin (1988), Piere y Kieren (1994), entre otros, para los cuales el estudiante tiene un rol activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que permite que logren adquirir conocimientos propios, con base en sus conocimientos previos.

Esta propuesta enmarca en primer lugar unos antecedentes, que permiten hacer una reflexión y sustentación teórica al planteamiento, desarrollo y solución de la pregunta de investigación y el avance en los objetivos, además orienta los argumentos descriptivos de las guías de intervención pedagógica y la elaboración del marco teórico que respalda el presente trabajo de profundización conceptual. Unos referentes conceptuales compuestos por la teoría del modelo utilizado y de las variables a profundizar en la investigación, estas categorías teóricas sustentan la propuesta pedagógica y los conceptos que se relacionan con el problema, permitiendo la elaboración y posterior ejecución de las estrategias metodológicas, los métodos y técnicas de recolección de la información. Ésta última es el eje medular del trabajo, en el cual se describe el proceso de intervención y se realiza el correspondiente análisis de los resultados obtenidos en contraste con el Modelo para la Comprensión, expuesto por Pirie y Kieren. Por último se encuentran las conclusiones de las intervenciones y reflexiones en el aula, las recomendaciones a tener en cuenta, las bibliografías utilizadas para el desarrollo de la propuesta, y unos anexos que evidencian el trabajo realizado.

En el planteamiento y desarrollo del presente trabajo se puede evidenciar una transformación significativa en los procesos de aula, que le permitieron al estudiante avanzar en la construcción del aprendizaje de forma autónoma, apoyado en las tecnologías y software dinámicos que permiten recrear los conceptos matemáticos, a la vez que potencian el desarrollo de competencias necesarias para comprender los conceptos que conlleven al avance cognitivo hacia la comprensión, en particular del concepto de la derivada en su componente geométrico.

1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los problemas, entre otras, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos, enfatizados en la propuesta de acciones mecanizadoras y repetitivas de los conceptos abordados, que si bien son necesarios para el desarrollo de habilidades procedimentales, también provocan que una cantidad considerable de estudiantes presenten dificultad para alcanzar una adecuada comprensión de los mismos y un desarrollo conveniente de niveles de comprensión.

En los niveles de educación básica media y superior, el cálculo es la rama de la matemática a la que se dedica mayor tiempo en los currículos iníciales en las áreas de ciencias exactas, naturales, tecnológicas y sociales. El aprendizaje del cálculo y, en particular la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que demanda un desarrollo adecuado de procesos cognitivos, metodológicos y estratégicos relacionados con un pensamiento más elaborado. Los conceptos del cálculo designan un conjunto de prácticas, cuya complejidad dependen de los medios y las acciones pedagógicas con las cuales las posibilidades didácticas aproximen en otra forma al estudiante con el objeto de conocimiento. Se parte del hecho de que los problemas de comprensión en matemáticas no se deben solo a la complejidad particular de cada contenido enseñado, sino que es necesario considerar también la complejidad de la construcción no de los saberes sino de los funcionamientos que constituyen la infraestructura operacional del pensamiento (Duval, 2004).

En consecuencia, es necesario abordar el estudio geométrico de la derivada al ser esta una herramienta fundamental en el cálculo a partir de sus diversas representaciones, relaciones y aplicaciones que permiten establecer métodos para el análisis de la variación de algunas funciones y en primera instancia aumenta en el estudiante la posibilidad de procesos cognitivos de razonamiento, visualización, abstracción, planteamiento y solución de problemas. Las tareas de conversión entre diferentes sistemas de representación son minimizadas en la enseñanza y eso produce limitaciones en la comprensión. Duval (1999) expresa que el uso de distintas representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a comprender un concepto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (Rico, 2000, D´Amore, 2002).

De igual manera, en la actualidad, los recursos tecnológicos son la herramienta más característica a la hora de formar activa y prácticamente en esta área, puesto que permiten la representación, visualización y la transferencia de los conceptos de manera dinámica, recuperable y combinable, es decir permite la movilización de los conceptos en gran variedad de situaciones. Estos utilizados como una función de tratamiento conceptual son una estrategia donde se diseña la forma de someter a contraste y comprobación las idealizaciones, representaciones mentales y aprendizajes que se han logrado de los objetos matemáticos. La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto. (Duval, 2004, p.15)

Con este panorama académico frente al estudio de la derivada y según las dificultades relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje, se espera desde esta propuesta de trabajo mejorar o ampliar el conocimiento de la misma, a partir de una interpretación no sólo algebraica y geométrica sino también permitir una interpretación del concepto en un sentido dinámico, alejado de las posibilidades estáticas en las cuales ha estado inmerso, sistematizando las concepciones operantes de los estudiantes en relación con los procesos de conceptualización y comprensión del objeto matemático ya mencionado.

Teniendo en cuenta estos planteamientos, este grupo de trabajo propone la siguiente pregunta de investigación:

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo promover avances en la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de ingeniería en un curso de cálculo, sobre la base del Modelo de Pirie y Kieren?

1.3 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se ha enfocado en el marco de la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos, cómo es el de derivada, basados en el modelo propuesto por Pirie y Kieren; actualmente varios investigadores y docentes, en su mayoría del contexto (David Meel (2003), Jhony Villa (2011), René Londoño (2011), Pedro Esteban Duarte (2006), Rodrigo Rendón (2011) y otros) han manifestado su preocupación por los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, especialmente han reflexionado y destacado la manera como se presenta la comprensión en los estudiantes en los procesos de aprendizaje y han orientado la necesidad de sus trabajos según el modelo de Pirie y Kieren, el cual considera la comprensión como un proceso de crecimiento permanente, completo, dinámico y estratificado pero no lineal.

Londoño (2011) en su propuesta y utilizando el modelo anteriormente descrito, procura facilitar en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de educación superior, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del análisis matemático como lo es el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). De esta investigación se identificó y analizó el diseño de los descriptores que se exponen allí, que son asumidos como los indicadores que les permitía valorar el nivel de comprensión de los entrevistados. Además, se revisó la formulación y planteamiento de las actividades propuestas a los estudiantes, pues se destaca que no se pretendía que los estudiantes utilizaran elementos del cálculo infinitesimal, pues aún no los habían adquirido, sino el uso de conceptos elementales como los de pendiente de una recta, área, curva, entre otros, y a través de procesos de razonamiento infinito, llegaran a la comprensión de la relación inversa entre las cuadraturas y las tangentes.

Por su parte Villa-Ochoa (2011) aborda el proceso de comprensión de la noción de tasa variación como una forma de aproximación al concepto de derivada, para tal efecto, presenta una revisión de la literatura producida en el campo de la Educación Matemática asociada al Cálculo diferencial, en la que, además de dar cuenta de la complejidad del concepto objeto de estudio, descubre la necesidad de darle importancia a la comprensión del mismo en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático, en especial en la interpretación del concepto de la derivada. Entre otras, se apoya en las investigaciones realizadas por Posada y Villa-Ochoa, (2006a; 2006b) en la que se fundamenta la importancia de una aproximación variacional a la función lineal, dirigiendo la atención sobre la necesidad de promover el tránsito que modela la relación de variación entre las variables que intervienen en un evento o fenómeno. En igual sentido, basa su estudio en los resultados arrojados por el trabajo de Posada y Villa-Ochoa (2006b) en el cual se analiza el concepto de función cuadrática desde una perspectiva variacional. Como se puede colegir en ambas investigaciones se observa la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional a través de la comprensión de conceptos matemáticos.

En el fundamento teórico de su trabajo de investigación se hace notable la inminente preocupación hacia dos categorías de esencial importancia y complejidad en la Educación Matemática: la comprensión y la aproximación al concepto de derivada desde una perspectiva variacional. Para abordar la primera, el autor centra su atención en la descripción de algunos marcos teóricos que se han desarrollado en el seno de la Educación Matemática y profundiza particularmente en la teoría de la evolución de la comprensión matemática de Pirie y Kieren, la cual gracias a sus características, asume como marco teórico de interpretación y análisis en el desarrollo de la investigación. Para dar cuenta del concepto de derivada, en tanto aproximación, muestra como la comprensión de la tasa de variación parece estar mediada por la interacción entre los estudiantes, el software utilizado y el profesor.

Rendón (2011) contextualiza su trabajo en el marco de la Educación Matemática y da a conocer algunas investigaciones que en este campo se producen actualmente, resalta la comprensión de conceptos como el aspecto más relevante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que emana el marco teórico bajo el Modelo de Piere y Kieren de este trabajo de investigación, el cual apunta a la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. También se destaca el interés por llevar a cabo el diseño y la aplicación de una entrevista semiestructurada de carácter socrático como estrategia metodológica, para describir cómo comprenden el concepto de continuidad los estudiantes elegidos. De la anterior se retomó la estructura que se debe tener en el diseño y elaboración de los instrumentos de intervención y socialización en el presente trabajo.

En cuanto a Rendón (2011), éste en su investigación hace un breve recorrido por el concepto de continuidad a través de la historia, resaltando su importancia en el contexto de la educación matemática en la actualidad en Colombia. Analiza cuatro casos de estudiantes de Cálculo Diferencial, revela los descriptores de nivel para el concepto y acciones dinámicas de la teoría; que sirvieron de inspiración para concretar los descriptores propios y la detección de las acciones del redoblado utilizado por los estudiantes. En relación a la manera de abordar el concepto de continuidad local de una curva en un punto, su aspecto introductorio, evolución histórica, relación con la geometría y la física de movimiento, el concepto de función entre los siglos XIV y XVII, sirvieron de ilustración y de apoyo para abordar teóricamente el objeto de estudio del presente trabajo de investigación.

Meel (2003) por su lado, realiza una descripción significativa de la comprensión cognitiva, examinando recientes marcos teóricos que realizan propuestas de análisis y ofrecen criterios diferenciadores sobre la misma, que aunque con posturas alejadas de las propuestas de Richard Skemp y Schroeder con la teoría de la comprensión instrumental y relacional, su génesis y desarrollo estuvo influenciado a partir de las mismas. En su artículo se enfoca en el análisis de dos marcos teóricos contemporáneos: El Modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE (Acción – Proceso – Objeto - Esquema) de Dubinsky. También hace referencia a otros marcos teóricos contemporáneos como es el trabajo de Cornu y Sierpinska sobre los obstáculos cognitivos y epistemológicos; las investigaciones sobre la definición del concepto y la imagen del concepto de Tall y Vinner, las exploraciones de Kaput sobre las representaciones múltiples, entre otras.

Del anterior marco referencial se tuvieron en cuenta para la construcción del marco teórico que dirige el presente trabajo de investigación, las definiciones de la comprensión propuestas por estos dos marcos. Desde la perspectiva de la teoría de APOE, la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos, mediante la abstracción reflexiva; un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento, y, por lo tanto, las comprende (Página 224). Por su parte, Pirie y Kieren describen que la comprensión matemática se puede definir estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende las formas y los procesos del mismo y, además se encuentra restringido por los que están fuera de él. (Página 235).

Es importante tener presente que este trabajo de investigación también ha utilizado, la teoría de los sistemas de representación como herramienta de análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes del objeto matemático en estudio. Duval (1999, 2004) profundizó en el uso de las representaciones desde una perspectiva semiótica, analizando en el marco de los problemas de comprensión aquellos que atañen a la formación del pensamiento matemático en contextos escolares. Reconoció la importancia a las representaciones cuando aseguró que: El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación (p.176). En el sentido de Raymond Duval, la comprensión de un concepto implica la articulación coherente entre distintos registros de representación.

En el capítulo II, se ampliará ésta concepción teórica expuesta por Duval de los sistemas de representación y se profundizará, principalmente, en el modelo para la comprensión matemática de Pirie y Kieren, marco teórico central del presente trabajo de investigación.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Hoy en día en la comunidad académica se aprecia una preocupación por estudiar las formas, diferencias y obstáculos que hacen presencia en el estudiante para aproximarse a los contenidos matemáticos y en particular en las estructuras cognitivas implicadas en el proceso de aprendizaje. Se amplía el campo de investigación hasta ahora muy centrado en los conceptos básicos de las matemáticas en todos los niveles de enseñanza a entender la forma como ocurren e interactúan los procesos mentales y cognitivos en la adquisición de saberes. De ahí que la tarea de enseñar y de paso de aprender los fundamentos del cálculo, no es fácil y se haya convertido en uno de los problemas más trascendentales en la educación matemática y aunque se logre que los estudiantes resuelvan de alguna manera mecánica los algoritmos relacionados con la matemática avanzada, no se acercan a lo que realmente es una significativa comprensión del concepto.

En las Instituciones de Educación Superior, se ha evidenciado una problemática generalizada en los estudiantes que aduce a la falta de comprensión, como proceso cognitivo, implicado en el pensamiento matemático de conceptos avanzados y la adquisición de estructuras de análisis, abstracción, confrontación y verificación de las teorías abordadas, obteniéndose al contrario, mecanismos vacíos de reflexión y profundización conceptual, bajo rendimiento académico e inconformidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Un gran número de docentes, comparten la idea de que existen muchas dificultades para que los educandos aprendan los conceptos del cálculo infinitesimal, sobre todo en niveles universitarios.

La inquietud que prevalece hoy por hoy en algunos espacios de aula, sobre la problemática que representa la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, permite reflexionar un poco a cerca de las estrategias y metodologías pedagógicas que se están utilizando para acercar de una forma más asertiva a los estudiantes a la comprensión de los conceptos. Es así como el interés reside en considerar la problemática que subyace del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de conocimientos, desarrollo de habilidades y dominio de competencias.

En este mismo orden de ideas, se considera conveniente observar sobre la base del modelo de Pirie y Kieren, no solo la evolución en la comprensión sino también las movilizaciones de tipo cognitivo que se manifiestan en los estudiantes durante el proceso de intervención. Este proyecto es diseñado y pensado para estudiantes de los últimos niveles de la educación básica escolar y primeros niveles de la educación universitaria, en el área de las matemáticas en estudios del cálculo, en el cual se encuentra la conceptualización geométrica de la derivada, temática cuya mayor correspondencia se encuentra en el pensamiento matemático avanzado. De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante” y es el resultado de “una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales”. Una característica fundamental del trabajo es la utilización de los mapas conceptuales y del instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ®, como posibilidades para personalizar, valorar la evolución, exponer, evidenciar y justificar los componentes conceptuales de la derivada.

Por todo lo anterior una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es la de desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para poner en práctica este concepto, después de comprender nociones o ideas básicas como la de infinito, aproximación y variación. En dicho contexto este trabajo revisa y busca indagar principalmente, por el proceso de comprensión matemática que tiene el estudiante del concepto geométrico de derivada de una función en un punto y la importancia de los sistemas de representación, sobre la base en los estudios de comprensión matemática que estima la Teoría de Pirie y Kieren como fundamento teórico del presente trabajo, de las investigaciones de Raymond Duval sobre los sistemas de representación, porque se considera que las actividades de aprehensión, conceptualización y razonamiento, vienen adheridas a la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación y de la comprensión como generador de imágenes de un concepto y la definición del concepto, de los aportes de Tall y Vinner (1981).

1.5 OBJETIVOS GENERAL Y ESPECÍFICOS

1.5.1 GENERAL

Promover avances en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico en estudiantes de un curso de cálculo, basados en el Modelo de Pirie y Kieren a través del empleo de representaciones semióticas, mapas conceptuales y el uso del software dinámico.

1.5.2 ESPECIFICOS

- Describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de la derivada a partir de las diversas formas que tome su representación semiótica enfatizando en su componente geométrico, el uso de los mapas conceptuales y el empleo de recursos dinámicos.

- Diseñar y aplicar acciones de intervención en el aula que posibiliten en el estudiante la comprensión del concepto geométrico de la derivada.

- Identificar algunos de los obstáculos cognitivos y epistemológicos de los estudiantes en relación con los procesos de conceptualización y comprensión de la derivada.

- Diseñar una propuesta de módulo con actividades que permitan en los estudiantes la conceptualización, aplicación y evolución de la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

Titulo: Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren

Autores: Diana Lucía Londoño Londoño, Silvia Inés Morales Ospina, Diego Iván Villa Chica

Titulo Otorgado: Magister en Educación Matemática

Asesor: Mg. Jorge Alberto Bedoya Beltrán

Programa: Maestría en Educación Matemática

Ciudad: Medellín

Año: 2013

El presente trabajo se enmarca en aquellos proyectos que tienen como línea de investigación los procesos cognitivos de los conceptos de la matemática avanzada, entre los que se encuentra el concepto de derivada, el cual ha sido objeto de profundización y consideración teórica por varias décadas en investigaciones de didáctica en matemáticas.

El trabajo se desarrolla en perspectiva a los lineamientos y exigencias establecidas en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín y dentro de su propuesta integra tres aspectos medulares: proceso didáctico en la adquisición del concepto, comprensión del mismo desde varios registros de representación, especialmente el geométrico y la utilización de diversas estrategias de valoración e interpretación en el proceso de construcción del saber, por ejemplo, los mapas conceptuales y la herramienta dinámica del software Geogebra ®.

Este trabajo busca identificar y analizar las dificultades de tipo cognitivo que surgen en los estudiantes durante el proceso que conduce a la comprensión geométrica del concepto, al tiempo que se proponen algunas actividades que permitan la apropiación del mismo.

La investigación centra su atención en hacer una exposición detallada del proceso de comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico, en estudiantes que cursaban la asignatura de cálculo diferencial, propuesta en las carreras de ingeniería en la Universidad de Medellín y en estudiantes del grado Undécimo A que cursaban el último período en la Institución Educativa Pbro. Antonio José Bernal Londoño. El marco teórico bajo el cual se sustenta el proceso de análisis y sistematización del trabajo es el Modelo para la comprensión de los conceptos matemáticos propuesto por Pirie y Kieren.

2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 REFERENTES CONCEPTUALES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1.1 PROCESOS COGNITIVOS

Rivas Navarro (2008) expresa que en la acción de leer, se procesa la información mediante una serie de actividades mentales o procesos cognitivos, atribuyendo significado a lo que percibe, estableciendo relaciones entre éstas y las experiencias o conocimientos evocados, implicando así la comprensión del texto y por ende la elaboración del significado. Por tanto a lo largo de la vida, se seguirá procesando información al percibir y categorizar las cosas del entorno, al retener y recordar, razonar y resolver problemas, usar el lenguaje y actuar en el mundo(Rivas Navarro, 2008).

2.1.1.1 PROCESOS COGNITIVOS BÁSICOS

Cienfuegos (2012), expresa que los procesos cognitivos básicos, se encuentran en los niveles más iniciales del procesamiento de la información; sin embargo esto no quiere decir que sean simple o “menores”. A través de ellos se adquieren los conocimientos, que son las actividades mentales relacionadas con el percibir, atender, memorizar, recordar y pensar, éstos aunque se describen de manera individual, interactúan en conjunto para obtener un comportamiento determinado.

El proceso perceptivo

Cienfuegos (2012) dice que la percepción es el proceso cognitivo básico a través del cual se interpreta la información que es recibida a través de los sentidos, los cuales a través de las sensaciones, proporcionan una información, la interpretación de éstas en el cerebro establecen las percepciones, las cuales son el resultado del el efecto inmediato de la actividad mental por estimulaciones externas que deben ser transmitidas y transformadas en vivencias.

Los receptores sensoriales conformados por células nerviosas que ponen en contacto al cerebro con el medio externo e interno. Es decir, son terminales que transforman los estímulos químicos o físicos (sonido, luz, etcétera) en impulsos nerviosos que llegan al cerebro donde la información se procesa y desata la respuesta del organismo. Una sensación común para varias personas, genera percepciones diferentes que puede desatar distintos comportamientos. Por tanto la percepción no es exclusiva de mecanismos fisiológicos de los sentidos y del cerebro, también intervienen otros factores que inciden y establecen variaciones perceptivas notables en los individuos como la intensidad, la repetición, la novedad, que serían características de los estímulos; la fisiología, la cultura, la atención y las experiencias individuales.

El proceso de la atención

Este proceso es el que se encarga de seleccionar de uno o varios estímulos, actúa como un filtro de aquellos que inciden sincrónicamente en los órganos sensoriales Cienfuegos (2012) y Rivas Navarro (2008). Se diferencia entre la atención selectiva y sostenida, esta última hace referencia al tiempo que puede mantener la atención dirigida a un objeto. Una vez seleccionado el material, se dan tres operaciones fundamentales: la codificación (recoger información), el almacenamiento (guardar la información ordenadamente) y la recuperación (hacer uso de ella cuando sea necesario).

La codificación con base en la atención, elige parte de la información, para luego procesarla, hacerla reconocible y manipulable por la memoria, de esta forma, la información elegida queda registrada como una representación mental. La codificación no es neutra, pues la interpretación de la información se afecta por las ideas propias sobre el mundo, es decir se construye o personaliza los recuerdos. El almacenamiento se da una vez codificada la información, la retiene la memoria, organizándola mediante esquemas, para luego utilizarla y la recuperación es la acción de traer a la conciencia la información almacenada en la memoria.

En Rivas Navarro (2008), la memoria es el proceso cognitivo facultado de almacenar, retener, y recuperar información de eventos - acciones pasadas procedentes del entorno (imágenes, sonidos, sabores, olores y tacto de las cosas), es un proceso fundamental en la cognición y el aprendizaje en general. Los estímulos sensoriales (visuales o auditivos), procedentes del medio que inciden en los sentidos son retenidos en la memoria sensorial durante muy corto tiempo, la información desaparece rápidamente y es sustituida por una nueva, perdiéndose inmediatamente sino sigue siendo procesada. La pequeña parte que recibe atención y es retenida en la memoria sensorial se transfiere a la memoria a corto plazo, donde se produce una elaboración más compleja de los datos sensoriales, es de la que el individuo es consciente, con una duración corta si no se repasa o práctica. Parte de la información elaborada por la memoria a corto plazo pasa a la memoria a largo plazo, la cual es de mucha capacidad en amplitud y duración, recuperando la información cuando se necesita, de esta forma se puede utilizar los recuerdos y los aprendizajes en un presente inmediato.

2.1.1.2 PROCESOS COGNITIVOS SUPERIORES O COMPLEJOS

Este tipo de procesos son pertenecientes a las habilidades del pensamiento altamente medidas por la actividad intelectual y el trabajo autónomo.

El Razonamiento, como lo proponen Carretero y García citados por Cienfuegos (2012) definen el razonamiento como el proceso que permite extraer conclusiones a partir de premisas o acontecimientos dados previamente, categorizado en razonamiento deductivo y razonamiento inductivo, el primero supone que la conclusión se infiere necesariamente a partir de las premisas y por tanto la verdad de la conclusión depende de la verdad de las premisas, a diferencia de éste, el razonamiento inductivo sólo obtendrá conclusiones probables, dado que se refiere a un proceso de generalización a partir de situaciones concretas que hacen verdadera la conclusión (Cienfuegos, 2012).

Inteligencia

En Castañeda (2009), se citan definiciones de inteligencia a lo largo de la historia.

Piaget (1952): Capacidad para adaptarse al ambiente.

Eysenk (1982): Inteligencia es el producto de la eficiencia de procesamientos neuronales.

Carroll, J.B (1993): Facultad que se refleja en el rendimiento social.

Gardner (1993): Conjunto de capacidades independientes del ambiente. Propuso 8 tipos de inteligencia.

Jensen (1997): Postuló que la inteligencia es la velocidad para procesar información y la capacidad de retenerla activamente en la memoria.

Wechsler (1949) (desarrolló varios test de inteligencia). Para él es la capacidad para actuar con propósito concreto, pensar racionalmente y relacionarse eficazmente con el ambiente.

Stenberg: Autogobierno mental superior, con tres dimensiones: capacidad de resolución de problemas, capacidad verbal, inteligencia práctica o social.

Mario Bunge, plantea un concepto científico de inteligencia, y dice que ésta no debe juzgarse en términos si existe o no existe, sino en función de su utilidad para la descripción y explicación del comportamiento, y habla de inteligencia natural como algo que está en la disposición del individuo como un fenómeno natural e inteligencia social. Se refleja a través de la memoria, solución de problemas, elaboración de estrategias y explicación del comportamiento.

De todo lo anterior se puede deducir que la inteligencia es la capacidad de comprender, entender, asimilar, elaborar y utilizar adecuadamente la información.

Lenguaje

El lenguaje y el pensamiento desempeñan un papel fundamental en el funcionamiento cognitivo pues el primero es la expresión del segundo para la comunicación y el entendimiento de los seres. A través del lenguaje se puede representar la realidad mediante signos, ordena categoriza, fija, codifica y recupera la información.

Vygostky (citado en Cienfuegos 2012) afirma que el lenguaje y pensamiento tienen raíces diferentes. Así en el desarrollo del habla hay una fase pre intelectual y en el desarrollo del pensamiento una fase pre lingüística, por esta razón suponen una independencia, pero ésta independencia desaparece cuando el individuo llega a los dos años de edad, en el cual el pensamiento se torna verbal y el habla racional.

La teoría Vygostkiana atribuye al lenguaje raíces sociales, donde éste va construyéndose a medida que el ser interacciona con otros y cuya relación con el pensamiento se va volviendo independiente en la medida que se necesite cambiar los elementos de la situación en la que el individuo se desenvuelve.

2.2 MODELO EDUCATIVO Y RECURSOS DIDÁCTICOS

En primer lugar, debe entenderse por modelo una representación simplificada de un determinado fenómeno real. En el campo de la educación, los modelos educativos son aquellos que tienen que ver con el desarrollo intelectual, los procesos de enseñanza y/o aprendizaje, al ser el conjunto de lineamientos generales orientadores del accionar académico. Están fuertemente determinados por los procesos históricos y la utilidad en el contexto social en el cual está inscrito y son recopilaciones o síntesis de distintas teorías o enfoques pedagógicos que orientan a la comunidad educativa en la elaboración de programas de estudio y en la sistematización del proceso pedagógico.

Para sustentar teóricamente un modelo educativo se toma como referente la definición dada por Carlos Tünnerman (2005), el cual aún cuando aborda la definición para modelos educativos de instituciones educativas de educación superior, es posible utilizarlo en otros ámbitos sin que pierda su validez o importancia.

Tünnerman (2005) señala que los modelos educativos adquieren importancia en los procesos de transformación universitaria recientes que se distinguen de las formas universitarias de las décadas pasadas en el sentido de que el énfasis está dirigido al mejoramiento de la pertinencia y calidad de la enseñanza y a la renovación profunda de sus métodos pedagógicos, de tal manera que permitan asegurar que los procesos de enseñanza y de aprendizaje se centren en el sujeto que aprende. (Tünnerman, 2005)

Según Flórez Ochoa (1994) un modelo es la imagen o representación del conjunto de relaciones que definen un fenómeno, con miras a su mejor entendimiento. De acuerdo a lo anterior se puede inferir que un modelo es una descripción teórica útil para la comprensión de las características de los fenómenos que se inscriben en un evento particular.

De Zubiría (1994) considera que en la comprensión de un modelo es importante reconocer las huellas o rastros que permiten reconstruir aspectos de la vida humana y que sirven de base para la reflexión y la investigación. En este sentido, un modelo permite entender y describir los fenómenos sociales dados en una estructura en un proceso de evolución histórica.

En síntesis, un modelo educativo es un instrumento de gestión académica y administrativa que contribuye de forma integral y coherente al desarrollo de los miembros de la comunidad educativa, en el marco de la visión institucional. Su pertinente conocimiento le permite a los docentes y a todos en general liderar procesos innovadores de transformación educativa a través de planeaciones e intervenciones pedagógicas.

En el campo de la educación matemática, podría pensarse que un modelo matemático tiene por objetivo describir matemáticamente una situación del mundo real que se presenta con la suficiente frecuencia, pero no obstante, los modelos educativos han constituido históricamente diferentes teorías de razonamiento, enseñanza o aprendizaje que tratan de describir aspectos relacionados con la estructura cognitiva y operacional del individuo, específicamente en el contexto formado por el desarrollo intelectual de los estudiantes y su aprendizaje escolar. Como ejemplos podrían citarse, el modelo de van Hiele para el razonamiento y el Modelo de Pirie y

Kieren (1994)para la comprensión de conceptos matemáticos, éste último es el marco teórico que sustenta el presente trabajo de investigación.

2.2.1 MODELO DESARROLLISTA

La sociedad actual demanda formar individuos preparados para enfrentar nuevas necesidades según el contexto; como lo son la transferencia del conocimiento en la solución de problemas, el flujo y manejo de la información, la incorporación de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el fortalecimiento al acceso laboral, entre otras, por lo que las actividades académicas, particularmente la enseñanza, han tenido que replantear los métodos para cumplir pertinentemente con esta tarea. De ahí que los modelos educativos deban ser orientados más que en saber cuáles contenidos enseñar y cómo introducirlos en clase, en analizar qué problemas en la estructura cognitiva se enfrenta quien aprende y cómo los aplica en su realidad inmediata.

Lo anterior permite afirmar que el aprendizaje se ha convertido en uno de los mayores desafíos en los procesos de interrelación de los grupos humanos y de innovación académica. Por tal, las instituciones educativas tienen la responsabilidad de generar condiciones que posibiliten a los individuos lograr, además, de su inserción social y productiva, el desarrollo de todo su componente axiológico dentro de un contexto sociocultural determinado.

El modelo desarrollista llamado así por algunos teóricos, entre ellos Flórez Ochoa (1994), o conocido también como modelo cognoscitivista, tiene como meta educativa que cada individuo acceda, progresiva y secuencialmente, a la etapa de desarrollo intelectual, de acuerdo con las necesidades y condiciones de cada uno. Los fundamentos teóricos de éste modelo se originaron en las ideas de la Psicología Genética de Jean Piaget.

No obstante, De Zubiría (1994) llama a este modelo, teoría del conocimiento y destaca el rol del maestro, el cual está dirigido a tener en cuenta el nivel de desarrollo y el proceso cognitivo de los alumnos. Éste debe orientar a los estudiantes a desarrollar aprendizajes por recepción significativa y a participar en actividades exploratorias, que puedan ser usadas posteriormente en formas de pensar independiente. De ahí que lo importante no es el resultado del proceso de aprendizaje en términos de comportamientos logrados y demostrados, sino los indicadores cualitativos que permiten inferir acerca de las estructuras de conocimientos y los procesos mentales que las generan.

El modelo desarrollista enfatiza la importancia de la experiencia en el desarrollo de los procesos cognitivos. En este aspecto un aporte que se destaca es el carácter activo del sujeto en sus procesos de conocimiento y de desarrollo cognitivo.

La planeación y ejecución pedagógica del presente trabajo de investigación está enmarcada bajo principios y criterios del Modelo Desarrollista. A la luz de las propuestas conceptuales de éste modelo y en concordancia con el Modelo para la comprensión de Pirie y Kieren, el estudiante asume un papel activo y reflexivo en el procesamiento y adquisición de la información, interpretando y verificando acontecimientos, en un esfuerzo de atribuir significado a las actividades que se le proponen. Así pues, actividades de intervención, sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilita el trabajar en un ambiente donde sea posible la discusión y la argumentación, la visualización y la confrontación del contenido enseñado, favoreciendo el desarrollo y evolución en la comprensión de los conceptos, en éste caso el de derivada como aproximación local.

Por un lado, las actividades que se proponen en el trabajo presuponen en el estudiante el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos como el de función, variable, límite, continuidad, aproximación, entre otros, y en procedimientos algorítmicos y algebraicos que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma se amplía el campo correspondiente al Pensamiento Variacional, por cuanto su estudio inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes. De otro lado se espera que el estudiante haga uso de la geometría para representar visualmente conceptos y procesos y, a partir del análisis, interpretación y relación de éstos, él pueda desarrollar pensamiento y comprensión en la medida que reconoce las propiedades y elementos constitutivos del objeto de estudio. En este sentido, la mayoría de las actividades están encaminadas a que el estudiante pueda reconocer las características del objeto matemático, en este caso el concepto objeto de estudio, utilizando diferentes recursos didácticos que posibiliten la comprensión de los diferentes registros de representación y validación de los elementos asociados a este.

Resumiendo, la metodología basada en el Modelo Desarrollista, busca en primer lugar que el estudiante aprenda haciendo. Es importante la experiencia de éstos con el objeto de estudio, puesto que los hace progresar continuamente, desarrollarse, evolucionar secuencialmente en las estructuras cognitivas para acceder a conocimientos cada vez más elaborados, para ello se utilizó como estrategias de trabajo de aula e instrumentos de validación y verificación del conocimiento, los mapas conceptuales propuestos por Joseph Novak, los diálogos personalizados con los estudiantes y la incorporación del software dinámico Geogebra ®.

2.2.2 MAPAS CONCEPTUALES

Los mapas conceptuales se han convertido en un instrumento para identificar la progresión del conocimiento de un individuo frente a un contenido específico, en la medida que permite visualizar las ideas o concepciones y las relaciones jerárquicas que pueda establecer entre los mismos.

Esta herramienta pedagógica se utilizó en el presente trabajo como estrategia de aprendizaje y como elemento de diagnóstico y de gestión del conocimiento, por la posibilidad que ofrece para personalizar y evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

Joseph D. Novak y D. Bob Gowin (1988) plantean que los mapas conceptuales tienen por objeto representar las relaciones entre conceptos en forma de proposiciones y tienen la particularidad de dirigir la atención, tanto del estudiante como del profesor. Argumentan que se produce más fácilmente un aprendizaje significativo cuando los nuevos conceptos o significados conceptuales se engloban bajo otros conceptos más amplios y cuando a través de esta técnica se pone de manifiesto conceptos y proposiciones.

Puesto que los mapas conceptuales constituyen una representación explícita, permiten a profesores y estudiantes intercambiar sus puntos de vista sobre la validez de un vínculo proposicional determinado, o darse cuenta de las conexiones que faltan entre los conceptos y que sugiere la necesidad de un nuevo aprendizaje. Además, ayudan al que aprende, a hacer más evidentes los conceptos claves o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugieren conexiones entre los conocimientos y los que ya trae el estudiante. En ese sentido, la elaboración de mapas conceptuales puede ser una actividad creativa y puede ayudar a fomentar la creatividad y el aprendizaje colaborativo(Novak & Gowin, 1988).

2.2.3 LAS TIC Y EL SOFTWARE DINÁMICO: GEOGEBRA ®

En la actualidad las herramientas tecnológicas de la información y la comunicación han producido un cambio significativo en el comportamiento y desarrollo cognitivo del individuo, transformando los procesos educativos y la forma como se produce el proceso de aprendizaje, condicionando en el ámbito escolar los roles de los profesores y los estudiantes.

Organismos internacionales como la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura), así como las dependencias que formulan la política educativa en nuestro país, como el MEN (Ministerio de Educación Nacional), coinciden en señalar las deficiencias e insuficiencias de los resultados educativos. Se cuestiona, especialmente, la calidad y pertinencia de los aprendizajes, que no parece corresponder con las demandas del mundo contemporáneo.

El aprendizaje y el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante, como el razonamiento, la comprensión, la abstracción, entre otras, se ha convertido en uno de los mayores desafíos de la sociedad, por ello se han desarrollado propuestas orientadas a la incorporación de nuevos y variados métodos de enseñanza o de las nuevas tecnologías, de tal manera que se pueda lograr en el estudiante una mayor integración del conocimiento, la capacidad de resolver problemas acertadamente, fomentar el trabajo colaborativo e incentivar la autonomía y la creatividad.

La UNESCO aplica una estrategia amplia e integradora en lo tocante a la promoción de las TIC en la educación. El acceso, la integración y la calidad figuran entre los principales problemas que las TIC pueden abordar, al éstas contribuir al acceso universal a la educación, la igualdad en la instrucción, el ejercicio de la enseñanza y el aprendizaje de calidad y el desarrollo profesional de los docentes.

La UNESCO (2004) ilustra que del mismo modo como la tecnología ha inducido cambios en todos los aspectos de la sociedad, también está cambiando nuestras expectativas acerca de lo que los estudiantes deben aprender para funcionar de modo efectivo en la nueva economía mundial. Los alumnos deberán moverse en un entorno rico en información, ser capaces de analizar y tomar decisiones, y dominar nuevos ámbitos del conocimiento en una sociedad cada vez más tecnológica. Deberán convertirse en estudiantes de por vida, colaborando con otros individuos para realizar tareas complejas y utilizando de modo efectivo los diferentes sistemas de representación y comunicación de conocimiento. Para que los estudiantes puedan adquirir el conocimiento y las habilidades esenciales en el siglo XXI, deberá pasarse de una enseñanza centrada en el profesor, a una centrada en el alumno (UNESCO, 2004).

En la cumbre Mundial de la Sociedad de la Información, organizada por la ONU en el 2003, se reconoce que las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) tienen inmensas repercusiones en prácticamente todos los aspectos de la vida diaria. El rápido progreso de estas tecnologías brinda oportunidades sin precedentes para alcanzar niveles más elevados de desarrollo (Echeverría, 2008).

En el campo de la educación matemática, la incorporación de las TIC como actividad dinámica, genera un ambiente en el que el estudiante tiene oportunidad para aprender a producir demostraciones formales a través de la exploración dinámica que proporcionan los sistemas computacionales. La utilización de éstos y de los software interactivos para la modelación y exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, deben permitir la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

Una de las herramientas dinámicas utilizadas en el ámbito computacional, es el Geogebra ®, software matemático interactivo y libre (respeta la libertad de todos los usuarios para ser usado, copiado, estudiado y distribuido de varias formas), creado para la educación en colegios y universidades por Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores en la universidad de Salzburgo en el año 2001. Escrito en Java, fácil de utilizar y disponible en múltiples plataformas. Es un procesador geométrico y algebraico, que reúne geometría, estadística, algebra y cálculo, el cual es un recurso didáctico útil y enriquecedor en la práctica de la docencia de las matemáticas; puesto que permite la construcción, visualización y el trazado dinámico de objetos matemáticos.

El instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ® se utilizó para exponer y justificar los componentes conceptuales de la derivada por medio de métodos geométricos. Diferentes actividades propuestas de simulación, contrastación, exploración, verificación y relación conexa entre la geometría y el cálculo, especialmente entre la recta tangente y la derivada, fueron desarrolladas por los estudiantes participantes en el presente trabajo de investigación.

2.3 OTROS MODELOS QUE SE UTILIZAN EN LA INVESTIGACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS IMPLICADOS EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS COMPLEJOS

2.3.1 MODELOS COGNITIVOS.

A continuación se va a exponer brevemente algunos de los modelos que se hacen referencia en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de la derivada en su componente geométrico, estos modelos permiten describir teóricamente la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y la manera como se da el proceso de construcción del saber.

La adquisición de conceptos matemáticos avanzados y el proceso de construcción de los mismos, exige en los estudiantes un funcionamiento cognitivo superior, especialmente en el desarrollo de las capacidades de razonamiento, abstracción, análisis y representación de los contenidos. La problemática de la presente investigación está inscrita en tal propósito, en el de promover niveles de comprensión que atañen, primordialmente, a la conceptualización de la derivada en el campo geométrico y que se constituye en uno de los conceptos matemáticos más complejos de la matemática avanzada.

Aunque se hace necesario aclarar que la comprensión de los objetos matemáticos no se debe sólo a la complejidad del contenido abordado, sino que también es necesario abordar los procesos cognitivos de construcción de éstos en el estudiante y la forma como son diseñados e introducidos de manera didáctica en la clase por el docente. De ahí que se encuentren investigaciones que establezcan modelos que no sólo estén interesados en ofrecer estrategias de intervención en el aula sino que también permitan describir la naturaleza del conocimiento y formación del pensamiento matemático en los estudiantes.

Dos investigadores D. Tall y S. Vinner, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado cuya intención busca clarificar la formación de las ideas y el lenguaje matemático en los estudiantes, es decir, el proceso de adquisición y representación de los contenidos matemáticos en la mente de los mismos hasta llegar a procesos más complejos de formalización. A propósito de la distinción que hacen de estas dos categorías, Tall y Vinner (1981) establecen categorías diferenciadoras entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo.

Por un lado, la definición del concepto, es considerado como una secuencia de palabras o una definición formal del mismo, condicionado en su mayoría por el proceso de evolución histórica. No obstante, la imagen del concepto matemático que tenga un estudiante, se considera como la estructura cognitiva de un individuo asociada al concepto y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos vinculados al concepto y que se van perfeccionando a través de la experiencia en el tiempo.

Tall y Vinner (1981) citados en Meel (2003) proponen que se debería utilizar el término *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados... Conforme se desarrolla la imagen del concepto, no necesita ser coherente en todo momento… Se llamará *imagen del concepto evocado* a la porción de imagen del concepto que se encuentra activa en un momento determinado. En diferentes momentos, pueden evocarse imágenes aparentemente conflictivas. Sólo cuando se evocan simultáneamente aspectos conflictivos habrá algún sentido real de conflicto o confusión.

Es clara la distinción que realizan entre la imagen del concepto y la definición formal del concepto y entre la imagen y la imagen evocada, éstas últimas permiten explicar cómo los estudiantes pueden responder de manera inconsistente, proporcionando evidencia de la comprensión en una circunstancia y careciendo de comprensión en otra. De acuerdo con Vinner (1981), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, es decir la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto. Aquí se hace importante resaltar, que se debe entender imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del estudiante, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, tabular, algebraica, numérica, simbólica,…).

Resumiendo, se puede decir que la imagen del concepto es una representación no siempre verbal que se asocia mentalmente al concepto, es decir, aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. El desarrollo de las representaciones mentales se da como resultado de una interiorización de las percepciones que se tengan del mismo.

En este mismo panorama teórico de las investigaciones cognitivas a cerca del conocimiento matemático superior, se hace prescindible citar la teoría de las representaciones semióticas, expuesta por Raymond Duval, en la cual afirma que la comprensión de un concepto matemático debe implicar la coherente articulación entre diferentes registros de representación y es menester del docente propiciar experiencias de aprendizaje que posibiliten la visualización del concepto matemático en diferentes registros.

Duval (1999, 2004) sustenta su teoría de las representaciones semióticas a partir del interrogante sobre si es necesario para el aprendizaje de las matemáticas, la utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario, éstos son sólo un medio cómodo y no más importante para el desarrollo de las actividades cognitivas. Es evidente que esta pregunta apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano y el aprendizaje de las matemáticas constituye el dominio o base donde ésta se sustenta. Para dar respuesta al anterior interrogante Duval (2004) plantea lo siguiente:

- No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, pues toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque no le encuentran ningún sentido práctico.

- Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Entendiendo como representaciones mentales todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto y todo aquello que le está asociado.

- La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales.

La coordinación de los diferentes registros de representaciones aparecen como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas (Duval 2004, p.189). Tomando en cuenta este planteamiento se observan prácticas en la enseñanza que reflejan las dificultades de aprendizaje. Se ha demostrado que la coordinación de representaciones no es automática, surgen dificultades en el momento de trabajar con las representaciones en el mismo registro y en diferentes registros. Desde una perspectiva teórica, en relación a la importancia de los registros, Duval (idem) señaló que la construcción de un concepto tiene que ver directamente con la articulación de sus representaciones.

Duval (1999), reconoció la importancia de las representaciones cuando aseguró que: *El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación* (p.17).

Señaló que las representaciones semióticas deben cumplir las siguientes funciones:

- la función de comunicación (intercambio social),
- objetivación (toma de conciencia)
- tratamiento (manipulación de la información).

También, afirmó que un registro semiótico de representación está condicionado a que éste permita tres actividades cognitivas fundamentales:

a) La formación de una representación identificable, sea esta una frase, dibujo, fórmula escrita, esquema, etc. Comprende una selección de rasgos y datos que se pueden representar; responden a reglas que permiten asegurar las condiciones de identificación y tenga la posibilidad de su utilización en otra actividad cognitiva.

b) El tratamiento de una representación lo cual significa la transformación de la representación en el mismo registro.

c) La conversión de una representación, que plantea la transformación de una representación de un registro a otro manteniendo la totalidad o la parte de la representación inicial.

En consecuencia, la interpretación de fenómenos para generar una representación semiótica de éste, puede provocar en el individuo interpretaciones encaminadas a su explicación en términos de diferentes representaciones. Un entendimiento de esta situación implicará la utilización de diferentes representaciones y tareas de conversión, que a su vez puede convertirse en un obstáculo para la comprensión de los conceptos. Aunque se encuentra que las investigaciones cognitivas en el campo educativo están cada vez más interesadas en la forma como aprenden los estudiantes los conceptos matemáticos, que ésta a su vez no suele coincidir con la forma, método o intención de quien enseña, que muchas veces dicha presentación intencionada de los conceptos puede ofrecer obstáculos cognitivos en el estudiante, que se ven no sólo reflejado en el poco dominio de los mismos, sino también en de las competencias propias del área.

Pero la dificultad en el proceso de comprensión, no es un asunto exclusivo de la enseñanza y de las estrategias o métodos en los que se apoya el docente para vincular el estudiante al objeto de conocimiento, es necesario revisar los mitos que se transmiten de personas a otras a través de los tiempos y cómo son asumidos como verdad absoluta. Nadie ignora que de todas las asignaturas que se imparten en las instituciones educativas, las matemáticas y en éstas, el pensamiento matemático avanzado, son las que representan en su comprensión mayor grado de dificultad para la mayoría de los estudiantes, sin importar el nivel escolar en el que éste se encuentre.

2.3.2 MODELO PARA EL RAZONAMIENTO.MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

2.3.2.1 INTRODUCCIÓN

En la educación matemática, debido a su complejidad conceptual, se hace necesario realizar esfuerzos de investigación y búsqueda de estrategias de aula que faciliten en el proceso de enseñanza y aprendizaje, la superación de las limitaciones y otros obstáculos asociados al aprendizaje del objeto matemático.

Por tanto, la enseñanza de las matemáticas ha de contribuir al desarrollo de la comprensión para alcanzar gradualmente mejores niveles de razonamiento, de análisis, de visualización y abstracción en los estudiantes. Por ende, el quehacer del docente no ha de estar exclusivamente enfocado en la búsqueda de contenidos, sino también en la forma conveniente de introducirlos en clase, para promover y favorecer procesos cognitivos y de pensamiento.

En las últimas décadas, la investigación en educación matemática ha otorgado un campo privilegiado a la creación de modelos que favorezca de un lado los métodos de enseñanza y que a su vez facilite la construcción de saberes. El modelo educativo de Van Hiele surgió como una propuesta que centra su interés en la promoción de niveles de razonamiento, ayudando al estudiante a superar gradualmente su capacidad de pensamiento para enfrentarse a la solución de problemas y de paso conducir a un aumento progresivo del razonamiento como proceso cognitivo de la complejidad en la construcción del saber.

2.3.2.2 PRESENTACIÓN DEL MODELO

Modelo que fue diseñado por los esposos holandeses Pierre y Dina Van Hiele en 1957, como respuesta a la preocupación existente en éstos y demás profesores de su país por la comprensión y enseñanza de los contenidos geométricos.

Las ideas centrales de lo que fue el modelo educativo inicial creado por los Van Hiele y que prevalecen en la actualidad pueden enunciarse de la siguiente manera (Gutierrez, 1990):

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.

2. Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de su razonamiento.

3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero si se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo abarca el aspecto descriptivo mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento de los individuos, permitiendo valorar el progreso de estos, y el aspecto instructivo el cual marca pautas a seguir para asistir el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento. Su metodología activa con base en el constructivismo, tiene como finalidad la adquisición de competencias básicas en el área y la adecuación a distintos ritmos de trabajo, aunque el modelo tuvo sus inicios en geometría es extrapolable a los contenidos del análisis matemático que poseen un alto contenido visual y geométrico.

El modelo tiene tres componentes primordiales: En primer lugar está el *insight*, definido como comprensión, el cual se caracteriza porque el alumno logra entender cómo funciona y cuáles son las reglas de formación, en segundo lugar están los niveles de razonamiento y por último las fases de aprendizaje, las cuales están orientadas a ayudar a progresar a un estudiante desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, tanto los niveles como las fases, tienen propósito fundamental promover el *insight*, que según Van Hiele, se obtiene cuando una persona actúa adecuadamente en una situación y con intención(Esteban D, Vasco A, & Bedoya B, 2007)

Si bien la filosofía que inspira el modelo de van Hiele se refiere al razonamiento y aprendizaje de las matemáticas en general, tanto las observaciones iníciales de los esposos van Hiele como todos los estudios relevantes que se han hecho desde entonces, están centrados en la geometría (Gutierrez, 1990). Y aunque este modelo estuvo influenciado por Piaget, se separó de éste en ideas como:

- En el modelo de van Hiele es fundamental estimular a los niños para que asciendan de un nivel al siguiente, en cambio la teoría psicológica de Piaget, hace referencia al desarrollo del niño más que al aprendizaje.

- En su modelo afirma que el aprendiz desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento. Piaget no captó en toda su dimensión el papel que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro por parte del aprendiz.

- Concibe las estructuras de un nivel superior como el resultado del estudio de un nivel inferior, es decir, se alcanza el nivel superior si las reglas del nivel inferior han sido estudiadas y explícitas. En la teoría de Piaget, los niños nacen dotados de la estructura superior y sólo necesitan tomar conciencia de ella.(De la Torre Gómez, 2003, Volumen 24)

2.3.2.3 LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

En este apartado, sin la intensión de ser exhaustivos, pero no por ello dejando a un lado la rigurosidad, se destacan aspectos relevantes referentes a los niveles de razonamiento propuestos por van Hiele a cómo se presenta el grado de complejidad de los objetos que son aprendidos por los estudiantes de acuerdo a su nivel de formación escolar.

Así pues, los niveles de razonamiento no dependen del desarrollo biológico del estudiante, en su lugar, están relacionados con las experiencias de aprendizaje a las que ha sido expuesto a lo largo de su historia académica con respecto al concepto objeto de estudio. Los niveles permiten reconocer la forma en que el estudiante asimila y desarrolla diversas actividades a partir de un concepto abordado.

En éste sentido, los niveles son una estratificación del razonamiento humano y su presencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje es bastante evidente en los actores involucrados, en el marco de los problemas de comprensión que atañen, primordialmente, la complejidad de los conceptos abordados.

Según Gutiérrez (1990), De la Torre Gómez (2003) y Esteban (2007), las siguientes son las principales características que permiten reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su puesta en escena en el acto educativo en el aula de clase:

Nivel 0, predescriptivo:

Los estudiantes reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden aprender el empleo de cierto vocabulario para identificar algunas figuras, pero no identifican explícitamente las propiedades de la figuras.

Nivel 1, de reconocimiento visual:

Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen. Perciben las figuras como objetos individuales, no están en capacidad de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase, o sea interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades. En muchas ocasiones las descripciones de las figuras se basan en su semejanza con otros objetos, no necesariamente geométricos, que conocen.

Nivel 2, de análisis:

Los estudiantes se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal. A demás de la observación para reconocer las propiedades matemáticas pueden deducir la existencia de otras generalizándolas a partir de la experimentación. No obstante no se encuentran en capacidad de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. Este nivel es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar “matemático” pues es el primero en que el estudiante se encuentra en capacidad de descubrir y generalizar propiedades que aún no conocían, pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

Nivel 3, de clasificación y relación:

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes. No obstante sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración. Los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas. Al alcanzar este nivel los estudiantes habrán adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. En efecto, la capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, este avance en la habilidad de razonamiento, no es más que un paso intermedio en dirección a la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales.

Nivel 4, de deducción formal:

El estudiante puede entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones ya cobran sentido y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación. Puede comprender la estructura axiomática de las matemáticas, aceptan la posibilidad de llegar a un mismo resultado desde distintas premisas.

En éste nivel se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se está estudiando, es decir comprenden las propiedades que compone un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

2.3.2.4 CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES.

La jerarquización y secuencialidad de los niveles. Los cuatro niveles representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático que puede usar un estudiante, cada nivel se apoya en el anterior. Los niveles 1, 2 y 3 hacen referencia a habilidades que todavía no saben usar; más concretamente trata de habilidades que apenas comienzan a adquirir pero de las cuales todavía no son conscientes, sobresaliendo así su estructura recursiva.

La relación entre el lenguaje y los niveles. A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico, una palabra tiene significados diferentes en los distintos niveles, además dos personas que razonan en diferentes niveles no podrán comprenderse. Cada nivel se caracteriza por determinadas habilidades de razonamiento, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel de razonamiento cuando se tenga un dominio adecuado de todas esas destrezas.

Van Hiele (citado en De la Torre Gómez, 2003) afirma con firmeza que la obtención de cada nivel es el resultado de un proceso de aprendizaje, aunque éste, en algunas ocasiones, pueda ser incidental y no guiado, e insiste en que sería un error el suponer que se pueda lograr un nivel por mera maduración biológica.

2.3.2.5 LAS FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE.

Las fases de aprendizaje según el modelo, constituyen un esquema para organizar la enseñanza, contribuyendo a que el alumno progrese desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, las fases son cinco y se clasifican en:

Fase1, información: En esta fase se trata de hacer un diagnóstico de ideas previas sobre el objeto de estudio y se puede introducir términos que se van a necesitar para unificar el lenguaje, se trata de una fase de toma de contacto; el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear y el material que se va a utilizar.

Fase 2, orientación dirigida: A partir del diagnóstico obtenido en la anterior fase, se crean una serie de tareas unipaso encaminadas a que los aprendices alcancen un mínimo de competencia sobre el tema de estudio. El objetivo es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos, propiedades del objeto de estudio. Aquí se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele (citado en Gutiérrez 1990) afirma que si en esta fase las actividades son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior.

Fase 3, explicitación: Aquí se hace necesario que el aprendiz exponga, ordene sus ideas, no basta con saber, sino que tiene que saber explicarlas e intercambiar experiencias de cómo han resuelto las actividades. Los puntos de vista divergentes harán que se tenga que analizar con cuidado sus ideas o las de su compañero. Esta fase tiene como tarea conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nivel de razonamiento nuevo que están empezando a alcanzar. Esta no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes.

Fase 4, orientación libre: Es el momento de investigar, se da la introducción de problemas-temas destinados al afianzamiento, diferenciación y apoyo, es en esta fase en la que los estudiantes deberán aplicar los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. Los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varias alternativas de resolución.

Fase 5, integración: A lo largo de las fases anteriores los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos, se da la recopilación del trabajo de los estudiantes, se ordena los resultados y se hace una explicación final del objeto de estudio, se da el debate con la resolución de dudas y aclaración de términos relacionados con el lenguaje apropiado. Completando esta fase, los estudiantes tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrá adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Van Hiele (citado en De la Torre Gómez 2003) anota que, en un proceso de aprendizaje guiado, la ayuda del maestro es principalmente indirecta y proviene de la situación didáctica creada por él, con la cual logra acelerar el desarrollo del proceso de razonamiento del estudiante.

2.4 MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN: EL MODELO PARA LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE PIRIE Y KIEREN.

2.4.1 MODELO PARA LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En esta parte del trabajo, la intención es presentar la aproximación de algunas conceptualizaciones en referencia a la evolución y al tratamiento del proceso de la comprensión, necesarias de abordar para llegar al desarrollo teórico del Modelo propuesto por Piere y Kieren. Fundamentalmente, se pretende describir algunos aspectos sobre el concepto de compresión matemática, los cuales pueden ofrecer mejores elementos de lectura para caracterizar e identificar la fuerza instrumental que presenta el modelo de Pirie y Kieren para valorar el crecimiento de la comprensión.

2.4.2 ENFOQUES SOBRE EL CONCEPTO DE LA COMPRENSIÓN

En la actualidad no es necesario profundizar mucho para encontrar un gran sinnumero de textos, documentos, informes e investigaciones en donde se ofrezcan profundas y bien logradas referencias en torno a la definición del concepto de comprensión en diferentes disciplinas del saber, valga nombrar: la Psicología, la Filosofía, la Sociología y la Epistemología principalmente. A continuación, se presenta una breve revision que permite, en lo sucesivo, un acercamiento al conocimiento del concepto dejando entrever claramente su importancia y complejidad y que permiten, a su vez, situarla en el contexto de la investigación en general y en particular en el ambiente de la investigación matematica.

Los siguientes son enfoques referenciados por Romero (2004), en su trabajo Diágnostico y Evaluación de la Comprensión del Conocimiento Matemático y que sirvieron de soporte teórico para el presente trabajo de investigación:

Enfoque Filosófico

Para el momento histórico en que la ciencia era considerada desde una marcada bipolaridad, las ciencias de la naturaleza y las ciencias del hombre, algunos de los más destacados filosofos contemporaneos, permitieron identificar la Comprensión a partir de dos tendencias, dos grupos, dos dimensiones distintamente diferentes: una metodologica y otra de carácter histórico-ontológico.

En la primera, la metodológica, la comprensión es entendida como un método desde el cual es posible fundamentar las ciencias del espiritu, presupuestos teoricos, en los que no era dable la arbitrariedad en la interpretación. En su lugar y consecuentemente con esto, las diferentes realidades culturales debían estar en una universalidad interpretativa. Por tanto, la comprensión del conocimiento tenía una característica histórica que no demandaba justificación.

En terminos de Abel (1964) la comprension se entendía, principalmente, como un método particular para explicar la conducta humana. Es decir, una forma de aprehensión de los objetos de las ciencias del espíritu, pero a su vez también como una manera para fundamentar la explicación de la ciencia natural, originando con ello una acentuada disyuntiva entre explicar y comprender. Según Wright (1987) la explicación y la comprensión son métodos distintos. En este sentido, Ferrater (1994) plantea que la comprensión tiene que ver más con las distintas posiciones adoptadas en relación a la explicación y a la comprensión propiamente dicha. Para Habermas (1981) la comprensión ha de ser entendida como la racionalidad de la acción. Morín (1994) introduce una nueva categoría, la antroposocial, la cual ve como pertinente y necesaria abordar la comprensión como una manera fundamental de conocimiento psicológico y social.

Enfoque Histórico-Ontológico.

En esta perspectiva se considera la Comprensión como uno de los rasgos fundamentales del existir humano, dimensión ontológica, y de su existencia histórica, dimensión histórico-ontológica. Por tal efecto, la Comprensión es una determinación fundamental y necesaria de la realidad humana, es un modo de ser. Acorde a esto Gadamer (2000) afirma que las vivencias guardadas en la memoria se configuran en el recuerdo para posteriormente intervenir en la Comprensión del significado. De otro lado y para fundamentar el sentido histórico-ontológico de la Comprensión, Habermas (1981) advierte que esta demanda una doble participación en la interpretación: la del sujeto que interviene y la de las acciones del otro, el otro como ser humano.

Enfoque Epistemológico

La preocupación de este enfoque no se encuentra orientada a determinar la habilidad para desempeñar una acción, pues Comprender no es, exclusivamente, demostrar capacidad para realizar una determinada acción practica o identificar el *cómo* hacer algo. Lo que si bien es cierto es que la Comprensión, en tanto proceso, se alcanzaría en una etapa posterior a la acción, la realizada por el sujeto sobre el medio que le rodea, es decir, cuando el "hacer" se transforma en "conocer". El enfoque sustenta sus referencias en Piaget (1981) y su propuesta de asimilación y acomodación cognitiva en la que el progreso del conocimiento es una auto-regulación que proporciona al sujeto la sensación de una relativa Comprensión. En igual dirección, en apoyo a estos presupuestos Toulmin (1997) propone que el proceso de la Comprensión consiste en elaborar una explicación de las capacidades, procesos y actividades a través de las cuales el ser humano adquiere inteligibilidad de la naturaleza en consonancia con las ideas y concepciones que presentan las otras disciplinas al proceso del conocimiento.

Enfoque Psicológico

A diferencia de la psicología experimental, caracterizada por desarrollar formulaciones enteramente descriptivas, la psicología basada en la comprensión apuntala su interés hacia la naturaleza explicativa del proceso para proporcionar aclaraciones e interpretaciones de los fenómenos psíquicos que hacen presencia e intervienen en el proceso. Desde este punto de vista, la Comprensión es el proceso por medio del cual es posible identificar haciendo objeto de análisis la operación de estructuras mentales inherentes al ser humano, está según Arnold, Eysenck y Meili (1979) deviene en método de conocimiento científico que se aplica para poder hacer visible y presentar testimonio sobre la conducta y las acciones del otro.

Para este enfoque la Comprensión puede entenderse como la recepción consciente de un contenido de experiencias vitales en la que intervienen los sentidos y las estructuras mentales del individuo, quien a su vez las emplea como instrumentos ordenadores de esos eventos existenciales en un contexto de significación. Según esto, la Comprensión presenta la cualidad de ordenar las experiencias de los sujetos y encontrarse relacionada a lo significativo (Dorsch 1985)

En este orden de ideas Morin no duda en proponer dos sentidos para la Comprensión. En el primero supone que esta es un conocimiento que permite la capacidad de aprehender todo aquello de lo que es posible hacer una representación concreta, en tal sentido, comprender es representar. Mientras que en el segundo el perfil de su planteamiento hacia el conocimiento de las acciones realizadas por el sujeto, por tal razón la Comprensión se entiende como el modelo fundamental de conocimiento para cualquier situación del actuar humano en la que cobran presencia la subjetividad, la afectividad, los sentimientos y pensamientos de un ser que se percibe como individuo o como sujeto humano.

La comprensión, como proceso, entonces ha de prestar atención y tener en cuenta la dimensión cognoscente y humana propia de cada individuo; según como lo propone Schank (1998), comprender consiste en procesar experiencias nuevas a partir del aparato cognitivo del cual dispone el ser humano. Y supone, por tal, recordar el fenómeno más recientemente experimentado y estar en capacidad de emplear todas las expectativas generadas por ese recuerdo y que ayudan en el procesamiento de la experiencia actual.

En último lugar White y Gunstone (1992) dejan evidenciar una marcada contrariedad hacia el intento de ofrecer una definición al proceso de Comprensión, puesto que su marcada complejidad no lo permite, salvo si opera en ella una especie de reducción y restricción sobre los procedimientos desde los cuales es valorada. No obstante, proponen algunas descripciones, que para el sentido de la investigación presentan relevante importancia, estas se encuentran basadas en las siguientes categorías:

- *Comprensión de conceptos y disciplinas:* en este ámbito la comprensión no puede verse como una dicotomía del todo o nada, sino como un continuo sin límites, multidimensional.

- *Comprensión de elementos simples de conocimientos:* ante una regla o un algoritmo se alcanza comprensión cuando se está en capacidad de explicar el procedimiento inherente en lo tocante a esa regla o a ese algoritmo
- *Comprensión de comunicaciones extensas:* la comprensión debe entenderse como un proceso de análisis de las palabras y de otros símbolos que permiten la construcción de significado, para tal efecto introducen una diferencia esencial entre la naturaleza de la comprensión de conceptos (o de elementos simples de conocimiento) y la naturaleza de las comunicaciones
- *Comprensión de situaciones:* a este respecto cobra importancia la capacidad para seleccionar la información relevante, explicar cómo y por qué surge esa situación y predecir qué sucederá en el transcurso futuro de la misma. es decir, para comprender una situación se requiere establecer un paralelismo entre la situación propiamente acaecida y las experiencias previas relacionadas.
- *Comprensión de personas*: Comprender la conducta de un sujeto supone estar en capacidad de explicar las acciones que éste realiza y de predecir las que podría realizar. A este respecto. explicación y predicción se convierten en elementos indicativos de la comprensión.

2.4.3 COMPRENSION EN EDUCACIÓN MATEMATICA

Desde algunas décadas atrás se ha venido presentando un creciente interés en la necesidad de direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia instrumentos que permitan, en alguna forma, según variados instrumentos, dar cuenta de la movilización de los niveles de comprensión en relación a objetos de estudio propios de la matemática avanzada.

Algunas investigaciones en educación matemática centran su quehacer, su inquietud, esencial, en esta dirección y orientan su pregunta problematizadora en esta orientación: ¿cómo proponer, diseñar y evaluar instrumentos que coadyuven a involucrar en la mejor manera la comprensión en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas? De tal suerte que, en la actualidad existe un denso abanico de proyectos, estudios y líneas de investigación que hacen de la comprensión el lugar común para afianzar reflexiones, discusiones e interpretaciones a partir de los derroteros y presupuestos de algunos marcos teóricos para caracterizar e identificar progresos o mejoras en los niveles de comprensión en las acciones pedagógicas, situaciones didácticas y experiencias de aula que fomentan en última instancia actitudes favorables hacia el estudio y el conocimiento de la matemática.

Dadas las circunstancias y exigencias sociales actuales, en cuanto a competencias y recursos, a las que se ven advocados los estudiantes, es indudablemente necesario hacer un reconocimiento de la importancia con la que debe ser mirada la comprensión en la enseñanza y fundamentalmente el aprendizaje de las matemáticas. La preocupación académica e intelectual en este sentido no cesa, su característica es permanecer en la continua búsqueda de los fundamentos teóricos, así como de los instrumentos metódicos que permitan sustanciales renovaciones y evoluciones significativas para la práctica del proceso educativo en experiencias de aprendizaje. Sin embargo, aún permanece abierto el paisaje de acciones y prácticas didácticas con el cual abordar posibles caminos de reflexión e interpretación al interrogante de fuerza mayor y capital importancia en el ámbito de la educación: ¿Cuál es la manera de enseñar más pertinente y adecuada para fomentar y facilitar Comprensión? ¿Existe esa manera? Probablemente este sea el paradigma a asumir.

2.4.3.1 PERSPECTIVAS DE LA COMPRENSIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la actualidad son diversas las perspectivas que han focalizado su estudio al ámbito de la Comprensión del conocimiento matemático. Las siguientes son las que destaca Romero (2004) como las más importantes:

Perspectiva de la posición representacionalista: el centro teórico de este enfoque es fomentar y profundizar en el estudio de teorías basadas en el concepto de la representación y en el modelo de procesamiento de la información desarrollado en el ámbito de la psicología cognitiva (Resnick y Ford, 1990), en la Semiosis y Pensamiento Humano, (Duval, 2004), en el marco de las representaciones múltiples, (Kaput, 1985) y en el Sistema representacional, (Nakahar, 1994).

Para esta perspectiva, la noción de representación encuentra fuertes vínculos con el concepto de comprensión. Los supuestos a partir de los cuales se sustenta esta teoría obedecen a los siguientes preceptos: las ideas matemáticas, gracias a su naturaleza abstracta, necesitan ser representadas en alguna forma para comunicarlas y, posteriormente, para poder orientar el pensamiento sobre ellas.

Todo proceso de comunicación, en tanto acto del lenguaje, requiere el empleo de representaciones externas, portadoras de significado y la movilización de las representaciones internas las cuales son necesarias para generar operaciones y funciones mentales(Resnick y Ford, 1990). Por tal razón, en orden a como lo expresan Hiebert y Carpenter (1992), debe existir una condición de relación entre las representaciones externas y las representaciones internas imaginando a estas últimas como una especie de redes y conexiones en términos de estructuras o telas de araña constituidas por nodos.

Es así como el aumento de la comprensión puede ser interpretado como el crecimiento de las redes de representaciones mentales, que se derivan gracias a la incorporación de otras, diferentes representaciones internas a la red ya existente o también porque se presentan reestructuraciones o reorganización de esta a causa de la creación de nuevos vínculos entre las representaciones. En este sentido las redes internas, y por ende la comprensión, son entendidas como un constructo de carácter dinámico.

Perspectiva de la perspectiva histórico-empírica de Sierpinska (1990,1994): en la que, a partir de los marcos de su observación, se hace obligatorio visibilizar diferentemente el proceso de la Comprensión teniendo en cuenta las dificultades que emergen toda vez que se da inicio al acercamiento de la construcción de un concepto, independiente de cual sea el escenario o la intención para hacerlo. Tal como se plantea en Meel (2003), para esta perspectiva, la Comprensión, no obstante su complejidad, consiste en la superación de obstáculos cognitivos.

Por su parte Romero (2004) sostiene que la preocupación de esta autora no radica en ofrecer una definición o caracterización precisa sobre el proceso de la comprensión, por tal, su iniciativa no pretende ser un modelo como tal, en el sentido estricto del término; su propuesta se encamina mejor a fundamentar la comprensión como acto, como una experiencia en movimiento en la que se identifican los siguientes componentes:

- el sujeto de comprensión o sujeto que comprende
- objeto de comprensión o lo que se intenta comprender
- la base de la comprension o el sustento para realizar un nuevo acto de comprensión.
- las operaciones mentales básicas con las que se vincula la base con el objeto de comprensión. En este aparte, defiende, además, la importancia y el valor didáctico y cognitivo de las siguientes operaciones mentales: identificación, discriminación, generalización y síntesis.

En definitiva, a la luz de este enfoque se entiende la comprensión, además, de un acto, como un proceso mediante el cual se pueden presentar contribuciones reveladoras que permitan entender mejor las dificultades relacionadas con la Comprensión matemática del estudiante y en apreciar cómo los sujetos comprenden las matematicas en su contexto.

Perspectiva Significado y Comprensión: para esta propuesta la comprensión de un objeto matemático exige del sujeto el reconocimiento de una finalidad para resolver una clase de situaciones-problemas, que deben resolverse no exclusivamente por aplicación o desarrollo de actividades mentales; es decir, no es posible dejar de lado, ni restarle importancia a otros factores, que como los sociales y culturales tienen su fuerte incidencia al momento de comprender esos objetos. Según Díaz-Godino (2000), y Díaz-Godino y Batanero (1994) es menester reconocer la elevada complejidad de los objetos matemáticos y recomiendan pensar "qué significa comprender" intentando la búsqueda de sentidos en otras direcciones que puedan favorecer mayormente algunas acciones y prácticas para la didáctica de las matemáticas, orientadas especialmente a determinar aspectos de los objetos matemáticos que sean de mayor conveniencia y ayuden, efectivamente, en la comprensión de los estudiantes.

En esta dirección, frente a los conceptos y la presentación de los objetos de estudio es indispensable reconocer los niveles necesarios que permitan identificar el posible alcance de una adecuada comprensión en estos. Una forma de facilitar estos efectos es mediante el empleo de prácticas significativas (en referencia a las acciones, observables o no, a las que acude una persona para resolver una situación o un problema), y en el significado de un objeto-institución (en involucrar las personas que realizan prácticas sociales compartidas en una misma situación)

Perspectiva Significado y Comprensión del Modelo de Proceso de Koyama (1993, 1997, 2000): El objetivo principal de este modelo, respecto a la comprensión, se encuentra en consonancia con la aproximación conceptual de los modelos previos, al considerarla como un proceso en movimiento a partir del cual es posible clarificar, en alguna forma, estados de comprensión en los estudiantes cuando se los concibe como sujetos de interacción en situaciones de enseñanza y aprendizaje en referencia a un objeto de estudio. En Romero (2004, p.52), el modelo se intenciona para facilitar el progreso de la comprensión, a la vez que se presta, como instrumento de efectiva y fundamental utilidad para el profesor de matemáticas.

De este modelo conviene tener en cuenta lo siguiente: un objeto de estudio es comprendido cuando se conecta a una red interna de conocimientos previamente adquiridos, a un esquema o a una estructura cognitiva ya existente. Por tal razón si se considera la comprensión como una actividad dinámica interna, es necesario involucrar métodos para exteriorizarla.

Koyama propone un modelo para la comprensión de las matemáticas, denominado Modelo de Procesos de dos Ejes, desde el cual se intenta distinguir los elementos reales que intervienen en la comprensión en los estudiantes. Las características del modelo se sustentan principalmente en las siguientes dos componentes: cuatro variables jerárquicas de enfoque hacia la comprensión en el eje vertical y tres etapas orientadas al aprendizaje en el eje horizontal (intuitiva, reflexiva y analítica). El estudiante progresa, no necesariamente en forma lineal, de un determinado nivel de comprensión a otro superior.

Perspectiva la comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto: El acto de comunicar, al emplear conceptos, implica mínimamente, una acción de palabra y otra de escucha. En efecto, hay presente una acción mediada por símbolos lingüísticos y sonoros que inciden en lo fundamental para que quien habla y, a su vez, quien escucha, puedan alcanzar el efecto último de la comunicación: llegar a un adecuado nivel de comprensión en la transmisión y recepción de la información.

Ahora bien, toda vez que es empleado un concepto, en una interacción humana, ya sea en el aprendizaje de las matemáticas o en cualquier otra acción comunicativa, es necesario tener en cuenta, en lo general, que las palabras son quienes vehiculan tránsitos de imaginarios en relación a ese concepto. Por tal, existe la tendencia a asociar una imagen mental con el concepto cuya función es la de permitir una aproximación, aunque no siempre fiable, a la definición del concepto.

En este sentido, es importante destacar el esfuerzo de los autores Tall y Vinner, quienes con su marco teórico, el concepto imagen y el concepto definición, amplían el horizonte de la comprensión en la Educación Matemática. De acuerdo con Meel (2003, p.228) los autores afirman que "un estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto- la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto- por tal deberíamos emplear el término *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados".

Siempre que un estudiante se aproxima a un concepto no lo hace partiendo desde cero, como tabula rasa, olvidando sus concepciones previas o pasando por alto su biografía académica. Por el contrario, acude a imágenes mentales y "puede razonar a partir de su concepto imagen (en este caso, sus conclusiones no siempre son verdaderas), o apelar al concepto definición, pudiendo darse el caso en el que no reconozca el concepto estudiado en muchas situaciones en las cuales se expone" (Esteban, 2006). La comprensión, según referencia en Villa- Ochoa (2011), se alcanza cuando existe consistencia entre la imagen que el estudiante haya elaborado y la definición formal propia del concepto.

Perspectiva la comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales: En Meel (2003, p. 233) Sfard (1991) define los cimientos de las matemáticas como dos entidades: Concepto y concepción. Es decir, la forma en que los estudiantes pueden admitir las nociones matemáticas *operacionalmente* como procesos y *estructuralmente* como objetos abstractos. Un concepto se refiere a una idea oficial definida matemáticamente en la que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del estudiante, causados por el concepto. Estas dos definiciones se relacionan con el análisis de Vinner (1991) sobre la definición del concepto formal y la descripción por parte de Tall y Vinner (1981) de una imagen de concepto. Sfard (1991) señala que los conceptos matemáticos radican en una dualidad de concepción, por lo que se pueden visualizar como estáticos, instantáneos e integradores –estructurales o dinámicos, secuenciales y detallados- operacionales-.

Una concepción operacional, a pesar de que es difícil de describir, se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Por otro lado, una concepción estructural es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional.

Sfard propone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras, en vez de representaciones verbales que requieren de un proceso serial. Estas imágenes mentales permiten al estudiante realizar ideas abstractas más tangibles y le permite considerarlas, incluso, como entidades físicas en las que las operaciones relacionadas con ellas ocurren por completo en los ojos de la mente.

2.5 EL MODELO DE PIRIE Y KIEREN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el proceso de construcción del conocimiento es importante considerar la creación de estrategias que permitan una experiencia significativa en relación al objeto estudio, puesto que así se contribuye continuamente al desarrollo y evolución secuencial en las estructuras cognitivas del estudiante para que pueda acceder a conocimientos cada más elaborados y complejos. En este sentido el modelo de Pirie y Kieren permite herramientas que posibilitan hacer lectura y relacionar conceptos para de esta dar cuenta del crecimiento en la comprensión.

El modelo se expone como teoría a finales de la década de los ochenta por Susan Pirie y Thomas Kieren quienes "teniendo en cuenta el constructivismo social de Vigotsky y la Epistemología genética de Piaget" (Rendon, 2011), y proponen un marco teórico a partir del cual es posible identificar la evolución en la comprensión de un objeto de estudio matemático. Por tal, es una teoría de carácter constructivista porque, según Lyndon (2000), el estudiante debe reflexionar y reorganizar sus constructos personales para poder construir nuevas estructuras conceptuales. El fundamento sobre el cual se postula la teoría es llegar a reconocer algunos niveles de la evolución de la comprensión matemática. Para ello, los autores, se sustentan, inicialmente, en el concepto de comprensión definido por Glasersfel:

El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (Meel, 2003, p.235)

A partir de esta definición Pirie y Kieren, proponen un punto de vista diferente, al de sus contemporáneos, respecto al estudio de la evolución de la comprensión matemática. Para ellos, la comprensión puede ser vista como una estructura geométrica en forma de anillos, constituida por elipses o niveles sucesivos, en donde lo dinámico, lo no lineal y la recursividad se convierten en los elementos de suma importancia para un proceso de aprendizaje que a su vez deja de ser jerárquico.

El principal interés del modelo se encuentra dirigido a identificar la evolución de la comprensión que evidencia el estudiante respecto a un objeto de estudio. Sin embargo, es conveniente observar que, según lo propone Lyndon (2000), para el modelo, la comprensión no es un proceso estático o exclusivamente mental, también se caracteriza por las interacciones con los demás y con el medio ambiente social y didáctico, así como también, por las diferentes situaciones que se manifiestan en una acción pedagógica y no como el resultado de la misma.

De acuerdo con esta teoría, el estudiante participa activamente en el proceso de construcción y evolución de la comprensión a partir de los elementos y situaciones que le permiten los problemas matemáticos. Esta construcción es un proceso que tiene su génesis en el interés y necesidad del estudiante, en su compromiso continuo de promover sus estructuras de conocimiento.

El modelo acude a la observación y a la descripción de los factores que intervienen en la interacción de los estudiantes en relación con el contenido matemático, para identificar diferencias y progresos en la evolución de la comprensión. En conclusión, Piere y Kieren enfocaron su estudio en el elemento de la comprensión al relegar el contenido matemático, no es sólo saber que contenidos específicos enseñar y como introducirlos en clase, sino también identificar el estado actual del nivel de comprensión del estudiante.

2.5.1 LOS NIVELES DEL MODELO Y SUS CARACTERÍSTICAS

Una de las principales demandas presentes en el proceso del aprendizaje de las matemáticas, es el tratamiento de la conceptualización formal, además de la motivación y movilización de algunas funciones mentales. En este aspecto, se hace complejo alcanzar, por el nivel de abstracción de sus elementos, en forma inmediata una comprensión de los diferentes tópicos del conocimiento matemático en general y los del pensamiento matemático avanzado, en particular en particular.

Por estas razones, es necesario acudir a un instrumento que pueda dar cuenta de la evolución de la comprensión de un objeto matemático, además, por la necesidad de llevar a cabo observaciones e interpretaciones de situaciones que permitan la posibilidad de hacer lecturas, en mayor medida, más ajustadas a la realidad de una experiencia de aula, para identificar, especialmente, algunas características relevantes a partir de las cuales la comprensión pueda ser entendida como proceso dinámico inherente a la experiencia personal de cada estudiante. La propuesta del modelo de Pirie y Kieren se orienta en este sentido.

El modelo destaca su interés en identificar la evolución de la comprensión matemática a través de ocho niveles a partir de los cuales es posible dar cuenta de los progresos de esa evolución sobre un concepto (objeto de estudio) específico del área de las matemáticas. En esta dirección los autores, según (Romero 2004, p. 50) afirman que:

"La comprensión matemática puede ser caracterizada como nivelada pero de forma no lineal. Es un fenómeno recursivo y la recursión sucede cuando el pensamiento se desplaza entre niveles de sofisticación. En realidad, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos de dentro y además, está obligado por los de fuera"

Niveles del Modelo

El modelo de Pirie y Kieren plantea ocho niveles o estratos de naturaleza anidada que estructuran la teoría y dan cuenta de la evolución y el progreso de la comprensión del estudiante con respecto al saber matemático, permitiendo identificar el grado de conocimiento y desarrollo de las estructuras cognitivas que intervienen. A continuación se presenta la estructura y las características para cada nivel, tal y como lo propone Villa-Ochoa (2011):

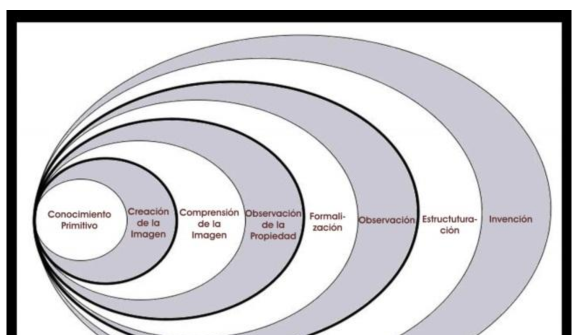


Ilustración 1. Evolución de la Comprensión según el Modelo.

Nivel 1. Conocimiento Primitivo (Primitive Knowing)

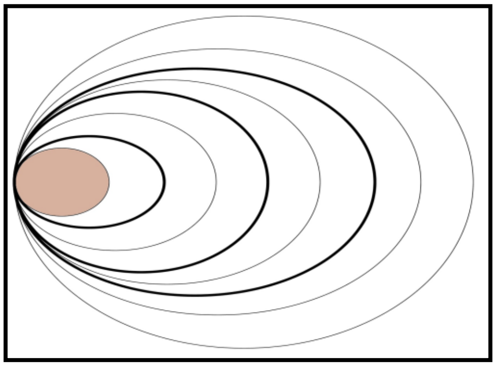


Ilustración 2. Nivel 1: Primitive Knowing

Es el nivel desde el cual empieza el modelo y su adjetivo primitivo no quiere decir conocimiento precario o nivel de conocimiento matemático bajo. En éste se ha de tener en cuenta el conocimiento básico o primordial presente en el estudiante. Son las concepciones previas que posee el estudiante y las herramientas o estrategias a las que acude para dotar de sentido o de acción a un evento que se le propone. En este sentido, el conocimiento se encuentra formado por todo lo que el estudiante ha construido previamente en su aprendizaje, gracias al desarrollo de sus experiencias en las situaciones reales, a sus ideas y concepciones hacia la matemática y al concepto objeto de estudio. Son los preliminares mentales a los que el estudiante acude para el desarrollo de una actividad procedimental o conceptual.

Pirie y Thom (2006) mencionan que, como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona; sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones a partir de la evidencia de que se ponga a nuestra disposición a través unas acciones físicas, verbales o escritas.

Nivel 2. Construcción de la Imagen (Image Making).

En este nivel el estudiante desarrolla actividades propuestas en diferentes tareas ya sean mentales o físicas, con la intención de promover concepciones iníciales o para profundizaren el concepto objeto de estudio. El estudiante puede realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Es aquí en donde se da inicio a la evolución de la comprensión puesto que se hacen diferenciaciones matemáticas a través de las acciones siempre sobre la base del conocimiento primitivo. Lo esencialmente importante del trabajo en este nivel radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas, no exclusivamente gráficas, y que puedan existir en forma verbal, mental, escrita o física.

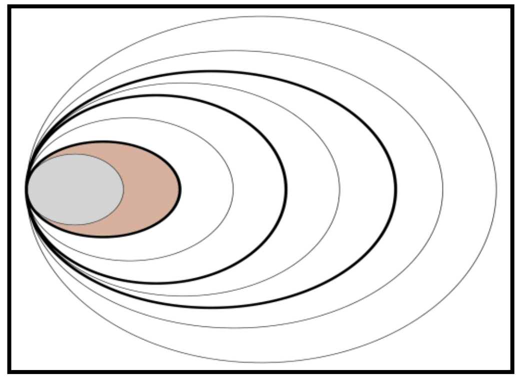


Ilustración 3. Nivel 2. Image Making

Nivel 3. Comprensión de la Imagen (Image Having)

Pirie y Kieren (1992b) afirman que las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares. El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

En los dos primeros niveles se alude al término "imagen" que en su teoría Pirie y Kieren (1994), emplean para significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre algún tópico en particular, cualquier representación "mental", no necesariamente visual o pictórica. Esta teoría postula que en la evolución de la comprensión matemática sobre un tópico particular, es un movimiento continuo, en donde el estudiante elabora, sostiene y extiende imágenes particulares.

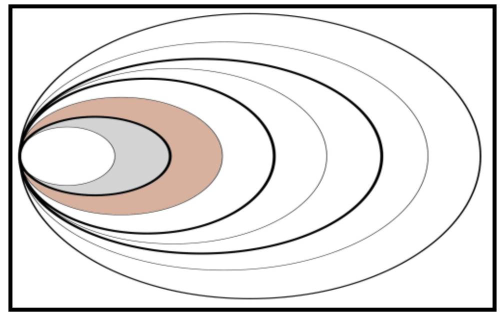


Ilustración 4. Nivel 3. Image Having

Nivel 4. Captación de la propiedad (Property Noticing)

Una vez que el estudiante haya construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas. En palabras de Thom y Kieren (2006, p. 190) este estrato es una forma de "*standing back*" "caminar atrás" y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento. Meel (2003, p.337) afirma que en este estrato se observan las propiedades construidas hasta el momento, las cuales se combinan para construir definiciones que pueden evolucionar y definir características particulares, mientras que se ignoran otros elementos del concepto.

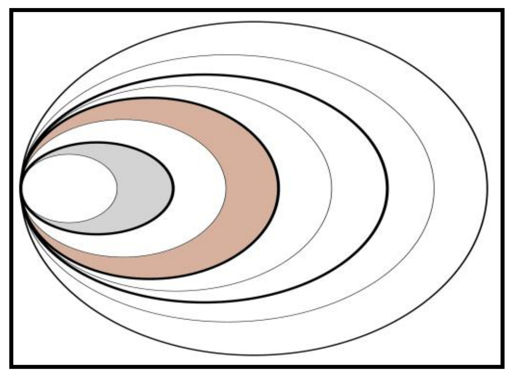


Ilustración 5. Nivel 4. Property Noticing

De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre *Image Having*y *Property Noticing*es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión. Quizás en este nivel, el aprendiz resalta generalidades de varias imágenes y desarrolla un concepto definición que incorpora imágenes múltiples.

Nivel 5. Formalización (Formalising)

El estudiante se encuentra en capacidad de conocer las propiedades para abstraer características comunes de clases de imágenes. El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática adecuada. En palabras de Meel (2003):

El estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona.[...] la descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas (p.238).

Nivel 6. Observación (Observing)

En este nivel se asume que el estudiante posee la habilidad para considerar y realizar indagaciones sobre su propio razonamiento (aspecto metacognitivo) formal. Se encuentra en capacidad de observar, estructurar y organizar procesos personales de pensamiento como también, reconocer las ramificaciones de tales procesos. Así mismo, en este nivel el estudiante ha progresado a la producción de verbalizaciones de los conocimientos del concepto formalizado.

El proceso de observación implica reflexionar sobre la coordinación de unas actividades de las matemáticas formales. Thom y Pirie (2006, p. 191) presentan una analogía entre estadios, así: *"Observing is to Formalising as Property Noticing is to Image Having"*

Nivel 7. Estructuración (Structuring)

Para este nivel el estudiante se encuentra en capacidad de tomar consciencia de las proposiciones y asociaciones y, entonces, las relaciones provenientes de las observaciones pueden ser explicadas por un sistema axiomático. Cuando se alcanza este nivel la preocupación por parte del estudiante no está exclusivamente centrada en un tópico en particular, sino más bien, él ha ubicado su entendimiento en una gran estructura y podrá concebir pruebas de propiedades asociadas con un concepto y examinar acciones desarrolladas en el concepto que provienen de otras propiedades lógicas. Siguiendo a Thom y Pirie (2006, p. 194) la *Estructuración* implica ser capaz de explicar o teorizar unas observaciones formales en términos de una estructura lógica. En este nivel, las observaciones generales sobre formalización de un tema objeto de estudio, se incluyen en una estructura matemática y ya no necesitan ser tratados como casos específicos de esa estructura.

Nivel 8. Invención (Inventising)

Según los planteamientos de Thom y Pirie (2006, p. 194) la *Invención* requiere que el estudiante rompa con las pre-concepciones que surgieron en la comprensión temprana, con el fin de plantear nuevas preguntas que pueden dar lugar al surgimiento de un concepto totalmente diferente.

El hecho de que este estrato sea denominado "invención" no quiere decir que en los niveles precedentes no puedan emerger creaciones o invenciones por parte de los estudiantes. En este nivel, el entendimiento matemático del estudiante se ve sin límites, imaginando y buscando más allá de la estructura corriente y contemplando la pregunta "¿qué pasa sí?" Este cuestionamiento resulta del uso del conocimiento estructurado del estudiante y que se toma como conocimiento primitivo para investigar preguntas que están más allá del dominio inicial del objeto de estudio.

Respecto a su Teoría, Pirie y Kieren (1991) señalan que es importante ser conscientes que los estadios, por sí mismos, no constituyen la comprensión, dichos estadios se nombran partes de un fenómeno dinámico en cual no tiene existencia independiente fuera de la observación de la compresión de una persona particular de un tópico específico de las matemáticas.

2.5.2 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

Además, de los ocho niveles para describir la evolución de la comprensión de un concepto matemático, la teoría presenta otras características de fundamental importancia para el modelo: El *folding back* o la acción de regresar a cualquiera de los niveles internos, dada la necesidad de recoger información específica para superar los obstáculos que hagan presencia en el proceso de construcción del conocimiento, necesarios para la evolución de la comprensión matemática. Otra de las características que presenta el modelo es la que hace referencia a los *límites de falta de necesidad* que permiten identificar avances significativos en la comprensión de los niveles internos. Además, para identificar la actuación y exposición escrita por parte del estudiante hacia las actividades propuestas en los niveles internos se *encuentra la complementariedad de la acción y la expresión* aspectos que cobran especial relevancia en la movilidad o paso de un nivel al siguiente.

Otra característica importante del modelo de Piere y Kieren sobre la comprensión es la *fractalidad*, la cual consiste que cada nivel de comprensión se encuentra contenido en los niveles subsiguientes, es decir, que los niveles externos crecen de forma recursiva desde los niveles internos.

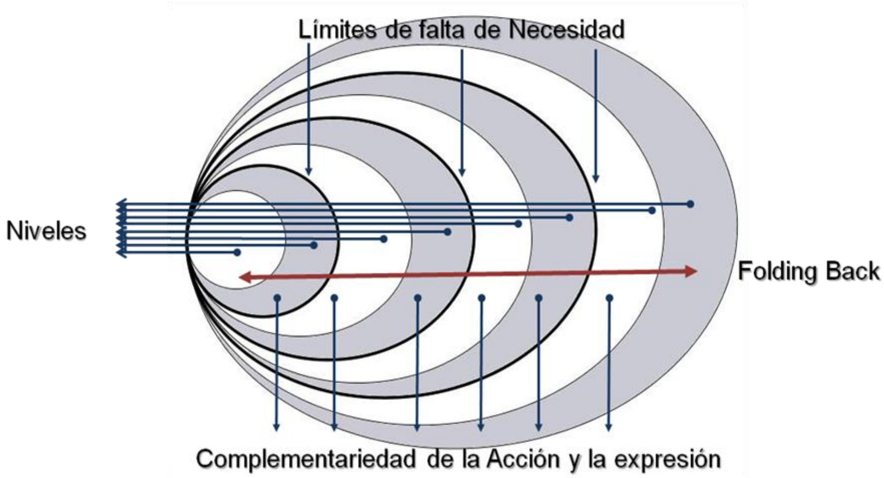


Ilustración 6. Características del Modelo.

Ramirez (2011) describe las características del modelo de Pirie y Kieren de la siguiente forma:

El Folding Back

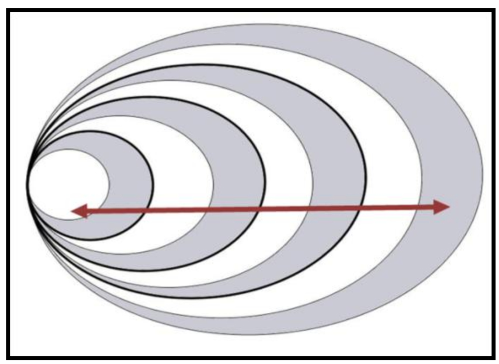


Ilustración 7. La característica del *Folding Back.*

Este es el elemento más importante y constituye, además, una de las principales diferencias con otros modelos y teorías. Consiste en la posibilidad de "Redoblar" o volver hacia atrás. De acuerdo a Lyndon (2000, p. 131)cuando el estudiante se ve enfrentado a una situación problema de la cual su solución no es inmediata, necesita volver a un nivel anterior de comprensión para generar un cambio cognitivo que le permita organizar sus construcciones para el concepto. Este es un proceso dinámico que asegura la efectividad de la comprensión que le permite a un estudiante que está en un nivel exterior, regresar a uno de los niveles internos, con el fin de reconstruir la comprensión de un concepto o afianzar elementos que no fueron necesarios en el paso por dicho nivel, pero que es necesario para la superación y avance en los niveles externos. El estudiante que avanza, retrocede o redobla hacia el nivel interno, mejora su comprensión y regresa al nivel externo para continuar con el proceso.

La necesidad de redoblar aparece como consecuencia del proceso de crecimiento en la comprensión y es individual, no es propia del concepto sino del sujeto que comprende.

Los límites de falta de Necesidad

Es otra de las características de esencial importancia. Los límites de falta de necesidad se presentan entre las vecindades de algunos niveles y constituyen procesos de comprensión más elaborados y estables para un concepto. Cuando un estudiante se encuentra en dichos límites es porque ha realizado progresos cualitativos superiores en la comprensión, es decir, ha alcanzado niveles de mayor sofisticación y complejidad en cuanto al objeto de estudio. Pero aun así, lo anterior, no determina que el estudiante en algún momento no tenga la necesidad de hacer *folding back* sobre los niveles internos en la comprensión que realiza.

En este diagrama, los límites de falta de necesidad se evidencian por líneas más gruesas y están determinados sólo en la interface de algunos de ellos, entre los niveles 2 y 3, entre los niveles 4y 5 y entre los niveles 6 y 7.

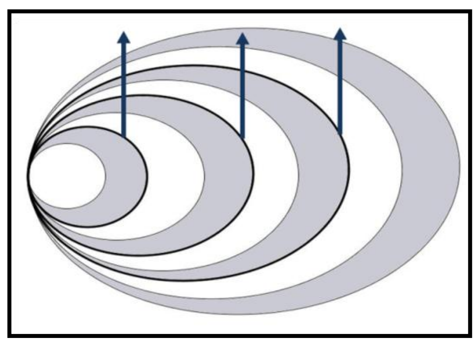


Ilustración 8. Niveles para los límites de falta de necesidad.

La complementariedad de la acción y la expresión

Esta otra característica propia del modelo. Se presenta en todos los niveles a excepción del primero y el último. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles.

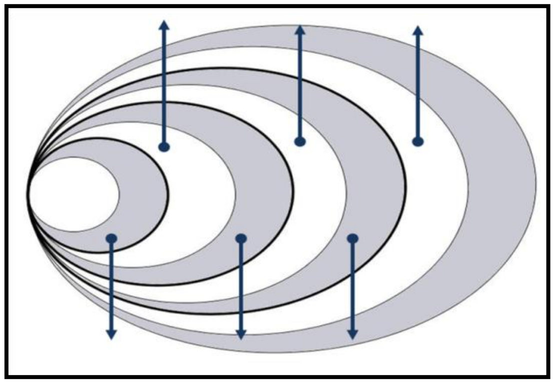


Ilustración 9. Complementariedad de la Acción y la Expresión.

Pirie y Kieren (1994, b) afirman que:

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel".

Según Meel (2003), Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasarán al siguiente nivel.

Conviene subrayar, lo enfáticos que son los autores del modelo para identificar la comprensión como un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento, que evoluciona conforme se presente un notable desarrollo en la capacidad de expresión de los mismos. De lo anterior se infiere un carácter dinámico del modelo y las complementariedades de la acción y la expresión se evidencian mediante la participación de los estudiantes que en muchas ocasiones proponen respuestas o soluciones innovadoras que se pueden considerar invenciones o formalizaciones propias de la originalidad de los mismos.

La fractalidad en el Modelo de Pirie y Kieren.

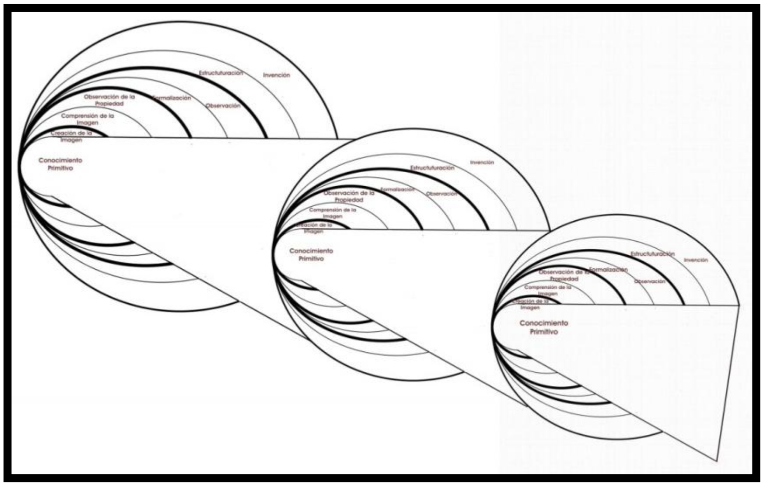


Ilustración 10. La fractalidad del Modelo.

Pirie y Kieren consideran que el proceso de comprensión no es lineal, así como tampoco limitado, pues cada nivel externo opera a manera de envolvente de los niveles más internos, al respecto Meel (2003) en su investigación profundiza al afirmar que "los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel interno permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos". Esta característica es la que le concede al modelo la consideración de teoría de la relatividad de la comprensión. En Meel (2003), se presenta la voz de los autores materializada en las siguientes palabras:

Se podría observar a una persona en el nivel de invención como si tuviera su comprensión previa como una nueva acción primitiva [Conocimiento Primitivo]. Una consecuencia principal de esta línea de pensamiento es que, para un observador la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona "dentro" de la acción primitiva y observar la misma estructura nivelada.

Los autores consideran al primer nivel o el de conocimientos primitivos como el centro interno del modelo a partir de él puede entenderse que la evolución de la comprensión matemática presenta se da de una naturaleza similar a la totalidad. Esta propiedad otorga al centro interno el atributo de característica fractal tal como se ilustra en la Figura 14.

Otras características importantes del modelo

A continuación, según la investigación de Rendón (2011), se presentan otros elementos de relevante importancia, necesarios para las perspectivas teóricas de la presente investigación y que a su vez habilitan otras alternativas sobre las cuales se puede obtener un importante provecho, en procura a mejorar sustancialmente los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre un concepto matemático en su calidad de objeto de estudio:

En cada nivel se puede establecer la estructura total del modelo. Es decir, cada uno de ellos puede contener los ocho niveles con una estructura idéntica a la del modelo. Gracias a la condición de fractalidad el nivel sobre el conocimiento primitivo se convierte en el elemento génesis de la comprensión de otro concepto más elaborado; un proceso completo, y a su vez este se convierte en el conocimiento base para iniciar otro proceso.

La comprensión como proceso subjetivo. No es posible conocer realmente lo que sucede en el ámbito mental de otro individuo, dada la complejidad de los procesos que intervienen en el aprendizaje. De lo que sí se puede tener algún conocimiento y abordar para su estudio es en lo referente a las manifestaciones externas presentes en los estudiantes, toda vez que afronte la construcción de un conocimiento en particular.

Las posibilidades que permite la interacción. El lenguaje empleado, los razonamientos y argumentos expuestos y las diferentes situaciones en las que los estudiantes demuestran capacidad para enfrentar son los elementos característicos que emergen en cada uno de los niveles a partir de los cuales se puede evidenciar un cambio en el orden cualitativo de su evolución de la comprensión.

La entrevista, el diálogo y la socialización de las experiencias de aprendizaje propuestas pueden ser tomadas como herramientas de notable utilidad, puesto que a partir de ellas, es posible reconocer aspectos en la evolución de la comprensión de los estudiantes. En este sentido, según los autores, un único instrumento, como una prueba objetiva, aplicado para la construcción de un concepto, se convierte en limitante ulterior para visibilizar esa evolución, por tal, es necesario y recomendable, en términos de la comprensión, emplear diferentes estrategias que coadyuven a evidenciarla.

2.5.3 ¿POR QUÉ LA PROPUESTA DE PIRIE Y KIEREN COMO MODELO PARA ESTA INVESTIGACIÓN?

En consideración a los elementos característicos propios del modelo mencionado anteriormente y a la importancia en el sentido de lo complejo del concepto de la derivada en su componente geométrico, se hace oportuno emplear la propuesta como fundamento teórico por las posibilidades cognitivas, didácticas y metodológicas que permite.

En la actualidad, el sentido hacia el cual apuntalan un buen número de investigaciones en educación orientadas al estudio de conceptos propios de la matemática avanzada, involucran la comprensión como preocupación académica y formativa. Al ser la derivada el objeto de estudio de este trabajo y a sabiendas de las dificultades, ya sea que cobren presencia como obstáculos o como errores, en su aprendizaje es apenas normal y consecuente optar por elegir un marco teórico pertinente que apoyado, en aras a contar con diferentes medios para visibilizar evolución en la comprensión, en otros enfoques o referentes, como los son los mapas conceptuales, las representaciones semióticas y el empleo del Geogebra ®a manera de software dinámico permitan el acceso a la aplicación de estrategias de aprendizaje y a elementos de lectura y hermenéutica focalizados más a evidenciar movilizaciones o avances hacia la comprensión conceptual que a la ejecución procedimental o algorítmica del objeto de estudio.

En el contexto del marco teórico se verifica el empleo del mismo para realizar otros estudios de investigación que guardan proximidad o familiaridad al concepto de la derivada, circunstancia esta que permite contar con un horizonte que deviene en fuente de consulta, fundamentación y contrastación.

Para intentar movilizar cognitivamente algunas de las dificultades presentes en los estudiantes al momento de abordar el concepto de derivada, la investigación presenta como instancias de apoyo el empleo del método del haz de secantes y la manipulación de las variables visuales a través del empleo del Geogebra ®, para suscitar en los estudiantes mejores aproximaciones de carácter conceptual desde el análisis y trazo de rectas tangentes a algunas curvas. De esta forma y teniendo siempre en cuenta las características del modelo como recurso y como lente, ya sea para promover o para observar el tránsito por los tres primeros niveles de la evolución de la comprensión del concepto objeto de estudio en los estudiantes, dada la importancia de su componente visual como categoría necesaria en la formalización del concepto. Se toman los tres primeros niveles por las descripciones que implican y por las posibilidades que permiten para aplicar algunos sistemas de representación semiótica.

2.6 CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO: BREVE RECORRIDO HISTÓRICO Y OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.

2.6.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Antes del siglo XVII, una curva por lo general se describía como un lugar geométrico de los puntos que satisfacían alguna condición geométrica, y las rectas tangentes se obtenían por construcciones geométricas. Esta perspectiva cambió de manera radical con la creación de la geometría analítica en los años de René Descartes[1] y Pierre de Fermat[2]. En este nuevo escenario los problemas geométricos se replanteaban en términos de expresiones algebraicas, y las nuevas clases de curvas se definían no por sus condiciones geométricas sino algebraicas.

Newton[3] y Leibniz[4], independientemente el uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo integral hasta llegar a conseguir que problemas, en su tiempo irresolubles, pudieran serlo por los nuevos métodos de forma casi rutinaria. Su mayor logro fue esencialmente el hecho de poder fundir en uno el Cálculo integral y la segunda rama importante del Cálculo: el Cálculo diferencial.

Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la Matemática. Este concepto no se formuló hasta

---

[1] ***René Descartes****(1596-1650). Nació en el pueblo Le Haye, Francia, de una familia noble, y siguió las carreras de la Medicina y el Derecho en la universidad de Poitiers. Su obra magna "Discurso del Método" publicada en 1637y dividida en seis partes; una de ellas es la "Geometría" en la cual da a conocer al mundo un nuevo enfoque en el cual cualquier curva geométrica se representa por una ecuación con dos incógnitas, y cualquier ecuación con dos incógnitas representa una curva.*

[2] ***Pierre de Fermat****(1601-1665). Nació en Francia, fue un jurista y matemático, apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de "príncipe de los aficionados". Acostumbraba anotar sus descubrimientos en el margen del libro que estaba leyendo, fue así como se encontró después de muerto, lo que hasta hace poco se conoció como el* ***Teorema indemostrado de Fermat****. A más de ser un coinventor de la Geometría Analítica y precursor del Cálculo Diferencial, Fermat hizo aportes importantes a la Teoría de los Números y a la Teoría de la Probabilidad.*

[3] ***Isaac Newton****(1642-1727).Nació en Woolsthorpe el día de navidad, matemático, físico y astrónomo inglés. Se inmortalizó por el descubrimiento de las leyes de la mecánica y la gravitación universal, su explicación de la descomposición de la luz en los diferentes colores, y por sus nobles trabajos relativos al álgebra y a la geometría, así como la invención del cálculo diferencial.*

[4] ***Goottfried Leibniz****(1646-1716. Nació en la ciudad de Leipzig, fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como "El último genio universal". Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces.*

el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones.

El concepto de derivada evolucionó en este nuevo contexto. En los años 1630, Fermat fue el primero en distinguir una relación entre el problema de encontrar rectas tangentes y el problema aparentemente inconexo de encontrar valores máximos y mínimos. Ya la relación entre las rectas tangentes a curvas y la velocidad de una partícula en movimiento fue descubierta por Isaac Newton a fines de los años 1660.

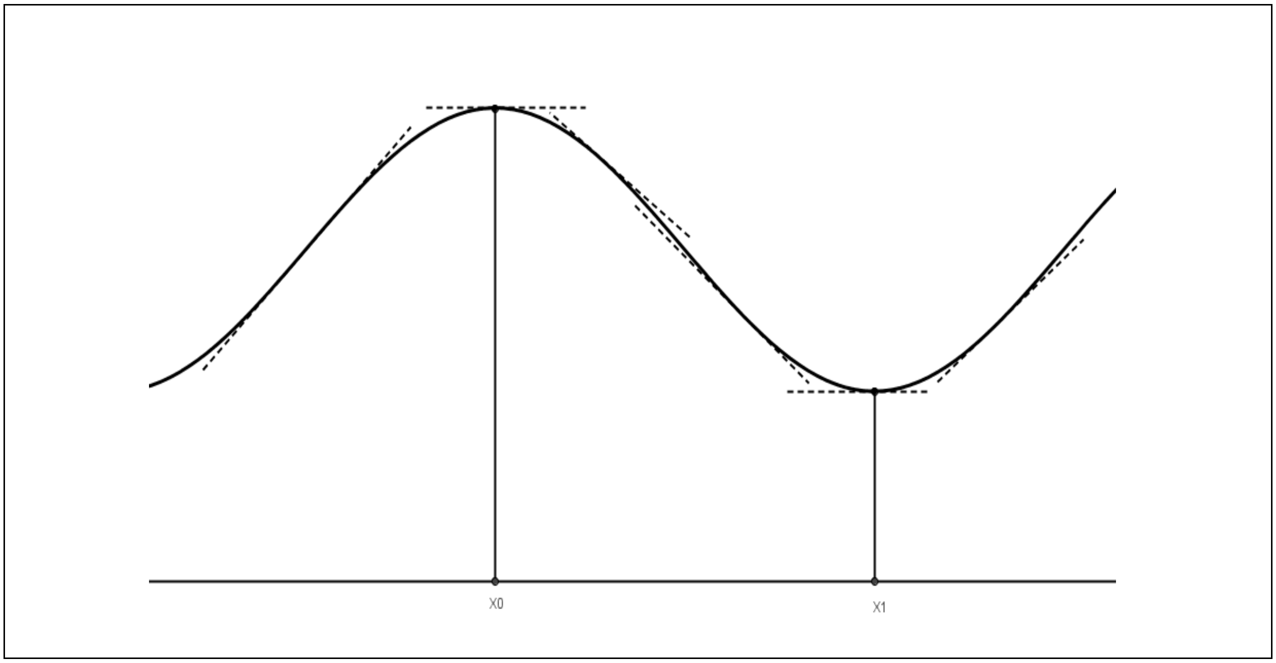


Ilustración 11. La curva tiene tangentes horizontales en los puntos x_0 y x_1.

La idea de Fermat, básicamente muy simple, puede comprenderse con auxilio de la Ilustración 11. Se supone que en cada uno de sus puntos, esta curva tiene una dirección definida que puede venir dada por la tangente. Cada una de estas tangentes se ha indicado en la figura por una recta de trazos. Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo como los de la figura, las abscisas x_0 y x_1, la tangente ha de ser horizontal. Por tanto el problema de localizar estos valores extremos se reduce a la localización de las tangentes horizontales (Apostol, 1988).

En cada uno de los progresos principales del siglo XVII, algún paso determinado conducía de la confusión a un método nuevo. Así, por ejemplo, Newton mismo indica qué es lo que le sugirió el cálculo diferencial: "la manera que tenía Fermat de trazar tangentes" Al año 1638 siguiente al de la publicación de la geometría de Descartes, Fermat le comunicó el método aceptado para encontrar las tangentes. Este se originó en la investigación que hizo Fermat de los máximos y mínimos, problema que abordó esencialmente del mismo modo que se hace hoy día en el cálculo. Lo que hizo equivale a igualar la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ a cero para encontrar los valores de x que hagan máximo o mínimo a $f(x)$. Geométricamente esto equivale a encontrar las abscisas de los puntos de la curva $y = f(x)$ en los cuales la tangente es paralela al eje x(Ruiz, 2002).

Fermat no prosiguió a examinar las derivadas de orden superior ni su equivalente geométrico para determinar si $f'(x) = 0$ dan en realidad máximos o mínimos. Tampoco aisló el cálculo de la derivada de su presentación implícita en problemas de máximos y mínimos.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente en un *punto arbitrario* de la curva. El intento de resolver este problema fue lo que condujo a Fermat a descubrir algunas de las ideas rudimentarias referentes a la noción de derivada.

A primera vista parece que no habrá conexión entre el problema de hallar el área de una región limitada por una curva y el de hallar la tangente en un punto de la curva. El primero que descubrió que estas dos ideas, en apariencia sin conexión, estaban íntimamente ligadas, fue el maestro de Newton, Isaac Barrow[5]. Sin embargo, Newton y Leibniz fueron los primeros que comprendieron la verdadera importancia de esta relación la explotaron en forma tal que inauguraron una etapa sin precedente en el desarrollo de la Matemática.

Ángel Ruiz (2002) plantea en su libro "*Historia y filosofía de las matemáticas*" que Fueron cuatro problemas los que motivaron la creación del cálculo:

---

[5] ***Isaac Barrow*** *(1630-1677). Nació en Inglaterra, estudió en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, al cual ingresó a los 14 años, a más de las matemáticas era un gran conocedor de los idiomas griego y árabe, poco después de su grado fue nombrado profesor de la misma universidad, teniendo como estudiante a Isaac Newton, a quién cedió su puesto de profesor en 1669.*

En la revisión del proceso histórico del desarrollo de la derivada sin la noción del límite, Lozano (2011) presenta la siguiente secuencia y plantea que el primer problema fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo. El segundo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies. El tercero fue determinar cuándo una función alcanza un valor máximo o mínimo y el último problema estaba asociado a la geometría y era como calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de *velocidades* y, en general para el estudio de la *variación* de una función.

También Fermat descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica "antecedente del concepto de la derivada". Método que se puede reducir al cálculo del siguiente límite.

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

Aproximación similar a la que Newton y Leibniz desarrollaron posteriormente.

Newton señalaba "Cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finamente iguales", considerando el límite de una función o "el de la derivada" en su libro Philosophienaturalis principia mathematica (1687), lema I del libro I, sección I.

Leibniz bajo la influencia de Huygens[6], le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas estando seguro que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes

[6] ***Christiaan Huygens*** *(1629-1695). Nació en La Haya- Holanda, estudió mecánica y geometría, estuvo muy influenciado por René Descartes. En 1656 creó el primer reloj de péndulo, ingresó en la Royal Society, allí pudo mostrar sus superiores telescopios, pionero en el estudio de la probabilidad, resolvió numerosos problemas geométricos como la rectificación de la cisoide y la determinación de la curvatura de la cicloide.*

a través de sumas. En 1676 Leibniz ofreció las reglas $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o fraccional. En julio de 1677 Leibniz ofreció las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente dos funciones.

Su método se recoge por primera vez en un artículo publicado en la revista Acta erudito rumen 1684 enunciándolo como “Un nuevo método para máximos y mínimos y también tangentes, que no se ven obstruido por las cantidades fraccionarias ni por los irracionales”. Método que se trataba de una aproximación geométrica y no cinemática como en Newton. El artículo contenía los símbolos que representaban para Leibniz cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con las cuales construyo su cálculo diferencial “cálculo de tangentes” y las reglas:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Y señalaba que, $dy = 0$para valores extremos relativos o para los puntos de inflexión. Introduciendo el término de “calculo diferencial” (de diferencias) pero antes había usado la expresión “*methodustengentium directa*” (Lozano, 2011)

En el siglo XIX la función derivada logra su reconocimiento social, científico y matemático con mayor rigor a partir de Niels Abel[7], Bernhard Bolzano[8], AugustinCauchy[9], Karl Weierstrass[10] entre los más reconocidos.

---

[7]***Niels Henrik Abel*** *(1802-1829). Nació en Noruega, matemático célebre por haber probado en 1824 que no hay ninguna fórmula para hallar los ceros de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes y en el de las funciones elípticas, ámbito en el que desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíprocas de la integral elíptica.*

[8]***BernhardBolzano****(1781-1848). Nació en República Checa, filósofo, matemático y teólogo. Sus inquietudes científicas resultaron muy avanzadas para su tiempo. Tras demostrar el teorema del valor intermedio, dio el primer ejemplo de una función continua no derivable sobre el conjunto de los números reales. En el campo de la lógica, trató la tabla de verdad de una proposición e introdujo la primera definición operativa de deducibilidad. Estudió anterior a Cantor, los conjuntos infinitos.*

Bolzano (1817) quien definió por primera vez la derivada como un límite: la cantidad $f(x)$ a la que la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

Cauchy describió la derivada en su libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección "cuando la función $y=f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre dichos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente si $\nabla x=i$, entonces los dos términos de la razón entre las diferencias serán dos cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro límite positivo o negativo. Este límite:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

Si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo si se toma $f(x)=x^m$. Siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeña será:

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.2}x^{m-2}i+\cdots+i^{m-1}$$

[9]***Luis Cauchy**(1789-1857). Nació en París "Los hombres pasan, pero sus obras quedan", fueron sus últimas palabras, graduado como Ingeniero de Caminos, pocos años después abandonó su trabajo de ingeniero y se dedicó a la investigación y la enseñanza de la ciencia pura. Una de sus tres grandes obras sobre la integral definida como un número complejo como límite, la cual reformó la teoría de la variable compleja. Sus definiciones rigurosas del límite y de continuidad son usadas hoy por los autores más modernos del Cálculo Diferencial.*

[10]***Karl Weierstrais**(1815-1897). Nació en Ostenfelde-Alemania, conocido como "el padre de los modernos análisis", estudió matemáticas en la Universidad de Münster, se interesó en las funciones elípticas, en la solidez del cálculo, capaz de escribir las pruebas de varios teoremas entonces no probados, como el teorema del valor intermedio, el teorema de Bolzano-Weierstrass, y Heine-Borel teorema.*

Que tendrá por límite la cantidad mx^{m-1}, es decir una nueva función de la variable x llamada función derivada y se designa por la notación y' o $f'(x)$"

2.6.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA COMO UNA PENDIENTE

El método usado para definir la derivada tiene una interesante interpretación geométrica que conduce por un camino natural a la idea de tangente a una curva.

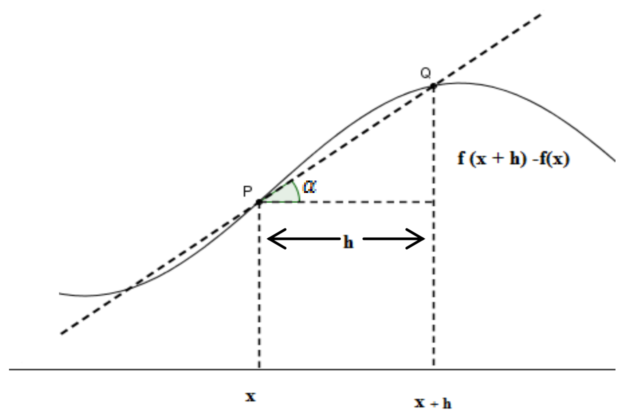


Ilustración 12. Interpretación geométrica del cociente de diferencia como tangente de un ángulo.

En la Ilustración 12 está dibujada una parte de la gráfica de una función *f*. Las coordenadas de los dos puntos *P* y *Q* son, respectivamente, $(x. f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. En el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *PQ*, la altura es $f(x+h)-f(x)$ y representa la diferencia de las ordenadas de los dos puntos *P* y *Q*; y en consecuencia, el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma *PQ* con la horizontal. El número real tg α se denomina la *pendiente* de la curva entre *P* y *Q* y da un método para valorar la inclinación de esta línea. Por ejemplo si *f* es una función lineal, digamos $f(x) = mx + b$, el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tiene el valor *m*, de manera que *m* es la pendiente de la curva.

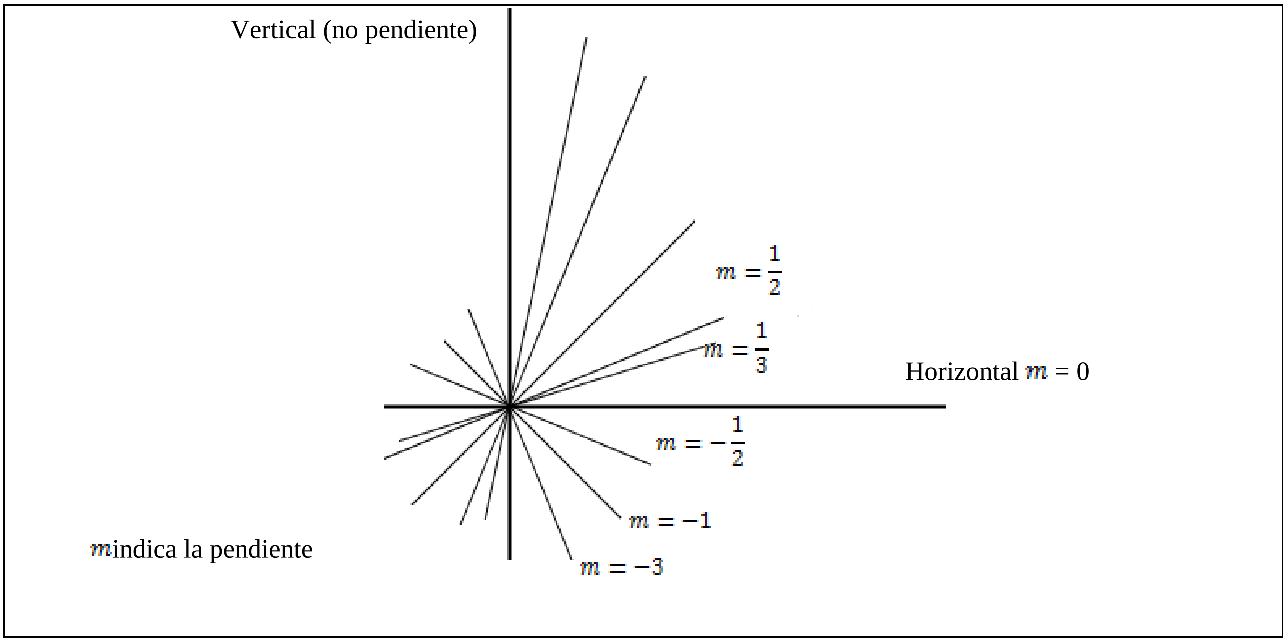


Ilustración 13. Rectas de pendiente distinta

En la Ilustración 13 se dan algunos ejemplos de rectas de distinta pendiente. Si se traza una recta horizontal, $\alpha = 0$ y la pendiente, $tan\alpha$, es también 0, Si α está entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, yendo de izquierda a derecha, la ruta es ascendente y la pendiente está representada por un número positivo. Si α está comprendido entre $\frac{1}{2}\pi$ y π, yendo de izquierda a derecha la recta es descendente y la pendiente negativa. Una recta en la que $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, tiene pendiente 1. Si α crece de 0 a $\frac{1}{2}\pi$, $tan\alpha$ crece más allá de todo número y las rectas correspondientes a tales pendientes se aproximan a la posición vertical. Puesto que $tan\frac{1}{2}\pi$ es indefinida, se dice que las *rectas verticales no tienen pendiente*.

Sea *f* una función que tiene derivada en *x*, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando *h* tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender *h* a cero, el punto *P* permanece fijo pero *Q* se mueve hacia *P* a lo largo de la curva y la recta *PQ* se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto *P* el número $f'(x)$. La recta por *P* que tiene esta pendiente se denomina la *tangente* a la curva en *P*.

Nota: El concepto de tangente a una circunferencia (y a algunas otras curvas especiales) ya había sido considerado por los antiguos griegos. Definían la tangente a un círculo como la recta que tenía un punto común con el círculo y todos los demás fuera de él. De esta definición se pueden deducir muchas de las propiedades de las tangentes a los círculos. Por ejemplo, se puede demostrar que la tangente en cada punto es perpendicular al radio en este punto. Sin embargo, esta definición de tangente dada por los griegos para el círculo no se puede extender fácilmente a otras curvas. El método anterior, en el que la tangente se define a partir de la derivada, ha demostrado ser más satisfactorio. Utilizando esta definición para obtener la tangente al círculo, se puede probar que la recta así encontrada, tiene todas las propiedades halladas por los geómetras griegos. Conceptos como perpendicularidad y paralelismo se pueden explicar analíticamente en forma simple, utilizando las pendientes de las rectas. Por ejemplo, de la identidad trigonométrica.

$$tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha tan\beta},$$

Se sigue que dos rectas no verticales, con la misma pendiente, son paralelas. También de la identidad:

$$cot(\alpha-\beta)=\frac{1+tan\alpha tan\beta}{tan\alpha-tan\beta},$$

Se deduce que dos rectas no verticales cuyas pendientes tienen como productos -1 son perpendiculares.

El signo de la derivada de una función es de utilidad para precisar la forma de la gráfica. Por ejemplo, si en un punto *x* de un intervalo abierto la derivada es *positiva*, la gráfica es ascendente en la proximidad de *x* al pasar de izquierda de *x* a la derecha. Esto ocurre en x_3 en la Ilustración 14.

Una derivada *negativa* en un intervalo indica que la gráfica es descendente como ocurre en x_1, mientras que una derivada cero en un punto significa una tangente horizontal. En un máximo o mínimo tales como los indicados en x_2, x_5 y x_6 la pendiente ha de ser cero. Fermat fue el primero que observó que puntos como x_2, x_5 y x_6 donde *f* tiene un máximo o un mínimo se han de encontrar entre las raíces de $f'(x) = 0$. Es importante hacer notar que $f'(x)$ puede ser cero en puntos en los que no hay máximo ni mínimo, tal como ejemplo, en x_4. Obsérvese que estas tangentes particulares, atraviesan la gráfica. Éste es un ejemplo de una situación no incluida en la definición de tangencia de los griegos.

Las anteriores observaciones relativas al significado del signo de la derivada se pueden considerar como obvias si se interpretan geométricamente.

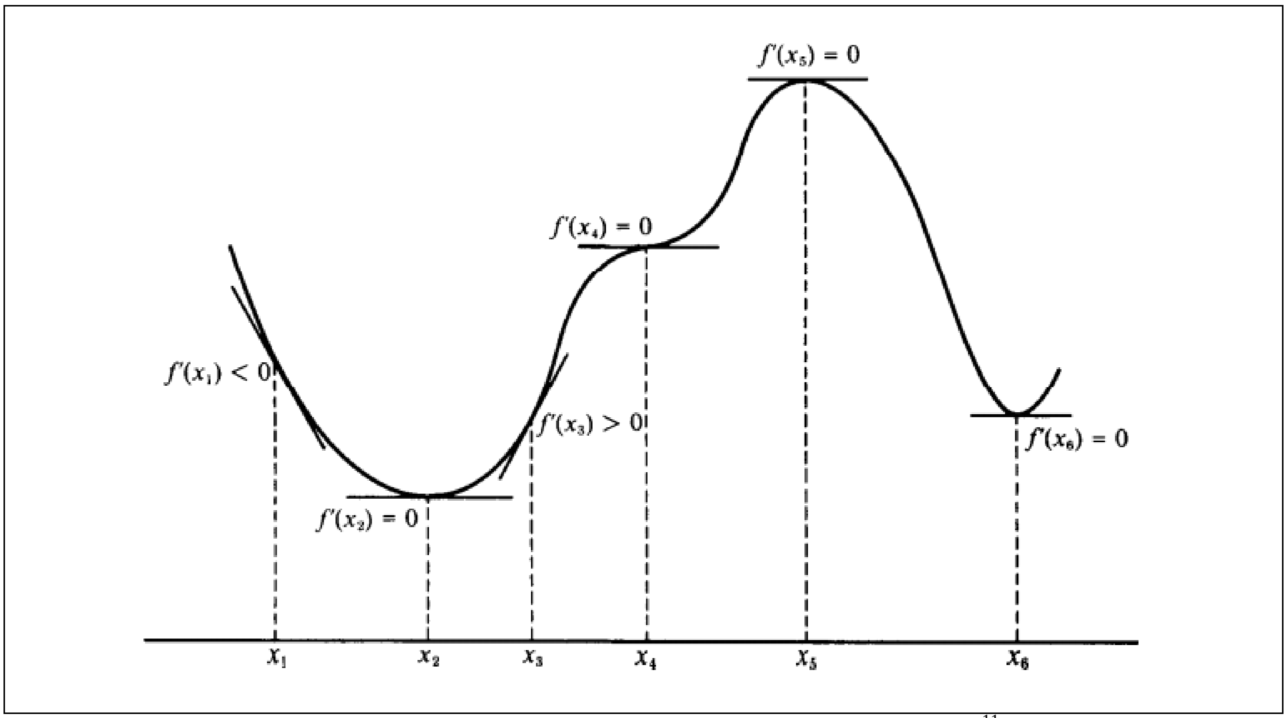


Ilustración 14. Significado geométrico del signo de la derivada. [11]

2.6.3 INTERPRETACIÓN ANALÍTICA DE LA DERIVADA

[11] Tomado de Apostol (1988, Volumen 1)

En la geometría plana, la recta tangente l en un punto P sobre una circunferencia se puede definir como la recta que tiene solamente un punto P en común con tal circunferencia, como se ilustra en la Figura 5.1. Esta definición no se puede aplicar a cualquier gráfica, ya que la recta tangente puede cortar a una gráfica varias veces, como se muestra en la Figura 5.2.

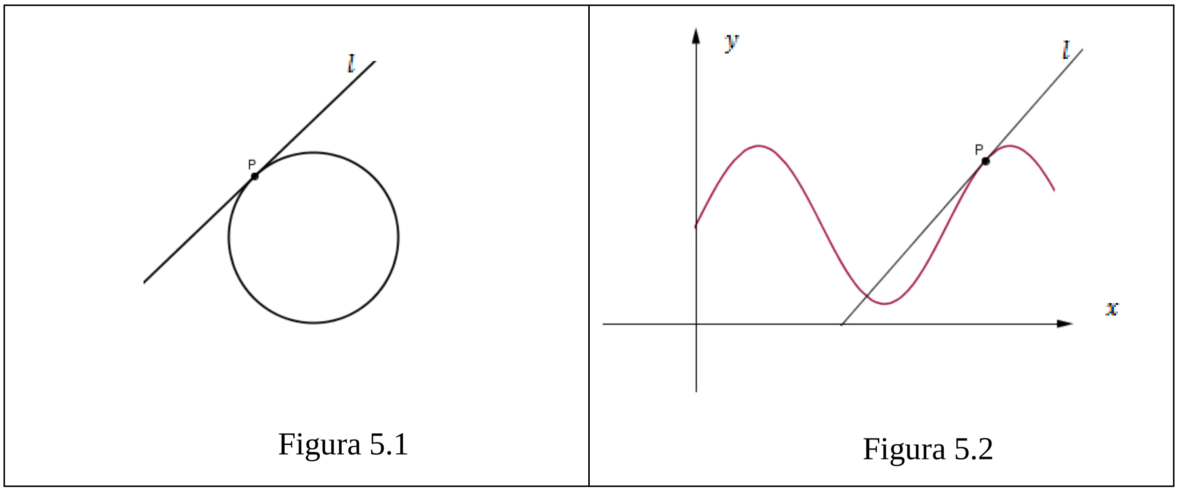


Ilustración 15. Recta tangente a la curva en un punto P.

Para identificar la recta tangente l a la gráfica de una función en un punto P, basta especificar la pendiente m de l, ya que ésta y el punto P determinan completamente a la recta. Para encontrar m se escoge otro punto Q sobre la gráfica y se considera la recta l_{PQ} que pasa por P y Q, como se muestra en la Figura 6.1. La recta l_{PQ} es una **recta secante** de la gráfica.

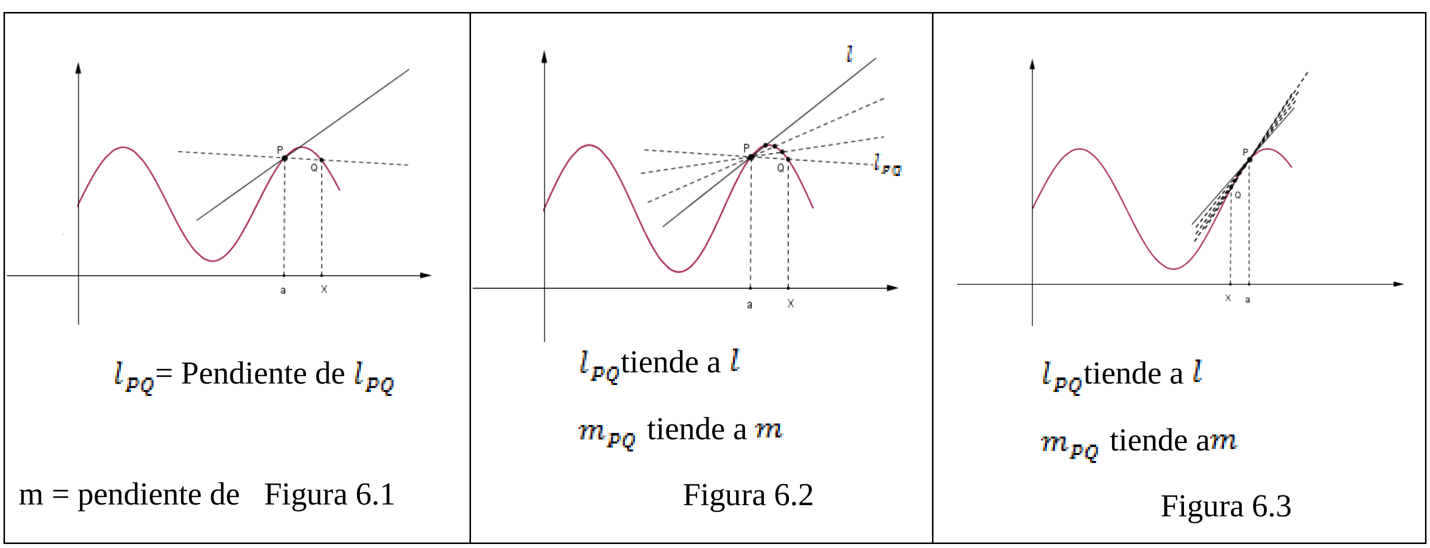


Ilustración 16. Pendiente de la recta tangente $l$como límite de las pendientes de las rectas secantes.

Sea m_{PQ} la pendiente de l_{PQ}. Ahora se considera la variación de m_{PQ} cuando Q se acerca a P. Si Q tiende a P por la derecha se tiene la situación ilustrada en la Figura 6.2, en la que se señalan varias posiciones de la recta secante l_{PQ} correspondientes a las diversas posiciones de Q , por medo de línea punteada. Se ve que para Q cercano a P, la pendiente m_{PQ} debe ser muy parecida a la pendiente m de l. En la Figura 6.3 Q tiende a P por la izquierda y, nuevamente, se ve que m_{PQ} se acerca a m. Estas observaciones sugieren que si m_{PQ} tiende a algún valor fijo cuando$Q$ tiende a P, entonces ese valor se debe usar para definir la pendiente de la recta tangente l en P.

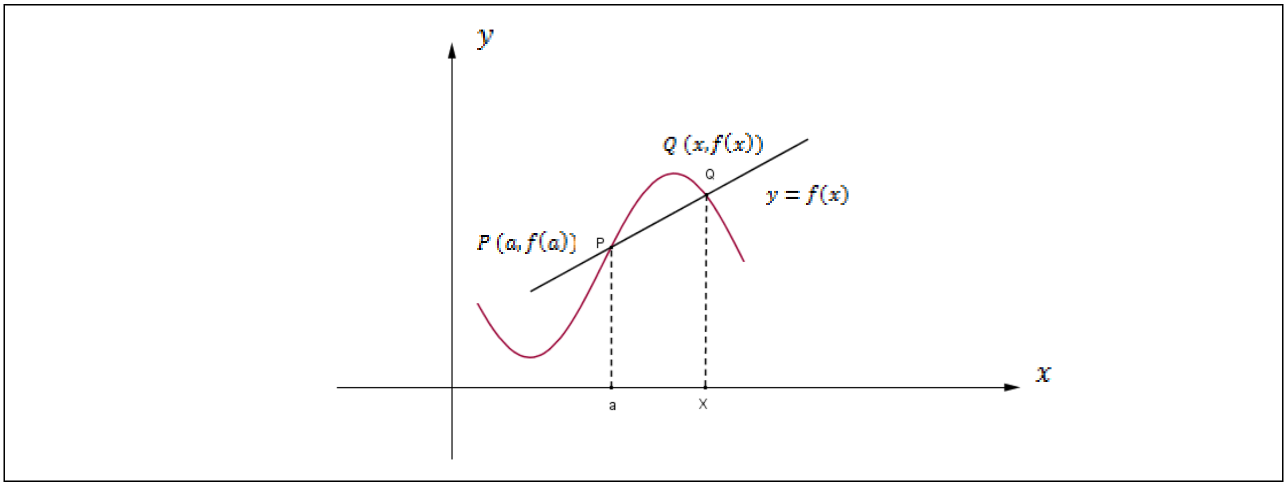


Ilustración 17. Pendiente $m$de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$

Si la función f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, entonces marcamos las coordenadas P y Q como en la Ilustración 17. Usando la fórmula para la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene que la pendiente de la recta secante l_{PQ}es:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con esta notación, puede sustituirse la frase Q tiende a P por x tiende a a. Así se llega a la siguiente definición.

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **pendiente m de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siempre y cuando el límite exista

2.6.4 EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

Como se había dicho los griegos habían establecido que la recta tangente a una circunferencia, en un punto *P*, es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia; sin embargo analizando otras curvas se encontró que esta definición no era adecuada. En Uribe (2001) se encontró que el primer paso en la solución del problema consistió en precisar lo que debía entenderse por recta tangente a una curva en un punto dado. Con este fin, G.W. Leibniz hizo lo siguiente:

1. Dibujó una curva, marcó un punto *P* en ella y tomó un pequeño arco de la curva en las proximidades de *P*.
2. A continuación, trazó una circunferencia que se "ajustara" al pequeño arco tomado; este círculo recibe el nombre de *CIRCULO OSCULADOR*.
3. Finalmente trazó la recta tangente a esta circunferencia, por el punto *P*. Esta tangente es precisamente la recta tangente a la curva en *P*.

El segundo paso dado por Leibniz fue el siguiente: aprovechando que René Descartes había inventado la Geometría Analítica unos años antes, redujo el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a determinar su *pendiente*, puesto que ya se conocían las coordenadas del punto *P*. Con esta certeza, Leibniz encontró que esta pendiente podía *aproximarse* calculando la pendiente de otras rectas que pasan por *P* y por otro punto *Q* de la curva. Estas rectas reciben el nombre de *rectas secantes* (del latín secare que significa cortar).

Concluyó, entonces Leibniz que: **“la pendiente de la recta tangente es el límite de la pendiente de la secante, cuando *Q* se aproxima a *P*” (Ver Ilustración 18).** La anterior es una descripción gráfica de la solución del problema de la recta tangente.

Luego si una función ***f*** **es derivable en un intervalo abierto** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ si lo es en todos los números *c* de (a, b). También se considerarán funciones que son derivables en un intervalo infinito $(a, \infty), (-\infty, a)$ o bien $(-\infty, \infty)$. Para intervalos cerrados usamos la siguiente convención que es análoga a la definición de continuidad en un intervalo cerrado.

Una función f es derivable en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ***si lo es en el intervalo abierto*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ***y los límites:*** $\boldsymbol{lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ y $\boldsymbol{lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}}$***, existen.***

Los límites por la derecha y por la izquierda en la definición se llaman **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda** de *f* en *a* y *b*, respectivamente. Nótese que para la derivada por la derecha se tiene $h \to 0^+$ y $a + h$ tiende a *a por la derecha.* Para la derivada por la izquierda se tiene que $h \to 0^-$ y $b + h$ tiende a *b por la izquierda.*

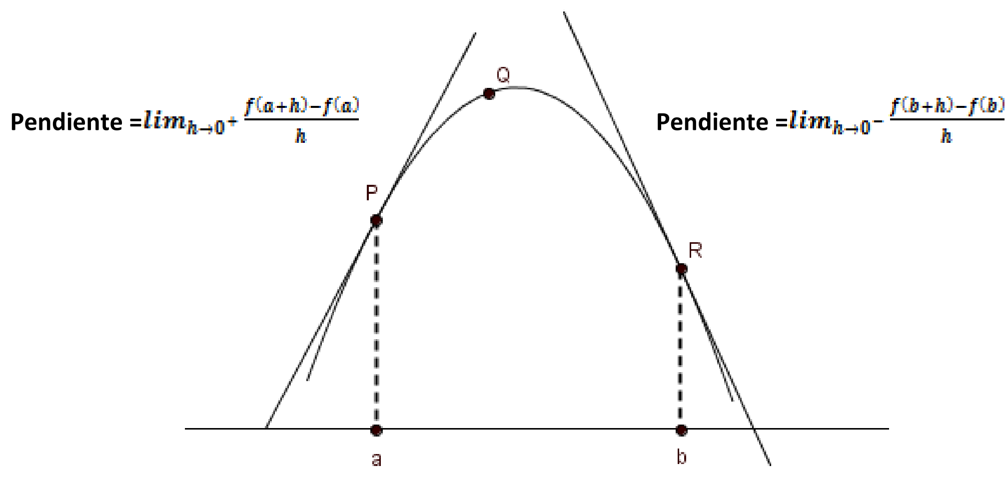


Ilustración 18. Límites unilaterales o derivada por la derecha de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ y derivada por la izquierda de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{b}$.

Si *f* es una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y no está definida fuera de él, entonces las derivadas por la derecha y por la izquierda permiten definir las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $P(a, f(a))$ y $R(b, f(b))$, respectivamente, como se representa en la Ilustración 22. Por lo tanto, para obtener la pendiente de la recta tangente en *P* se toma el valor límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por *P* y *Q* cuando *Q* tiende a *P* por la derecha. Para la recta tangente en *R*, el punto *Q* tiende a *R* por la izquierda.

La derivabilidad de una función en intervalos de la forma $[a, b), [a, \infty), (a, b]$, o bien $(-\infty, b]$ se define usando los límites por la izquierda o por la derecha en uno de los puntos extremos.

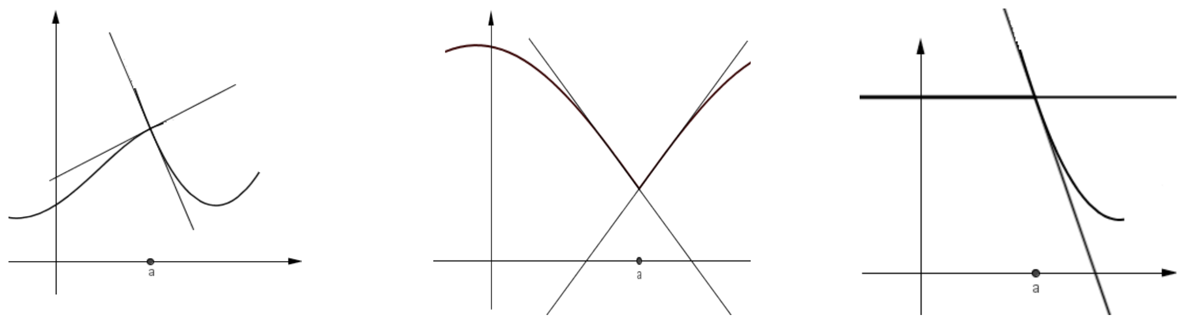


Tabla 1. Pendientes diferentes de las rectas $\boldsymbol{l_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$. Luego $\boldsymbol{f'(a)}$) no existe.

Si *f* está definida en un intervalo abierto que contiene a *a*, entonces $\boldsymbol{f'(a)}$***existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.*** Las funciones cuyas gráficas se muestran en la Tabla 1, tienen derivadas por la derecha y por la izquierda en ***a***que corresponden a las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente. Sin embargo, como las pendientes de l_1 y l_2 no son iguales, $\boldsymbol{f'(a)}$ ***no existe***.En general, si la gráfica *f* tiene un *pico* en el punto $P(a, f(a))$, entonces *f* no es derivable en ***a***.

Si *f* es derivable para todo *x* en un intervalo entonces, asociando a cada *x* el número $f'(x)$, se obtiene una función f' llamada **derivada de *f***. El valor de f' en *x* está dado por el siguiente límite (o por un límite unilateral).

Derivada de *f*.	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2.7 OBSTÁCULOS Y DIFICULTADES PRESENTES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS

> *Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra* (Bachelard,2000, p.15).

2.7.1 INTRODUCCIÓN

En el aprendizaje de los conceptos científicos fue Gastón Bachelard, al identificar elementos correspondientes al entendimiento que dificultan el conocimiento de lo real, quien realizó aportes de fundamental importancia. Su definición de obstáculos epistemológicos permitió a la teoría del conocimiento involucrar en alguna el conocimiento de la psicología, puesto que dichos obstáculos acontecen como dificultades psicológicas que intervienen, sustancial y denegadamente, en la asimilación adecuada del conocimiento formal. Estos conflictos de carácter psicológico se convierten en obstáculos que se identifican con las inherentes limitaciones de la capacidad orgánica de los sentidos, presente en los seres humanos, para dar cuenta y aprehender los diferentes fenómenos presentes en la naturaleza o con el empleo inadecuado de dispositivos materiales al momento de participar en la investigación y estudio de los eventos naturales.

Por tal, los obstáculos epistemológicos no hacen referencia a la dificultad o a lo complejidad en sí del conocimiento que se quiere aprehender, sino a las circunstancias psicológicas que no permiten la evolución en la formación del mismo, originando limitaciones o restricciones que llevan al menoscabo la capacidad de los estudiantes al momento de aproximarse al aprendizaje y por ende a la comprensión de un concepto.

2.7.2 CLASIFICACIÓN DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Bachelard (2000) identifica los siguientes como los principales obstáculos epistemológicos:

- El obstáculo de la experiencia primera: o los conocimientos previos, es decir el conjunto de pre-juicios o ideas primeras con las que el individuo se acerca al cómo y al por qué de los eventos o del concepto.
- El obstáculo de la generalización: o la tendencia a generalizar los conceptos para aplicarlos o dar razón a fenómenos generales que incluso se encuentran lejanas del concepto.
- El obstáculo de la noción real: o el tomar una única noción del evento o concepto estudiado como una realidad científica.
- El obstáculo verbal: o el léxico con el cual se presentan determinados términos y que inciden en una falsa explicación mediante una sola palabra o una imagen.
- El obstáculo del conocimiento unitario y pragmático: o el tomar la unidad total de un evento sin hacer objeto de estudio a sus partes. O simplemente se incurre en el error de ofrecerle definición o significado al evento o concepto que tiene un valor de utilidad, desconociendo otros aspectos u otras referencias de investigación.
- El obstáculo de la sustancialidad: o el estudio exclusivo de la superficie del evento, de la sustancia exterior del mismo sin profundizar en las partes más internas.
- El obstáculo animista: o la tendencia a explicar ciertos fenómenos o conceptos haciendo analogías con la naturaleza animada.
- El obstáculo de la libido: o el tomar como conocimiento científico cualquier idea equivocada de un investigador científico con poder o prestigio.

- El obstáculo de lo cuantitativo: o la tendencia a considerar exclusivamente todo lo que puede ser medible o cuantificable en detrimento de las apreciaciones u observaciones cualitativas.

2.7.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

La mayor parte de las limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la construcción de conceptos se encuentran inscritas al interior del proceso de formación mismo. Aparecen en el acto propio del conocer suscitando inercias, embotamientos o confusiones.

Para D'Amore y Fandiño (2010) en la didáctica de las matemáticas se distinguen, de acuerdo a su origen, tres tipos de obstáculos: obstáculos de naturaleza ontogenética (están más en afinidad con la evolución individual del estudiante y tienen que ver con el desarrollo de la inteligencia, de los sentidos y de los sistemas perceptivos), obstáculos didácticos (originados por los procedimientos de enseñanza, puesto que cada docente elige un proyecto, una metodología e interpreta de forma personal la transposición didáctica de acuerdo con sus convicciones ya sean científicas o didácticas) y obstáculos epistemológicos (provenientes de la historia de la evolución del concepto, de la naturaleza misma del argumento, gracias a una no continuidad, una fractura, un cambio radical de la concepción).

En perspectiva de Bachelard los errores son los síntomas de los obstáculos epistemológicos, aunque es necesario considerar también que estos, además obedecen a causas didácticas y cognitivas. D'Amore y Fandiño (2010) plantea que: en didáctica de las Matemáticas el concepto de obstáculo epistemológico fue adoptado por Brousseau, para quien el conocimiento se manifiesta cuando el obstáculo ha sido superado.

A continuación y en perspectiva al trabajo realizado por Dolores (2000), se hacen mención de algunos errores y obstáculos en los que incurren los estudiantes al momento de profundizar en el estudio del concepto de la derivada.

Algunos de estos errores y obstáculos se presentan en el trabajo desarrollado por Dolores (2000) en donde se reportan los resultados arrojados por estudiantes después de haber terminado un curso de calculo diferencial.

Las observaciones a este respecto señalan el dominio razonable de los algoritmos algebraicos, alcanzado por los estudiantes, para determinar el cálculo de límites y derivadas, pero persisten dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite aplicado a la noción de derivada y hace hincapié en la existencia de dificultades aún mayores en la resolución de problemas de aplicación del concepto de derivada.

En el trabajo de Dolores (2000) un gran número de estudiantes demuestran habilidad para obtener la derivada de una función algebraica mediante el empleo de fórmulas, pero a su vez evidencian dificultad para comprender y problematizar la aplicación de esos algoritmos y el significado del concepto. De otro lado es escasa la asociación de ideas claves del cálculo en la solución de problemas elementales sobre la variación, no obstante el sentido, en la perspectiva histórica, y evolución del concepto.

Además, en la organización de los contenidos se observa una fuerte inclinación y preponderancia hacia la estructura formal del análisis matemático, permitiendo en exlusivo, un enfoque abstracto del concepto con una muy pequeña transversalidad con los fenómenos de la variación física, se impone un predominio sobre el trabajo algorítmico conjuntamente con una escasa orientación metodológica.

Aunque algunos escenarios de aprendizaje plantean la interpretación geométrica del concepto, lo hacen alejados de la cuantificación de la rapidez de la variación, en la cual encuentra su razón de ser el concepto y con la que se podría facilitar la comprensión esencial del mismo.

En este sentido una de las dificultades en la formación del concepto de derivada, con la geometría como herramienta, es la concepción griega de tangente que persiste en los estudiantes desde sus cursos elementales. La concepción como tal obstaculiza notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo. Asimismo, obstaculiza la comprensión fundamental de que la recta tangente pueda “tocar” y también “cortar” a la curva y continuar siendo tangente en la zona de corte. Además, su carácter estático en perspectiva de la geometría euclidiana, al ser concebida como un lugar geométrico, deviene también en obstáculo cuando su concepción se intenta desde un sentido dinámico, a través de la sucesión de secantes (haz de secantes).

Finalmente, otro de los obstáculos principales en la comprensión del concepto, se infieren al considerar la derivada desde su noción de límite. Para un grueso número de estudiantes es difícil comprender que se pueda llegar a la recta tangente a través de una sucesión de secantes. En estos, existe una fuerte inclinación a evadir los procesos infinitos, considerando la noción de límite como una aproximación que se obtiene evaluando la función en el valor deseado. Este obstáculo se ve reforzado con el escaso manejo de la simbología y el lenguaje formal propio de la matemática.

3 DISEÑO, PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS DE INTERVENCIÓN PARA LA EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

3.1 DISEÑO Y PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

En dirección a la inquietud de la pregunta de investigación: **¿Cómo promover avances en la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de un curso de cálculo, sobre la base del modelo de Pirie y Kieren?** Y en consideración a un proceso sistemático y de indagación a un acto educativo, en el cual se pretende considerar a los actores de directa intervención en el proceso como un todo de expresión y de manifestación, y en lo absoluto, reducirlos a una sola variable. En congruencia con las características anteriores y sin desvirtuar otros enfoques el presente trabajo de investigación se ubica dentro de la metodología cualitativa.

Según lo considera Albert Gómez (2007), en el enfoque cualitativo, la recolección de datos tiene como objetivo obtener información de sujetos, comunidades, contextos o situaciones. El investigador adopta una postura reflexiva y trata de minimizar sus creencias o experiencia de vida asociadas con el tema. Los datos cualitativos consiste por lo común en la descripción profunda y completa de eventos, situaciones, imágenes mentales percepciones, experiencias de las personas ya sea de manera individual o colectiva.

En el diseño y procedimiento de la metodología del presente trabajo, se pretende mostrar la evolución en la comprensión del concepto de la derivada sobre la base del modelo ya mencionado, utilizando métodos e instrumentos de recolección, selección e interpretación de la información de carácter descriptivo.

Los estudiantes del grupo a intervenir cursaban, en la I.E. Pbro. Antonio José Bernal Londoño el tercer o último período y en la Universidad de Medellín, el curso de cálculo diferencial ofrecido para el segundo semestre de las carreras de ingenierías. El curso se desarrolló durante el primer semestre del año 2013 según fechas establecidas por la institución, éste era orientado por el docente – asesor del presente trabajo de investigación y estaba conformado por 13 estudiantes, de los cuales se seleccionaron aleatoriamente cuatro para realizar el proceso de análisis y sistematización en perspectiva a la evolución en la comprensión del concepto. Mientras que en la I.E el tema correspondiente al concepto de Derivada estaba siendo acompañado por la docente Diana Lucia Londoño Londoño en el grado Undécimo A de los cuales se eligieron algunos estudiantes dadas sus características y habilidades observadas con los conceptos previos.

Las categorías de investigación permitieron más que la generalización, la identificación de necesidades y avances en el proceso de construcción del saber, por ello se procede a organizar la información, validación y a realizar un análisis minucioso y sistematizado de la misma, con procedimientos rigurosos aunque no necesariamente estandarizados, que permiten la valoración e interpretación de la evolución en la comprensión de los estudiantes del concepto de la derivada en su componente geométrico y la implicación de la recta tangente. Adicionalmente, la investigación es descriptiva, porque permite sistematizar de forma detallada y flexible a partir de las propias palabras de los estudiantes, habladas o escritas y de sus conductas observables, la forma como el grupo experimental avanza en la temática.

3.1.1 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El método en tanto enfoque de la investigación permite una reflexión teórica y metodológica sobre los diferentes fenómenos que intervienen en el proceso educativo, tales como en la relación del estudiante con el medio y la incidencia de éste en los procesos cualitativos de socialización, transformación y acercamiento al conocimiento, en la producción y contrastación del saber traducidos en los espacios de la práctica pedagógica, como resultado de una actividad, que en tanto humana, se encuentra condicionada por las circunstancias e historias presentes en el devenir de los grupos humanos. De ahí, que la contextualización del concepto se convierte en el espacio donde el conocimiento puede ser dotado de sentido y significación, por tanto, no puede desligarse de la realidad sociocultural en la que se encuentra inmerso el estudiante.

Según Fred Erickson, la característica más distintiva de la indagación cualitativa es el énfasis en la interpretación (Stake, 2007). En este sentido se puede entender que la investigación cualitativa es un arte, que permite al investigador, a partir de la selección y análisis de la información, identificar fenómenos del objeto de estudio. Por tal, el método deviene en medio y apoyo para su proceso de indagación, de ahí, que su función como agente cualitativo en el proceso de recolección de datos es mantener con claridad una interpretación fundamentada.

Un método o enfoque utilizado por el paradigma cualitativo es el llamado estudio de casos, cuyo objetivo es analizar y describir situaciones que se presentan en el contexto de la actividad investigativa con cierta intensidad en un periodo de tiempo corto. Su funcionalidad prevalece, a diferencia de otros métodos, porque existe una pregunta problematizadora que demanda solución, la cual se presenta, indistintamente, en un individuo, grupos de individuos, circunstancia o en un fenómeno en particular.

A propósito Albert Gómez (2007) enuncia que el potencial del estudio de casos radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos interactivos que lo conforman, así como su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales. Sin duda alguna, este método implica un fuerte proceso de indagación, interpretación y sistematización del caso objeto de interés.

En lo particular, la investigación pretende estudiar el caso de la evolución en la comprensión del concepto de derivada en su componente geométrica, en un curso de cálculo para estudiantes del segundo semestre de ingeniería. Este se hace teniendo en cuenta los factores que intervienen en el proceso de indagación de saberes previos fundamentales para la intención del objeto de estudio, describiendo la relación que el estudiante hace entre el concepto y las representaciones en las que se apoya para dar cuenta de él o para justificar el procedimiento, en perspectiva a la definición formal del concepto.

3.1.2 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Una de las tareas más importantes de la etapa de análisis y de sistematización del proceso de intervención es poder contar con el uso de técnicas e instrumentos para recopilar la información acerca del objeto de investigación, pues de ello depende la adecuada orientación hermenéutica que se deriva de la lectura de los eventos y circunstancias que puedan aparecer en la actividad investigativa.

En el caso de la investigación cualitativa el interés es dotar de sentido los datos a través del análisis crítico-reflexivo, los cuales puede ser recogidos, según el modelo propuesto por los autores quienes fundamentan su teoría en experimentos de enseñanza en ambientes constructivistas, mediante entrevistas individuales, grabaciones en video y audio de actividades desarrolladas por los estudiantes, a la vez que del análisis de sus respuestas a las diferentes intervenciones escritas u orales (Rendón, 2011)

Se trata de organizar los datos recogidos a través de las notas de campo, entrevistas en profundidad, conversatorios, observaciones, presunciones, interpretaciones de registros sincrónicos y asincrónicos, verificaciones de datos nuevos y evaluaciones, que permiten la posibilidad de analizar, comprender o hacer comprensibles a la luz del modelo sus manifestaciones de acción y expresión, hasta llegar a una serie de descriptores que permitan estructurar, y analizar el proceso de evolución de la comprensión para lograr llegar a conclusiones que permitan dar cuenta de un posicionamiento en algún nivel de acuerdo al modelo.

La triangulación de la información obtenida en el proceso de intervención, a partir de los instrumentos descritos con antelación, sumados al empleo de los mapas conceptuales, el uso de artefactos dinámicos como el Geogebra ®, permiten visualizar e identificar de manera significativa los avances conceptuales, las representaciones mentales, el cambio de actitudes y comportamientos que se manifiestan en los estudiantes que en definitiva ayudan a interpretar la transformación en las estructuras cognitivas, finalidad de la presente investigación.

Las técnicas e instrumentos de recolección de información utilizada en el proceso de intervención fueron: Mapas conceptuales, guías de trabajo, conversatorios, interacción con el software dinámico, archivos audiovisuales intencionadas según se describe a continuación.

- **Mapas Conceptuales:** Esta herramienta pedagógica se utilizó como estrategia de aprendizaje y como elemento de gestión del conocimiento, por la posibilidad que ofrece para personalizar y evidenciar el saber. Además, fue de utilidad para identificar avances, compartir conceptos, indagar por la información y por el conocimiento intuitivo con el que llega el estudiante para abordar el objeto de estudio. Asimismo, para valorar la evolución con relación al estado inicial de la intervención en la comprensión del objeto de estudio, como lo es en este caso la conceptualización geométrica de la derivada.

- **Conversatorios:** Esta técnica se utilizó para generar discusión, participación espontánea, motivación y socialización de ideas, aciertos y desaciertos en las mismas. A través de él, se dinamizaron ideas relacionadas a la temática abordada, se identificaron estudiantes comprometidos con todo el proceso investigativo, se valoró su discusión y deliberación al poner en común sus inquietudes, reflexiones y planteamientos.

- **Técnicas de análisis documental:** Se ejecutó desde la perspectiva de los investigadores (bibliofichas), teniendo presente la necesidad de darle reflexión y sustentación teórica al planteamiento, desarrollo y solución de la pregunta de investigación. En el proceso del análisis documental se seleccionaron las temáticas de acuerdo a categorías y se procedió a la revisión crítica de la información permitiendo la orientación de los argumentos descriptivos, el planteamiento y desarrollo de las guías de intervención pedagógica y la elaboración del marco teórico que sustenta el presente trabajo de profundización conceptual. Es conveniente resaltar aquí, que en encuentros programados previamente por el equipo de investigación, se hizo socialización continua de los avances teóricos de acuerdo a una participación crítica y conjunta de maestrandos y asesor.

- **Software dinámico:** El instrumento dinámico de la aplicación del Geogebra ® se utilizó para exponer y justificar los componentes conceptuales de la derivada por medio de métodos geométricos. Diferentes actividades propuestas de simulación, contrastación, exploración, verificación y relación conexa entre la geometría y el cálculo, especialmente entre la recta tangente y la derivada, fueron desarrolladas por los participantes.

Se ofreció un espacio en el que el estudiante a través de la aplicación y apropiación del Geogebra ®, como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pudo relacionar elementos del cálculo diferencial, como es el caso de la derivada como aproximación local, a partir de métodos puramente geométricos. La modelación en el Geogebra ® permitió al estudiante, además de reconocer elementos geométricos y establecer relaciones adecuadas con el cálculo, también facilitó la comprensión y por consiguiente la solución de problemas a partir de diferentes registros de representación.

- **Guías de intervención.** Estas se elaboraron orientadas por los descriptores que darán cuenta del avance y evolución de la conceptualización de la derivada durante el proceso de la actividad pedagógica. Se emplearon para identificar y recoger información de los estudiantes en lo que concierne al aprendizaje adquirido del objeto temático, motivo de interés de este trabajo. Inicialmente se aplicó una prueba diagnóstico y luego otras 4 guías complementarias al trabajo, teniendo en cuenta las acciones que se develaban en torno al desarrollo, interiorización, análisis y comprensión en los estudiantes. Las guías constaban de una fase de motivación y exploración inicial, una fase de desarrollo de nuevas ideas y una fase de consolidación y ajuste de ritmos, diseño propuesto en uno de los seminarios de la maestría.

En síntesis para el desarrollo de la investigación, se tuvo como punto de partida la construcción de referentes teóricos a través de categorías deductivas. Posteriormente se diseñó una propuestas metodológica que permitiera dar respuesta a la pregunta de investigación**,** adicionalmente, se incluyó el diseño de instrumentos tanto para la recolección como para el procesamiento de la información en el proceso de la actividad pedagógica; después, se realizó el proceso de intervención y desarrollo de las guías e incorporación de los diferentes instrumentos, luego se hicieron los ajustes necesarios en perspectiva a los resultados y condiciones encontradas en la ejecución de la propuesta.

Posteriormente se centrará la atención en el análisis, procesamiento y sistematización de la información en relación a la claridad que permite la solución de la pregunta de investigación formulada. (Aún no se ha hecho)

3.1.3 COMPROMISOS ÉTICOS DE LA INVESTIGACIÓN

Es de anotar que el equipo de investigadores (maestrandos y asesor), informo a los estudiantes que participaron en el presente trabajo con claridad y veracidad debida respecto al mismo, sus objetivos y procedimientos. Cada uno de ellos actuó consciente, libre y voluntariamente como participantes contribuyendo a la fase de recolección de información. Para tal efecto se asumió un compromiso de confidencialidad e intimidad de la información suministrada, respetar y no revelar sus identidades, mantener un trato cordial y favorecer la libertad de expresión y de resolución de actividades. Se les valora y agradece la disposición manifiesta para desarrollar, aportar y participar en las diferentes actividades propuestas y la amplitud de la información ofrecida e inferida que contribuyó con los objetivos propuestos.

Así pues, se garantiza ética en el manejo y publicación de la información suministrada por los estudiantes que participaron del trabajo, tales como fotografías, grabaciones, imágenes, trabajos y demás evidencias que permitieron el análisis de las categorías emergentes en el diseño metodológico.

3.1.4 NIVELES Y DESCRIPTORES PARA IDENTIFICAR LA EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

Luego de haber realizado una descripción general de los presupuestos de los niveles del Modelo de Pirie y Kieren, y en igual sentido, de haber identificado las características propias del mismo, se hizo necesario, definir los descriptores, algunos parámetros transversales a las instancias teóricas propias del modelo y a las categorías necesarias para abordar el objeto de estudio, que permitieran, en primer lugar elementos de lectura y de verificación, siempre a la luz de la teoría, de las acciones propuestas en el desarrollo de las actividades de intervención.

Además, el cuerpo de descriptores para cada nivel aparecen como instrumentos metodológicos empleados, ya sea para hacer identificar obstáculos en alguno de los niveles, o para determinar la movilización o paso de un nivel a otro, permitiendo con ello la visibilización, de las características esenciales del Modelo, en lo particular, y en lo general, la evolución de la Comprensión del concepto por parte del estudiante; toda vez que se cumplieran las intenciones didácticas y de aprendizaje, subyacentes en ellos y tendientes a favorecer los procedimientos, los razonamientos y la Comprensión misma, en lo local o global del concepto de estudio.

Para tal efecto, en perspectiva de la teoría del Modelo de Pirie y Kieren y teniendo en cuenta la preocupación de la investigación en referencia al componente geométrico del concepto, aspecto que cobra relevante fuerza e importancia en los niveles de Creación y Comprensión de la Imagen, se propuso una definición de descriptores para los primeros tres niveles. A continuación se presentan los tres grupos de descriptores definidos para la evolución del concepto de la derivada en su componente geométrico bajo el Modelo de Pirie y Kieren.

Nivel 1. Conocimiento primitivo

Desde el contexto de la teoría, según lo expone Meel (2003) el proceso de la comprensión se inicia en el centro del modelo, allí como punto inicial se tienen en cuenta todos los conocimientos e informaciones, además de las experiencias de aprendizaje previas, que trae el estudiante para iniciar su recorrido. Para este nivel se definieron los siguientes descriptores:

- Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica
- Reconoce formas de representaciones de funciones reales apoyados en las propiedades de la recta tangente.
- Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local
- Realiza representaciones gráficas de funciones elementales
- Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes...)

- Expresa una idea informal del concepto de tangencia.
- Hace uso de los mapas conceptuales para evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto de derivada

Nivel 2. Creación de la imagen

En este nivel la búsqueda ha de hacerse teniendo en cuenta la capacidad del estudiante para realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos previos. Las imágenes, presentes aquí no son exclusivamente representaciones pictóricas, acontecen como imágenes mentales que transmiten significado, buscando relaciones entre los referentes y los símbolos. En correspondencia, se intencionan como descriptores los siguientes:

- Reconoce y diferencia la representación gráfica de una función y la de su derivada.
- Determina la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación.
- Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica.
- Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético.
- Reconoce el mecanismo del haz de secantes como instrumento para validar el concepto formal de la derivada.

Nivel 3. Comprensión de la imagen

La expectativa teórica de este nivel está orientada en reconocer la forma en que las imágenes asociadas con una sola actividad son reemplazadas por una imagen mental, la cual, a su vez, se precisa como imagen orientadora de un proceso mental. Los descriptores definidos para este nivel son:

- Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada en su componente geométrica.
- Caracteriza y grafica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada.
- Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos.

- Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes.
- Elabora un mapa conceptual que refleja los conocimientos adquiridos y contenidos abordados sobre el concepto de derivada.

En la siguiente tabla se referencian las características de los niveles y los descriptores que permiten determinar el paso de un nivel a otro, anteriormente descritos:

3.2 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS INSTRUMENTOS DEL PROCESO DE INTERVENCIÓN

La intención dela presente sección es revelar los resultados obtenidos en los estudiantes, en cuanto a la evolución de la comprensión del concepto de derivada como aproximación local, a partir del análisis del trabajo realizado por éstos con base en el Modelo propuesto por Pirie y Kieren. Ésta temática es considerada como fundamento matemático para el desarrollo y razonamiento del cálculo infinitesimal, su estructura y tratamiento requiere del uso de procesos cognitivos propios de las matemáticas, como lo son la abstracción, la formalización, la deducción y el análisis.

De acuerdo a lo propuesto en los referentes conceptuales, analizados en el capítulo II, una de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada y temáticas asociadas, que aparece con mayor recurrencia en los estudiantes en relación a las rectas tangentes a una curva, es aquella que atañe al trazo de la tangente a una circunferencia como representación mental generalizada y que impide la aplicación del concepto a otras curvas. En este sentido, la distancia conceptual y de aplicación en referencia a la imagen del concepto y definición del mismo (Tall y Vinner, 1981) entre una recta secante y tangente a una curva.

De igual manera, el fundamento teórico también aduce que sumado a lo anterior, las concepciones de derivada y de función, como característica variacional y límite como consecuencia de tendencia, se presentan como dificultades que limitan fuertemente la comprensión.

Es así, como a partir de lo anterior se considera necesario, en primer lugar proponer acciones que permitan indagar los conceptos primitivos con los que cuentan los estudiantes para abordar el concepto de la derivada en su componente geométrico como aproximación local, que permitan identificar las dificultades y errores de tipo cognitivo que poseen los estudiantes para el aprendizaje de los mismos y que de alguna manera determinan o condicionan el alcance de los objetivos planteados en el trabajo de investigación.

En segundo lugar, se encuentran las actividades de intervención orientadas a determinar la pendiente de las rectas tangentes a una curva por medio del haz de secantes, y la identificación de la existencia o no de la derivada a partir de los criterios del límite y de las tangentes. En esta fase los estudiantes desarrollarán las acciones propuestas en los instrumentos anteriormente descritos, los cuales utilizarán la herramienta dinámica del Geogebra ® ®, para representar los objetos matemáticos. Estas acciones tienen la intención de promover las concepciones iniciales de los estudiantes observadas en la fase de la observación y diagnóstico del grupo, para profundizar en el concepto objeto de estudio del presente trabajo y significar cualquier idea que el estudiante pueda tener sobre elementos constitutivos, como tangente, pendiente, aproximación, límite, entre otras, para reconocer las propiedades globales del objeto matemático de la derivada y a partir del desempeño del estudiante tener elementos para identificar su nivel de comprensión a la luz del modelo.

Y por último, se encuentra la fase de consolidación y ajuste de ritmos, en la que la aplicación de las teorías abordadas y especialmente la valoración del nivel de comprensión de los estudiantes se encuentran directamente asociados a la experiencia y significancia de los estudiantes al objeto de estudio y afines, puesto que la idea es desarrollar, evolucionar secuencialmente las estructuras cognitivas para acceder a conceptos cada vez más elaborados como es el de la derivada. Por ello se propondrán actividades finales como el instrumento evaluativo, el mapa conceptual final y actividades a través del software, que permitan determinar y validar las propiedades del objeto matemático, identificar la evolución en la comprensión matemática sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico y la relación con el valor de la pendiente de la recta tangente. Estas actividades en definitiva permitirán rastrear el manejo del lenguaje matemático, la comprensión conceptual de los elementos constitutivos del objeto geométrico de la derivada y la progresión en las definiciones y argumentos verbales, escritos y gráficos de los cuales se vale el estudiante en el desarrollo de las mismas.

Las anteriores fases tienen su sustento teórico en el modelo para la comprensión propuesto por Pirie y Kieren (Meel, 2003), donde el organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión. Y en las representaciones semióticas, propuesta por Raymond Duval (1999), en la cual se afirma que la comprensión de un concepto matemático debe aplicar la coherente articulación entre diferentes registros de representación y es menester del docente propiciar experiencias de aprendizaje que posibiliten la visualización del objeto de estudio. En la actividad propuesta, el estudiante tiene la posibilidad de identificar diferencias a partir de sus capacidades y poner en evidencia los conocimientos anteriores desde diferentes representaciones del concepto anteriormente mencionado.

No obstante, el análisis de los instrumentos que permitieron la recolección de la información se realizará por bloques. En el primer bloque se encuentran las actividades iniciales de intervención: Los mapas conceptuales y la prueba diagnóstica. En el segundo bloque se encuentran la intervención en la que se define analíticamente el concepto objeto de la presente investigación, y el proceso de caracterización y formalización del mismo través del mecanismo del haz de secantes y su pertinente verificación con el software Geogebra ®. Finalmente, en el bloque tres se encuentran los instrumentos finales de validación de las teorías abordadas y que permiten la valoración del nivel de comprensión de los estudiantes, estos son el mapa conceptual final, el instrumento evaluativo y el aplicativo en Geogebra ®.

BLOQUES	ACTIVIDADES
BLOQUE 1	• Mapas conceptuales iníciales. • Prueba diagnóstica.
BLOQUE 2	• Intervención y construcción analítica del concepto de la derivada en su componente geométrico. • Intervención 3: Pendiente y Haz de Secantes.
BLOQUE 3.	• Aplicativo en el Geogebra ®. • Instrumento evaluativo • Mapa conceptual final.

Tabla 2. Bloques y actividades a analizar.

El análisis de las fuentes de información devenidas en su mayoría de todas las producciones orales, gestuales y escritas de los estudiantes, que a su vez se registraban a través de diarios de campo de los investigadores, grabaciones en audio y video y en las producciones escritas por los estudiantes en cada una de las actividades de intervención fueron sistematizadas con rigurosidad durante todo el proceso de investigación.

3.2.1 ANÁLISIS BLOQUE 1

3.2.1.1 ANÁLISIS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES INICIALES

El conocimiento previo de los estudiantes es un factor de relevante importancia durante el proceso de aprendizaje y enseñanza, a través de éste, se establece el punto de partida y se identifica el manejo conceptual con el cual dispone el estudiante, para movilizar su estructura cognitiva en relación al objeto de estudio a tratar, como es el de derivada. De otro lado, y en dirección al proceso de enseñanza es de notable utilidad para el docente, puesto que al tomar éste como lente, le permite hacer lecturas y por ende, diseñar y aplicar estrategias y acciones con las cuales pueda movilizar y promover niveles de comprensión. Según lo propone Novak (1988), el profesor puede utilizar los mapas conceptuales para determinar qué rutas se siguen para organizar los significados y negociarlos con los estudiantes, así como para señalar las concepciones equivocadas que se puedan tener.

Consecuente con esto, se propone a los estudiantes la construcción de un mapa conceptual utilizando los siguientes conceptos matemáticos: recta, tangente, secante, figuras, curvas, frontera, función, pendiente, punto, y el uso, si lo consideran necesario de otros términos que complementen en mejor forma la estructura del mapa.

Es así como la propuesta del diseño del mapa conceptual, es una herramienta para visualizar la relación y la jerarquización que el estudiante hace de los conocimientos a priori, requisito indispensable para favorecer aprendizajes significativos del concepto que se espera sea aprendido. Su utilización da cuenta del cambio y evolución del aprendizaje antes, durante y posterior a las actividades de intervención.

Así pues, cuando se les pide a los estudiantes realizar un mapa conceptual con base en los conceptos expuestos, se da el caso de encontrar estudiantes que buscan el concepto más general que relacione los otros. Las vinculaciones de las palabras dadas en su mayoría, evidencian una propuesta de acercamiento a los registros de representación algebraica y geométrica. En el primero, porque las definiciones y los enlaces utilizados apuntan a temáticas propias a la de función lineal e identificación de sus propiedades como punto, término independiente, pendiente, relación, ecuación, posiciones relativa de dos rectas en el plano, entre otras. En cuanto a la representación geométrica, se destaca la asociación de los conceptos punto, recta y curva de la geometría euclidiana, teniendo al punto como unidad elemental y continua que determina las demás.

Los mapas conceptuales que se analizarán a continuación, traen consigo una estructuración realizada por los estudiantes, de los conceptos matemáticos dados. Se observará la jerarquización de los mismos y las relaciones que establecen para dar a conocer en parte los conocimientos primitivos que traen consigo como punto de partida para abordar el objeto de estudio comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico.

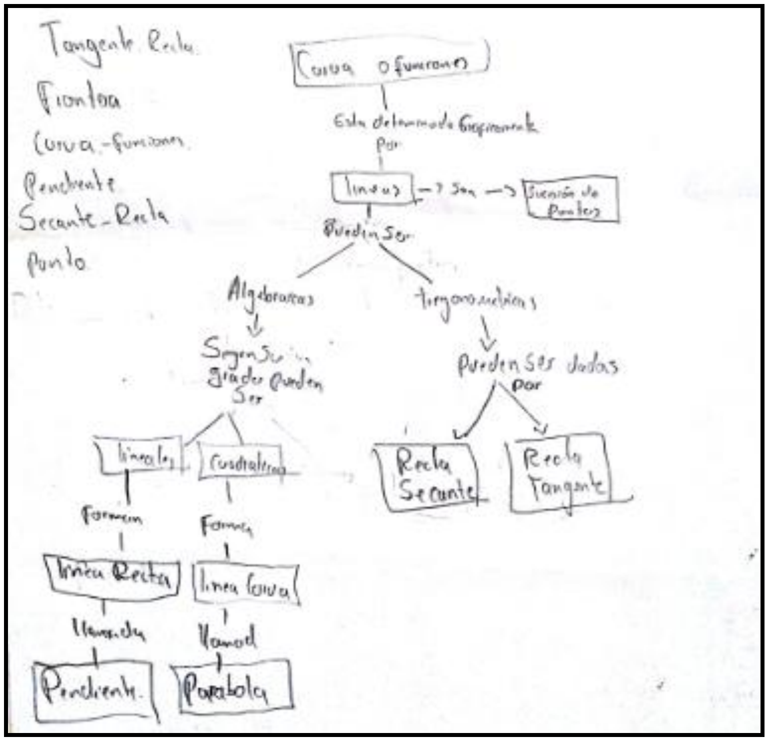


Ilustración 19. Mapa conceptual realizado por Julián.

En el mapa conceptual realizado por Julián, a partir de conceptos relevantes seleccionados de los contenidos previos a la temática de la derivada, está encabezado con la palabra función, la cual según él está determinada gráficamente por líneas, definiéndolas como una sucesión de puntos y que pueden ser algebraicas y trigonométricas. Se percibe una relación de los conceptos matemáticos como una mención de los temas propios de los grados noveno y décimo. Las palabras claves como frontera y curva, no las incluyó en el mapa conceptual, las cuales son propias del cálculo visto en el último año de secundaria y los primeros de universidad. En este mismo sentido, el lenguaje propio del estudiante utilizado para relacionar y jerarquizar el concepto de función en lineales y cuadráticas da cuenta de poca claridad en lo correspondiente a su definición, a la imagen de la misma y a su relación con las demás funciones.

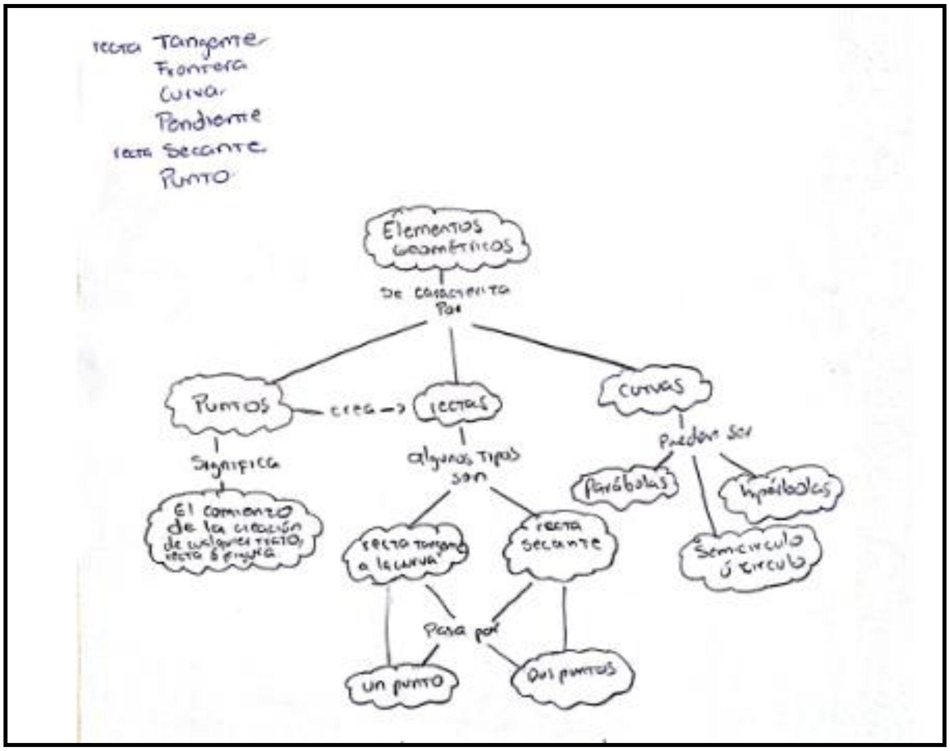


Ilustración 20. Mapa conceptual realizado por Ángela.

Por otro lado, en la propuesta del mapa conceptual de Ángela, en su jerarquización y presentación de los conceptos, permiten observar la forma como los entiende y los relaciona, asociando su representación y significación a los registros de representación geométrica. El enfoque del concepto de la tangente está más orientado, a la posición y relación de la recta respecto a una curva específica, identificando en ella el punto de relación local. No se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente a los fundamentos del cálculo.

Ángela encabeza el Mapa conceptual con las palabras *elementos geométricos* afirmando que ellos se caracterizan por puntos y que éstos crean las líneas rectas y curvas, proporcionando un acercamiento al concepto de punto y a la clasificación de algunos tipos de rectas y curvas, éstas últimas las clasifica en lugares geométricos parábolas, hipérbolas, semicírculo o círculo. Se centra más en sus componentes visuales que en sus elementos conceptuales y lógicos. La jerarquización de las palabras que apuntan a conceptos básicos del cálculo, está intencionada y articulada en parte con el objeto de estudio (comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico), pues se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente más a los fundamentos geométricos y la representación explícita empleada, permea sus puntos de vista sobre la validez de los vínculos proposicionales, arriesgando poco en la utilización de palabras que la comprometieran más con los fundamentos del cálculo y que fueron propuestas para la elaboración del mapa, tales como: límite, frontera y función.

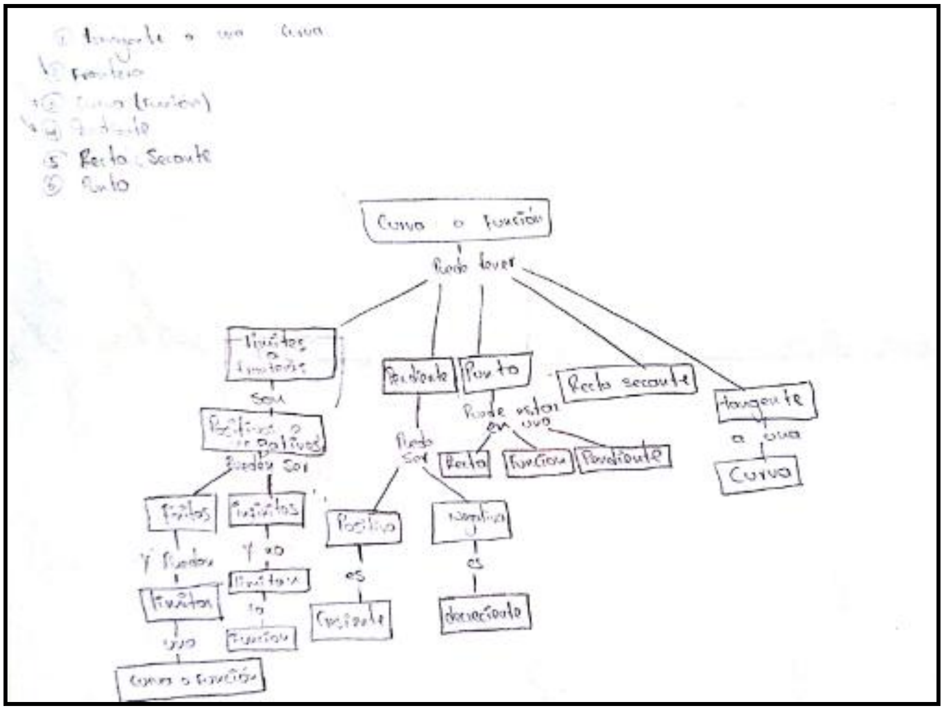


Ilustración 21. Mapa conceptual realizado por Evin.

Por su lado, el estudiante Evin, denota que la palabra clave de mayor jerarquía es *curva o función*, afirmando que puede tener pendiente positiva - creciente o negativa – decreciente. Según el estudiante la curva puede tener límites o fronteras positivas y negativas, finitas o infinitas, establece diferencia entre recta secante y recta tangente.

En su planteamiento representativo, trata de abordar todo el listado de palabras dadas, denotando acercamiento al lenguaje propio de los conceptos relevantes que intervienen en el concepto del objeto de estudio, aun así falta exponer otras relaciones de significado como el de aproximación local y su relación con las rectas secantes y tangentes a una curva en un punto dado sobre ella, para dar paso al concepto de límite.

A partir del esquema del mapa conceptual propuesto por Evin, se identifica un dominio de las características particulares de una función lineal, especialmente de la categoría de pendiente, signándola de una estimación creciente o decreciente. Por otro lado, hace evidente la separación del concepto de recta tangente a una circunferencia denotándolo a una curva, lo que permite que el proceso de comprensión del objeto de estudio pueda continuar.

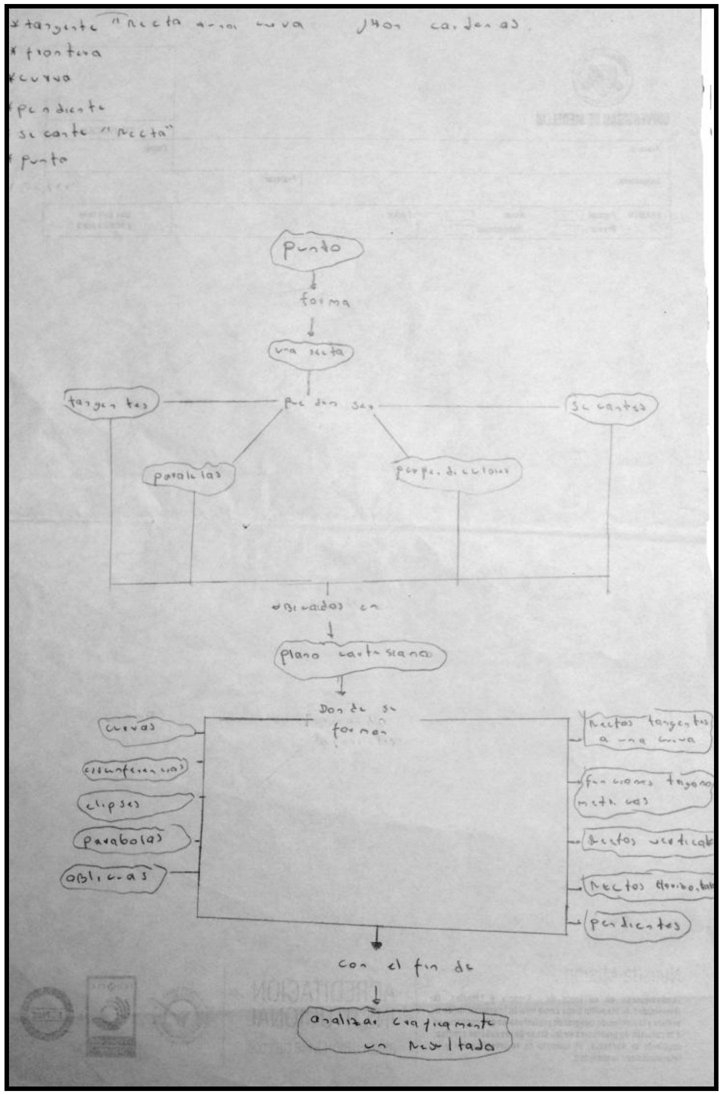


Ilustración 22. Mapa conceptual realizado por Jhon.

En cuanto al mapa de Jhon, su propuesta de organización presenta, además de los contenidos referenciados, otros que tienen que ver más con los lugares geométricos. Su ordenamiento general muestra una estructura evidenciando relaciones verticales y horizontales realizando agrupación de conceptos como una forma de ofrecer visiblemente una integración mental de ellos. Sin embargo, la distribución jerárquica que hace entre conceptos generales, subordinados y específicos deja entrever relaciones erradas y asociaciones difusas. Muestra clara de este aspecto, por ejemplo, se infiere a partir del empleo que hace y de la ubicación “espacial” en el diagrama al hacer referencia a la clasificación de la recta y las representaciones de estas en el plano.

Ahora bien, en dirección al objeto de estudio de la investigación y con base en la propuesta teórica que ofrece el Modelo, se observa la necesidad de realizar intervención, ya sea con retroalimentación expositiva o con el empleo de diferentes representaciones, tendientes a movilizar estructuras cognitivas y reconocer los obstáculos de carácter epistemológicos (obstáculo verbal) y los que son propios del sistema didácticos que emergen, anunciando, por medio del instrumento, la potencial inclinación que subsiste en el estudiante de cometer error o manifestar dificultad en cada oportunidad que se vea enfrentado al concepto objeto de estudio.

Es notable la necesidad de acudir a otras estrategias didácticas o representacionales para facilitar la evolución de la comprensión del concepto de recta tangente y pendiente de una recta. Además, para hacer presente la relación que existe entre el valor de la pendiente de una recta y su incidencia gráfica en el plano cartesiano.

Por otro lado, la apropiación del lenguaje matemático utilizado por los estudiantes y la interrelación de conceptos, se inscriben en un nivel básico en la profundidad y jerarquización con la cual se intenta dar cuenta del proceso y nivel de comprensión en el aprendizaje de los conceptos del pensamiento de la matemática avanzada tal y como lo propone el Modelo.

En cuanto a lo anterior, Duval (1999) propone que el contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas. Para alcanzar los fines comunes y corrientes de la comunicación o del tratamiento de la información, casi siempre parece ser suficiente la movilización de un solo sistema; esto no niega que en ocasiones sea necesario cambiar de sistema de representación para explicitar o mostrar propiedades diferentes de un mismo objeto. Esto es, existe la necesidad de centrar la atención en los diferentes registros de representación, que emplea el estudiante al momento de comunicar su idea o apropiación de los contenidos abordados, es decir la no coincidencia entre la imagen del concepto y la definición del concepto; teoría presentada ampliamente por Tall y Vinner (Meel, 2003).

En este sentido, el instrumento de los mapas conceptuales en tanto estrategia de aprendizaje y sistema de representación, da cuenta de la comprensión del estudiante en una forma más pertinente y didáctica, en contravía al aprendizaje repetitivo y memorístico, que busca la mecanización y solución de algoritmos. Según Novak y Gowin (1988), el aspecto más distintivo del aprendizaje humano es nuestra notable capacidad de emplear símbolos orales y escritos para representar las regularidades que percibimos en los acontecimientos y los objetos que nos rodean. Los mapas conceptuales ayudan al que aprende a hacer más evidentes los conceptos claves o las proposiciones que se van a aprender, a la vez que sugiere conexiones entre los nuevos conocimientos y lo que ya sabe el estudiante.

Además de los mapas conceptuales como instrumento de indagación de los conocimientos previos del grupo donde se realizó la experiencia de intervención, se tienen otros elementos de observación e identificación, como por ejemplo la actividad diagnóstica (Ver Anexo 1), para hacer lectura del lenguaje y apropiación de conceptos básicos, preliminares al concepto de derivada, como lo son: funciones y sus representaciones gráficas y algebraicas, concepto de pendiente, tangente, tendencia, aproximación local, entre otros.

Si se hace el análisis bajo la luz del modelo para la comprensión de Piere y Kieren, los mapas conceptuales de los estudiantes, revelan que el dominio conceptual y el lenguaje matemático empleado en relación al objeto de estudio y necesario en los procesos básicos en dirección a movilizar estructuras acordes al propio nivel presenta digresiones, y que además el conocimiento primitivo con el cual el estudiante llega para abordar el objeto de estudio necesita la creación de maneras alternativas para orientar las intervenciones que permitan la evolución a un conocimiento ideal.

3.2.1.2 ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

El siguiente análisis de la actividad diagnóstica se hace con base en la relación entre la información recogida, los descriptores presentados en el diseño metodológico y los objetivos que apuntan a dar respuesta a la pregunta de investigación, con el propósito de rastrear las manifestaciones de los cuatro estudiantes (Julián, Ángela, Evin y Jhon) que den cuenta de los conocimientos primitivos que poseen con respecto al objeto de estudio.

Esta actividad tiene seis acciones propuestas, que tenían por objetivo determinar el alcance y/o manejo de los saberes previos de los estudiantes para abordar el concepto de la derivada en su componente geométrico y fue complementaria a la actividad inicial de los mapas conceptuales. A partir del análisis de ambas se buscaba identificar el dominio conceptual y los conocimientos que habían logrado los estudiantes previo a la actividad de intervención y además observar las dificultades y errores que están relacionados con el aprendizaje de los mismos, especialmente aquellos de corte cognitivo que requieren de mayor esfuerzo para ser superados y que determinan el alcance de los objetivos propuestos en el presente trabajo de investigación.

Inicialmente se describirá cada acción de la Actividad Diagnóstica (Ver Anexo 1), luego se presentará como los cuatro estudiantes respondieron a las preguntas y finalmente se analizará las preguntas y respuestas de forma individual.

En la acción 1, los estudiantes debían asociar las representaciones gráficas de un conjunto de funciones con su respectiva expresión algebraica, pues se considera fundamental que con relación al concepto de función y a la luz del Modelo, el estudiante tenga comprensión del mismo desde las diferentes definiciones y representaciones utilizadas en el contexto de la enseñanza, especialmente aquella en términos de variable y para procesos de pensamiento matemático avanzado la definición de la teoría conjuntista o teoría de las estructuras matemáticas.

Después, la acción dos buscaba que los estudiantes pudieran determinar el valor numérico de la pendiente de dos rectas y a partir de los resultados caracterizar cada una. Sin lugar a dudas, el manejo adecuado de procedimientos algorítmicos como prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un resultado particular es necesario, y esta acción permitía identificar el dominio de esta consecución por parte de los estudiantes. No obstante, lo significativo del proceso era el análisis cualitativo del resultado obtenido, es aquí donde está la prueba detallada que permite vislumbrar el razonamiento deductivo y comprensión conceptual de los estudiantes para caracterizar cada uno de los elementos que componen los objetos matemáticos, en este caso con el comportamiento de las rectas horizontales y las rectas verticales.

En esta misma acción, se planteó una situación para que los estudiantes pudieran escribir la expresión algebraica que representa la pendiente de una recta en términos de las coordenadas de dos puntos. El presente ejercicio intenta que el estudiante pueda pasar del examen de las características particulares y comportamientos de un conjunto limitado de objetos matemáticos a uno más general y extenso que lo contenga, facilita la interpretación, sistematización y validación que se llevan a cabo en los procesos cognitivos superiores de la matemática.

Luego de esta acción, se encuentra la acción 3, donde a partir de una representación gráfica, los estudiantes debían interpretar el comportamiento de la pendiente de una recta y sus respectivas componentes horizontal y vertical en un plano, a partir del movimiento de un punto. Este tipo de representación señala el potencial didáctico que se puede utilizar cuando se abordan determinados ejercicios que sugieren la utilización de esquemas mentales o modelos matemáticos a través de la simulación del mismo. Con la utilización de software y la representación dinámica, el concepto de la derivada en su componente geométrico se puede presentar en forma ágil y atractiva para los estudiantes. Es así como mediante esta acción se buscaba rescatar las ideas intuitivas de los mismos que permitan llegar a la abstracción y formalización del concepto.

Por otro lado, las acciones 4 y 5 presentan dos situaciones respectivamente, la primera busca que el estudiante intente definir y/o argumentar el concepto de recta tangente a una curva, y la segunda situación tiene como propósito indagar por la manera cómo los estudiantes representan gráficamente el concepto definido en la situación anterior. Estas percepciones de la recta tangente a una curva se convirtieron en el conocimiento primitivo que los estudiantes poseían para abordar la temática central de ésta investigación.

Por último, la actividad diagnóstica planteaba una situación en la que los estudiantes a partir del trazo de rectas secantes a una curva con respecto a un punto fijo determinado y la consecución del valor de sus pendientes, verifican que éstas pueden aproximarse al valor de la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto. Este procedimiento se define como mecanismo del Haz de Secantes y es útil para el trazado de rectas tangentes en puntos dados sobre curvas.

A partir de las descripciones anteriores la actividad diagnóstica contiene diferentes acciones, de tal manera que se recogieran respuestas desde distintas modalidades. Se incluyeron acciones donde se esperaba que el estudiante interpretara gráficos, escribiera fórmulas o realizara procedimientos algebraicos breves para dar un solo resultado, respondiera y representara en forma gráfica una situación planteada.

A continuación, en la tabla 1 se especifica los resultados generales de los estudiantes encontrados en la comprensión de los elementos asociados al concepto de la derivada en su componente geométrico y la relación con su correspondiente descriptor. Para cada estudiante se muestran las acciones correspondientes a las planteadas en la actividad diagnóstica; así por ejemplo, A2a, significa el ítem a de la acción 2.

Descriptor	Jhon	Ángela	Evin	Julián
Asocia la representación gráfica con la expresión algebraica	A1	A1	A1	A1
Determina el valor de la pendiente de una función lineal		A2a	A2a	A2a
Interpreta el valor de la pendiente de una función lineal				
Utiliza un lenguaje formal para representar el valor de la pendiente en términos de las coordenadas de dos puntos		A2c		
Manifiesta una idea intuitiva de tendencia				A3a, A3b
Presenta una idea intuitiva de recta tangente a una curva		A4a		

Traza rectas tangentes a una curva		A4b, A5a		
Identifica rectas secantes a una curva		A6	A6	A6

Tabla 3. Resultados generales de los estudiantes en la Prueba Diagnóstica.

A continuación se presentará un análisis más detallado de los resultados encontrados en el desarrollo de la prueba y su correspondiente socialización - reflexión grupal, que se hizo posterior a la aplicación de la misma.

Cómo se puede observar, los cuatro estudiantes (Ángela, Julián, Evin y Jhon) identifican y asocian las funciones en su expresión algebraica con su representación gráfica. Lo anterior, el paso de un registro algebraico a uno gráfico del concepto de función, es una característica importante para los procesos de construcción del concepto de la derivada en su componente geométrico, pues el poder identificar las diversas formas y usos de representación, además del verbal, de la actividad matemática, permite avanzar en otros procesos más rigurosos y complejos que permitan en los estudiantes la comprensión del objeto matemático propuesto. Debe entenderse, como se ha planteado a lo largo de la sistematización del presente trabajo, que las representaciones semióticas son las formas simbólicas, específicas para cada noción, mediante la que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos como así sus características y propiedades más relevantes. Según Duval (1999), el cambio de registro, es decir, la conversión de las representaciones, permite definir, luego introducir, un principio de variación cognitiva que hace visibles las unidades significantes pertinentes del contenido de las representaciones de un registro escogido. Se pueden así definir las variables cognitivas esenciales para analizar cognitivamente y a priori las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes.

Es necesario aclarar que la definición de función que se llevó con los estudiantes en clase correspondió a la planteada por Dennis Zill y James Dewar, y que alude a: *Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x de un conjunto llamado dominio un valor único f(x) de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenido se llama rango de la función.*(Zill & Dewar, 1998).

En los resultados obtenidos en la acción 1, se interpreta que Jhon diferencia entre funciones continuas y discontinuas en su dominio. Tanto Jhon como Evin, realizan una pertinente relación entre la representación gráfica de una función real con su correspondiente expresión algebraica, con lo cual permite inferir su fortaleza en los conocimientos previos respecto al concepto de función para identificar la imagen mental con su definición algebraica. Hecho que permite inferir la relación y valoración que realizan los estudiantes para colocar en diálogo sus representaciones internas (mentales) con las que se le presentan en calidad de representaciones externas (semióticas) en dirección a lo que se intenciona indagar con el empleo del descriptor.

Evin en el desarrollo de la actividad da a entender que tiene claridad del comportamiento y características de las funciones y puede pasar de un registro a otro, sin mayor dificultad, por ejemplo de la expresión algebraica a la representación gráfica y viceversa (Ver resultados Tabla 3).

Por su lado, Julián diferencia entre funciones lineales, valor absoluto, continuas, cuadráticas, cúbicas y otras. Se observa que le cuesta determinar la representación gráfica de las rectas cuando tienen pendiente negativa y a la vez se encuentran trasladadas verticalmente. Lo que hace evidente que no hay relación entre la imagen del concepto con la imagen evocada al dar respuesta de la relación entre la representación gráfica de la recta con su representación algebraica. De acuerdo con Vinner (1991), citado por Meel (2003), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una *imagen del concepto*.

Del ejercicio anterior se puede decir que el estudiante relaciona la representación gráfica de una función real con su respectiva representación algebraica, presentando en general concordancia con el descriptor propuesto, aunque no se puede determinar si en verdad hay una verdadera comprensión.

Schoreder (1987) citado por Meel (2003), dice que existen pruebas de que la comunidad de educación matemática no ha alcanzado un acuerdo unilateral respecto al significado de "comprensión" y expresa que la mayoría de las definiciones enunciadas por diversos autores derivan de la perspectiva constructivista subyacente de que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos.

La estudiante Ángela realiza una asociación entre la expresión algebraica de una función y las propiedades de su traza en un sistema de coordenadas. Además utiliza un lenguaje apropiado para identificar propiedades gráficas, no solo de funciones elementales, lineal, cuadrática, de grado tres, sino también para funciones trascendentales, como la exponencial y de funciones racionales, considerando sus respectivas asíntotas. Respecto con el quehacer de la estudiante y su forma de presentar las relaciones, se infiere que el concepto imagen, entendido aquí como la representación y, a su vez, la definición del concepto, la expresión algebraica, se evidencia en concordancia y por tal permiten identificar un perfil de fortaleza hacia la pesquisa que se pretende con el descriptor.

Los estudiantes, en su mayoría, determinaron el valor de la pendiente de las rectas, pero no dieron la interpretación correcta de ésta, es posible que preserven la definición estática y particular de pendiente como inclinación de la recta, que se les es transferida a lo largo del proceso educativo y donde no se les permite reinterpretar el texto o el concepto matemático abordado.

Otra explicación que puede aclarar esta situación es aquélla que se refiere a los individuos que poseen una definición general de un concepto y una imagen conceptual desligada de la primera, esto puede ocasionar obstáculos en la comprensión del concepto. Situaciones similares se mencionan en trabajos de Tall y Vinner (Meel, 2003), donde los estudiantes no establecen conexión con la definición, ni con la imagen ni con el concepto.

Como se describió anteriormente, la acción 2 de la actividad diagnóstica planteó tres momentos, tres acciones cuyo propósito era indagar sobre el concepto de pendiente y algunas de sus características. En el primer momento se lo examina como razón, la relación de cambio existente entre la ordenada y la abscisa a una curva. Para tal efecto se proponen las coordenadas cartesianas de tres puntos y se pregunta por el valor de la pendiente. En el segundo momento se exhorta a emplear el valor numérico de la pendiente para caracterizar ambas rectas. Finalmente, se aborda el concepto de pendiente desde una perspectiva algebraica.

A este respecto, Jhon muestra dificultad en el procedimiento para identificar los valores que determinan las abscisas y las ordenadas para cada punto, manifestando a su vez obstáculo en la comprensión del concepto del valor de la pendiente a una recta, como razón de cambio, ya sea con el empleo de la aritmética o del algebra. Para caracterizar las rectas se aleja del valor obtenido para las pendientes y en su lugar intenta hacer análisis comparando separadamente los valores de las ordenas y las abscisas.

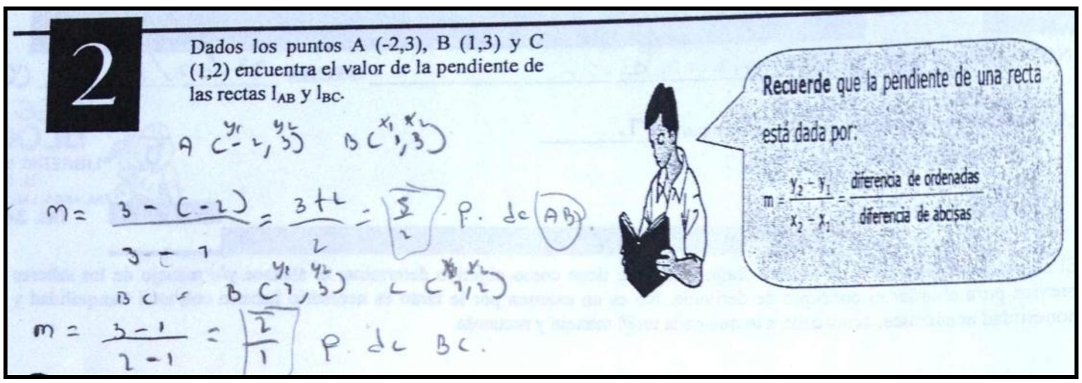
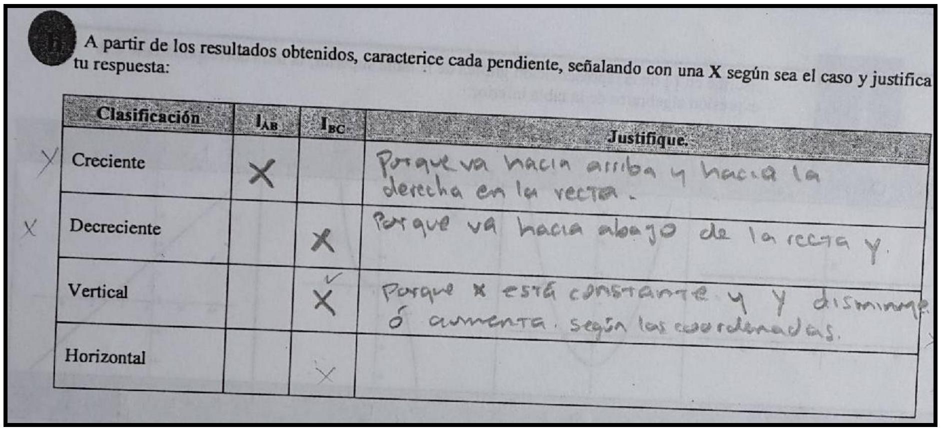


Ilustración 23. Valor de la pendiente de la recta que contiene dos puntos propuesto por Ángela.

Ángela identifica los correspondientes valores para las ordenadas y las abscisas, procediendo en forma acertada a la aplicación del algoritmo para determinar el valor de la pendiente de las dos rectas sugeridas. Allí evidencia claridad procedimental, en la aritmética empleada, y conceptual, al identificar las implicaciones de interpretación cuando la cantidad nula, “el cero”, aparece bien sea en el numerador o en el denominador. Manifestando con ello la posibilidad de Comprender el concepto del valor de la pendiente de una recta, como razón de cambio.


A partir de los resultados obtenidos, caracterice cada pendiente, señalando con una **X** según sea el caso y justifica tu respuesta:

Clasificación	I_{AB}	I_{BC}	Justifique.
Creciente	X		Porque va hacia arriba y hacia la derecha en la recta.
Decreciente		X	Porque va hacia abajo de la recta y.
Vertical		X	Porque x está constante y y disminuye ó aumenta. según las coordenadas.
Horizontal		X	

Ilustración 24. Caracterización de las rectas sugeridas en la acción.

En la caracterización de las rectas, Ángela, ayudándose de una gráfica auxiliar, intenta hacerlo a partir de las coordenadas que determinan los puntos y al parecer visualiza un "sentido" para las rectas: arriba, abajo, derecha, manifestando dificultad para aprovechar las bondades del valor de la pendiente en relación a identificar la posición de la recta en el eje de coordenadas (vertical, horizontal) o si por el contrario la función lineal que determina la recta es creciente o decreciente.

En relación al Modelo, sustento teórico de esta investigación, los conocimientos primitivos corresponden a la información en dirección a las ideas que "trae" el estudiante y las emplea para enfrentarse al objeto de estudio, pero en definitiva terminan siendo instancias que este ofrece, según su experiencia de aprendizaje, para hacer lectura, tanto de las fortalezas, a nivel de entendimiento y aplicación de los procedimientos, así como de las debilidades y obstáculos que emergen en la interrelación entre el estudiante y la acción propuesta para decidir la mejor forma de plantear estrategias para gestionar acciones que favorezca la evolución de la comprensión del estudiante, con relación al objeto de estudio.

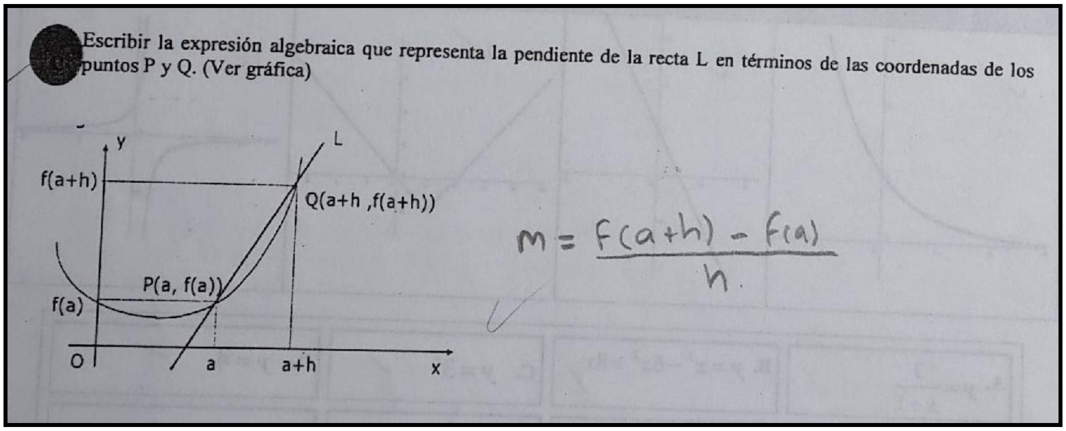


Ilustración 25. Expresión algebraica para la pendiente de la recta L presentada por Ángela.

En el caso de Ángela, en este apartado, para confrontar, y en lo posible superar, esta dificultad, se hace necesario aprovechar el empleo de otras representaciones, que permitan abiertamente, nuevas discusiones, y por tal movilizaciones cognitivas, respecto a la imagen del concepto y a la definición del concepto para enriquecer, en mejor forma, la aproximación formal del concepto de pendiente y las otras características asociadas a la función lineal que se pueden hacer visibles con ella.

Al rastrear el conocimiento inicial con respecto al concepto de tangencia a partir del cálculo del valor numérico de la pendiente de una recta dados dos puntos, Julián demuestra manejo de la fórmula y halla el valor de la pendiente, diferenciando las componentes de la abscisa y la ordenada de una pareja ordenada. Lo cual denota que tiene manejo algebraico de la fórmula dada para calcular el valor de la pendiente de una recta, dados dos puntos específicamente.

De manera continua con base en el valor numérico de la pendiente de las rectas encontrado, Julián caracteriza la correspondiente a una recta horizontal pues dicho valor numérico es de cero, pero se le dificultó interpretar el valor indeterminado, de la pendiente de la recta conformada por los puntos de coordenadas B y C, con su representación gráfica. Se sigue observando que al estudiante se le dificulta relacionar, el valor numérico de la pendiente de una recta tangente con sus características. Lo anterior según el Modelo, Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan sólo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente estrato, es decir, hay ausencia de la acción complementaria en el proceso de expresión (Meel, 2003).

No obstante, Evin aunque realiza correctamente el algoritmo que le permite determinar los valores numéricos de las pendientes de las rectas, se le dificulta la caracterización de las mismas a partir de los hallazgos obtenidos. Según el modelo propuesto por Pirie y Kieren es necesario que pase por la complementariedad de la acción, pues aunque realiza un constructo mental y representativo de la ecuación que determina la pendiente de una recta, debe lograr identificar las características asociadas al objeto.

En particular, Evin construye una imagen mental y externa del algoritmo para determinar la pendiente de una recta y sigue las instrucciones dadas por e investigador sin ningún tipo de análisis. Es necesario que Evin examine los resultados obtenidos para que pueda avanzar en su proceso de comprensión. En palabras del modelo, se queda en la propiedad de la acción y se le dificulta la propiedad de la expresión al no caracterizar las rectas a partir de los resultados obtenidos.

Por otro lado, es evidente la dificultad de los estudiantes en utilizar un lenguaje formal para representar objetos matemáticos, inicialmente todos tuvieron éxito en determinar el valor de la pendiente de una recta a partir de sus coordenadas numéricas, pero en actividades siguientes donde debían utilizar expresiones algebraicas para la obtención de estas en rectas secantes a una curva y generalizar su notación. Parece contradictorio que tengan dominio en procedimientos algorítmicos breves, pero la transferencia a situaciones que cumplen la misma característica se les presenta de manera compleja y difícil.

Muchas veces en los procesos de aula los conceptos se restringen a las variables que intervienen en ese momento y no se hace claridad sobre la importancia de la generalización a otros eventos, en la medida que permite el desarrollo de habilidades que dan sentido a dicho proceso y significan en primera instancia los objetos matemáticos. Con frecuencia el análisis de éstos se hace de una manera limitada, tanto en la conceptualización como en el desarrollo de las estructuras cognitivas de quien aprende. Para el Grupo Azarquiel (1993), generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe ni tampoco es definir, a partir de las propiedades de un objeto un campo de objetos caracterizados por cumplirlas. También se generaliza cuando se transfiere a situaciones propiedades que se cumplen en otras y en general cuando se amplía el ámbito de definición de una ley(AZARQUIEL, 1993).

En correspondencia con la teoría del Modelo, es muy complejo saber exactamente cuál es el estado actual de los conocimientos primitivos, así como de la información con la que los cuatro estudiantes realizan la acción propuesta; no obstante, es posible abordar una interpretación al respecto y afirmar la necesidad de profundizar en procesos que permitan, en relación a Tall y Vinner (1981), coherencia entre el concepto imagen y el concepto definición, para superar la dificultad en el empleo del lenguaje algebraico y aritmético, así como llevar a otros escenarios, más allá de lo operativo, la interpretación de la pendiente como valor numérico, como característica de una recta y como aplicación variacional.

De los tres momentos descritos se puede decir que los cuatro estudiantes, parcialmente establecen una relación coherente entre el concepto imagen y el concepto definición de la pendiente de una recta, a la vez que manifiestan una comprensión basada más en la mecanización de la parte algorítmica, que en la interpretación de su representación gráfica.

En Duval (2004), se dice que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Es pertinente denotar entonces, que a Julián la comprensión de la función lineal como tal, todavía está en proceso, pues falta coherencia en el manejo acertado del concepto en sus diversas representaciones, pues toda confusión entre el objeto de estudio y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión.

En la acción 3 del instrumento, propuesta en dos literales, se intentaba averiguar sobre la noción de variación a través del concepto de aproximación y tendencia, intencionando con ello la posibilidad de indagar cuando la recta secante tiende a convertirse en una recta tangente. Para tal efecto, sobre la curva planteada se indica el trazo de la secante determinada por los puntos P y Q y se pide observar lo que sucede al dejar a P fijo, al tiempo que Q se hace próximo a él.

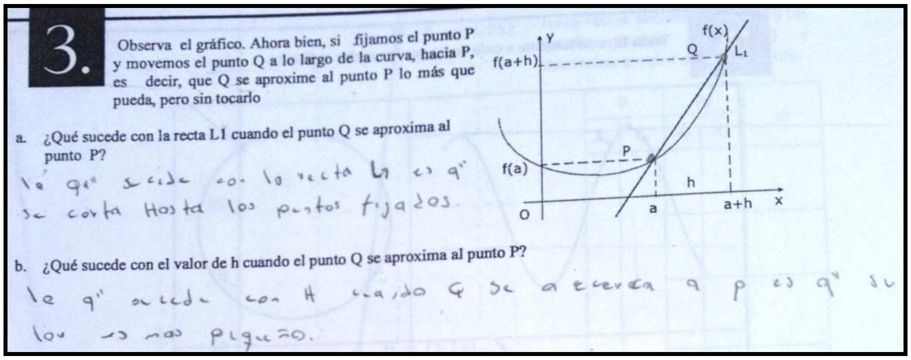


Ilustración 26. Conceptos de tendencia y aproximación a partir de la situación planteada.

Aunque Jhon manifiesta una idea de aproximación, cómo se evidencia en sus respuestas, enfoca su apreciación en determinar confusamente partes de intersección o corte entre la recta secante y la curva dada. Silencia, puesto que no la expresa, la noción conceptual entre tendencia y aproximación, así como también, la tendencia de la recta secante a convertirse en recta tangente toda vez que el punto Q se haga más próximo a P. En particular, cuando el estudiante identifica propiedades o elementos notables de tendencia y no lo expresa, logra identificar como lo afirma Pirie y Kieren, elementos discrepantes no relacionados de la imagen mental del estudiante con la imagen asociada al concepto, es decir los elementos complementarios de acción y expresión están desvinculados. Dejando entrever, error conceptual entre de la definición de recta tangente y recta secante; la noción de tangencia local se confunde con la de recta secante en ámbito global.

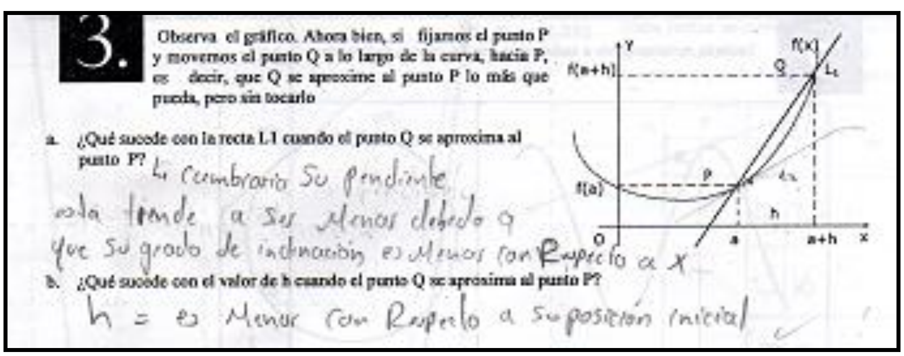
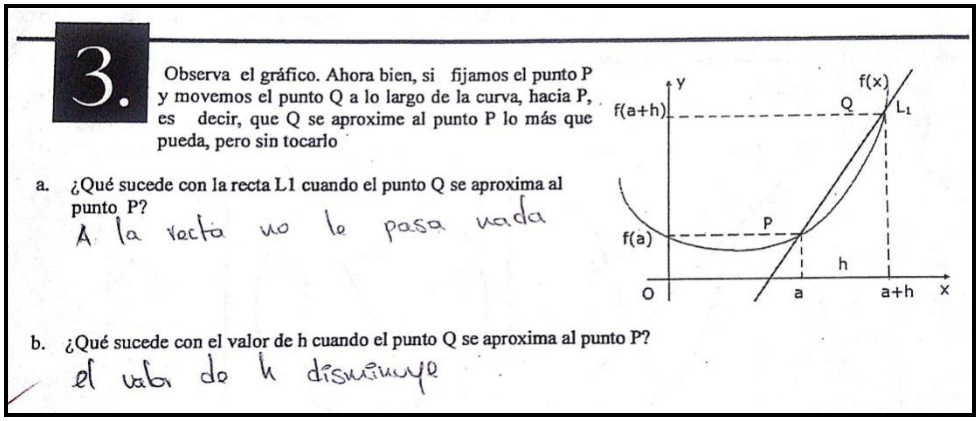


Ilustración 27. Conceptos de tendencia y aproximación según Julián

En cuanto a Julián, se puede observar que se acerca a la interpretación del concepto de tendencia, pero es difusa la visualización que hace con relación al valor numérico del límite de las pendientes de las rectas secantes con respecto al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto fijo P, lo que indica que es impreciso el concepto de aproximación local que manifiesta.


3. Observa el gráfico. Ahora bien, si fijamos el punto P y movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P lo más que pueda, pero sin tocarlo

a. ¿Qué sucede con la recta L1 cuando el punto Q se aproxima al punto P?

A la recta no le pasa nada

b. ¿Qué sucede con el valor de h cuando el punto Q se aproxima al punto P?

el valor de h disminuye

Ilustración 28. Conceptos de tendencia y aproximación según Evin.

Evin manifiesta un dominio al efectuar variaciones de la variable dependiente en términos de la variable independiente, aunque se le dificulta la visualización e inferencia de la utilización de la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia. Siendo así, se puede decir que Evin presenta dificultad para asociar los conceptos de variación y aproximación ligados al concepto de función. Podría inferirse también que la dificultad para reconocer los cambios en las variables representados en la figura es por estático y estandarizado de la misma.

Bishop (1994) dice que: *el individuo cuenta con un amplio rango de imágenes visuales cuando se restringe a actividades matemáticas* y referente a esta aseveración Presmeg (1986), consideró cinco tipos de imágenes visuales que el estudiante puede incluir en sus estrategias: imágenes concretas y pictóricas, imágenes modelo, imágenes memorísticas de fórmulas, imágenes cinestéticas e imágenes dinámicas. Las imágenes mentales pueden ser en algunos momentos no beneficiosas. Una imagen de una figura estándar puede inducir el pensamiento inflexible, el cual impedirá el reconocimiento de un concepto en un diagrama no estándar (Presmeg, 1986).

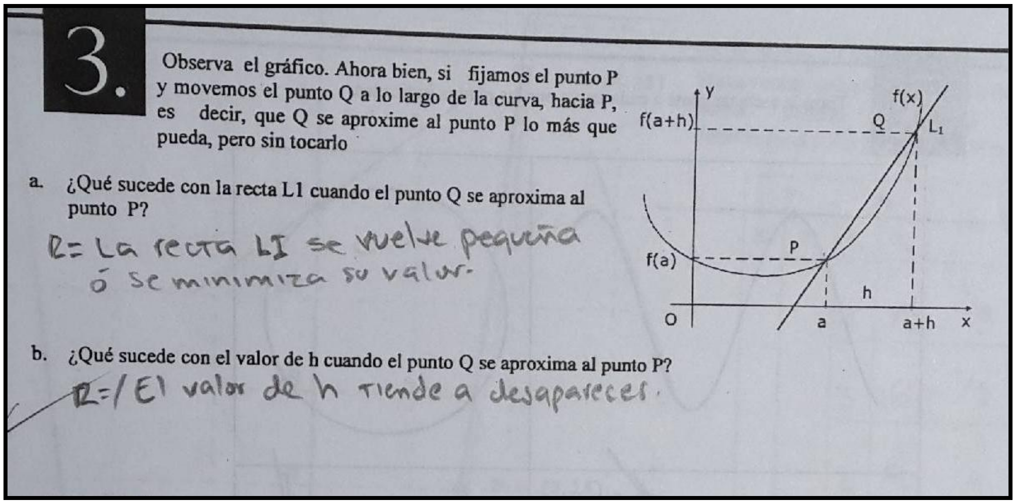


Ilustración 29. Conceptos de tendencia y aproximación según Ángela.

En la indagación de esta acción, Ángela permite entrever su dificultad para comprender el concepto de densidad lineal, toda recta contiene infinitos puntos, puesto que, al proponer la variación del punto Q, dota de "tamaño" a la recta, afirmando: *la recta* L_1 *se vuelve pequeña o se minimiza su valor*". A este respecto, la evidencia del obstáculo epistemológico de la experiencia primera cobra validez proporcionando error y dificultad en los razonamientos ofrecidos por Ángela. Además, cuando se le invita a inferir sobre la eventualidad del acercamiento a una región específica de la curva, hace uso del concepto de tendencia para caracterizar el valor de *h* cuando el punto Q se aproxima al punto P.

En cuanto a la definición o ideas intuitivas de los estudiantes frente al concepto de tangente y, de acuerdo a algunas definiciones que se pueden leer en la tabla 3, se encuentra en, términos de Tall y Vinner, una ruptura entre el concepto-imagen mal concebido y el concepto-definición de recta tangente.

PREGUNTA	RESPUESTAS
¿Qué es la recta tangente a una curva?	(Evin): *es la que toca la curva cortándola.* (Ángela): *Es la recta que pasa por uno y sólo un punto de la curva… sin cortarla* (Julián): *es la recta que toca un punto o varios sobre la recta función.* (Jhon): *Es la recta que va desde su extremo hasta infinito según la tangente.*

Tabla 4. Definiciones de los estudiantes de recta tangente.

El ejercicio invita a los estudiantes a emplear el lenguaje verbal para dar cuenta del concepto de recta tangente. Además, para que realice el trazado de rectas tangentes a una curva en un punto dado. Si observamos la definición de Jhon, aunque emplea las categorías de recta y de tangente, es confusa al intentar nombrar su característica esencial. Acto que muestra evidencia, en el apartado siguiente del ejercicio, pues al trazar la recta tangente al punto A y al punto B lo hace como si la recta, para él segmento, empezara justo en esos puntos, es decir, para él, el punto A y el punto B son extremos que dan "inicio" a la "recta tangente" (Ver Ilustración 30). En el punto C muestra duda al trazar la recta y borrarla seguidamente al corroborar que su trazo interceptaba a la curva, cortándola precisamente en ese punto.

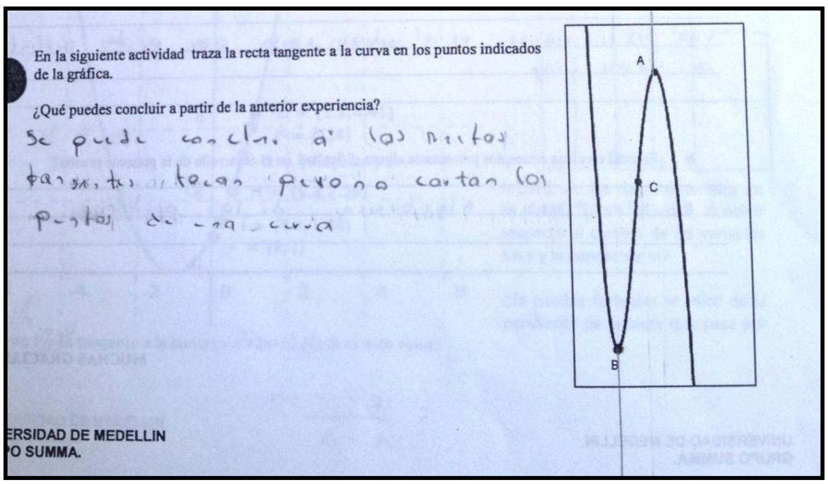


Ilustración 30. Trazo que realiza Jhon de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Finalmente Jhon expone como conclusión, la siguiente afirmación: *"las rectas tangentes tocan pero no cortan los puntos de una curva"*, colocando en evidencia y verbalizando el obstáculo presente, el que tiene que ver con la definición exclusiva y excluyente de la recta tangente de la geometría Euclidiana presentada en los cursos básicos. Aquí, la comprensión y evolución del concepto de recta tangente se dificulta por la falta de hacer uso de otras representaciones que permitan movilizarlo.

En cuanto al trazo de las rectas tangentes sobre las representaciones gráficas en los puntos indicados, el estudiante contradice la afirmación realizada en el punto anterior puesto que en la representación sinusoidal una de sus trazas "corta" en varios puntos a la curva dada. En las restantes representaciones propuestas insiste nuevamente en trazar las “rectas” o segmentos de recta, tomando el punto de tangencia como extremo. Además, en la justificación, cambia sustancialmente su definición de recta tangente al afirmar: *“las distinciones es que las corta* (en referencia al trazo de la recta tangente) *por partes distintas a cada una”.*

Luego, Julián al redactar el concepto que trae sobre recta tangente a una curva, se rastrea confusión con respecto a la precisión de la definición, pues no aclara si está hablando de una función en especial o si está generalizando, ya que su respuesta apunta al caso de trazo de la recta tangente a un punto de una recta.

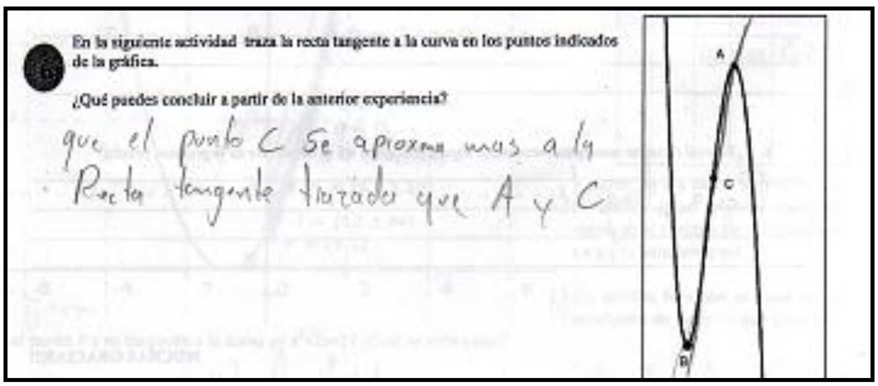


Ilustración 31. Trazo que realiza Julián de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

De igual forma la interiorización del concepto de recta tangente a una curva en un punto dado al tenerla que trazar en varios puntos de la misma, es confusa, pues traza una recta que pasa por los tres puntos dados de la curva y la conclusión escrita de la acción implementada evidencia confusión entre rectas secantes y rectas tangentes a una curva. Esta representación semiótica que tiene como característica ser consciente y externa revela la no objetivación del objeto de estudio. Duval (2004) dice que la función de objetivación (para sí) casi siempre se asimila a la expresión (para otro), a pesar de que son independientes.

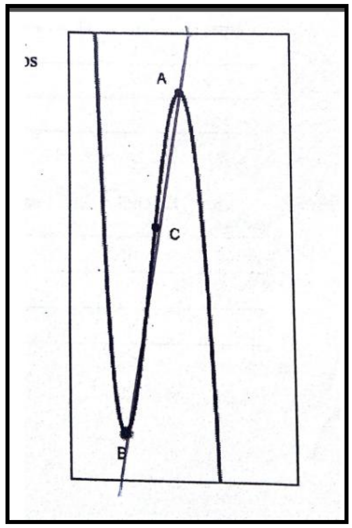


Ilustración 32. Trazo que realiza Evin de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Evin es uno de los estudiantes que más se aproxima a la definición de recta tangente a una curva, aunque le faltó precisar en su respuesta, ésta está en contraposición a las expresiones intuitivas como la de la recta que pasa por un punto y no "corta" a la curva. Pero la representación gráfica evidencia una dificultad en la comprensión de la instrucción, pues Evin en lugar de realizar rectas tangentes a la curva por cada uno de los puntos indicados, procedió a realizar una sola recta que pasara por los tres puntos. La comprensión en la instrucción es necesaria para poder transmitir el significado entre el objeto y su representación, es una habilidad fundamentalmente comunicativa y su desarrollo permite la adecuada relación de los elementos en la actividad matemática.

Evin, en su descripción de recta tangente alude que *es la que toca la curva cortándola.* Cómo se puede observar hace precisión de dos términos necesarios para la definición del concepto, "toca" y "corta", de lo que se puede identificar que reconoce las propiedades del objeto matemático, en este caso el de recta tangente, para llegar así a concebir imágenes más globales. A propósito Godino (2003) afirma que la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.(Godino, 2003).

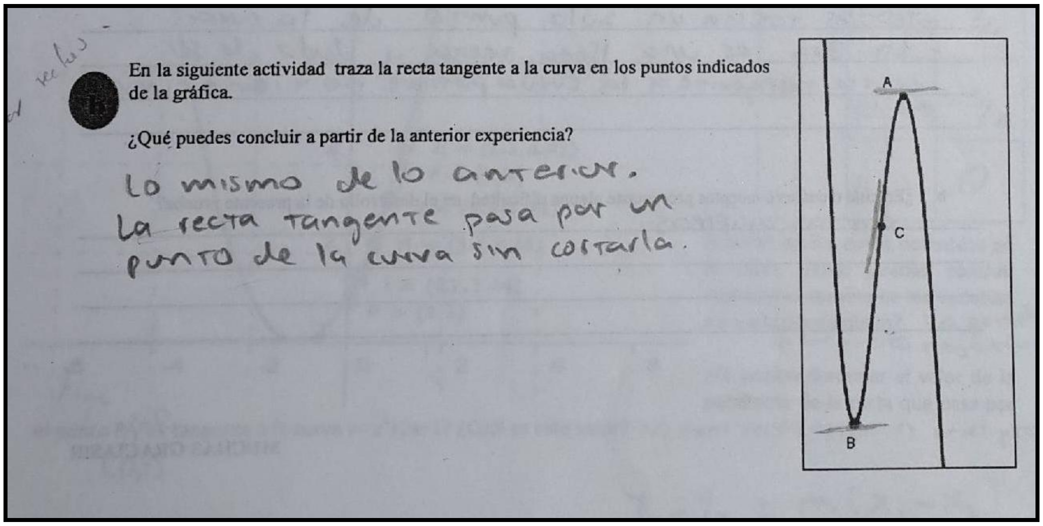


Ilustración 33. Trazo que realiza Ángela de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Por su parte, para esclarecer su definición de recta tangente a una curva, Ángela se apoya en la definición que se hace desde la geometría Euclidiana en cursos elementales. Aquella que es específica de la recta tangente a una circunferencia. Es así como presenta una idea muy particular para ilustrar gráfica y verbalmente la noción de recta tangente. Al realizar la caracterización de la recta, emplea términos de doble implicación al expresar "pasa por uno y solo uno" y concede a la región de tangencia la precisión exclusiva de "rose" o contacto, pero a su vez excluye, enfáticamente, la condición de corte.

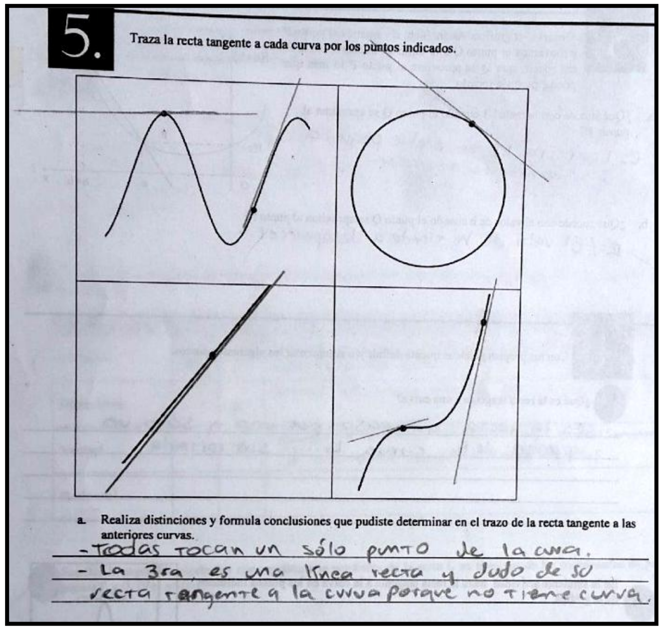


Ilustración 34. Trazo que realiza Ángela de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Asimismo, cuando aborda como aplicación el concepto de recta tangente exterioriza su representación, realizando pequeños y tímidos trazos, no de rectas sino de segmentos, con los que verifica su definición: "*la recta tangente pasa por un punto de la curva sin cortarla*". Evidentemente, el obstáculo verbal hace presencia, pues el léxico con el cual la estudiante presenta los términos de tangencia incide en una falsa explicación, según la imagen. Lo anterior le da fuerza a lo que Dolores (2000) denuncia como dificultad para entender el concepto de la derivada en su componente geométrico, valga recordar, considerar la recta tangente desde una caracterización estática y global en perspectiva de la geometría Euclidiana de los primeros cursos, cuya definición, y representación, permite una aproximación, aunque bastante admitida, muy débil en la presentación del concepto, puesto que hace referencia sólo a la recta tangente a una circunferencia, originando un vasto panorama de borrosidad cognitiva y que aleja de la posibilidad de entender , en el sentido en que lo presenta (Bedoya Beltrán, Jorge Alberto; Esteban Duarte, Pedro Esteban; Vasco Agudelo, Edison Dario;, 2006), *" la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella es una manifestación del concepto de aproximación local".*

En cuanto al trazo de las rectas tangentes sobre las representaciones gráficas en los puntos indicados, Ángela, continúa con la dificultad y realiza su trazo según el procedimiento y conservando las "características" de sus experiencias de aprendizaje previas, para obtener la recta tangente a una circunferencia, reafirmando su argumento, visual y verbal, respecto a su concepto e imagen, la recta tangente "toca" sólo en un punto a la curva, de lo que se deriva su inconveniente procedimental y su afirmación categórica, en relación a la línea recta: "*la 3ra es una línea recta y dudo de su recta tangente a la curva, porque no tiene curva*".

De lo anterior se pueden deducir las siguientes aseveraciones: Los aspectos complementarios de la acción y la expresión hacen manifiesto la fuerte distancia que existe, en dirección al Modelo propuesto por Pirie y Kieren y a la teoría de Tall y Vinner (Meel, 2003), entre la imagen del concepto y la definición del concepto. Lo anterior se evidenció, puesto que el acto de la expresión de una imagen asociada a patrones previamente concebidos es desarticulada. Los registros dados por los estudiantes resaltan la importancia de dar respuestas a las situaciones planteadas, logrando identificar propiedades de los conceptos matemáticos abordados a partir de las imágenes, por ejemplo, los conceptos de tangencia, tendencia, pendiente, entre otros; pero éstas distan de estar relacionadas con el lenguaje formal.Además, para promover la evolución en la comprensión en los primeros niveles según presupuestos del Modelo, se hace necesaria la necesidad, de mostrar otras representaciones de la noción de recta tangente, dado que, en términos de Duval (1999) entre más representaciones se empleen para el estudio de un concepto matemático, se incrementa la posibilidad de comprenderlo. Es decir, el empleo de diversas representaciones semióticas respecto a un mismo contenido que se desea estudiar potencia considerablemente la comprensión de los sujetos.

Según las respuestas de los estudiantes es posible que preserven una imagen textual o visual de la definición y representación de recta tangente a una curva. Puede ser una imagen memorística que se ha transferido en el proceso educativo. Ángela, Evin y Julián tienen la idea de la definición, pero fallan al centrarse en el término "en un sólo punto" o en "toca a la curva". Se ha argumentado que en la enseñanza se constituyen ciertos obstáculos que entorpecen la capacidad de reconocer un objeto matemático y sus características, error que se evidencia en esta ocasión no de una manera figurativa sino en una expresión escrita fija que no permite reconocer un objeto cuando hay un tratamiento.

En el último trabajo de Hitt (2003) en relación con perdurabilidad de esquemas o imágenes, señaló que:

La construcción del conocimiento que implica desempeños erróneos, crea desde el punto de vista que estamos tratando, esquemas y conexiones permanentes que se contraponen a la construcción adecuada de cierto concepto. Pero nuestra opinión es que esos esquemas no desaparecen, aún y cuando se construya un esquema alternativo. Ya que en algunos casos, esos esquemas puedan resurgir de manera que un individuo pueda repetir ese error que prevalecía en el pasado, en el momento en que se le presenta una actividad más compleja. (p. 15)

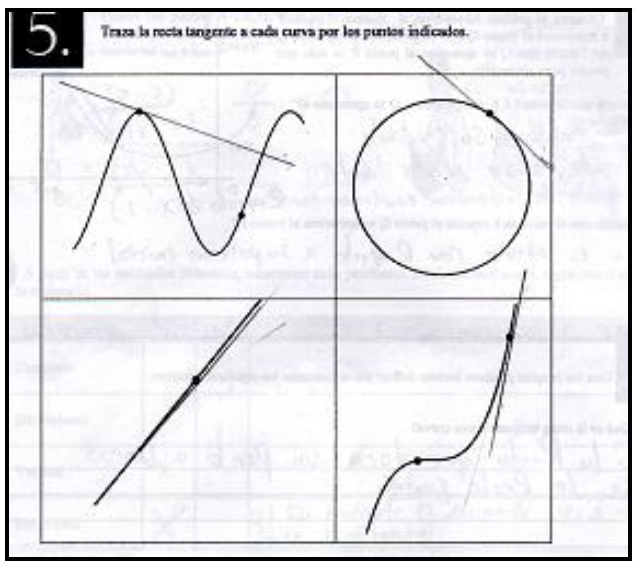


Ilustración 35. Trazo que realiza Julián de la recta tangente a la curva en los puntos indicados.

Al trazar rectas tangentes a una curva dado un punto de tangencia, Julián la realiza sin tener presente el mecanismo del haz de secantes, logrando así realizar trazos de segmentos de rectas que pasan por el punto dado, dejando otros puntos sin su trazo. En la gráfica senoidal traza de manera incorrecta la recta tangente a la curva en un punto máximo. En el momento de Julián realizar distinciones y formular conclusiones con respecto al primer momento de la acción, con el fin de rastrear el empleo de un lenguaje propio que ayude a visualizar y a reunir más información del nivel propio del Modelo de Pirie y Kieren en el que se encuentra, decide no hacerlo. Aunque en el tercer momento se le invita a enumerar los conceptos que visualizó que aún se le dificultaba manejar, después de haber aplicado la prueba y Julián responde que es el concepto de recta tangente.

Hasta este momento de la investigación han hecho considerable presencia diversos obstáculos epistemológicos, Bachelard (2000), en referencia a la noción de recta tangente: el obstáculo de la experiencia primera o los pre-juicios empleados en la definición y en la representación gráfica; el obstáculo de la generalización, la dificultad presente para realizar el trazo cuando la curva no es una circunferencia y el obstáculo verbal, al relacionar la definición de tangencia con una especie de contacto, de "rose" o de "toque "un único punto entre dos elementos geométricos.

Esto se evidencia, básicamente, en el empleo de las representaciones gráficas y en las narraciones escritas presentadas por Ángela. No obstante, este es uno de los presupuestos que tiene en cuenta el Modelo, pues en este, según lo expresa Rendón (2011), se encuentra sobrentendida la idea de que al acercarse al objeto de estudio, el estudiante se encuentra con diversos obstáculos que impiden la evolución de la Comprensión y por tal el paso de un nivel a otro. En este sentido, las actividades del nivel 1 se presentan precisamente para eso, para indagar sobre el conjunto de concepciones previas, evocación de imágenes o ideas intuitivas que ofrece el estudiante al momento de dar cuenta de la aplicación del concepto.

De acuerdo a esto y para generar movilización de los procesos cognitivos hacia el contenido matemático abordado se presentó el desarrollo manual (lápiz y regla) del método del haz de secantes como instancia para generar la necesidad de definir, en términos como lo presentan Bedoya,Jorge y Otros (2006), "*la recta tangente a través de una propiedad adicional que esta tiene: la de ser recta de estabilización del proceso del haz de secantes*".

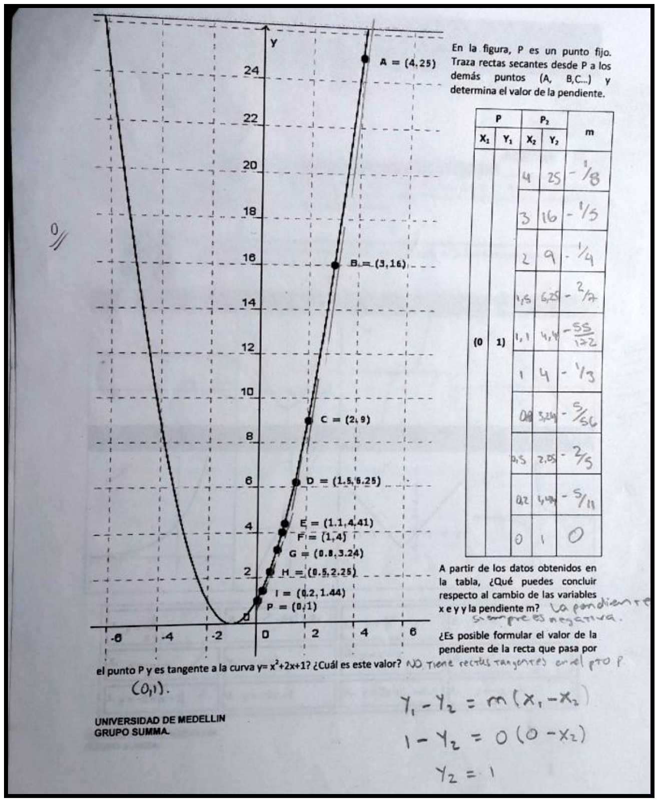


Ilustración 36. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Ángela.

En esta acción en el desarrollo que presentó Ángela, en su representación externa, se observa que el trazado de las secantes lo hace no a partir de rectas sino de pequeños segmentos que “rosan” y rodean la proximidad gráfica del punto que dista de *P* como punto de referencia fijo. Es decir, traza la recta, para ella segmento, sin tener en cuenta el punto *P*, sólo en el punto con el cual es posible formar la recta secante con *P*. Es decir, el obstáculo persiste e imposibilita la propiedad adicional de poder visualizar y descubrir que la recta tangente deviene en recta estabilizadora para el mecanismo empleado.

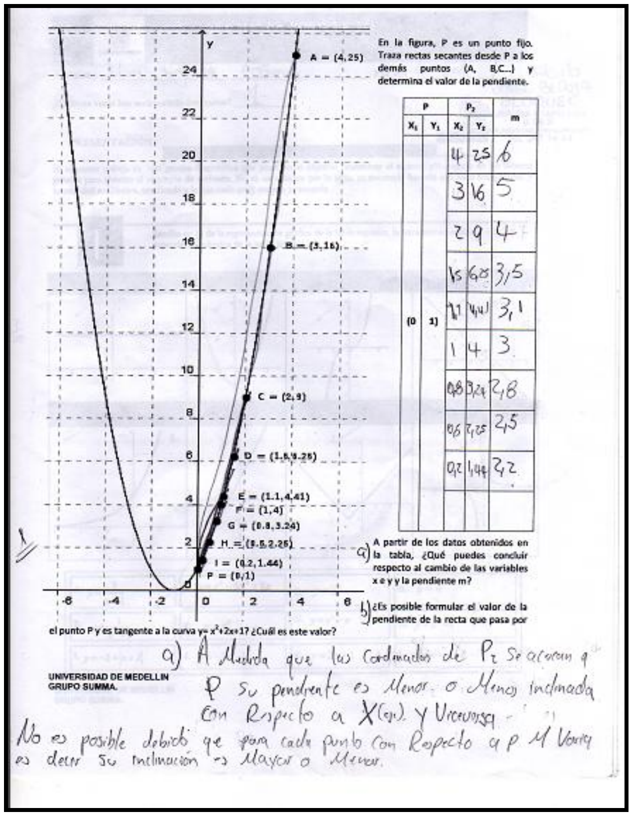


Ilustración 37. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Julián.

En esta acción, en la que se le propone al estudiante trazar rectas secantes desde un punto fijo P sobre la curva a otros puntos dados y a la vez determinar el valor numérico de las pendientes. Tanto Julián como Evin, trazan segmentos de rectas que unen al punto *P* con los otros puntos dados, calculan asertivamente el valor numérico de la pendiente y Julián concluye que a medida que las coordenadas del punto P_2 se acercan al punto *P*, el valor numérico de la pendiente disminuye a la vez que observa que las rectas secantes están menos inclinadas con respecto el eje *x*.

A Evin se le dificulta seguir las orientaciones dadas por el investigador, pues debía construir rectas secantes a la función que pasaran por el punto P, pero el estudiante realiza segmentos de recta, de ahí que Evin debe distinguir y realizar conexión acertada de las características de la imagen para formar y poder realizar clasificaciones oportunas del concepto objeto de estudio.

El trabajo realizado por Julián permea que el mecanismo del haz de secantes no le proporciona información para concluir el posible valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado P, lo cual denota nuevamente que el concepto de límite, de aproximación local y el de recta tangente a una curva, no lo relaciona, con el de la derivada de una función, se visualiza que los tiene como casos aislados, no coordinados y a la vez confusos. Duval (2004), expresa que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación.

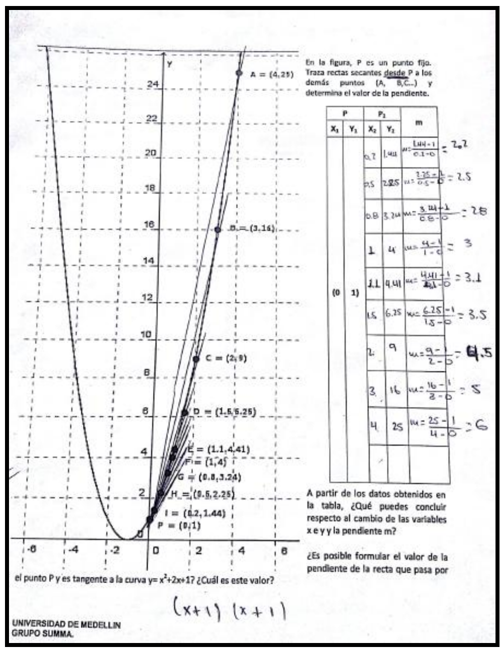


Ilustración 38. Aplicación del mecanismo del haz de secantes presentado por Evin.

En cuanto a Evin, adicionalmente, se le dificulta establecer conclusiones a partir de la actividad que enuncien el cambio de las variables y permitan identificar las posiciones relativas entre rectas y una curva, dejando entrever una vez más la ruptura cognitiva frente a los conceptos de tendencia y aproximación local propios del objeto matemático a abordar.

Se observa la necesidad de implementar actividades y retroalimentarlas bajo la luz del modelo de Pirie y Kieren, que conduzcan a la superación de las dificultades descritas, basadas en el manejo de las diferentes representaciones y que le permitan evolucionar en la comprensión de la definición y en las características propias de la recta tangente.

Al finalizar el desarrollo de la prueba, se realiza socialización de la misma con los estudiantes, como mecanismo complementario a la actividad escrita y adicionalmente permitía determinar el manejo de los saberes previos que hace uso el estudiante para abordar los conceptos de pendiente, recta secante y tangente a una curva, representación gráfica y algebraica de funciones, noción de tendencia o aproximación, entre otras, que se hacen evidentes a través del lenguaje verbal.

Una de las dificultades en la formación del concepto de derivada, con la geometría como herramienta, es la concepción griega de tangente que persiste en los estudiantes desde sus cursos elementales. La concepción como tal obstaculiza notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo. Asimismo, obstaculiza la comprensión fundamental de que la recta tangente pueda "tocar" y también "cortar" a la curva y continuar siendo tangente en la zona de corte. Además, su carácter estático en perspectiva de la geometría Euclidiana, al ser concebida como un lugar geométrico, deviene también en obstáculo cuando su concepción se intenta desde un sentido dinámico, a través de la sucesión de secantes (haz de secantes).

En ese sentido se socializa con los estudiantes la acción 5, de la actividad diagnóstica para identificar las distinciones y conclusiones que los estudiantes pudieron determinar en el trazo de la recta tangente a las curvas que se ilustran en la tabla 5.

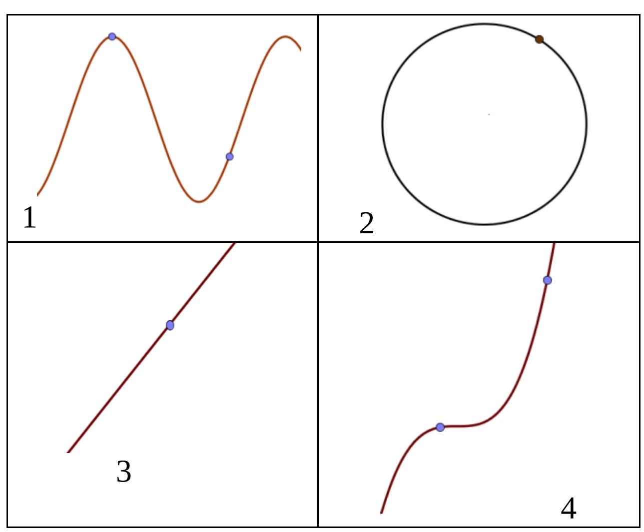


Tabla 5. Trazo de rectas tangentes a la curva por el punto indicado.

En palabras de Tall y Vinner, lo que los estudiantes evidencian es una ruptura entre la imagen del concepto mal concebido e interiorizado y la definición de los conceptos de función y de recta tangente, que parece interpretarse como una constante en el siguiente diálogo retomado de la socialización grupal:

Investigador: *¿Qué distinciones conclusiones pudiste determinar en el trazo de la recta tangente a las anteriores curvas?*

Participante 1: *Yo creo que manejo la definición entre recta tangente y secante. La tangente sólo corta un punto, mientras que la secante atraviesa cuando es con respecto a una circunferencia, pero en otras curvas ¿Cómo aplica?*

Investigador: *Frente a la experiencia del trabajo del punto 5 de la prueba diagnóstica, ¿Qué conclusiones obtuviste?*

Participante 1: *Mis conclusiones fueron preguntas, ¿Una recta tangente puede ser secante?, ¿eso es posible?*

Investigador: *¿Puede en algún momento una recta tangente ser secante?*

Participante 1: *¿Si puede?*

Participante 3: *Si es en una línea recta si se puede.*

Investigador: [Dibuja en el tablero las cuatro curvas del punto 5]. *Alguien quiere compartirnos y mostrarnos ¿Cómo realizaron el trazado de la recta tangente a esas curvas en el punto señalado?*

Participante 1: *Yo lo hice así*(Ilustración 39). [Muestra seguridad en el trazado de la recta tangente correspondiente a la curva 2 y en el punto máximo de la figura 1. Sin embargo al momento del trazo del punto B manifiesta inseguridad y su trazo de la recta tangente en ese punto es confusa.]

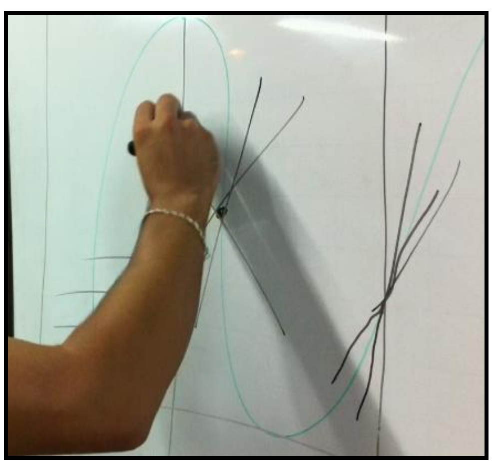


Ilustración 39. Participante 1 construyendo una recta tangente a una curva.

Investigador: *¿Alguien más?*

Participante 4: [Traza dos rectas horizontales sobre la curva 1y las llama verticales, para el punto A, limita el trazo de la recta cuidando de no "tocar" otra región de la curva, en tanto que para el punto B, no cuida lo anterior y busca trazar la recta hasta cortar por el punto indicado].

Yo las tracé de esa manera porque en la prueba no decía, ni especificaba la posición de la recta si era vertical, diagonal u horizontal, aunque sé que se pedía el trazo de una recta tangente.

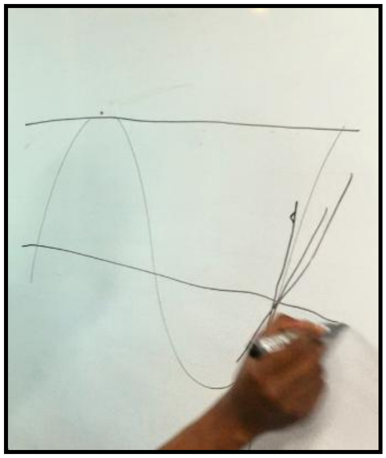


Ilustración 40. Participante 4 construyendo rectas tangentes.

Participante 2: *Yo todas las rectas tangentes las tracé de manera vertical, así*. [Realiza la representación gráfica en el tablero]

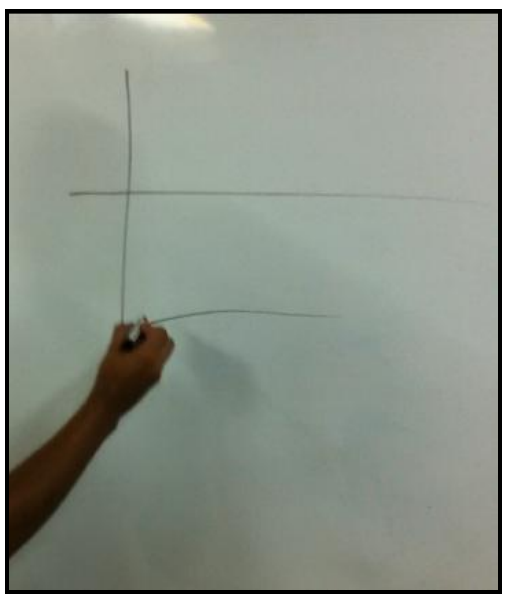


Ilustración 41. Participante 2 construyendo rectas tangentes.

Investigador: *¿Entonces, que podemos decir sobre la recta tangente a una curva en un punto?*

Participante 2: *La tangente solamente toca en un solo punto y solamente toca ese punto en la curva y debe ser una función, de tal manera que esa recta vertical no es función porque para un solo valor de x* [Señala la representación de la recta vertical hecha en el tablero] *le corresponde varios valores de y.*

Participante 3: *La curva si es función, pero la recta vertical no lo es, porque es como de la forma de x=4 y afirma que x es un valor absoluto.*

Investigador: *¿Y si la curva es una función lineal, como la propuesta en la actividad diagnóstica, entonces como sería la recta tangente, digamos en un punto sobre esta?*

Participante 5: *Pasa muy cerquita pero no la toca, yo la hice así.*(Ilustración 42)[Realiza la representación gráfica en el tablero], luego *afirma que no son la misma recta.*

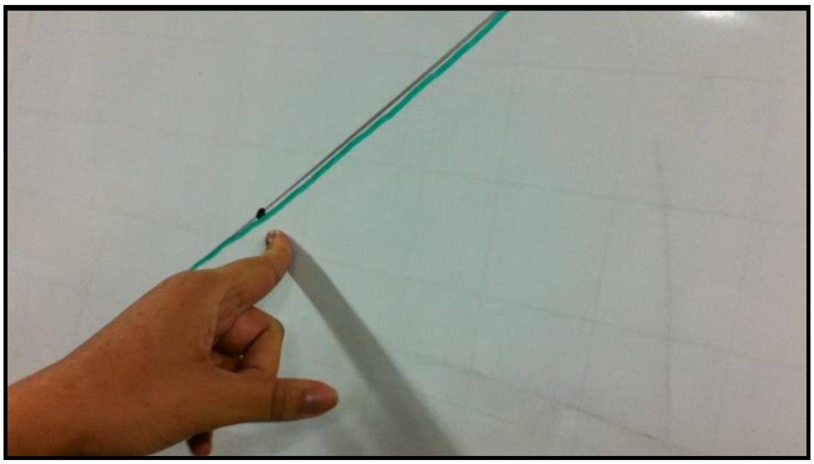


Ilustración 42. Participante 5 construyendo rectas tangentes.

Participante 6: *Yo creo que corta a la recta por ese punto.*(Ilustración 43)

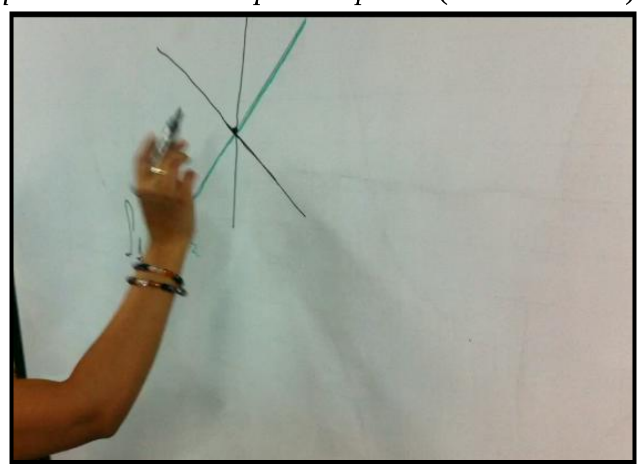


Ilustración 43. Participante 6 construyendo rectas tangentes.

Participante 6: *Afirma que aunque ese punto no lo realizó en la guía de trabajo proporcionada, pero la recta tangente pasaría cortando* [Traza, dos rectas que pasan por el punto señalado, cortando a la recta dada].

[Lo anterior generó polémica en el grupo y toma la palabra el participante 2.]

Participante 2: *Sería imposible que la recta tangente tocara solamente en ese punto a la recta dada*.

Participante 6: [De pie frente al tablero le pregunta al grupo] *¿Cómo trazaron la recta tangente al círculo?, si también ésta estaba pasando por un pedacito del círculo.*

[Se observa el obstáculo generado por la definición exclusiva y excluyente de la recta tangente de la geometría Euclidiana presentada en los cursos básicos.]

Participante 2: E*n ese caso la recta tangente toca al punto y no tiene que seguir tocando. Si usted le traza una recta tangente a una recta queda la misma recta.*

Investigador: *El objetivo de la socialización del trabajo realizado no es señalar quien tiene o no la razón, lo que se pretende es que con todas las intervenciones y acciones movilizar el pensamiento para que puedan aclarar las dudas y construir el concepto objeto de estudio.*

Los resultados de este apartado muestran entonces que las ideas intuitivas que tienen los estudiantes de tangente a una curva, pueden establecer dificultades y errores de tipo cognitivo para abordar el objeto de estudio de la presente investigación. Una de las dificultades identificadas y que aparece con mayor recurrencia en los estudiantes en relación a las rectas tangentes a una curva, es aquella que atañe al trazo de la tangente a una circunferencia como representación mental generalizada y que impide la aplicación del concepto a otras curvas. Para el imaginario de algunos estudiantes la recta tangente debe ser horizontal y para otros debe ser vertical. Otra dificultad observada es cuando la curva es una línea recta, el trazo de la recta tangente a la curva por el punto indicado es otra recta que pasa cerquita a la recta dada, toca el punto, pero no a la recta. En este sentido, se observa la distancia conceptual y de aplicación en referencia a la imagen del concepto y definición del mismo (Tall y Vinner) entre una recta secante y tangente a una curva.

Otros problemas persistentes en los estudiantes es la dificultad para establecer diferencias entre las diversas representaciones de las funciones (polinómicas, trascendentales…), no diferencian si la representación gráfica de las rectas horizontales y verticales en el plano cartesiano cumplen la condición de ser función, además se dificulta para algunos la correspondencia entre la representación gráfica de las rectas verticales, con su representación algebraica y el dominio conceptual para referirse a objetos propios de la actividad matemática está difuso, por ejemplo al referirse a una función constante enunciándolo como un valor absoluto y en el momento de trazar rectas tangentes a una curva en un punto determinado, varios estudiantes trazaban de manera temerosa segmentos pequeños y los reteñían hasta tocar el punto indicado, parecían estar exteriorizando una representación mental evocada. El esquema utilizado por el participante 1, para relacionar el conjunto de rectas que concurren en un punto; denominadas haz de rectas, evidencia una distorsión entre el postulado que dice que por un punto pasan infinitas rectas con la propiedad de la recta como recta tangente a una curva en un punto.

Es así como a partir de las intervenciones de los estudiantes y la orientación del investigador se pudo apreciar obstáculos de tipo cognitivo que entorpecían el avance en la comprensión del objeto de estudio. En esta situación, los estudiantes experimentaron un *Folding Back*, en lo que respecta al concepto de recta tangente y secante y las correspondientes asociaciones mentales de las que se vale cada uno para establecer semejanzas y diferencias. Los estudiantes además del *Folding Back*, descrito anteriormente también transitaron por el mismo al analizar el comportamiento de las funciones, estableciendo, en primer lugar las características de una función, haciéndose necesario que reexaminen los conceptos y propiedades de algunos elementos matemáticos básicos como:

- Criterios de paralelismo entre rectas.
- Posiciones relativas de una curva y una recta.
- Propiedades de función.

En la actividad de socialización, también se muestra un *Folding Back* en Julián, Ángela, Jhon y Evin, cuando se les indaga por las ideas intuitivas de recta tangente y se les da la instrucción de realizarlas a algunas curvas, la primera manifestación fue el no poder realizar distinciones y formular conclusiones al no inferir el concepto de recta tangente a una circunferencia a otras curvas en general. Se destaca la guía y acompañamiento del docente y del grupo de investigadores que permiten a los estudiantes reflexiones y críticas argumentadas ante sus confusiones para ser superadas, por ejemplo, en la errónea concepción de que la recta tangente de una recta en punto, es otra que pasa muy cerquita sin tocarla excepto en el punto indicado. Concepción que también es superada y por lo tanto se puede avanzar en la comprensión de la temática objeto de estudio.

Para explicar este tipo de respuestas, es pertinente el estudio de Hitt (2000) donde incluye en sus consideraciones teóricas, líneas que se enmarcan en la construcción del concepto. Hitt (2000) analizó la teoría de Skemp (1971) quien considera a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales llamadas esquemas. También desde la posición de Hierbert y Carpenter (1992) [citado en Hitt, en prensa] quienes señalan que *una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones.* Se puede decir que el estudiante (o los estudiantes) que transitan de una representación mental a un diagrama para aplicar representar funciones y rectas tangentes a estas curvas, entran en una red de conocimiento o adaptan estos conocimientos a estructuras conceptuales y plantean tratamientos y conversiones encaminados a la construcción del concepto.

Los estudios de la comprensión no han sido ajenos al concepto de las representaciones mentales. En efecto, la mayoría de las teorías proponen que la apropiación de los diferentes sistemas de representación del concepto y el reconocimiento de sus características y elementos constitutivos, contribuye a favorecer una extensión de la capacidad de representación mental de los sujetos (Tall y Vinner, Duval y Pirie y Kieren). Estas estructuras representacionales, tienen por objetivo organizar coherentemente el tipo de información que posee el individuo y que les permitirá obtener una comprensión a niveles más avanzados.

3.2.2 ANÁLISIS DEL BLOQUE 2

3.2.2.1 ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN Y CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO.

Con las actividades planteadas y la interacción y visualización en el procesador dinámico del Geogebra ® se pretende observar las relaciones que pueden establecer los estudiantes del comportamiento de la recta tangente a una curva y la condición de existencia de la derivada. Esta intervención comprendía 3 actividades:

1. Caracterización de las rectas a partir del valor de su pendiente (creciente y decreciente)
2. Trazo de rectas tangentes a una curva con ayuda del software.
3. Generalización del valor de la pendiente de la recta tangente a una curva a partir del límite de las pendientes de la recta secantes.

Cada una de las preguntas plantean interrogantes acerca de situaciones específicas. Se pide a los estudiantes que relacionen las proposiciones textuales con las gráficas dinámicas representadas en el software.

En la actividad 1, se plantea una situación gráfica representada en la Ilustración 44, la cual describe diferentes posiciones de rectas en el plano. Los estudiantes deben identificar y caracterizar el conjunto de rectas a partir de su posición en el plano cartesiano y responder las preguntas formuladas.

En este tránsito de lo gráfico a lo verbal, se involucran una serie de variables, valga mencionar: valor numérico de la pendiente de una recta, pendiente de una recta a partir de la medida del ángulo, crecimiento y decrecimiento de una recta, entre otros, que requieren relación y análisis a partir del pensamiento figurativo y operacional del estudiante.

Se observa que en esta coordinación que se establece entre estos dos mecanismos de representación existe una correspondencia, donde las variables a considerar son los elementos constitutivos del objeto matemático, y la asertividad en el paso de un registro a otro determina el proceso de comprensión del mismo, tal y como lo plantea Duval (2004) en su teoría.

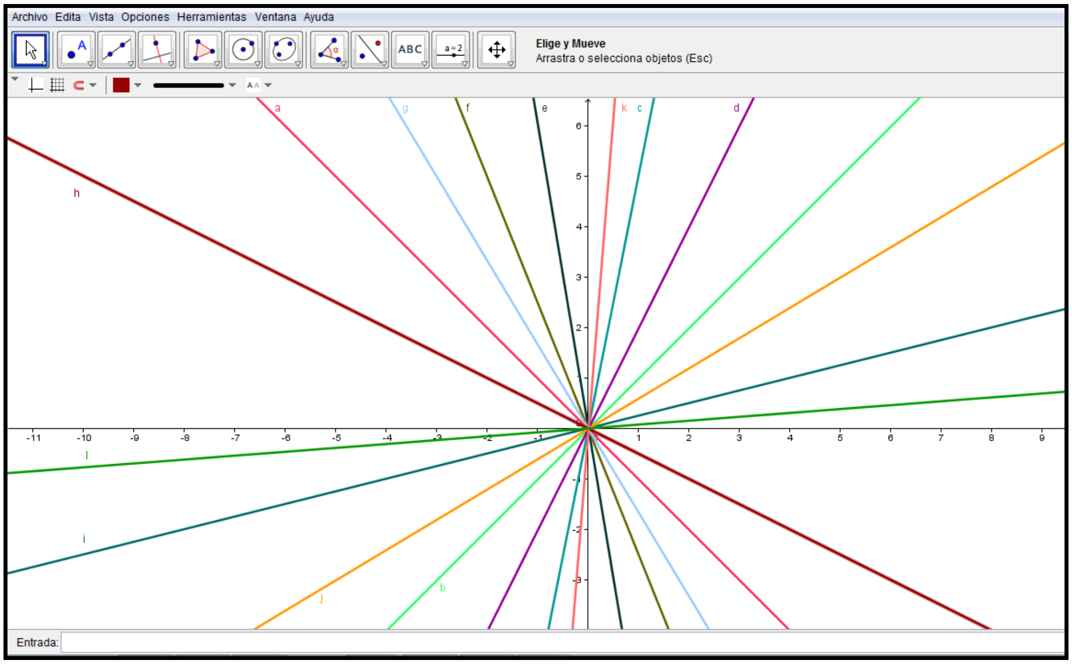


Ilustración 44. Rectas coincidentes en un punto, con diferentes pendientes.

A partir de la situación ilustrada en la figura anterior, se les plantea a los estudiantes que identifiquen cuál es la recta de mayor pendiente y cuál es la recta de menor pendiente. Como se puede observar, se realizaron representaciones gráficas de rectas con pendientes positivas y negativas.

Ángela, Evin, Jhony y Julián coincidieron en responder que son las rectas k y l respectivamente. Su respuesta fue acompañada del siguiente argumento:

Si observamos allá [señalando el primer cuadrante del plano cartesiano], la recta k es la que tiene mayor inclinación y la recta l está más cerca al eje x.

Si se tiene en cuenta la observación dada anteriormente, la visualización de estos estudiantes estuvo dirigida al primer cuadrante y en comparar "posibles"[12] valores de las pendientes de las rectas de acuerdo a la inclinación de las mismas respecto al eje y. Ninguno

[12] Se dice posibles, porque no hay valores numéricos para las coordenadas que permitan calcular con precisión el valor de las pendientes

precisó en el ángulo formado entre éstas y el eje horizontal x , así como tampoco tuvieron en cuenta aquellas rectas de pendiente negativa.

Aun teniendo los estudiantes algo de veracidad en la respuesta, pues si se comparan en la gráfica, las rectas k y l, se observa que la recta k tiene mayor inclinación que la recta l, el ángulo con respecto al eje x es mayor para la primera con el origen como punto en común, el desconocimiento de las propiedades de las demás rectas es evidente, especialmente para aquellas que coinciden en valores de pendientes negativas. Los estudiantes se inclinaron a interpretar visualmente en la gráfica y responder lo pedido, siguiendo contornos o subespacios del plano.

Pero cuando se les pide que identifiquen las rectas que son crecientes (pendiente positiva) y las rectas decrecientes (con pendiente negativa), los cuatro responden acertadamente. Al igual que en la actividad dos, en la que al construir la representación gráfica de la función $y = x^2$ en el Geogebra ®, determinaron correctamente el comportamiento de las rectas tangentes a la función en diferentes puntos de la misma, mencionando características como:

- *Entre* $-\infty < x < 0$ *las rectas tangentes a la curva son decrecientes.*
- *En el vértice de la parábola, la recta tangente a la curva es horizontal y no tiene pendiente (para mencionar que el valor de la pendiente es igual a 0)*
- *Entre* $0 < x < \infty$ *las rectas tangentes a la curva sin crecientes.*

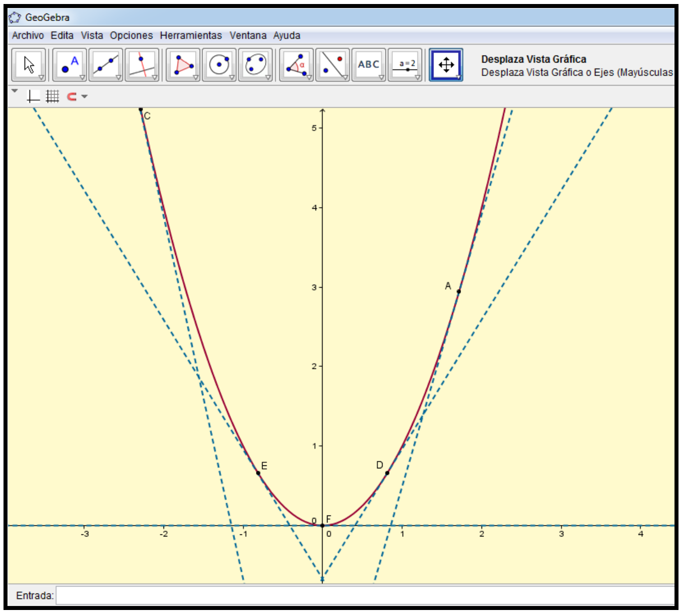


Ilustración 45. Construcción de la función cuadrática.

En la actividad 3, propuesta en esta intervención, con ayuda del software dinámico Geogebra ® se traza la curva $f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{3x^3}{4}-\frac{5x^2}{4}-\frac{7x}{4}-1$. Y en ésta se toma un punto de referencia $P\ (a, f(a))$, y otro $Q\ (b, f(b))$(no muy cercano a P) que pertenezca a la curva. Se traza la recta tangente a la curva en el punto P y la recta que pasa por P y Q. Se mueve el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P, tanto como sea posible.

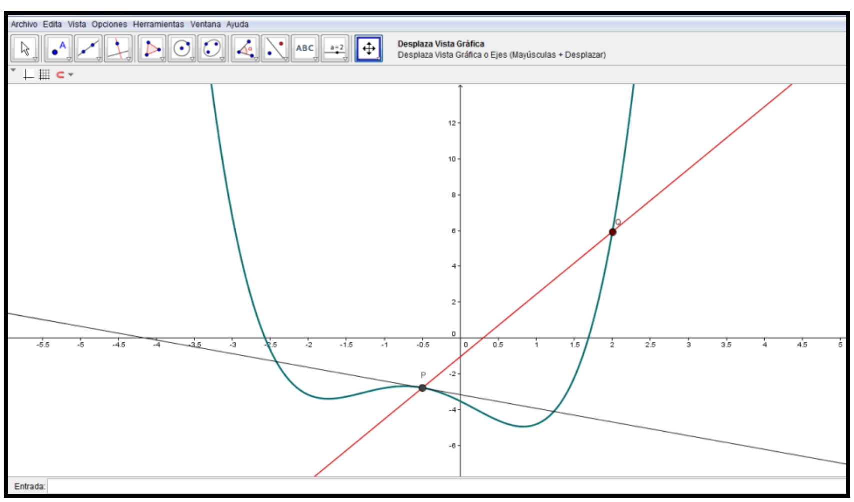


Ilustración 46. Gráfica de la función $f(x)$. Aproximación local.

Se procede a preguntarle a los estudiantes, ¿Qué sucede con el valor de la pendiente de la recta PQ, a medida que el punto Q se aproxima al punto P? Para profundizar en las comprensiones de los estudiantes a partir de la representación y visualización en el software, se describe a continuación el episodio en el cual los estudiantes y el investigador generan un diálogo en torno a la situación descrita:

Investigador: *Miremos, si movemos el punto Q a lo largo de la curva, lo suficiente que se aproxime al punto P, ¿Qué está pasando con la recta PQ?.*

[El investigador con ayuda de los comandos del software, mueve el punto Q a lo largo de la curva mientras los estudiantes observan]

Alexander: *Cambia la pendiente de la recta.*

Investigador: *Y cómo son las posiciones de las dos rectas que pasan por P con respecto a la curva.*

[El investigador señala las dos rectas]

Julián: *Una es secante y la otra es tangente a la curva.*

Alexander: *Todas dos son secantes a la curva, sólo que en el punto P, esta es tangente* [señala la gráfica].

Julián: *Ummm*

Investigador: *¿Entonces una recta tangente a la curva puede ser secante a la vez?*

Estudiantes: *Sí.*

Investigador: *Además de estar cambiando la inclinación de la recta PQ, a medida que movemos el punto Q, ¿Qué más pueden visualizar?*

Ángela: *Que las rectas se van aproximando.*

Investigador: *¿Cómo qué aproximando?*

Ángela: *Sí, se aproximan tanto que la recta PQ se va a montar sobre la otra recta que es tangente en P.*

Investigador: *¿Quién recuerda, cómo se nombran a las rectas que tienen la particularidad a la que se refiere la compañera?*

Estudiantes: [Guardan silencio].

Investigador: *¿Recuerdan?*

Julián: *Paralelas.*

Investigador: *¿Cómo son las rectas paralelas?*

Julián: *Tienen la misma pendiente.*

Investigador: *Bueno, en intervenciones anteriores teníamos la siguiente situación.* [El investigador realiza ilustración en el tablero].

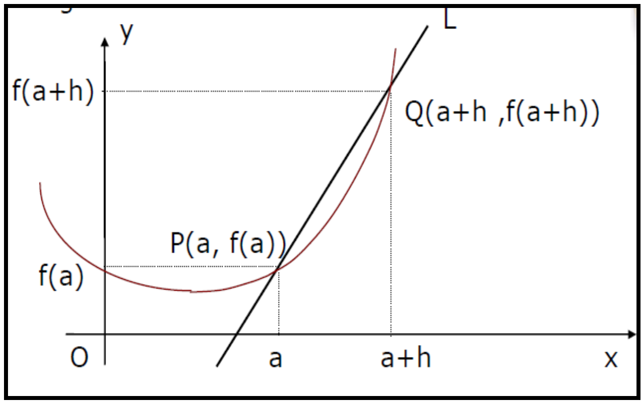


Ilustración 47. Gráfica presentada en la Acción 2c de la intervención 1.

Cuando teníamos que la pendiente de la recta PQ estaba dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(h)}{(a+h) - h}$$

¿Recuerdan?

Estudiantes: *Sí*

Investigador: *¿Qué sucede con el valor de h cuando el punto Q se aproxima al punto P?*

Alexander: *La distancia h se vuelve 0.*

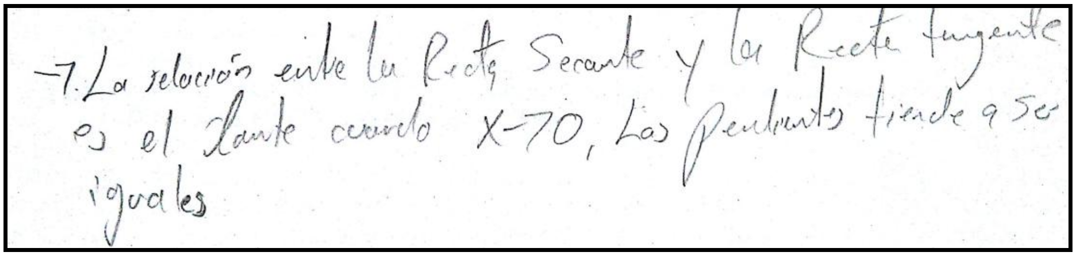
Investigador: *Pensemos en la siguiente situación, si tenemos una tirilla de papel y la dividimos a la mitad, luego uno de ellos otra vez a la mitad y así sucesivamente, podremos tener unidades cada vez más pequeñas e infinitas en cantidad y medida.*

Estudiantes: *Ummmm*

Investigador: *Si observamos estos dos puntos [el investigador señala los puntos $a + h$ y a en la figura del tablero], h tiende a 0, pero nunca se hace 0, porque siempre vamos a tener distancias infinitamente pequeñas. Concluimos que $a + h$ tiende a a, pero no coinciden.*

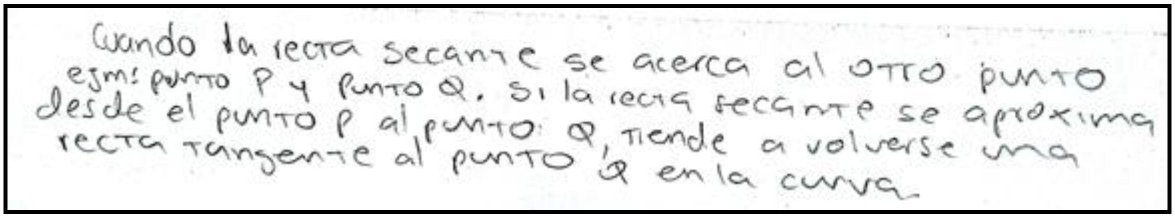
Ahora, ¿Qué podemos concluir de las rectas: Secante y tangente, ilustradas en el software?

Por razones de tipo temporal, se les pide a los estudiantes que escriban en la guía de trabajo propuesta para esta intervención (Ver anexo 4), la conclusión de lo interpretado en la situación descrita por medio del software, estas fueron:



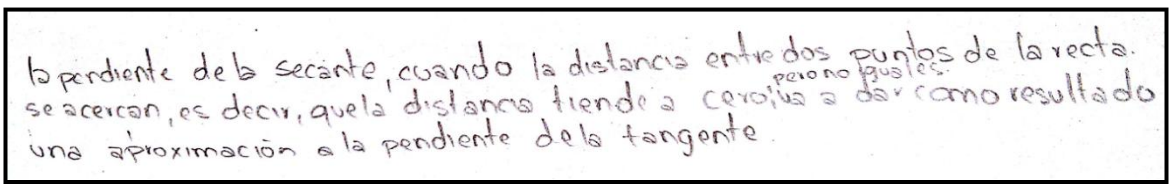
-7. La relación entre la Recta Secante y la Recta tangente
es el límite cuando X→0, Las pendientes tiende a ser
iguales

Ilustración 48. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Julián.



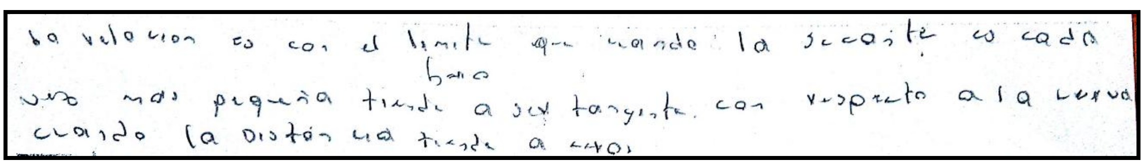
Cuando la recta secante se acerca al otro punto
ejm: punto P y punto Q. Si la recta secante se aproxima
desde el punto P al punto Q, tiende a volverse una
recta tangente al punto Q en la curva.

Ilustración 49. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Ángela.



la pendiente de la secante, cuando la distancia entre dos puntos de la recta.
pero no iguales
se acercan, es decir, que la distancia tiende a cero; va a dar como resultado
una aproximación a la pendiente de la tangente.

Ilustración 50. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Evin.



la relación es con el límite que cuando la secante es cada
vez
más pequeña tiende a ser tangente con respecto a la curva
cuando la distancia tiende a cero

Ilustración 51. Relación de la pendiente de la recta tangente a una curva y las rectas secantes en un punto común, según Jhon.

El trasladar las interpretaciones verbales y escritas de los estudiantes a la representación algebraica permitió establecer las relaciones de la recta tangente a una curva en un punto dado y las pendientes de las rectas secantes, para caracterizar la derivada de una función en dicho punto, así:

La pendiente (m) de la recta tangente a la curva en P, es igual al límite de las pendientes de las rectas secantes cuando h tiende a 0 y esto es igual a la derivada de la función en dicho punto.

$$m_{tangente} = \lim_{h \to 0} m_{secantes} = f'(a)$$

A propósito de este apartado, Duval (1999) señala que:

Las unidades significantes en los registros de los gráficos están determinadas por ocho valores visuales que corresponde a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de inclinación de la recta, la posición de intersección con el eje de coordenadas y su posición con un reparto simétrico de los dos cuadrantes opuestos (p.75.)

En las alternativas gráficas propuestas se resalta una de las variables: el sentido de inclinación de la recta. Esta variable visual representa el valor de la pendiente, pero a su vez vinculada a la representación algebraica, permite en este sentido entenderla como la representación de la derivada de la función en un punto. La visualización juega entonces un papel importante; está ligada a acciones cognitivas necesarias que permiten, empleando una adecuada asociación, dar respuestas que partan de lo verbal a lo gráfico y de éste a lo algebraico, tal es el sentido intencionado de este tipo de preguntas.

Las conclusiones de los estudiantes a la situación planteada ofrece la oportunidad de considerar que la interpretación de las componentes constitutivas de los elementos matemáticos, en este caso, la recta tangente a una curva en un punto, se facilita cuando existe una adecuada interacción y asociación de las representaciones gráficas, verbal, escrita, entre otras y la visualización del proceso matemático en la transferencia del conocimiento.

Por tal razón, en las actividades propuestas se ha tenido en cuenta la importancia de acudir a varias representaciones visuales para abordar un mismo concepto y progresar en la Comprensión de este, pues de acuerdo con las consideraciones teóricas de Duval (1999), para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también que ha de pensarse en la tarea de conversión de una representación a otra. Son estas, en última instancia las que favorecen la construcción de los conceptos matemáticos.

En conclusión, cuando se le indaga a los estudiantes por la pendiente de las rectas y el comportamiento de las rectas tangentes a una curva surge un *Folding Back*, que es una de las particularidades más importantes del Modelo de Pirie y Kieren, pues recuerdan y reconocen las características analizadas con anterioridad. A partir de las intervenciones de los investigadores, los estudiantes evidencian una mayor confianza para realizar y plantear asociaciones de la pendiente de una recta con el término inclinación y pueden calcular el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto indicado haciendo uso de procedimientos geométricos y aritméticos. Aunque al principio de la intervención los estudiantes se mostraban confusos en algunas conceptualizaciones y procedimientos específicos del objeto de estudio, a partir de la visualización dinámica pueden relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Además, consiguieron aproximarse aritméticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes.

3.2.2.2 ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN 3: PENDIENTE Y HAZ DE SECANTES.

Previo al desarrollo de la actividad de “Pendientes y Haz de secantes”(Ver Anexo 2), el grupo de estudiantes participó en la socialización del procedimiento y la profundización en la aplicación del mecanismo del haz de secantes como instrumento para determinar, con la intervención del concepto del límite, el trazo de la recta tangente a un punto. Con esta situación se buscaba que el estudiante pudiera calcular, a través de la herramienta dinámica del Geogebra ® y la representación gráfica en la actividad, el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto específico, haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético; además que pudiese emplear el haz de secantes para determinar el trazo de la recta tangente a una curva y el valor de su pendiente.

Se pide ingresar al programa la expresión algebraica y apoyarse en la aplicación del mecanismo del haz de secantes por medio del software dinámico Geogebra ® para determinar, manualmente, el trazo de la recta tangente según los puntos indicados en algunas curvas que se le presentan en las acciones de la intervención, valga decir la representación gráfica de cuatro funciones una trascendental definida por medio del logaritmo natural y tres algebraicas: una cuadrática y dos cúbicas. Al mismo tiempo identificar intervalos que definan el valor de la pendiente de la recta tangente como positiva, negativa o nula.

El uso e incorporación de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje permite el desarrollo de las competencias de los estudiantes, en la medida que los capacita en los conocimientos científicos y técnicos, además que permite la conceptualización de los temas abordados de una manera más ágil y rápida. La representación a partir de actividades dinámicas que pueden ser interpretadas, manipuladas, experimentadas y analizadas por el estudiante, favorece el proceso por el cual los estudiantes construyen representaciones mentales en la medida que expande, en términos de movilización, las estructuras que permiten la evolución en la Comprensión.

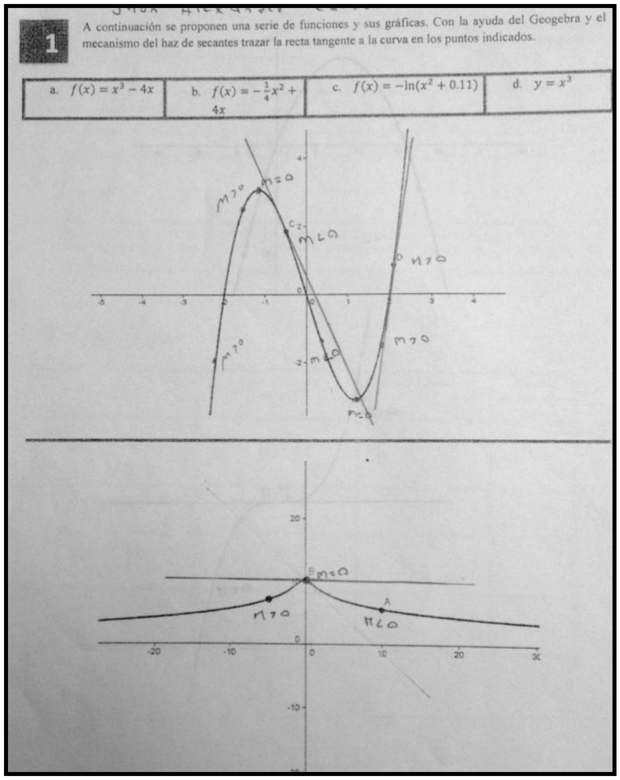


Ilustración 52. Trazo presentado por Jhon de la recta tangente a través del mecanismo del haz de secantes.

La actividad aporta la siguiente información: se observa que Jhon realiza un trazo de la recta tangente en las tres funciones algebraicas. Además, emplea la información que aporta dicho trazo para identificar los intervalos, en lo “extenso” de la representación gráfica, en los cuales el valor de la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero. Lo anterior corrobora, en alguna forma, la incidencia, en positivo, que origina el empleo de diferentes representaciones para la comprensión de un concepto en consonancia con la propuesta teórica de Duval (2004).

En la función trascendental, se apoya nuevamente en el trazo de la recta tangente para identificar, en algunos intervalos, la correspondiente relación de orden entre el valor de su pendiente y cero. Sin embargo, demuestra dificultad para determinar la no existencia de la recta tangente en el punto de no diferenciabilidad, en $x = 0$. Observándose, tal como lo propone Dolores (2000), la presencia aún del obstáculo de la definición de pendiente como el límite de la variación entre el cambio de la ordenada y el cambio de la abscisa. La noción de límite continúa siendo un fuerte obstáculo para comprender el concepto de la derivada en su componente geométrico.

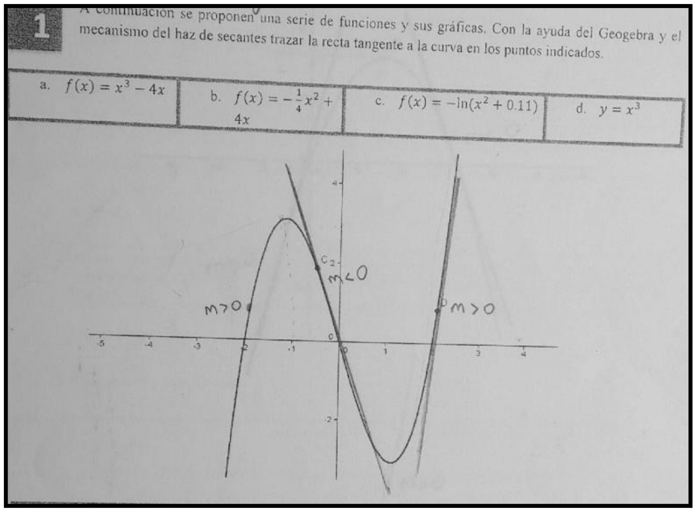


Ilustración 53. Trazo presentado por Ángela de la recta tangente a través del mecanismo del haz de secantes.

Por su lado en el proceso de Ángela, se observa evolución en el trazo de las rectas tangentes, su representación, en una considerable parte de la curva, la expresa más con "longitud" de recta y no con pequeños segmentos de recta, como solía hacerlo en acciones anteriores. Además, en su paso por el punto de tangencia, la tangente aparece conteniendo al punto, pasa sobre él, no "rozándolo" como lo presentaba previamente. Asimismo, se observa la emergencia de un evento, que desborda sus definiciones previas: en algunas gráficas su representación de recta tangente "corta" la curva. Es decir, el instrumento de aplicación, en este caso el software dinámico, le acompaña, en su movilización de estructuras cognitivas y de paso le permite confrontar su concepto imagen y el concepto definición de recta tangente y aplicar *Folding Back* hacia el nivel anterior para revisar la comprensión de ese concepto.

En este sentido, y en el caso de Ángela en particular, haber empleado el software Geogebra ® como instrumento de construcción y de visualización le permitió, además de establecer otras condiciones de potencial valor para ganar precisión en la definición formal del concepto, corroborar la propuesta de Miguel de Guzmán (2001, citado por Rendón, 2011. *p,* 46) respecto a las bondades que se espera ocurran mediante el empleo de las variables y representaciones visuales, "*la visualización debe permitir acercar al sujeto a la gran riqueza de contenidos visuales que encierran las representaciones geométricas, y conducirlo intuitivamente al estudio y comprensión de los conceptos".*

Además, al invitar a la estudiante a emplear el instrumento en la aplicación del mecanismo del haz de secantes y concluir con su propio trazo el recorrido de la recta tangente, se la estimula, física y mentalmente, pues según el Modelo propuesto por Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos, un primer momento para la comprensión emerge cuando se realizan acciones físicas o mentales con el fin de crear una idea nueva del concepto, y en este sentido pueda ampliar, en buena forma, su sistema de representaciones, para que alcance, sino superar sus obstáculos al menos si generar conflicto cognitivo que le permita buscar coherencia en su concepto imagen y concepto definición para alcanzar evolución en la Comprensión de la noción de tangente.

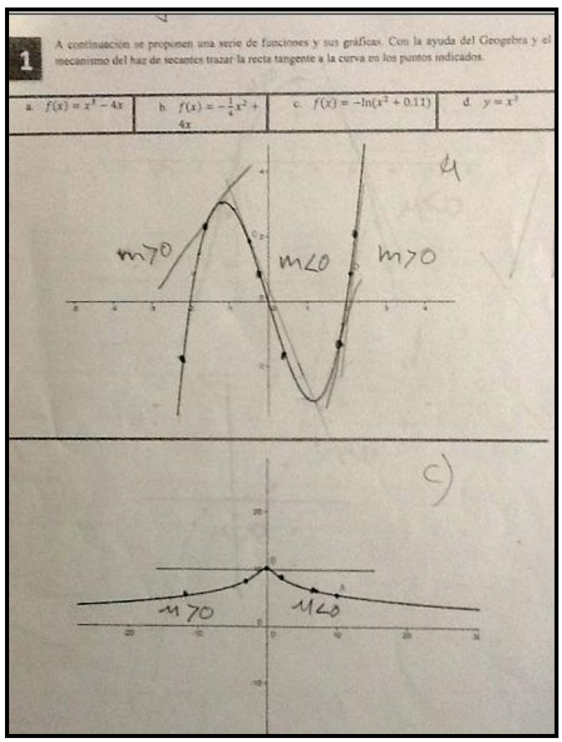


Ilustración 54. Trazo presentado por Julián de la recta a través del mecanismo del haz de secantes.

Julián a través del recurso del software dinámico Geogebra ®, construye las gráficas de cada una de las funciones sugeridas y emplea el mecanismo del haz de secantes para trazar las rectas tangentes a la curva en los puntos indicados, se basa en el valor de la pendiente que muestra el software a medida que la recta tangente a la curva recorre la misma para identificar los intervalos en los cuales el valor de la pendiente de la recta tangente es mayor, menor o igual a cero. Lo anterior denota que el uso del Geogebra ® contribuye a la construcción del conocimiento, en este caso a comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica, pues favoreció la visualización de la representación del concepto de recta tangente a una curva en un punto determinado y a la comunicación del conocimiento, lo dicho va en concordancia con lo que defiende la UNESCO (2004), "*Los alumnos deberán moverse en un entorno rico en información, ser capaces de analizar y tomar decisiones, y dominar nuevos ámbitos del conocimiento".* En este caso el estudiante con la ayuda de la herramienta tecnológica, pudo reconocer y verificar la imagen mental que tenía de la estructura algebraica de la función dada, con su representación gráfica proporcionada con la ayuda del Geogebra ®.

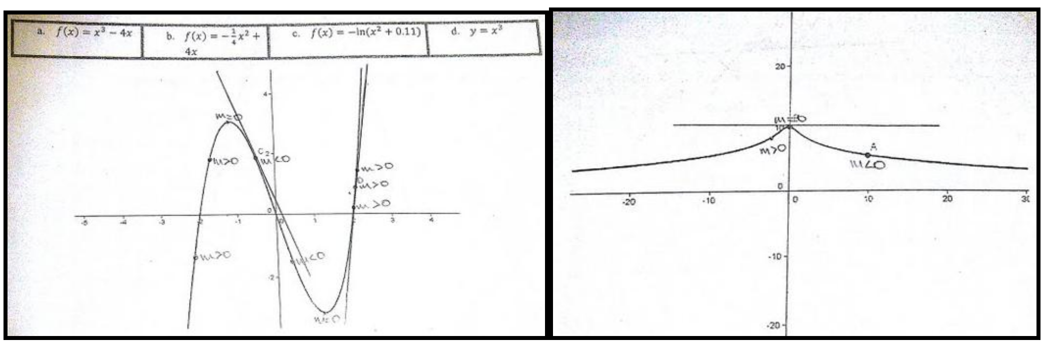
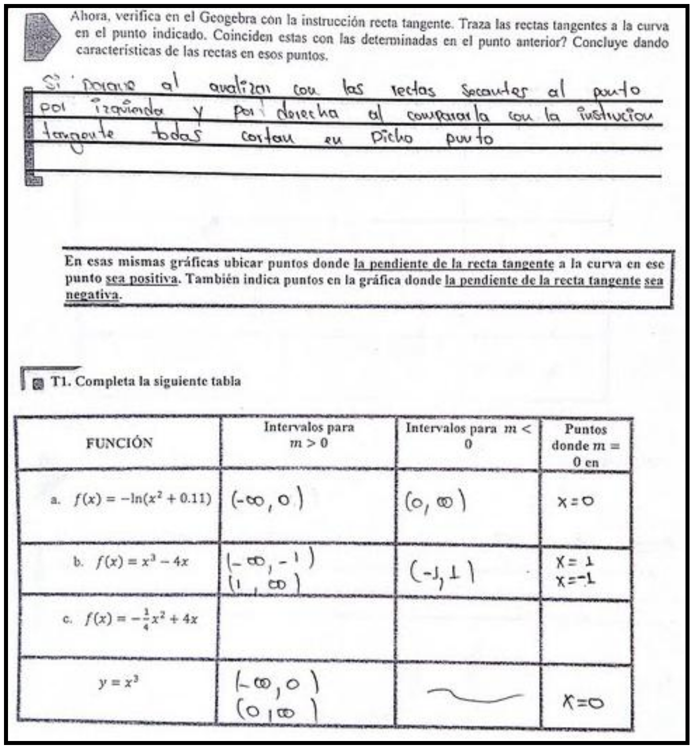


Ilustración 55. Trazo presentado por Evin de la recta tangente **a través d**el mecanismo del haz de secantes**.**

A partir de la representación de Evin y los elementos que referencia en cada una de las gráficas se puede inferir que estima el comportamiento de las rectas tangentes a una curva a partir de sus pendientes, que en definitiva es una de las dificultades que ocurre con mayor frecuencia en el estudio de la derivada. Se examina con interés que en esencia Evin puede caracterizar la recta tangente a una curva en un punto determinado, con lo cual identifica que este proceso se reduce a determinar la pendiente en ese punto. Además, a través del trazo de las tangentes, puede inferir y estudiar el comportamiento de una función sobre un intervalo de la misma, al calcular de manera correcta identifica los valores máximos, mínimos, así como los intervalos dónde la función es creciente y decreciente, apoyándose a partir del criterio de las tangentes y las aplicaciones del concepto de la derivada en su componente geométrico.



Ahora, verifica en el Geogebra con la instrucción recta tangente. Traza las rectas tangentes a la curva en el punto indicado. Coinciden estas con las determinadas en el punto anterior? Concluye dando características de las rectas en esos puntos.

Si porque al analizar con las rectas secantes al punto por izquierda y por derecha al compararla con la instrucion tangente todas cortan en Dicho punto

En esas mismas gráficas ubicar puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea positiva. También indica puntos en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente sea negativa.

T1. Completa la siguiente tabla

FUNCIÓN	Intervalos para $m > 0$	Intervalos para $m < 0$	Puntos donde $m = 0$ en
a. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$x = 0$
b. $f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$	$(-1, 1)$	$x = 1$ $x = -1$
c. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$			
$y = x^3$	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$	~	$x = 0$

Ilustración 56. Identificación del valor de la pendiente en algunos intervalos presentados por Evin.

En cuanto a las intervenciones anteriores se evidencia un avance en la comprensión del objeto de estudio, pues Evin determina los elementos que lo componen y examina de manera asertiva su comportamiento en el análisis de funciones. Sin embargo, es necesario revisar más a fondo la progresión en la comprensión de Evin, pues el paso de un nivel al siguiente no se caracteriza por el aumento de los conocimientos respecto al nivel anterior, sino por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales, los mecanismos del progreso del conocimiento pueden ser aprehendidos en las transiciones que conducen de un nivel de organización de menor adaptación del sujeto al medio (por conocer), a los niveles secundarios ulteriores (Pirie y Kieren en Meel (2003)).

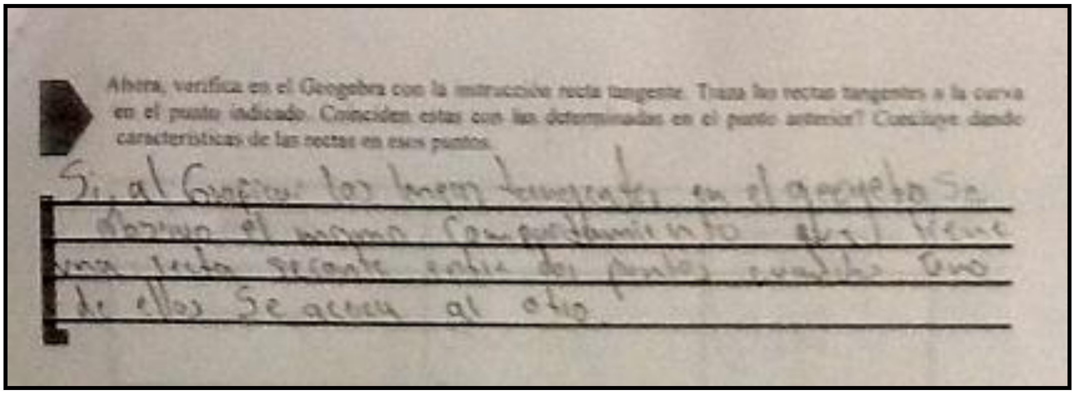


Ilustración 57. Conclusión realizada por Julián respecto a la instrucción del Software.

El estudiante pudo encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente en los intervalos de la gráfica construida, interpretando coherentemente la representación gráfica, con la representación algebraica, conceptualizando los intervalos en los que la pendiente es mayor, menor o igual a cero. De la misma forma, identifica el valor que toma la variable *x* en el punto de coordenadas donde la pendiente es igual a 0. De acuerdo con Vinner (1991), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, es decir la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto.

En su conclusión el estudiante relaciona y presenta un acercamiento alaidea de aproximación local, cuando expresa, según sus palabras, que el "comportamiento" de la recta tangente, es el mismo que el presentado con las rectas secantes; pero falta mayor precisión en su conclusión.

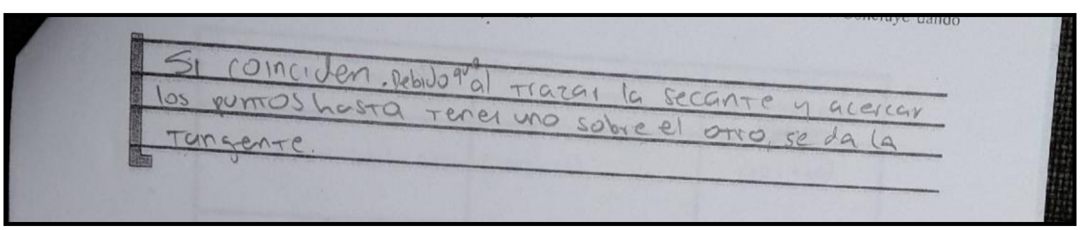


Ilustración 58. Conclusión realizada por Ángela respecto a la instrucción del Software.

De otro lado, la estudiante, usa las características propias de la pendiente en cuanto a otras informaciones que aporta, evidenciando capacidad para realizar distinciones con base en conocimientos anteriores o por la evolución de la Comprensión en los mismos gracias a su proceso. Por ejemplo, identifica en cuáles intervalos, para cada representación gráfica, la pendiente es positiva, negativa o nula y relaciona la característica que esta información ofrece para determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento en las regiones de cada gráfica. En Ángela emerge otra asociación para trascender la magnitud, el valor numérico de la pendiente. En este sentido y en perspectiva del Modelo, Thom y Pirie (2006, citado por Villa-Ochoa, 2012. p 46) afirman:

Que en este estrato se comienza la evolución de la comprensión al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este estrato radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en su forma mental, verbal, escrita o física.

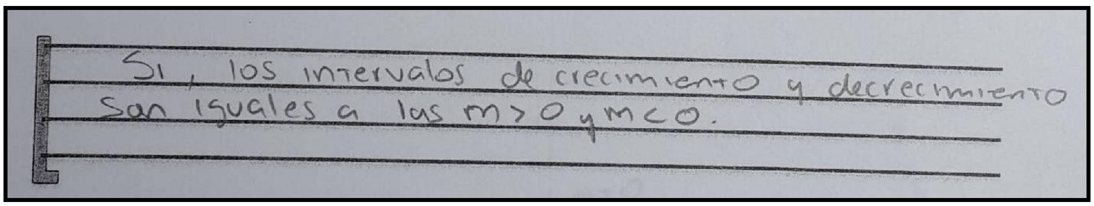


Ilustración 59. Asociación del valor de la pendiente con los intervalos de crecimiento y decrecimiento según Ángela.

En su propuesta textual de conclusión, en la figura anterior, Ángela en correspondencia con la teoría del Modelo permite distinguir cambio cualitativo en la evolución de la comprensión, característica presente en todos los niveles. La complementariedad de la acción y la expresión, una de las características diferenciales del Modelo, cobra plena vigencia, particularmente en esta actividad, ya que la estudiante, según la comunicación que emite, diferencia los procesos mentales de los procesos físicos, se muestra como sujeto actuante afrontando el desarrollo de la actividad propuesta, y empleando, a su vez, en los razonamientos y los argumentos expuestos, un lenguaje “más cercano” al contexto formal del concepto abordado.

Finalmente, en la función trascendental, función logaritmo natural, aplica nuevamente el mecanismo del haz de secantes para determinar, en primera instancia el valor de la pendiente de cada secante, una vez identificada esta particularidad define intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Evidencia no detenerse en la agudeza interpretativa que, al respecto, tiene el mecanismo del haz de secantes, para este tipo de curvas reconocidas, en el contexto, como funciones patológicas, en las que la aplicación del concepto de derivada no se puede garantizar en todo su dominio, porque en ella subsisten valores no diferenciables, números críticos que conllevan a indeterminaciones. Sin embargo, Ángela traza, erróneamente, la recta tangente y determina que el valor de la pendiente en ese número crítico es cero, lo cual indica que se le dificulta el concepto de límite, que encierra la aplicación del mecanismo del Haz de Secantes, pues el valor de las pendientes de las rectas secantes por derecha, difiere del valor de las pendientes de las rectas secantes por izquierda, por tanto en ese punto no existe las condiciones que determinan las rectas tangentes.

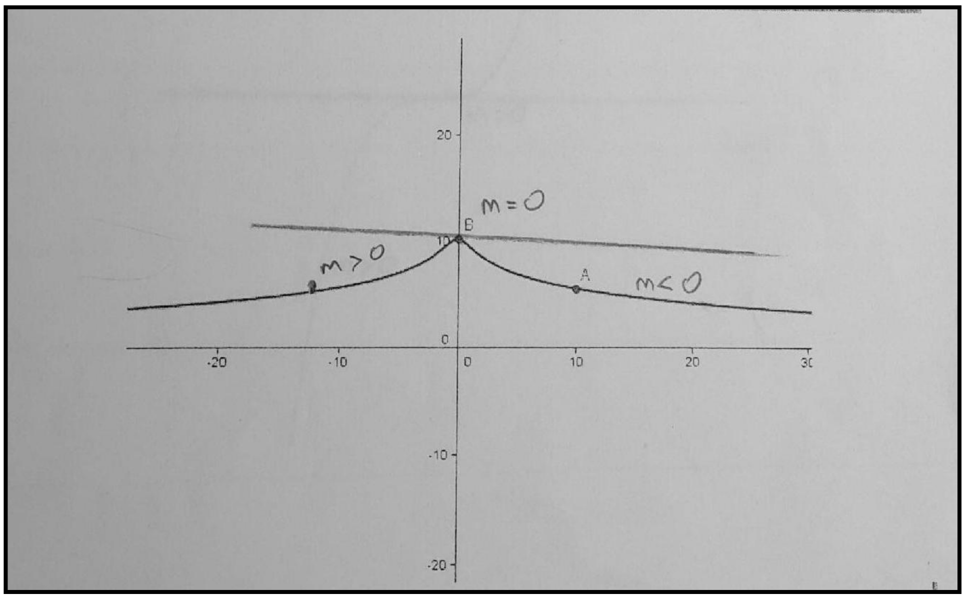
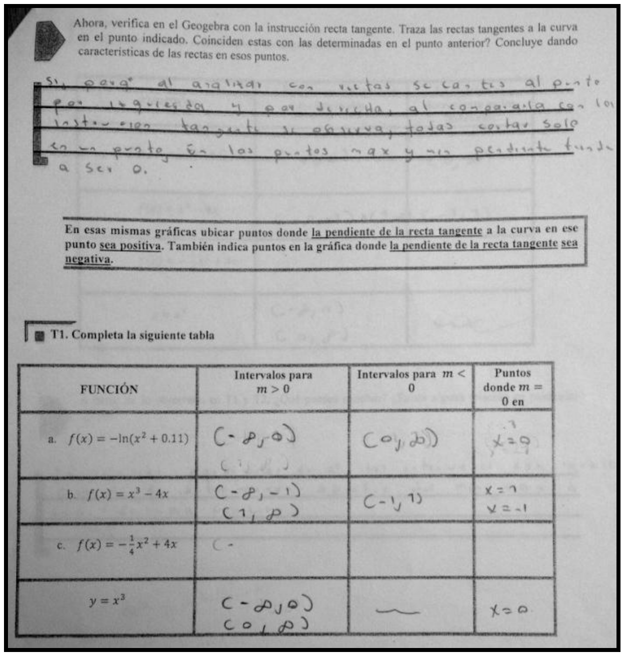


Ilustración 60. Trazo de la recta tangente a un número crítico propuesto por Ángela.

En este apartado, y para este tipo de funciones, el error es apenas lógico que aparezca, en caso de no tener el cuidado conceptual debido, porque, tal como se presenta en el trabajo de Bedoya y Otros (2006), es necesario involucrar el proceso del paso al límite, además, y en ese mismo sentido, frente a las situaciones patológicas, aquellas en las que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación, el estudiante, no ofrecerá, en general, respuesta suficiente.

No obstante, para la estudiante, el mecanismo del haz de secantes, le permitió definir la recta tangente empleando aspectos geométricos y no algebraicos y este es el aprendizaje que alcanzó y entrará a formar parte de sus conocimientos y experiencias de aprendizaje.



Ahora, verifica en el Geogebra con la instrucción recta tangente. Traza las rectas tangentes a la curva en el punto indicado. Coinciden estas con las determinadas en el punto anterior? Concluye dando caracteristicas de las rectas en esos puntos.

Si, porq' al analizar con rectas secantes al punto por izquierda y por derecha, al compararla con la instrucción tangente de la curva, todas cortan solo en un punto. En los puntos max y min pendiente tiende a ser 0.

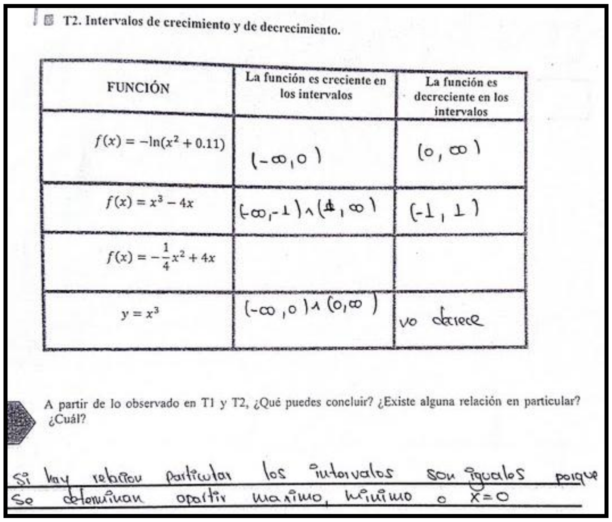
En esas mismas gráficas ubicar puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea positiva. También indica puntos en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente sea negativa.

T1. Completa la siguiente tabla

FUNCIÓN	Intervalos para $m > 0$	Intervalos para $m < 0$	Puntos donde $m = 0$ en
a. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$x = 0$
b. $f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$	$(-1, 1)$	$x = 1$ $x = -1$
c. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$	(-		
$y = x^3$	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$	~	$x = 0$

Ilustración 61. Identificación del valor de la pendiente en algunos intervalos presentados por Jhon.

Con el empleo de Geogebra ® Jhon verifica que, efectivamente, el trazo de la recta tangente determinado por el mecanismo del haz de secantes coincide con el de la instrucción recta tangente del software. En su conclusión el estudiante indica la aplicación del concepto de tendencia y la noción de límite de las secantes para justificar, la existencia de la recta tangente, como aquella que se obtiene después de haber aplicado el método de haz de secantes y realizado aproximaciones a derecha y a izquierda de un punto. Además, se percata y no duda en resaltarlo, del concepto de tangencia local y acepta que una recta tangente puede "cortar" a la curva en el punto de tangencia, evidenciando la aplicación de una de las características del Modelo, el *Folding Back* o retroceso para contrastar y movilizar su definición de recta tangente presente en el nivel previo. Igualmente, identifica que en los puntos críticos en donde se originan extremos de máximos y mínimos el valor de la pendiente puede ser cero. Al mismo tiempo, se apoya en la representación gráfica para identificar los intervalos en los que la pendiente muestra valor positivo o negativo, y estipula los valores de las abscisas para los cuales el valor de la pendiente es nula. Asimismo, considera la posibilidad de asociar el concepto de pendiente y su relación directa en la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función.



T2. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

FUNCIÓN	La función es creciente en los intervalos	La función es decreciente en los intervalos
$f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x) = x^3 - 4x$	$(-\infty, -1) \wedge (1, \infty)$	$(-1, 1)$
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$		
$y = x^3$	$(-\infty, 0) \wedge (0, \infty)$	no decrece

A partir de lo observado en T1 y T2, ¿Qué puedes concluir? ¿Existe alguna relación en particular? ¿Cuál?

Si hay relación particular los intervalos son iguales porque se determinan apartir maximo, minimo o $x = 0$

Ilustración 62. Identificación de intervalos de crecimiento y de decrecimiento presentados por Evin.

A partir del análisis de las intervenciones de Evin, se puede verificar que analiza de manera correcta las funciones, para ello debió haber regresado al primer nivel y experimentado así el *Folding Back,* hecho que se constata al describir el comportamiento de las funciones, y que por su parte es necesario para la comprensión consecuente de la derivada a partir de los signos de la misma y de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Cuando a Evin se le propone concluir a partir de los intervalos hallados y sobre el comportamiento de las rectas tangentes a fragmentos de curvas de las funciones dadas, él actúa y enuncia de manera asertiva sobre las valoraciones encontradas, no obstante, se hace necesario profundizar en los criterios de existencia de la derivada. Por último, es debido señalar algunas valoraciones descubiertas en Evin, como lo son sus indicadores de avances o dificultades en las fases de intervención en la evolución de la comprensión, también, rescatar las ventajas que el estudiante tiene en la manipulación de ordenadores para comprender mejor situaciones matemáticas (Ver Evolución en la Comprensión del concepto de derivada. Ilustración 82)

Desde el mismo momento en que Evin puede caracterizar de manera correcta los valores y los tramos de la recta tangente a la curva, se evidencia que logra asociar visualmente las características de la función a partir de la interacción con la herramienta del Geogebra ®

El uso del Geogebra ® le permitió un cambio de contexto permitiéndole la aplicación de nociones o propiedades del concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilitando con ello la *complementariedad en la acción*, tal y como lo propone el modelo de Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos. En esta dirección, el Geogebra ® actúa como una verdadera herramienta que permite la visualización y posibilita la formalización de los objetos matemáticos. No obstante, el estudiante no comprende las características de la derivada para los puntos o intervalos donde no está definida, criterio que puede analizarse a partir de la construcción de las rectas tangentes por derecha y por izquierda. Aunque, con esta situación presente, el estudiante llega a una comprensión mediante el trabajo de modelización en el software y el mecanismo del haz de secantes aplicando los criterios de crecimiento y decrecimiento sobre la función para clasificar los extremos relativos como máximos o mínimos.

La complementariedad en la acción y la expresión, propuestos por Pirie y Kieren (1994), se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles. En este sentido, los autores, Pirie y Kieren (1994, b) afirman que:

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel".

Según Meel (2003), Pirie y Kieren afirman que si los estudiantes realizan solo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y por tal, no es posible garantizar su paso al siguiente nivel.

3.2.3 ANÁLISIS BLOQUE 3

3.2.3.1 ANÁLISIS DEL APLICATIVO GEOGEBRA ®

En la actualidad, al interior de las sociedades del conocimiento y la información, es innegable, toda vez que sorprendente, el cúmulo de transformaciones y metamorfosis sociales que se han originado gracias al desarrollo de la ciencia y la tecnología. En efecto, el empleo de la TIC ha permeado todo el tejido social del actuar humano. La educación, y en especial la educación matemática, no han estado exentas de estos cambios y transformaciones, por el contrario sus escenarios y posibilidades didácticas para el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de sustanciales mutaciones que permiten, en el mejor de los casos, un notable enriquecimiento de las representaciones semióticas con componentes dinámicos y principalmente de las lógicas en las prácticas e interacciones de los diferentes actores que intervienen en los procedimientos de construcción y Comprensión de los conocimientos.

En tanto tecnología para la visualización y como acontecimiento didáctico aplicado en las experiencias de aprendizaje, el software dinámico, en este caso el Geogebra ®, contribuye a presentar otras, o si se quiere nuevas, posibilidades respecto a las tradicionales, para la enseñanza o construcción de un objeto de estudio que redundan en aproximaciones para alcanzar evolución en la Comprensión de los conceptos de las matemáticas avanzadas. En efecto, en el sentido en que lo proponen Bedoya, Jorge y Otros (2006), con relación a la importancia de utilizar las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos, el Geogebra ® como herramienta dinámica y como instrumento empleado para hacer lectura de las variables visuales permite otros acercamientos al dinamismo intrínseco que habita el concepto objeto de estudio, permitiendo con ello develar en forma cualitativa características o propiedades, globales o locales, fundamentales del mismo, y que a su vez, son difusas, invisibles o de difícil reconocimiento desde los otros recursos didácticos con atributo estático, como el papel, el texto o el tablero.

En resumen, el empleo del software dinámico en las experiencias de aprendizaje, representa en sí mismo la eventualidad de otras posibilidades didáctico-pedagógicas, puesto que ofrece un amplio paisaje, en el empleo de recurso, metodologías, estrategias y procesos de mediación en la educación matemática, permitiendo el constructo de otro espacio, y por tal de otras dinámicas de interacción entre los sujetos y los objetos de conocimiento, lo que deriva, fundamentalmente, en la proporcionar otras dialógicas de problematización entre profesor y estudiante para construir y descubrir conceptos significativos.

Finalmente, la investigación se inclina hacia el empleo del Geogebra ® como software dinámico principalmente porque es un procesador geométrico de acceso libre que ofrece la posibilidad de utilizar la Geometría y el Álgebra simultánea y dinámicamente. Además, por el conocimiento previo, en cuanto al manejo básico del programa por parte de los estudiantes que participaron como actores en las intervenciones.

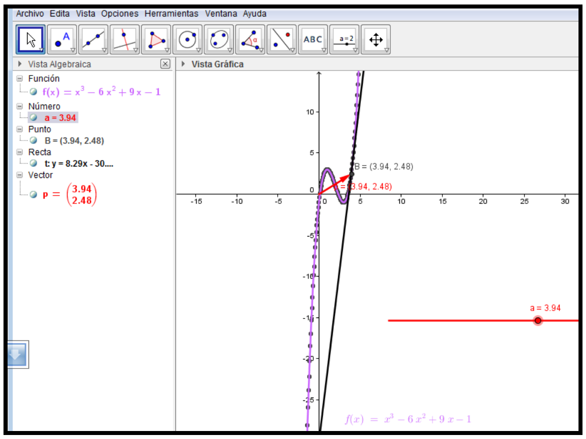
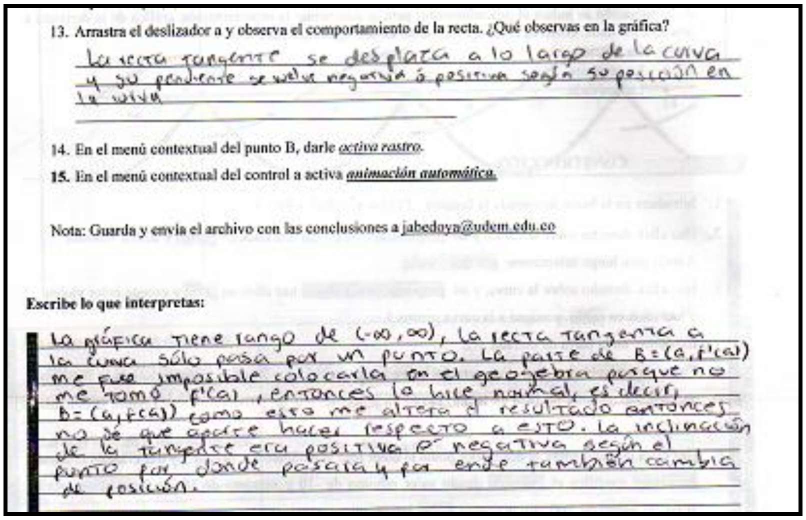


Ilustración 63. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Ángela.

La construcción realizada por Ángela con la ayuda del software dinámico, en general cumple con las instrucciones dadas en la guía de trabajo, aunque se le dificultó interpretar la referente al color que debe tomar la recta tangente cuando el valor de la pendiente es mayor que cero, el cual difiere cuando el valor de la pendiente es menor que cero, tampoco construyó la representación de la función derivada ni el cálculo del valor de la pendiente.

A continuación se presenta la expresión escrita sobre lo que la estudiante puede concluir de la función construida.


13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

la recta tangente se desplaza a lo largo de la curva y su pendiente se vuelve negativa ó positiva según su posición en la curva

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.

15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envia el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

la gráfica tiene rango de (-∞, ∞), la recta tangente a la curva sólo pasa por un punto. La parte de B=(a, f'(a)) me fue imposible colocarla en el geogebra porque no me tomó f'(a), entonces lo hice normal, es decir, B=(a, f(a)) como esto me altera el resultado entonces no sé que aparte hacer respecto a esto. la inclinación de la tangente era positiva ó negativa según el punto por donde pasaba y por ende también cambia de posición.

Ilustración 64. Análisis de la aplicación en el software Geogebra ® realizada por Ángela.

En efecto Ángela expresa la relación entre el comportamiento de la recta a lo largo de la curva, con el valor numérico de su pendiente, identificando el rango de la función, pero no interpreta la información que proporciona la construcción. Se puede decir con base en las interpretaciones descritas, que los elementos complementarios propios del tercer nivel para la evolución de la comprensión, se encuentran difusos.

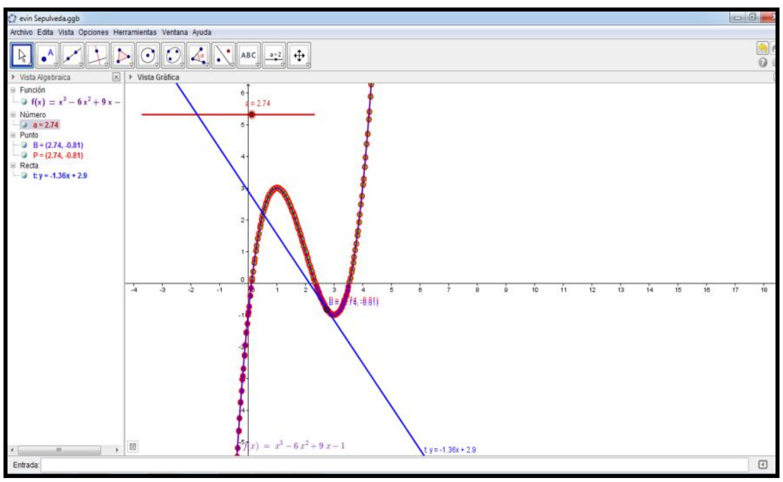
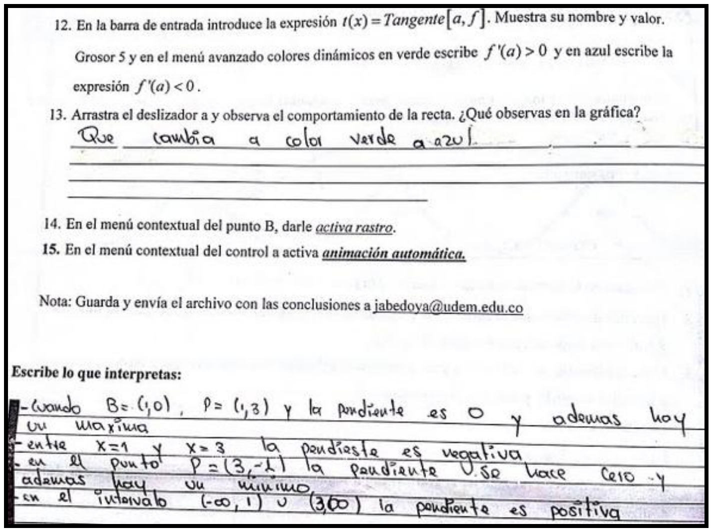


Ilustración 65. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Evin.

En la transición de realizar la actividad en el software y el análisis correspondiente, se evidencia que Evin utiliza el poder visual de la tecnología para comprender mejor la situación matemática en cuestión. Aunque se le dificulta representar la relación de la función antiderivada, la recta tangente y la función derivada por medio de la herramienta dinámica del Geogebra ®. El uso tecnológico le permitió un cambio de contexto permitiéndole aplicación de nociones o propiedades del concepto, objeto de estudio. El estudiante no llega a una solución correcta mediante el trabajo de aplicación realizado.



12. En la barra de entrada introduce la expresión $t(x) = Tangente[a, f]$. Muestra su nombre y valor. Grosor 5 y en el menú avanzado colores dinámicos en verde escribe $f'(a) > 0$ y en azul escribe la expresión $f'(a) < 0$.
13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?
Que cambia a color verde a azul.
14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.
15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:
- cuando B= (1,0), P= (1,3) y la pendiente es 0 y ademas hay un maxima
- entre x=1 y x=3 la pendiente es negativa
- en el punto P=(3,-1) la pendiente se hace cero y ademas hay un minimo
- en el intervalo (-∞,1) ∪ (3,∞) la pendiente es positiva

Ilustración 66. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Evin.

En la representación y en el análisis final hace notar que en su resolución sí se produce la identificación de estrategias de representación y fue capaz de identificar los procesos algebraicos y fórmulas simbólicas requeridas. Establece un diálogo entre el modelo algebraico y el que usó mediante el Geogebra ®. Diferencia claramente elementos de la función derivada, como intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos máximos y mínimos relativos, valores y signos de la pendiente de la recta tangente, entre otros. Por lo anterior se puede concluir que Evin logra asociar visualmente la representación gráfica de la derivada con la función original y la relación a partir de la recta tangente.

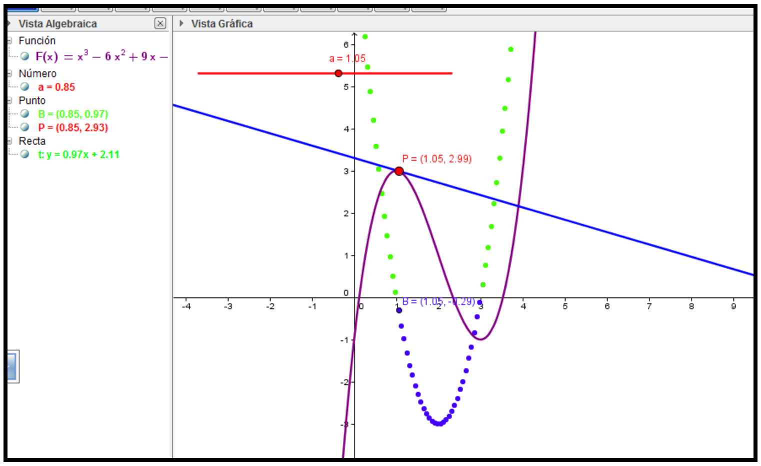
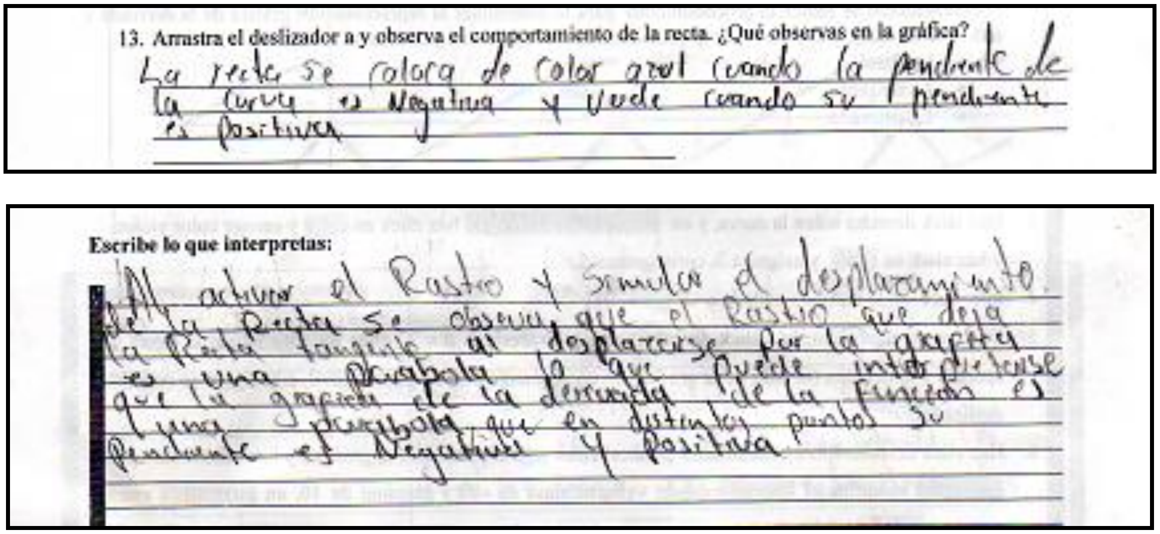


Ilustración 67. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Julián.

Al estudiante se le indica el procedimiento para determinar la representación gráfica de la derivada de una función para observar parámetros determinados. Esta es una práctica alternativa de carácter didáctico, apoyada en el uso de las TIC, que ayuda a analizar y entender con más objetividad y profundidad cómo evoluciona el proceso de comprensión. El estudiante se basa en la representación dinámica proporcionada por el software geométrico del Geogebra ® , expresando el cambio de color que experimenta la recta tangente a la curva cuando cambia su valor numérico de mayor a menor que cero, pero a la expresión escrita le falta claridad y precisión. En Meel (2003) se habla de una característica propia del segundo nivel del modelo para la comprensión, se dice que como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos, mientras el estudiante emplea el lenguaje propio para analizar y registrar las acciones.



13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

La recta se colora de color azul cuando la pendiente de la curva es Negativa y verde cuando su pendiente es positiva

Escribe lo que interpretas:

Al activar el Rastro y Simular el desplazamiento de la Recta se observa que el Rastro que deja la Recta tangente al desplazarse por la grafica es una parabola lo que puede interpretarse que la grafica de la derivada de la funcion es una parabola que en distintos puntos su pendiente es Negativa y Positiva

Ilustración 68. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Julián.

En la interpretación hecha por Julián se aprecia en esta respuesta los elementos complementarios propios del segundo nivel de comprensión *creación de la imagen* que describe el modelo llamados en (Pirie y Kieren (1991), citado por Meel 2003) *realización de la imagen y análisis de la imagen* , pues el estudiante realiza una imagen, observa el trabajo previo como un trabajo completo, y no regresará a él, para estar convencido de que el rastro que deja la recta tangente al desplazarse por la curva es el de una parábola.

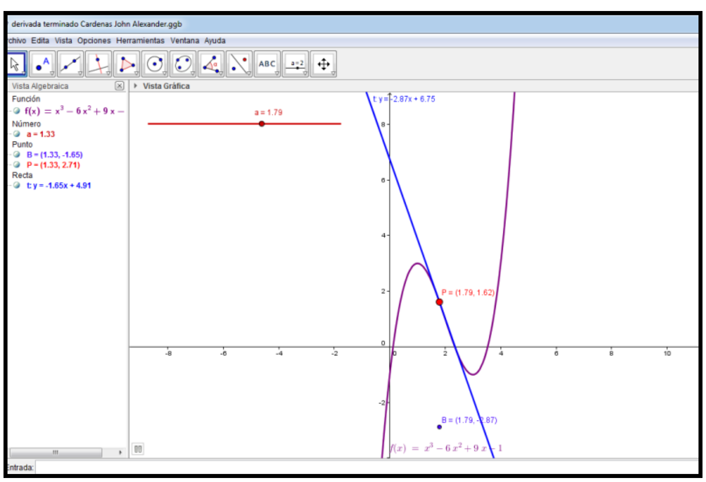
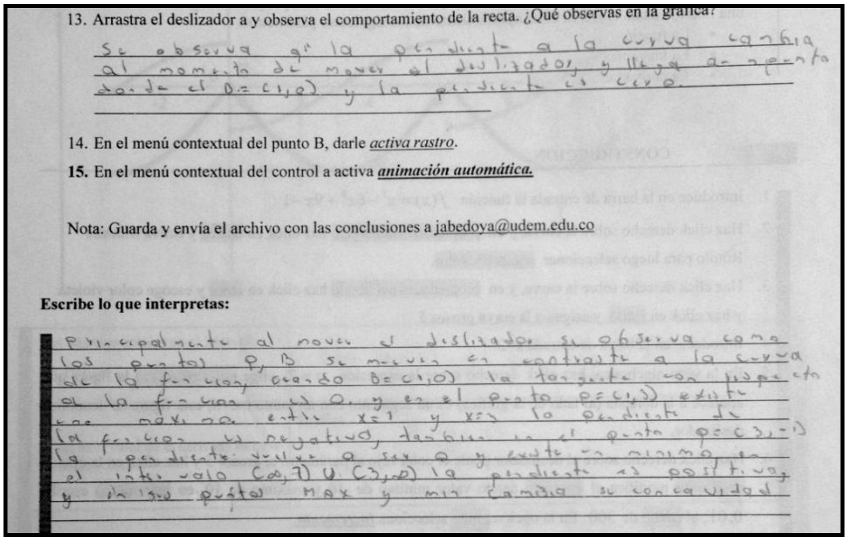


Ilustración 69. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Jhon.


13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

Se observa q' la pendiente a la curva cambia al momento de mover el deslizador, y llega a un punto donde el B=(1,0) y la pendiente es cero.

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.

15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

Principalmente al mover el deslizador se observa como los puntos P, B se mueven en contraste a la curva de la funcion, cuando B=(1,0) la tangente con respecto a la funcion es 0, y en el punto P=(1,3) existe un maximo entre x=1 y x=3 la pendiente de la funcion es negativa, tambien en el punto P=(3,-1) la pendiente vuelve a ser 0 y existe un minimo, en el intervalo (∞,1) U (3,∞) la pendiente es positiva, y en sus puntos max y min cambia su concavidad

Ilustración 70. Aplicación en el software Geogebra ® realizada por Jhon.

El empleo que el estudiante hace del instrumento, como otra forma de representación, a partir de los procedimientos indicados lo enfoca a observar la riqueza gráfica y las posibilidades que ofrece el programa en dirección a incluir la variable visual, para evidenciar, dinámicamente, el comportamiento de la recta tangente en su recorrido por todo el trayecto de la función y su derivada, identificando eficazmente las características y propiedades del objeto de estudio. Además, en su justificación emplea el beneficio didáctico que ofrece la herramienta para justificar y deliberar nuevamente sobre su Comprensión hacia el concepto de recta tangente y el de derivada de una función.

3.2.3.2 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO EVALUATIVO

El Instrumento de Evaluación (Ver Anexo 3) es una guía de trabajo intencionada para que el estudiante a través de su desarrollo consciente y responsable pueda evolucionar en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. Para su elaboración se tuvo presente los análisis, aciertos y obstáculos presentados en las diferentes actividades de intervención realizadas a los estudiantes del grado Undécimo A de la I.E Pbro. Antonio José Bernal Londoño y a sus pares del segundo semestre de ingeniería en un curso de cálculo de la Universidad de Medellín sobre la base del modelo de Pirie y Kieren.

Esta actividad le facilita al estudiante avanzar en la construcción del conocimiento con base en un aprendizaje autónomo, apoyado en la tecnología a través del uso del software libre y dinámico Geogebra ®, el cual está encargado de recrear las diversas representaciones de conceptos matemáticos para que el estudiante pueda desarrollar competencias que favorezcan el avance cognitivo que se encuentra asociado con el aprendizaje.

El Instrumento de Evaluación está conformado por acciones relacionadas con los tres primeros niveles del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren. La primera parte del mismo corresponde a las acciones diseñadas para promover la evolución en la comprensión de conocimientos propios del primer nivel llamado Conocimientos Primitivos. En estas acciones, los estudiantes debían asociar las representaciones gráficas de algunas funciones para trazar rectas tangentes a ellas e indagar por características propias de las mismas. Pues se considera fundamental que el estudiante infiera del trazo de una recta tangente a una circunferencia a otras curvas.

Luego aparecen las acciones para el segundo nivel para la evolución de la comprensión del modelo, llamado Creación de la Imagen. Este nivel les proporciona a los estudiantes aspectos importantes con respecto a características propias de la función y de su función derivada, para luego aplicarlas en las actividades propuestas. Se destacan ejercicios que demandan la construcción de representaciones mentales relacionadas con el concepto y la aplicación de la antiderivada, también se destaca el trazo de rectas secantes a una curva con respecto a un punto fijo determinado y el cálculo del valor de sus pendientes, para acercar al estudiante a una experiencia que involucra el concepto de aproximación local y límite. Por último trae una actividad para que el estudiante defina conceptos relacionados con el objeto de estudio.

Por último aparecen las acciones para el tercer nivel para la evolución de la comprensión del modelo, llamado Comprensión de la Imagen. En este grupo de acciones el estudiante debe elaborar una representación mental de la posible gráfica de la función derivada de una función y justificar sus respuestas con base en características propias de las mismas. Luego se les proporciona una representación gráfica de una función de orden superior, en la cual se evidenciará el trazo y el valor numérico de rectas tangentes a la curva en puntos determinados para que el estudiante de cuenta de los intervalos donde la derivada de la función es mayor, igual o menor a cero, identifiquen números críticos en intervalos dados y por último relacionen y justifiquen los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

Se proporciona una actividad en donde el estudiante debe seguir las instrucciones dadas en la guía de trabajo para la construcción de una función continua, en la cual se ubica un punto P sobre la curva que está condicionado a un deslizador y que contribuirá a la construcción de la recta tangente a la curva, ésta al recorrer la misma va a describir la función derivada de la función continua dada inicialmente. Por último se le pide al estudiante elaborar un mapa conceptual el cual es una herramienta pedagógica y una estrategia de aprendizaje, encargada de potencializar, personalizar y reflejar los conocimientos adquiridos y los contenidos abordados sobre el concepto de derivada.

El instrumento de evaluación facilita entonces la interpretación, sistematización y validación de los procesos cognitivos superiores que intervienen en el proceso de la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. Además, las actividades estaban organizadas para que los estudiantes pudieran establecer las relaciones matemáticas existentes entre los elementos matemáticos de la derivada, la recta tangente y la función antiderivada a través de la utilización de diferentes formas de representación: algebraica, geométrica y analítica.

Los resultados que se datan en la tabla 1, corresponden a las respuestas cerradas dadas por los estudiantes en el desarrollo del instrumento en cada uno de los niveles. Con este bloque de preguntas se pretendió observar cómo los estudiantes respondieron a preguntas que comprendían:

- Trazo de funciones a partir de la recta tangente.
- Empleo del haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.
- Reconocimiento de las características de una función a partir de la derivada y viceversa. Los resultados se exponen como aparece en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Descriptor</th><th>Acciones</th><th>Jhon</th><th>Ángela</th><th>Evin</th><th>Julián</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Conocimiento Primitivo.</td><td rowspan="5">Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica
Reconoce formas de representaciones de funciones reales empleando diferentes instrumentos
Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local
Realiza representaciones gráficas de funciones elementales
Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes...)
Expresa una idea informal del concepto de tangencia
Hace uso de los mapas conceptuales para dar cuenta del concepto de derivada.</td><td>A1</td><td>B</td><td>D</td><td>NR</td><td>C</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>A</td><td>D</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>C</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>A</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>B</td><td>D</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Creación de la Imagen</td><td rowspan="8">Reconoce y diferencia una función y su derivada.
Establece la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación.
Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica.
Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético.
Emplea el haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.</td><td>A1</td><td>D</td><td>C</td><td>D</td><td>B</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>A</td><td>A</td><td>NR</td><td>C</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>A</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr>
<tr><td>A4</td><td colspan="4" rowspan="5">Dada la necesidad de análisis y en orientación a singularizar el procesos de cada estudiantes, estas acciones se analizaran como aparece en la tabla 8.</td></tr>
<tr><td>A5</td></tr>
<tr><td>A6</td></tr>
<tr><td>A7</td></tr>
<tr><td>A8</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Comprensión de la imagen</td><td rowspan="7">Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada.
Caracteriza y grafica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada.
Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos.
Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes.
Elabora un mapa conceptual amplio que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.</td><td>A1</td><td>C</td><td>A</td><td>C</td><td>B</td></tr>
<tr><td>A2</td><td colspan="4" rowspan="6">Dada la necesidad de análisis y en orientación a singularizar el procesos de cada estudiantes, estas acciones se analizaran como aparece en la tabla 8.</td></tr>
<tr><td>A3</td></tr>
<tr><td>A4</td></tr>
<tr><td>A5</td></tr>
<tr><td>A6</td></tr>
<tr><td>A7</td></tr>
</table>

Tabla 6. Respuestas dadas por los 4 estudiantes a las preguntas cerradas en el Instrumento Evaluativo.

Estas comprensiones asociadas al concepto de la derivada en su componente geométrico y en perspectiva del Modelo de Pirie y Kieren, se convirtieron en un esquema que permitió interpretar de manera global el progreso de los estudiantes. A continuación se presentará un análisis más detallado de los resultados encontrados. Vale la pena resaltar que en la tabulación de las preguntas cerradas, aquellas que están resaltadas en negrilla son las respuestas correctas.

Las primeras acciones muestran las gráficas de una función algebraica ya sean de segundo o tercer grado y, a su vez, otras representaciones de funciones lineales, en el mismo plano, que permiten al estudiante, según sea su necesidad o evolución de Comprensión recurrir adecuadamente a la asociación de imágenes, para reconocer las propiedades características correspondientes a la derivada y a la función que la origina.

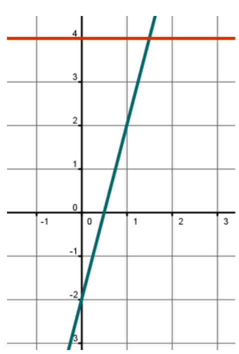
Según las respuestas de los estudiantes es posible que preserven una imagen visual y textual con la palabra "único" y "sólo" punto de la definición de recta tangente a una curva. Puede ser la imagen memorística a la cual se refiere la mayoría de los libros de cálculo y que son transferidas a los estudiantes de una manera estática, sin posibilidad de reinterpretación del texto. Esto se puede afirmar porque tanto en la acción uno (A1) como en la acción 2 (A2), del nivel Conocimiento Primitivo, los estudiantes evidenciaron dificultad al identificar la relación entre la recta tangente y la curva alrededor de un punto de tangencia, al dar respuestas como las siguientes: *"no cumple la condición de tangencia porque toca la curva en más de un punto", "una recta secante a una curva nunca puede una recta tangente a la misma", "para que sea recta tangente a cualquier curva, sólo debe tocarla en un solo punto".*

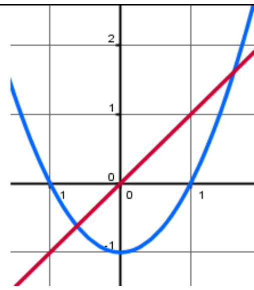
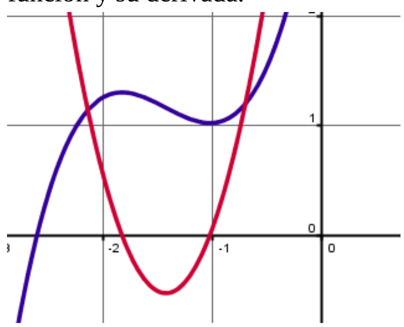
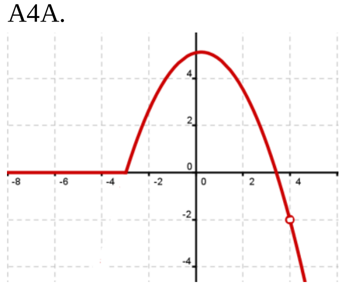
Otra explicación que puede dar una interpretación a esta situación es aquella que se refiere a la separación de la definición del concepto y la imagen conceptual del mismo, esto puede ocasionar obstáculos en la comprensión del concepto, tal y como lo argumentan Tall y Vinner(Meel, 2003). Se evidencia también en los estudiantes una evolución en la comprensión, al concebir que la recta tangente a una función lineal es ella misma, al responder de manera correcta, la acción tres (A3), del nivel mencionado anteriormente, que describía esta situación matemática por medio de un gráfico, *"la recta tangente a la función en el punto P coincide con la función lineal".*

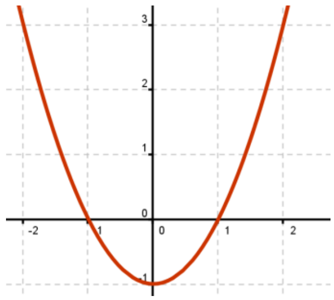
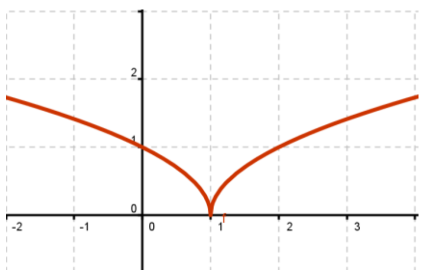
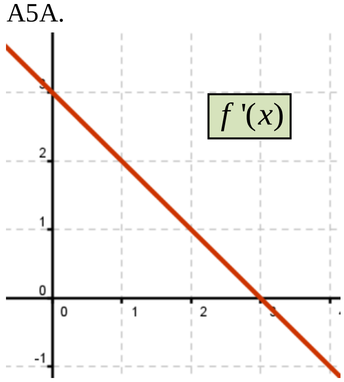
Por su lado, en los niveles dos y tres, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen, respectivamente, se observa que los estudiantes reconocen claramente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del trazo de tangentes a la curva. La mayoría de los estudiantes calculan de manera correcta el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético y establecen la derivada de una función, de manera gráfica y analítica, como se evidencia en los resultados obtenidos en la acción uno (A1), del nivel tres, pero se les dificulta el proceso de reversibilidad, es decir, pasar de la función derivada a la función original. Con lo anterior se puede decir, que a los estudiantes presentan dificultad para reconocer y realizar inferencias y relaciones a partir del concepto de derivada para llegar a las características particulares de la función antiderivada.

Se puede decir que a partir de las observaciones realizadas a los resultados obtenidos por los estudiantes en las preguntas cerradas del instrumento evaluativo y tal como aparece a continuación en el análisis a las preguntas abiertas, en estos apartados las observaciones realizadas por los estudiantes permiten identificar debilidad, precisamente en una de las características fundaméntales del nivel, en la comprensión de la imagen, puesto que las asociaciones que realiza, de acuerdo a sus justificaciones por medio de expresiones verbales, respecto a las imágenes mentales sobre la función y su derivada al parecer no son reemplazadas por una única imagen mental a partir de la cual reconocer conexamente las propiedades globales del concepto, principalmente en el efecto gráfico y conceptual, para la función y su derivada, que originan la presencia de números críticos en relación a los extremos relativos y su incidencia general en el valor de la pendiente en estos puntos de interés local. Algunas de las respuestas se pueden leer en la siguiente tabla 2:

NIVEL	PREGUNTAS	ALGUNAS RESPUESTAS
	A5a. A partir de los datos obtenidos en la tabla, ¿Qué puedes concluir respecto al cambio de las variables x e y y la pendiente m ?	**(Jhon):** *"La pendiente va disminuyendo en cada uno de los puntos"* **(Evin)** : *"Que la pendiente es positiva pero disminuye cuando se acerca a P"* **(Ángela):** *Las pendientes del lado derecho son positivas y las del lado izquierdo son negativas con excepción del punto O (-2,1) en el cual la pendiente no está definida.* **(Julián):** *A medida que los puntos se acercan más a P. Su pendiente es menor.*
Creación de la Imagen	A5b. Es posible formular el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto P y es tangente a la curva $y = x^2 + 2x + 1$? ¿Cuál es este valor?	**(Jhon):** *"$y = 2x + 2$ y P (0,1* *$y = 2(0) + 2$y $1 \neq 2$". No porque la recta tangente no pasa por el punto P.* **(Evin)** : *"La pendiente sería el valor de x y la pendiente sería $x = 1$"* **(Ángela):** $y' = 2x + 2$ $\quad$ $y_{0-1=-1(x_0-0)}$ $x = -1$ $\quad$ $y_{0-1=-1x_0}$ $P_{1=}(0{,}1)$ $\quad$ $y_{0+x-1=0}$ $P_{2=}(-1{,}0)$ $m = \frac{0-1}{-1-0} = -1$ **(Julián):** *Aplicando método derivada se tiene* $y = x^2 + 2x + 1$ $y' = 2x + 2$ $y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 2$ $x = -1$
	A8. Con tus propias palabras define los siguientes elementos matemáticos: Pendiente, tangente y función creciente o decreciente.	**Pendiente** **(Jhon):** *es la recta representada por la derivada de una función donde la recta tiene cierta inclinación.* **(Evin)** : *Puede ser positiva o negativa y es la inclinación de una recta que varía en el eje horizontal.* **(Ángela):** *Es la inclinación de una recta o la derivada de $f(x)$* **(Julián):** *Es el grado de inclinación de una recta con respecto al eje x (horizontal)*
		Tangente **(Jhon):** *es la recta que toca a la función en un único punto tangente a este.* **(Evin)** : *Recta que corta a una curva en un solo*

		punto. **(Ángela**)*:Es la derivada de una función en un punto determinado* **(Julián)*:*** *Es la recta que toca en un solo punto a una curva o función.*
		Función creciente o decreciente **(Jhon):** Creciente: *tiene una inclinación menor que 90º y crece.* *Decreciente: es que tiene una inclinación mayor a 90º y tiende a decrecer.* **(Evin)** : *Que varía con respecto al signo si es positiva crece, si es negativa decrece.* **(Ángela**)*:* *Es una función que es positiva, en ese caso creciente y en caso contrario es negativa.* **(Julián)*:*** *Es el rango de intervalo dado por los números críticos de una función al conocerse su primera derivada, donde se determina el signo de la pendiente la función, crece si es positiva y decrece si es negativa.*
Comprensión de la imagen	A2A. La gráfica corresponde a una función lineal, una linea recta cuya pendiente es 4. De lo que se puede deducir su derivada es $f'(x) = y' = 4$. Entonces las gráficas representan a una función y su derivada.  **F** | V	**(Jhon)***V, porque en una función lineal la derivada es el número que acompañe el argumento."* **(Evin)** :*"F, en la función sólo se muestra que* $y = 4$*, pero no que su pendiente sea 4."* **(Ángela**)*:"F,* $f(x) = 4x + c$ *en este caso la gráfica no coincide con* $f(x)$*.* **(Julián)*:*** *"V, Es correcta, la gráfica muestra la función y su derivada de la función algebraicamente."* $y = 4x - 2$ $y' = 4$
	A2B. En $x = 0$ la función tiene un mínimo; la derivada es nula. La recta tangente tendría que pasar por el punto de coordenadas $(0, -1)$. Estas gráficas no corresponden a una función y su derivada.	**(Jhon)***V, porque no hay forma de hallar su recta tangente"* **(Evin)**:*"V, esta gráfica no corresponde a la gráfica de la derivada."* **(Ángela**)*:"F, La gráfica si representa una función y su derivada."* $f(x) = x^2 - 1$ $f'(x) = 2x$

	 F V	**(Julián):** *"V, La recta trazada es una línea secante a la función, corta la curva en dos puntos, por lo tanto no es tangente."*
	A2C. En $x=-1$, la función tiene un mínimo; la derivada es nula y está tendría que pasar por el punto (-1,0). Las gráficas no representan a una función y su derivada.  F V	**(Jhon):** *"F, la función en $x=-1$ no tiene ningún mínimo"* **(Evin):** *"F, la derivada no tiene mínimo relativo en $x=-1$ y las gráficas no corresponde a la función."* **(Ángela):** *"V, estoy de acuerdo con lo descrito."* **(Julián):** *"V, debería pasar por el punto $(-1,1)$*
	A4A.  ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x? Si____ NO____ ¿Porque?	**(Jhon):** *"No, porque en $y=-2$ existe una asíntota horizontal, por lo tanto no existe la derivada en todo x "* **(Evin)** : *No responde.* **(Ángela):** *"No, porque en el punto $(4,-2)$ No hay derivada y en el punto máximo la derivada puede existir o no"* **(Julián):** *"Sí, porque existe puntos de tangencia en la función que para este caso es una parábola"*

	A4B.  ¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x ? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):** *”No, porque en $x=1$ y $x=-1$ la función se hace cero, por lo tanto no existe la derivada en todo x ”* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"No, porque $g'(x)$ en el punto $(0,-1)$ la derivada es cero o no existe."* **(Julián):** *"Sí, porque cada punto de la parábola tiene puntos que son tangentes y cortan en un solo punto la función."*
	A4C  ¿Existe la derivada de $h(x)$ para todo x ? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):** *” No, porque en los picos no existe la derivada”* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"No, porque existe la posibilidad que en el punto $(0,0.75)$ no exista su derivada."* **(Julián):** *“ No, porque en el punto $x=-1$ por no haber una curva, a la función pueden presentarse varias rectas secantes, pero ninguna sería tangente."*
	A5A.  ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x ? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):** *” Si, porque la derivada de esta función lineal es su pendiente, por tanto no existe la derivada para todo x .”* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela)**:*"Sí, porque la función es continua y por tratarse de una recta la $f'(x)$ existe para toda x."* **(Julián):** *No, porque la recta tangente a la función tocaría en varios puntos la función."*

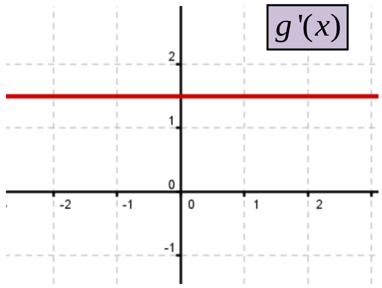
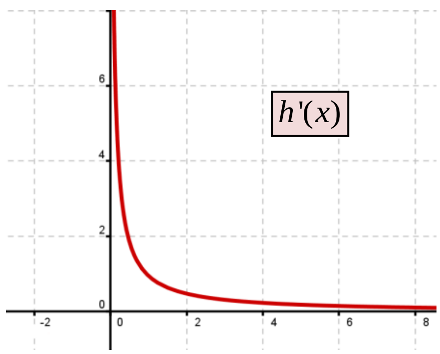
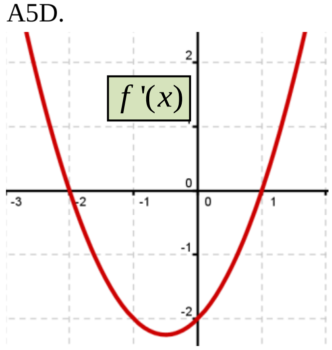
	A5B.  ¿Existe la derivada de g(x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**” *No, porque para todo valor de x no existe un y, por lo tanto no existe la derivada para todo x.”* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela***):"No, porque no existe por tratarse de una recta horizontal"* **(Julián*):*** *"No, porque $g'(x)$ = No es función, por lo tanto no es posible determinar su derivada en este punto."*
	A5C.  ¿Existe la derivada de *h* (x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**” *NO, porque hay dos asíntotas una vertical en cero y una horizontal en cero.”* **(Evin)** :*No responde.* **(Ángela***):"Sí, porque su derivada es cero"* **(Julián*):*** *"Sí, porque la función tiene puntos que son tangentes a la curva de la función $h'(x)$."*
	A5D.  ¿Existe la derivada de *f* (x) para todo *x*? Si____ NO____ ¿Por qué?	**(Jhon):**” *Si, porque si existe derivada porque para todo x existe un punto en y.”* **(Evin)** :*No responde* **(Ángela***):"No, porque no debe existir cuando su derivada se hace cero"* **(Julián*):*** *"Sí, porque existen rectas secantes a la curva que son a su vez rectas tangentes a la función."*

Tabla 7. Algunas respuestas dadas por los 4 estudiantes a las preguntas abiertas en el Instrumento Evaluativo.

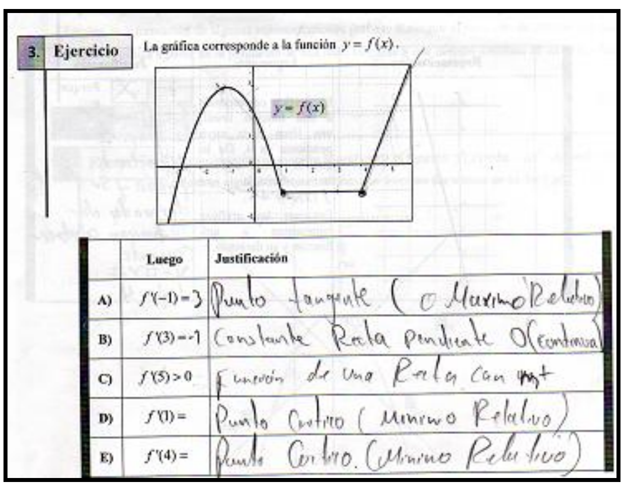
Los resultados del instrumento evaluativo especialmente las justificaciones y argumentos dados por los estudiantes, dan la oportunidad de considerar que asocian de manera correcta la pendiente de una recta con el término inclinación y como consecuencia del objeto matemático de la derivada, asignando adicionalmente, algunos la propiedad del signo, en afirmaciones como : *"Es la recta representada por la derivada de una función donde la recta tiene cierta inclinación", " Puede ser positiva o negativa y es la inclinación de una recta que varía en el eje horizontal", "Es la inclinación de una recta o la derivada de* $f(x)$*", "Es el grado de inclinación de una recta con respecto al eje x (horizontal)".* Pero persiste la dificultad de conocer las propiedades de la recta tangente a una curva y concebir una idea más global, abstracta o generalizada. Es tal la precisión hacia la definición, en términos de unicidad en el punto de tangencia, que los estudiantes al preguntársele la definición de recta tangente responden: *"Es la recta que toca a la función en un único punto tangente a este", "Recta que corta a una curva en un solo punto", "Es la derivada de una función en un punto determinado" y "Es la recta que toca en un solo punto a una curva o función".* Se ha argumentado que en la enseñanza se constituyen ciertas disposiciones hacia determinadas figuras que entorpecen la capacidad de reconocer un objeto matemático, pero en este caso, la precisión de la mayoría de los estudiantes no es figurativa sino una expresión verbal y escrita fija y estándar, que no permite reconocer el objeto cuando hay un tratamiento. Si lo que consideramos como definición es un sistema de un registro semiótico, no cabe duda que haya que realizar un tratamiento en las definiciones, que es lo que se pretendía en estas preguntas.

Al igual que en la interpretación de los resultados de las preguntas cerradas, se evidencia en los estudiantes debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se les dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hacen a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación (entre la acción y la expresión) de la definición del concepto con la imagen del mismo.

Aquí la complementariedad de la acción y la expresión, como otra de las características del Modelo, se visibiliza, aunque parcialmente, en la necesidad y actuar del estudiante para presentar desde su quehacer los progresos en la Comprensión del objeto de estudio. Sin embargo, en el otro componente de esta característica, la expresión, se evidencia dificultad para expresar verbalmente, en lenguaje cotidiano o algebraico, la justificación de su actuar y conceptualizar alrededor de las actividades que lo demandan. Por tanto, desde la perspectiva teórica del Modelo, es a penas lógico y expresamente manifiesto el surgimiento de la dificultad para que el estudiante pueda alcanzar la Comprensión de la imagen, pues, para Pirie y Kieren, según se plantea en el trabajo realizado por Villa-Ochoa (2011):

"En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel". Pirie y Kieren (1994, b)

El ejercicio se plantea con el objeto de observar y analizar la forma en que el estudiante obtiene, sustenta y desarrolla imágenes particulares que puedan dar debida cuenta de su evolución en la Comprensión matemática del objeto. Para corroborar nuevamente, en el estudiante, la forma en que son asociadas las imágenes, las diferentes representaciones, de función, pendiente y derivada en una única imagen orientada por un proceso mental, el concepto de derivada.

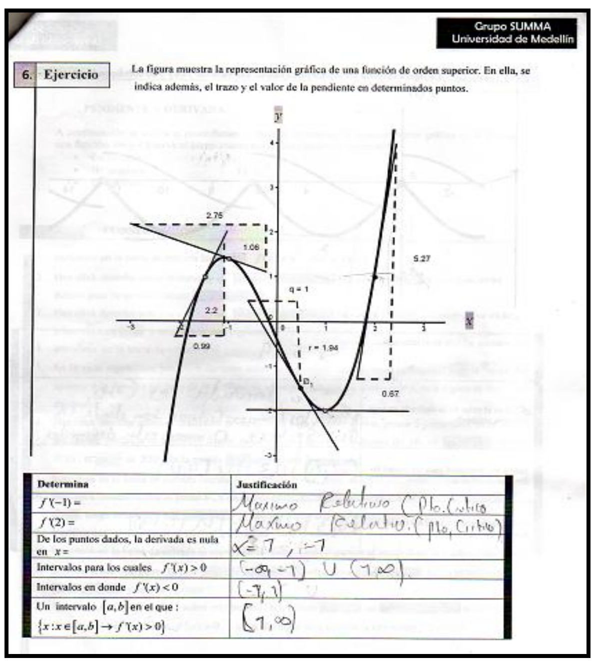

3. Ejercicio La gráfica corresponde a la función $y = f(x)$.

	Luego	Justificación
A)	$f'(-1) = 3$	Punto tangente (o Maximo Relativo)
B)	$f'(3) = -1$	Constante Recta pendiente 0 (continua)
C)	$f'(5) > 0$	Función de una Recta con m+
D)	$f'(1) =$	Punto Critico (Minimo Relativo)
E)	$f'(4) =$	Punto Critico. (Minimo Relativo)

Ilustración 71. Análisis realizado por Julián a la acción 3 del nivel 3.

En esta actividad donde intervenía la capacidad de observación, para luego analizar y a la vez inferir, el estudiante presenta incoherencias, denotando altibajos en la comprensión de la representación dada y su relación con el objeto de estudio, dando respuestas como que la recta trazada es una recta secante a la curva, cuando el argumento de la pregunta se refiere a la representación de una función y la de su derivada, a Julián le falta claridad entre una recta secante a la función y la representación gráfica de la derivada de la función, el acto de la expresión de una imagen propia del tercer nivel del modelo para la comprensión de Pirie y Kieren. y los elementos complementarios propios del nivel *visualización de una imagen y expresión de una imagen*, para esta interpretación carece de articulación y coherencia.

A continuación se presenta otra interpretación que apunta a la representación gráfica de una función de orden superior, en donde se muestra el trazo de la recta tangente a la curva y su valor numérico, para que se analice y a la vez interprete lo que está sucediendo en diferentes tramos de la misma.


Grupo SUMMA
Universidad de Medellín

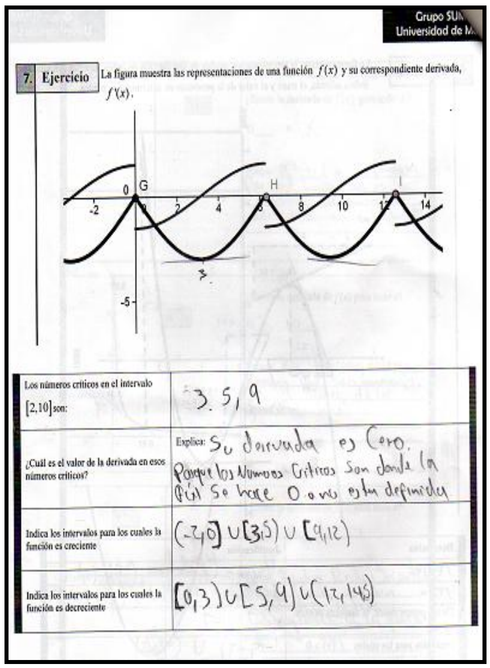
6. Ejercicio

La figura muestra la representación gráfica de una función de orden superior. En ella, se indica además, el trazo y el valor de la pendiente en determinados puntos.

Determina	Justificación
$f'(-1) =$	Maximo Relativo (Pto. Critico
$f'(2) =$	Maximo Relativo. (Pto, Critico)
De los puntos dados, la derivada es nula en $x =$	$x = 1$; -1
Intervalos para los cuales $f'(x) > 0$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Intervalos en donde $f'(x) < 0$	$(-1, 1)$
Un intervalo $[a,b]$ en el que : $\{x : x \in [a,b] \rightarrow f'(x) > 0\}$	$[1, \infty)$

Ilustración 72. Análisis realizado por Julián a la acción 6 del nivel 3.

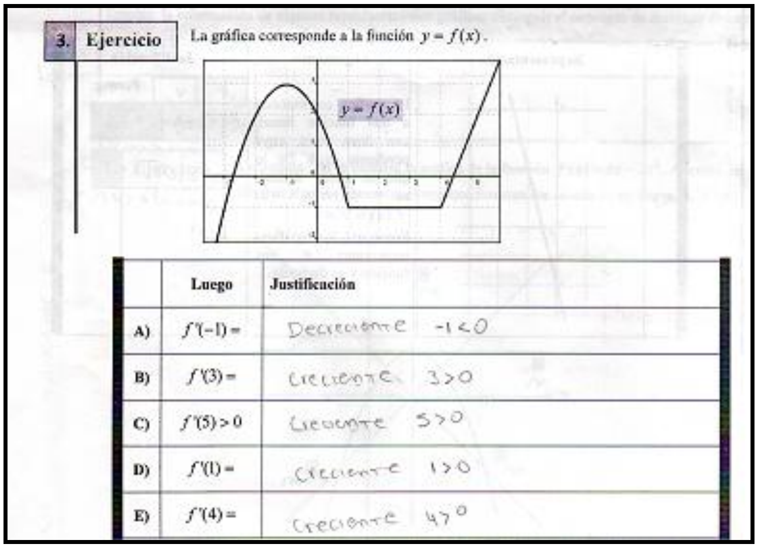
La descripción realizada por el estudiante del comportamiento de los valores de las pendientes de las rectas tangentes a la función y la relación con la interpretación de de la representación de su función derivada, deja entrever la confusión que se presenta en el momento de relacionar el concepto de punto crítico, máximo relativo utilizados por Julián, al tener que responder por el valor de la derivada en esos puntos, que se reduce a calcular el valor de la pendiente de la recta tangente y con base en ello, inferir lo que está pasando en la función dada. De nuevo presenta la desarticulación y la poca claridad en la comprensión de la imagen, dejando a un lado la interpretación y las bondades ofrecidas, cuando se determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la función.



Los números críticos en el intervalo [2,10] son:	3. 5, 9
¿Cuál es el valor de la derivada en esos números críticos?	Explica: Su derivada es Cero. Porque los Numeros Criticos son donde la f'(x) se hace 0 o no esta definida
Indica los intervalos para los cuales la función es creciente	(-2,0] ∪ [3,5) ∪ [9,12)
Indica los intervalos para los cuales la función es decreciente	[0,3) ∪ [5,9] ∪ (12,14.5)

Ilustración 73. Análisis realizado por Julián a la acción 7 del nivel 3.

En esta situación en particular donde se da la representación gráfica de una función y la de su función derivada. Al interpretar la información que se le proporciona Julián presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en la gráfica, con la definición proporcionada por el mismo, es decir se sabe la definición de puntos críticos de una función pero no los identifica en la misma, lo mismo que con los criterios de la primera derivada para determinar los intervalos donde la función es creciente, y/o decreciente.



3. Ejercicio La gráfica corresponde a la función $y = f(x)$.

	Luego	Justificación
A)	$f'(-1) =$	Decreciente $-1<0$
B)	$f'(3) =$	Creciente $3>0$
C)	$f'(5) > 0$	Creciente $5>0$
D)	$f'(1) =$	Creciente $1>0$
E)	$f'(4) =$	Creciente $4>0$

Ilustración 74. Análisis realizado por Ángela a la acción 3 del nivel 3.

Para esta actividad es necesario que la estudiante diferencie la representación gráfica de una función y la de su derivada, distinguiendo las representaciones de la función cúbica con la de su derivada y aceptando criterios de la primera derivada como los valores mínimos de la función, aunque denota altibajos en la comprensión pues no articuló la gráfica de la función cuadrática con la de su derivada, aunque intuyó que efectivamente era una función lineal, no tuvo presente el efecto que tenía el hecho de que la función estaba desplazada del origen. Se puede decir que tiene mayor acercamiento al paso del descriptor del nivel.

Se observa además Ángela tiene poca claridad en la descripción realizada por la estudiante del comportamiento de los valores de las pendientes de las rectas tangentes a la función y la relación con la interpretación de la representación de su función derivada, dificultándosele interpretar los intervalos donde la derivada de la función es mayor y/o que cero, aunque distingue los valores de *x* donde la derivada es nula, expresión de la imagen fundamental y propia del tercer nivel del modelo para la comprensión de P y K, pues articula los elementos complementarios propios del nivel *visualización de una imagen y expresión de una imagen*. Es propio resaltar que no relaciona el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado con el valor numérico de la primera derivada.

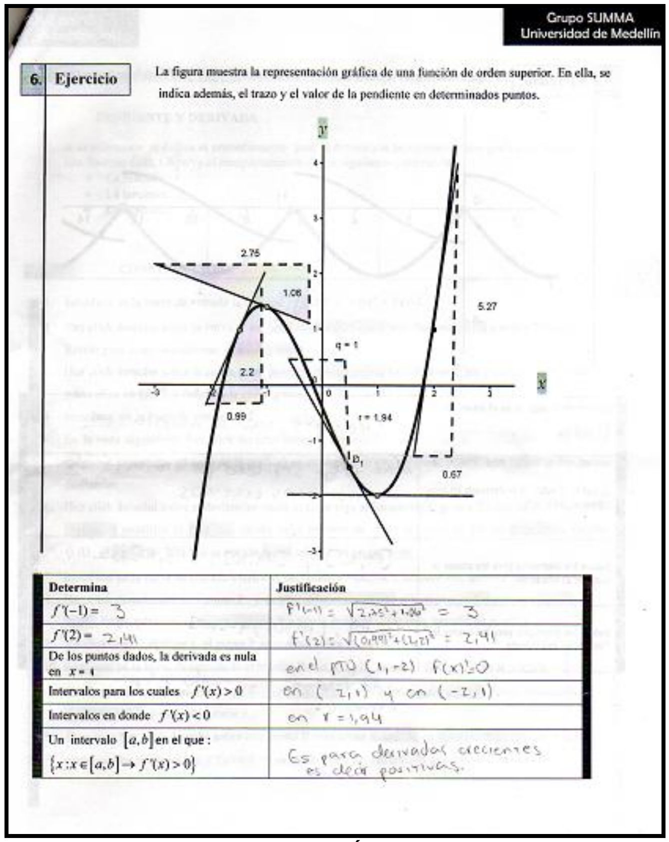


Ilustración 75. Análisis realizado por Ángela a la acción 6 del nivel 3.

Al explicar la información que se le proporciona a Ángela en la actividad, presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en la gráfica, pues no los determina en el intervalo cerrado dado, aunque tiene claro el valor de la derivada en esos números críticos. Es difusa la comprensión de la imagen para los cuales la función es creciente y decreciente.

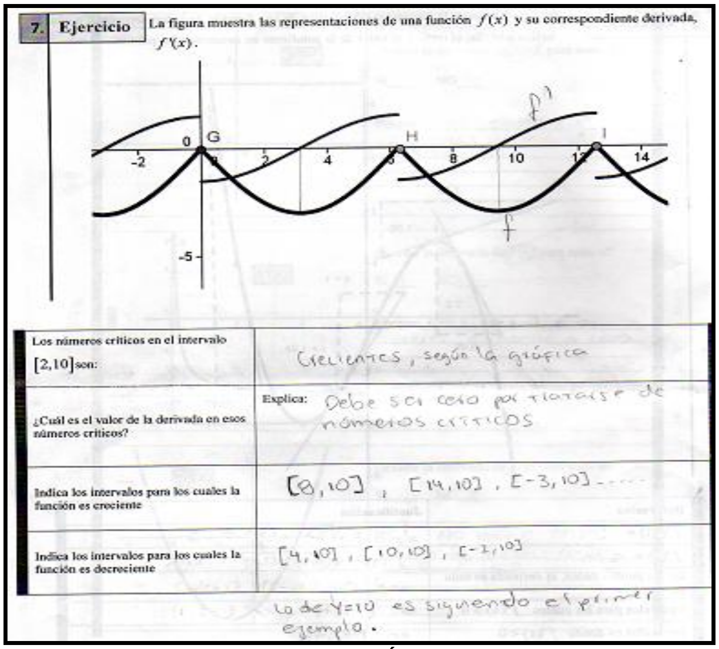


Ilustración 76. Análisis realizado por Ángela a la acción 7 del nivel 3.

Por su lado Evin, no desarrolla completamente el Instrumento Evaluativo, siendo esto un obstáculo para valorar el progreso en la comprensión del concepto. De las pocas acciones a las que les dio solución, en su mayoría comprendidas entre el nivel 1 y 2, Conocimientos Primitivos y Creación de la Imagen respectivamente, se puede inferir que presenta dificultad para emplear la información de algunas gráficas para distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básicas a partir de las propiedades de la recta tangente a la función en un punto dado.

Pirie y Kieren (1991) citado por Meel (2003) expresa que el acto de la expresión de una imagen ha unido ejemplos previos y tiene un patrón, mientras que la conducta de expresión de la imagen articula el patrón asociado con una imagen. Lo anterior permite establecer que la estudiante no acude a un patrón y por ende se le dificulta expresar y articular lo visualizado en la imagen.

En esta misma fase se hizo el análisis del al mapa conceptual que junto con el aplicativo en el Geogebra ® y el instrumento evaluativo permitió complementar la información y poder hacer una interpretación global del esquema que tiene construido cada estudiante del concepto de la derivada en su componente geométrico.

3.2.3.3 ANÁLISIS DEL MAPA CONCEPTUAL FINAL

El mapa conceptual es una actividad de valoración final e individual que se realizó previo a la culminación del proceso de intervención con los estudiantes. Algunos estudiantes ya tenían la noción de cómo elaborar un mapa conceptual, por orientaciones dadas en sesiones pasadas apoyados en las propuestas de Novak y Gowin (1988), el cual considera que el profesor puede utilizar los mapas conceptuales para determinar qué rutas se siguen para organizar los significados y negociarlos con los estudiantes, así como para señalar las concepciones equivocadas que se puedan tener.

Por otro lado, Huerta, Galán y Granel (2000), afirman que un mapa conceptual de Matemáticas en un sentido amplio, es una representación de una estructura matemática, el pensamiento en términos de conceptos matemáticos y las relaciones entre los conceptos matemáticos, es decir, proposiciones matemáticas. Ambas posturas muy pertinentes para el trabajo de investigación.

A cada estudiante se le pidió que elaborara un mapa conceptual, que reflejara los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico. Lo anterior con el fin de comparar la imagen mental que tenían los estudiantes del concepto con respecto al estado inicial. El siguiente es el mapa conceptual elaborado por Evin.

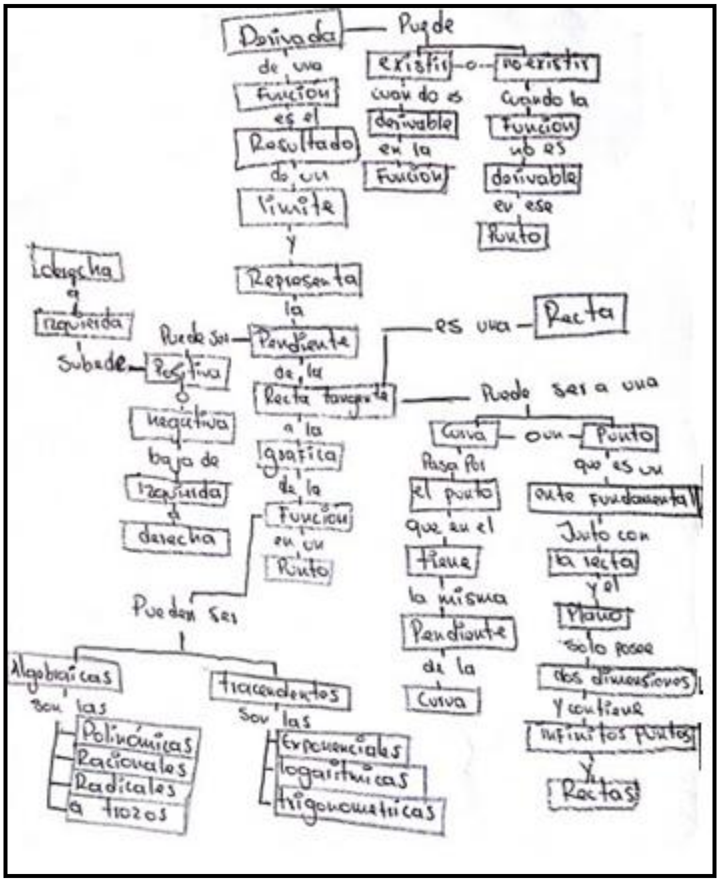


Ilustración 77. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Evin.

Este mapa conceptual pone de manifiesto la imagen del concepto de Derivada. Los elementos matemáticos que configuran el concepto de Derivada de Evin son función, límite, pendiente, recta tangente y funciones algebraicas y trascendentales. Como puede notarse aparece en el mapa explícitamente el concepto de **Pendiente,** caracterizándola según su inclinación y planteando su definición y relación en el contexto de la derivada, tal y como se enuncia *la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.*

Evin reconoce la clasificación de las funciones y tiene claridad de la existencia o no de la derivada en un punto y concibe la función del límite en este proceso, al precisar con un lenguaje claro que *la derivada de una función es un resultado del límite.*

En general lo que expuso el estudiante en el mapa conceptual incluyó los elementos matemáticos considerados en el transcurso de la intervención y que utilizó en el desarrollo de cada una de las guías y en el instrumento evaluativo; aunque muchos de estos elementos los recuerda tiene dificultad con algunos para utilizarlos de forma correcta en la resolución de las tareas. Por todo lo anterior, tanto el desarrollo de las guías, como la experiencia con el software y el mapa conceptual (inicial y final) proporcionan información relevante sobre la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de la derivada en su componente geométrico.

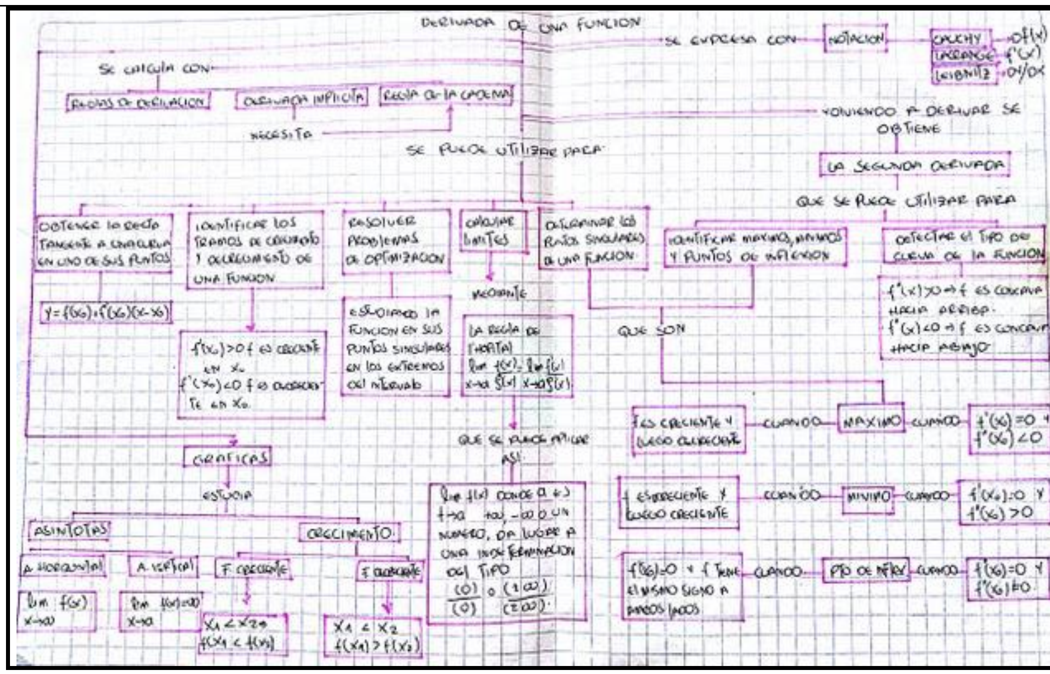


Ilustración 78. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Ángela.

De otro lado, por la representación mental que la estudiante Ángela hace de este concepto matemático se aprecia que recuerda los elementos matemáticos abordados, cuando menciona cada una de las notaciones de la derivada, su definición y aplicaciones de la misma. Hace un recorrido riguroso describiendo los elementos de notación, reglas de derivación, primera derivada, segunda derivada, entre otros. Estos elementos los plantea en un registro algebraico y escrito que demuestra dominio y distinción de los mismos para formar y hacer posibles clasificaciones del concepto objeto de estudio.

El mapa conceptual de Ángela pone de manifiesto que la estudiante muestra, en la columna izquierda, además de los procedimientos para calcular la derivada o reglas de derivación, que *la derivada de una función se puede utilizar para:*

- *Obtener la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.*
- *Identificar los tramos de crecimiento y de decrecimiento de una función.*
- *Resolver problemas de optimización.*
- *Calcular límites.*
- *Determinar los puntos singulares de una función.*

Y en la columna de la derecha menciona las aplicaciones de la segunda derivada.

En conclusión, el esquema presentado por Ángela permite inferir que hay un reconocimiento e identificación de las propiedades comunes y aplicaciones del concepto en cuestión y así concebir una imagen global y rigurosa del mismo. La estudiante adquiere en su mente una definición matemática del concepto y es capaz de verbalizarlo y representarlo en producción escrita. Justifica clara y coherentemente cada una de sus afirmaciones haciendo uso de un lenguaje formal.

En Novak y Gowin (1999) citado por Bedoya, Jorge y Otros (2006), los mapas conceptuales son una herramienta que permite analizar los avances a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje, pues los mapas conceptuales ayudan a desarrollar destrezas cognitivas como las conexiones que hace con ideas previas, tanto al inicio del proceso, como después de su conclusión, la capacidad de inclusión, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel que implica su relación, la diferenciación progresiva entre conceptos y la integración de nuevos conceptos a través de relaciones cruzadas válidas entre ellos.

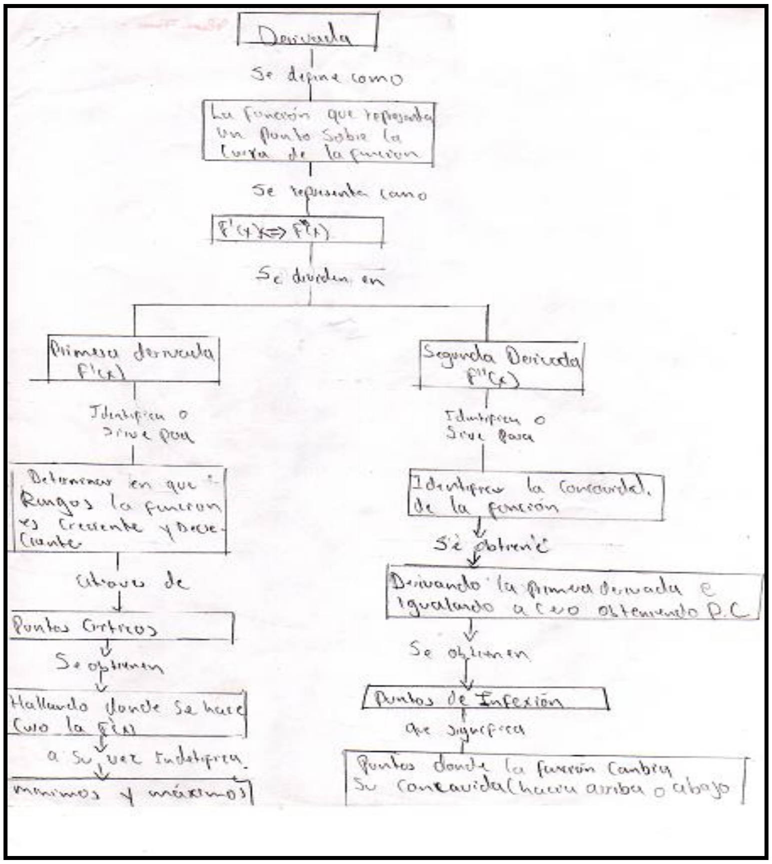


Ilustración 79. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Julián.

Julián en su mapa conceptual final, jerarquiza colocando como palabra principal Derivada y la define como la función que representa un punto sobre la curva de la función, utiliza un lenguaje simbólico para representarla y la divide en dos partes, la primera derivada y la segunda, describiendo los criterios para la primera y la segunda derivada.

Lo anterior denota que el estudiante relaciona el objeto de estudio con la aplicabilidad que tiene la derivada para graficar de forma aproximada una función y analizar su comportamiento, mostrando falta de precisión del concepto y la propiedad de la recta tangente, como la recta de estabilización del proceso del haz de secantes, aunque se aprecia evolución en lenguaje y una integración del nuevo conocimiento adquirido en el curso, ampliando su red de relaciones en torno al concepto de la derivada en su componente geométrico.

Comparando el trabajo realizado en el mapa conceptual final con el que realizó al comienzo, se observa mayor apropiación del lenguaje propio del cálculo, también hay más coherencia con las relaciones jerárquicas que establece, la reexaminación de la comprensión a partir de las acciones nuevas , de las conexiones hechas, de la forma en que expresa la imagen del objeto de estudio, denota que el estudiante comienza a reconocer propiedades, realizar distinciones con base en conocimientos anteriores. Características propias del segundo nivel llamado *creación de la imagen*.

El instrumento tal como lo propone Novak y Gowin (1988), efectivamente, deviene en estrategia de aprendizaje, enseñanza, evaluación y particularmente como medio para planificar acciones. La estructura del mapa conceptual final presentado por el estudiante permite leer entre otras las siguientes movilizaciones: la jerarquía que le ofrece a los conceptos, así como el empleo de los elementos proposicionales y de enlace tratan de dar cuenta de la visibilización que presenta el estudiante frente a otros contenidos más cercanos al objeto de estudio.

En el mapa propuesto por Jhon, el estudiante evidencia notablemente, la adecuada correspondencia que subsiste entre el concepto de la derivada y sus connotaciones geométricas y variacionales, al relacionarla con la pendiente de una función y abordarla como razón de cambio. Así mismo, intenta indicar correspondencia entre la pendiente de una función y la recta tangente, así como la incidencia de esta última para “designar” máximos y mínimos.

No obstante, orienta parte de su esquema, a un enfoque algebraico-algorítmico de la derivada, la fuerza de su argumento en este organizador gráfico, no se queda allí sino que la moviliza para tener en cuenta otras representaciones del concepto.

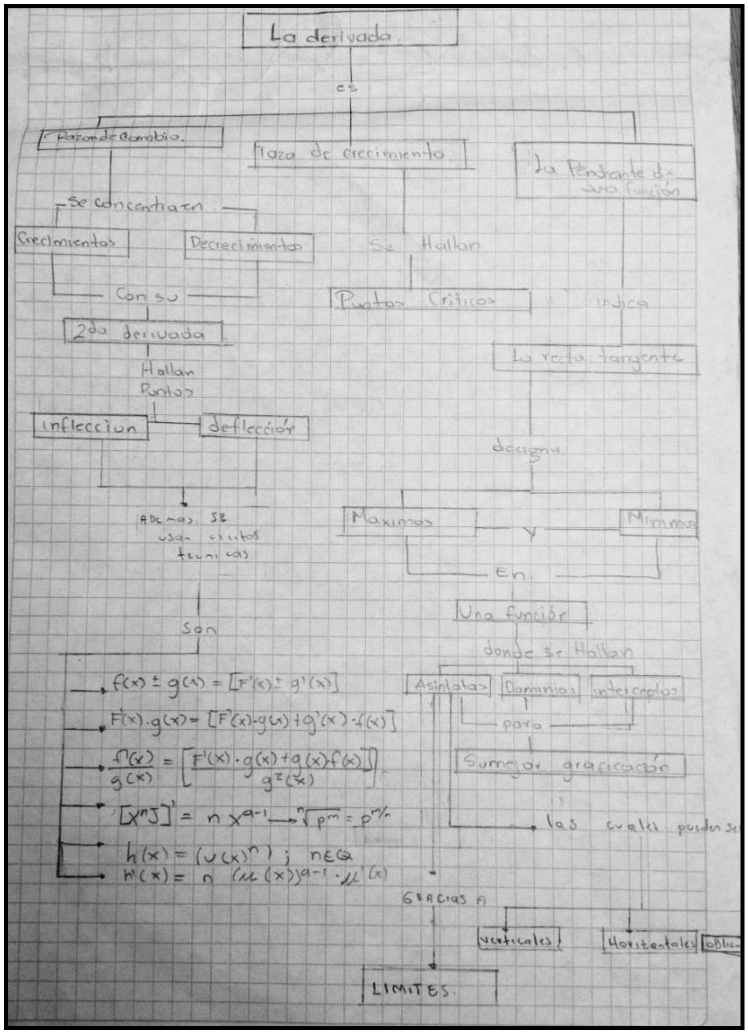


Ilustración 80. Propuesta de mapa conceptual final realizado por Jhon.

La forma en que aborda la jerarquía de los conceptos y presenta sus relaciones revelan los conceptos que hacen presencia y sobre los cuales se profundizó a lo largo del tiempo de la investigación evidenciando cierta movilización de los significados idiosincráticos para aproximarlos más al concepto imagen, a pesar de ello, es al parecer necesario hacer *Folding Back* hacia los niveles previos para que el estudiante pueda hacer conciliación entre el concepto imagen y el concepto definición, en aras a evidenciar progresos en la Comprensión de la imagen característica fundamental de este nivel.

3.3 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN SOBRE ELCONCEPTO OBJETO DE ESTUDIO A PARTIR DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

3.3.1 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN JHON.

A través del empleo de los mapas conceptuales Jhon deja entrever con cuales conceptos y con qué información se va a enfrentar para el desarrollo de las acciones propuestas en el primer nivel. Antes de dar iniciar a su trayectoria, el estudiante hace empleo del instrumento de los mapas conceptuales realizando una adecuada agrupación de algunos de los conceptos necesarios, como lo son: la pendiente y la identificación de rectas tangentes, secantes, verticales y horizontales, permitiendo inferir, por lo menos una evocación en cuanto a imagen o concepto de ellos, sustentada, según se espera en el modelo, en experiencias previas de aprendizaje. Sin embargo, en la distribución jerárquica de conceptos generales y subordinados ofrece relaciones difusas, hecho, que por demás, permite inferir la necesidad de realizar Folding Back en el transcurso de su recorrido.

Jhon inicia su trayectoria, en los niveles del Modelo, evidenciando en los Conocimientos Primitivos una pertinente información previa, respecto al concepto de función, lo que le permite relacionar, en forma adecuada, una expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica. No obstante, dado lo confuso de sus definiciones y aplicaciones, y gracias a la experiencia de la acción 5, la cual le genera conflicto referente a su idea pre-concebida de tangencia, se siente obligado, dada la necesidad de claridad, en realizar *Folding Back*, para confrontar el obstáculo que le origina la imagen del concepto y la definición del concepto respecto, fundamentalmente, a la noción de recta tangente y, además, a la de pendiente, recta secante y tendencia o aproximación.

Prosiguiendo el camino trazado por Jhon, hacia el nivel 2 del Modelo, Creación de la Imagen, se puede constatar que allí, el empleo del software dinámico y la actividad recursiva del haz de secantes, le permiten una fuerte riqueza, visual y conceptual, para hacer *Folding Back*, regresar al nivel previo revisar y replantear su imagen y definición en relación a los conceptos de recta tangente, recta secante y pendiente.

Ahora, con otros referentes conceptuales para discernir y mayor claridad procedimental, el estudiante, aborda y atiende sus obstáculos y conflictos originados por sus *concepciones falsas* (Meel, 2003) e interviene sobre ellos, a través de la acción y la expresión, tal como lo plantea el modelo, realiza distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores, y a partir de la Creación de la Imagen y análisis de la imagen empieza a especificar correctamente la aplicación del concepto de tendencia y la noción de recta tangente como límite de las secantes, aceptando, además, el concepto de tangencia local y valiéndose del concepto de la pendiente para identificar puntos críticos que originan extremos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento en una función.

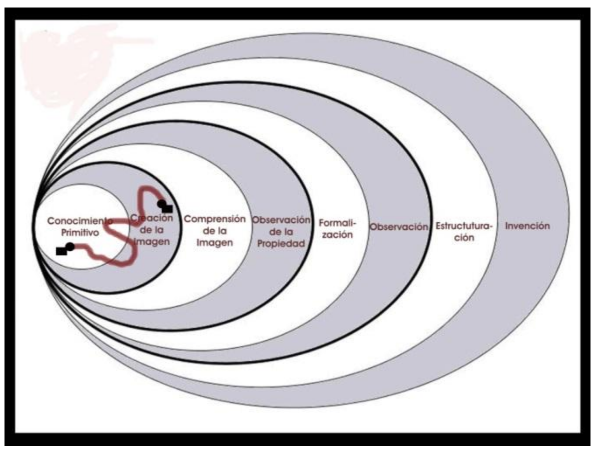


Ilustración 81. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Jhon.

Finalmente, en su exposición por el nivel 3, Comprensión de la Imagen, el estudiante evidencia no haber superado los límites de falta de necesidad, puesto que frente a actividades que demandan procesos de mayor Comprensión, respecto al objeto de estudio, como por ejemplo representar una función a partir del comportamiento gráfico de su derivada, se hace evidente la dificultad que presente en él para reemplazar imágenes asociadas con una única imagen mental y la de reconocer propiedades globales obvias en las acciones e imágenes presentadas. Este acontecimiento, sumado a que Jhon no alcanzó a superar los descriptores propuestos en el nivel 3, permite concluir que el estudiante alcanza el nivel 2 en su evolución de la Comprensión del concepto abordado.

3.3.2 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN EVIN

Evin inicia su recorrido en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico, en el nivel 1: Conocimientos Primitivos, evidenciando *Folding Back* en el concepto *función*, asociándole las propiedades de pendiente positiva - creciente o negativa – decreciente y estableciendo diferencia entre recta secante y recta tangente, aunque ésta última, con una bajo dominio del lenguaje matemático formal. Vale la pena resaltar que Evin presentaba dificultad para asociar los conceptos de variación y aproximación ligados al concepto de función, obstáculo de tipo cognitivo que fue superado. El estudiante además identifica y asocia las representaciones de funciones en su expresión algebraica y forma gráfica, mostrando que puede pasar de un registro a otro, sin mayor dificultad. Se aproxima a la definición de recta tangente a una curva, ésta estaba en contraposición a las expresiones intuitivas como la de la recta que pasa por un punto y no "corta" a la curva.

El estudiante además de los *Folding Back*, descritos anteriormente, también transitó por el mismo al analizar el comportamiento de las posiciones relativas de una curva y una recta. Hace evidente la separación del concepto de recta tangente a una circunferencia denotándolo a una curva, lo que permite, además de lo anterior, que el proceso de comprensión del objeto de estudio pueda continuar.

Posteriormente pasa al nivel de Creación de la Imagen, y allí experimenta tres*Folding Back* que hacen que regrese al nivel 1, a los Conocimientos Primitivos, uno de los casos fue para revisar la definición de recta tangente a una curva en un punto, otro para analizar las características de pendiente de las rectas *y* también se constata al describir el comportamiento de las funciones.

Evin logra plantear asociaciones de la pendiente de una recta con el término inclinación y puede calcular el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto indicado haciendo uso de procedimientos geométricos y aritméticos. A partir de la visualización dinámica puede relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Desde el mismo momento en que Evin puede caracterizar de manera correcta los valores y los tramos de la recta tangente a la curva, se evidencia que logra asociar visualmente las características de la función a partir de la interacción con la herramienta del Geogebra ®. Además, consiguió aproximarse analíticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes y estimar el comportamiento de las rectas tangentes a una curva a partir de sus pendientes. Logra inferir y estudiar el comportamiento de una función sobre un intervalo de la misma, al calcular de manera correcta los valores máximos, mínimos, así como los intervalos dónde la función es creciente y decreciente, apoyándose a partir del criterio de las tangentes y las aplicaciones del concepto de la derivada en su componente geométrico. Por lo anterior, se puede concluir que Evin logra asociar visualmente de forma correcta la representación gráfica de la derivada con la función original y la relación a partir de la recta tangente.

En cuanto a las anotaciones anteriores se evidencia un avance en la comprensión del objeto de estudio, que permiten ubicar a Evin en el nivel 3, sin embargo más adelante el estudiante evidencia una fuerte debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se le dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hace a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación de la definición del concepto con la imagen del mismo. Se le dificulta el proceso de reversibilidad, es decir, pasar de la función derivada a la función original.

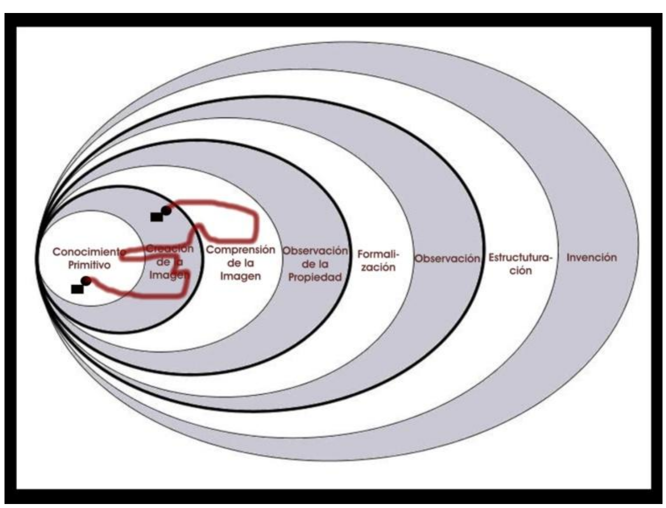


Ilustración 82. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Evin.

Evin presenta dificultad para emplear la información de algunas gráficas para distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básicas a partir de las propiedades de la recta tangente a la función en un punto dado, lo que lo obliga a regresar al nivel 2 de Creación de la imagen para revisar las relaciones y diferencias de una función y su derivada, estimación de pendientes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, signos de la derivada o en su defecto de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado y análisis de algunos trazos de rectas tangentes en porciones de curvas. Lo anterior con la finalidad de que pueda asociar la derivada y la función original, especialmente las características fundamentales de cada una. Finalmente al Evin no poder superar las dificultades anteriormente descritas y por ende no alcanzar los descriptores propuestos en el nivel 3, se concluye que avanza a un nivel de comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico que permite ubicarlo en la elevación de Creación de la Imagen (Nivel 2).

3.3.3 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN ÁNGELA

De este análisis cualitativo, se puede decir que Ángela comienza su recorrido por la comprensión en el Nivel 1: Conocimientos Primitivos, demostrando *Folding Back* en el trazo de rectas tangentes, haciendo evidente el obstáculo relacionado con la idea que la recta tangente solamente toca a la curva en un punto y presentando dificultad para trazar la recta tangente a una recta en un punto fijo, la estudiante se ve entorpecida por el concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia que regresa a su mente y participa en la socialización de la actividad diagnóstica, expone a nivel grupal el error, superándolo en la discusión generada al comprender que la recta tangente en un punto determinado de una recta, es la misma recta, otros momentos de *Folding Backs* se basan en el reconocimiento de ideas y conceptos como los correspondientes a: segmento de recta, punto, recta secante y concepto de función, estableciendo relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas de las mismas, a la vez que asocia el valor numérico de las pendientes de las rectas con algunas de sus características, también se rastrea *Folding Backs* en la actividad inicial, referente a la construcción del mapa conceptual al categorizar la información, y al tratar de usar un lenguaje propio del cálculo.

En cuanto a la evolución de la comprensión, Ángela se promueve al Nivel 2: *Creación de la imagen* con la ayuda del Geogebra ®, evidenciando en la actividad con rectas coincidentes en un punto y con medida de pendientes diferentes, reconocimiento de los valores de las pendientes de las rectas de acuerdo a la inclinación de las mismas, aunque le faltó precisión en el tránsito de lo gráfico a lo verbal, para determinar lo referente al crecimiento y decrecimiento de una recta.

Ángela ubica puntos donde la recta tangente a la curva es creciente y las traza acertadamente, experimentando otro *Folding Back* al remitirse al obstáculo superado en el nivel de los conocimientos primitivos, al hacer los trazos mencionados.

La estudiante no se puede promover al Nivel 3: *Creación de la Imagen*, pues presenta inconsistencias al visualizar los puntos críticos enmarcados en una gráfica, y al determinarlos en un intervalo cerrado dado, aunque tiene claro el valor numérico de la derivada en esos números críticos. Además es difusa la comprensión de la imagen para los cuales la función es creciente y decreciente. Es propio resaltar que se le dificulta relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado con el valor numérico de la primera derivada.

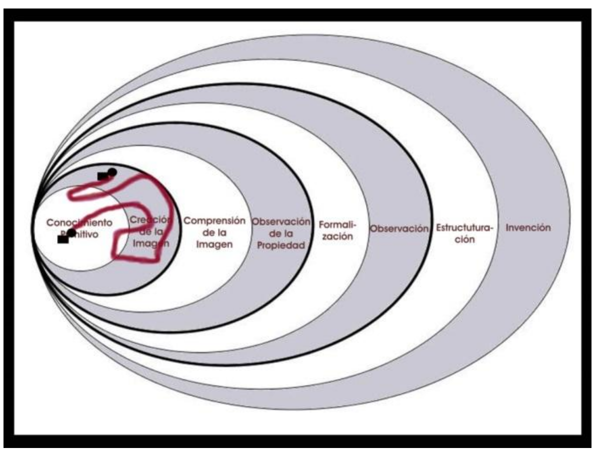


Ilustración 83. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada observado en Ángela.

3.3.4 EVOLUCIÓN EN LA COMPRENSIÓN OBSERVADO EN JULIÁN.

De este análisis cualitativo, se puede decir que Julián en su recorrido por la comprensión del Nivel 1: Conocimientos Primitivos, evidencia un *Folding Back* en el concepto de función, estableciendo relaciones entre las representaciones gráficas y algebraicas de las mismas, a la vez que asocia el valor numérico de las pendientes de las rectas con sus características. Es de resaltar que Julián evidenció dificultad para relacionar la representación gráfica de rectas trasladadas con su representación algebraica. Otros momentos de *Folding Back*, se presentan en actividades relacionadas con el trazo de rectas tangentes a la curva en un punto determinado y con las imágenes evocadas para establecer relaciones y particularizar conclusiones, a la vez cuando el estudiante se ve en la necesidad de invocar conceptos y establecer diferencias entre rectas tangentes y secantes a una curva, también en el mapa conceptual al categorizar la información, y al tratar de usar un lenguaje propio del cálculo.

En cuanto a la evolución de la comprensión, Julián se ubica en el Nivel 2, pues con la ayuda de la actividad propuesta en el Geogebra ®, el estudiante fue capaz de hacer abstracciones más allá del nivel del conocimiento primitivo, reconociendo los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es mayor y/o igual a cero y los intervalos donde la función es creciente y /o decreciente, es aquí donde Julián logra relacionar y asociar lo que visualiza en las construcciones realizadas con la ayuda del software dinámico con criterios propios de la primera derivada de una función.

En este nivel experimenta *Folding Back*, para reforzar el concepto de función y sus propiedades, que lo hace regresar al nivel de los *Conocimientos Primitivos* y evocar saberes adquiridos para calcular el valor de las pendientes de rectas secantes en la actividad relacionada con el mecanismo del haz de secantes. Mediante las complementariedades de la acción y la expresión, Julián logra razonar de nuevo en el nivel *Creación de la Imagen* en el momento que caracteriza el valor numérico de la pendiente de la recta que pasa por un punto fijo P y es tangente a una curva a través del cálculo de la primera derivada, lo que hace que reconstruya su concepto de recta tangente, independizándolo del concepto-imagen de recta tangente a una circunferencia, lo que hace que el estudiante sea promovido al Nivel 3 en el cual es capaz de reconocer algunas características fundamentales de una función a partir de la derivada como son los máximos y los mínimos de algunas funciones, pero de otras no, la representación gráfica de algunas funciones, dada la gráfica de su función derivada, presentándose situaciones donde se le dificulta establecer dicha relación, lo que lo obliga a regresar al Nivel 2 de *Creación de la Imagen.*

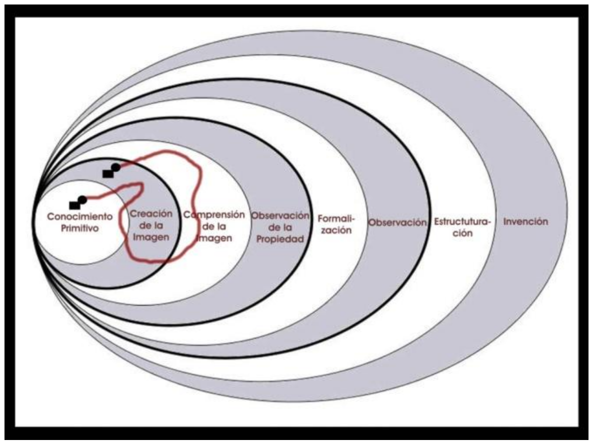


Ilustración 84. Evolución para la Comprensión del concepto de la derivada en Julián.

En la misma línea, la jerarquización y presentación de los conceptos en el anterior mapa de Ángela, permiten entender la elaboración mental a la cual acude la estudiante para comunicar una interpretación de los mismos, asociando su representación y significación a los registros de representación geométrica. El enfoque del concepto de la tangente está más orientado, a la posición y relación de la recta respecto a una curva específica, identificando en ella el punto de relación local. No se aprecia apropiación del lenguaje básico perteneciente a los fundamentos del cálculo.

b.) T2. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

FUNCIÓN	La función es creciente en los intervalos	La función es decreciente en los intervalos
d. $f(x) = -\ln(x^2 + 0.11)$		
e. $f(x) = x^3 - 4x$		
f. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$		

c.) A partir de lo observado en T1 y T2, ¿Qué puedes concluir? ¿Existe alguna relación en particular? ¿Cuál?

ANEXO N° 3

INSTRUMENTO EVALUATIVO

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO

INSTRUMENTO EVALUATIVO

ESTUDIANTE

ASIGNATURA

DOCENTE Y ASESOR

JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

ELABORADO POR

DIANA LUCÍA LONDOÑO LONDOÑO
SILVIA INÉS MORALES OSPINA
DIEGO IVÁN VILLA CHICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
GRUPO DE INVESTIGACIÓN SUMMA

2013

Nivel 1

Conocimiento primitivo

OBJETIVO

Reconocer aspectos esenciales del CONCEPTO DE LA DERIVADA EN SU COMPONENTE GEOMÉTRICO previos al cálculo diferencial, mediante el trazo de tangentes en un punto determinado de una curva.

Aprendizajes Esperados

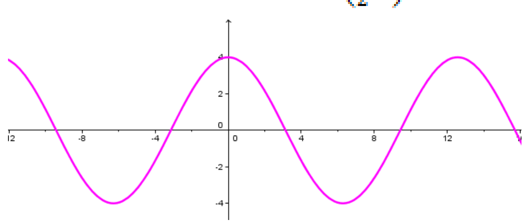
Con base en los resultados arrojados del estudio y del análisis de la prueba diagnóstica realizada por los estudiantes, se requiere que éstos emerjan sus ideas intuitivas y muestren evidencia de los procesos de aprendizaje que tienen que ver con los siguientes descriptores:

Relaciona la representación gráfica de una función con su expresión algebraica.
Reconoce formas de representaciones de funciones reales empleando diferentes instrumentos.
Manifiesta una idea intuitiva de tendencia y aproximación local.
Identifica posiciones relativas entre una recta y una curva (secantes, tangentes, …)
Expresa una idea informal del concepto de tangencia.

Acciones

El grupo de investigación agradece tu participación y compromiso con el desarrollo de las actividades propuestas.

1. Ejercicio Observa la función $f(x) = 4\ Cos\left(\frac{1}{2}x\right)$, descrita en la siguiente figura



Si se gráfica la recta $f(x) = 4$, sobre la figura, se puede afirmar correctamente que

A.) es una recta tangente porque toca a la curva únicamente en el punto (0,4).

B.) no cumplir la condición de tangencia porque toca a la curva en más de un punto.

C.) es tangente a la curva en el punto (0,4).

D.) no es una recta tangente puesto que el valor de la pendiente es igual a 0.

2. Ejercicio

La afirmación correcta es

A. para que una recta sea tangente a cualquier curva, sólo debe tocarla en un solo punto.

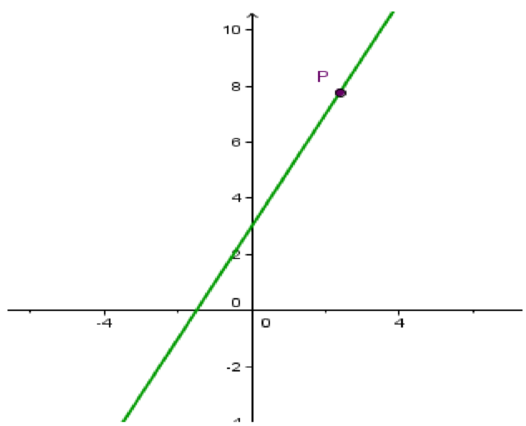
B. en toda circunferencia la recta tangente no puede ser a la vez recta secante.

C. una recta secante a una curva nunca puede ser una recta tangente a la misma.

D. A y B son correctas.

3. Ejercicio

Observa el punto P marcado en la función lineal $f(x) = 2x + 3$, que se ilustra en la siguiente figura



De las siguientes afirmaciones, la correcta es

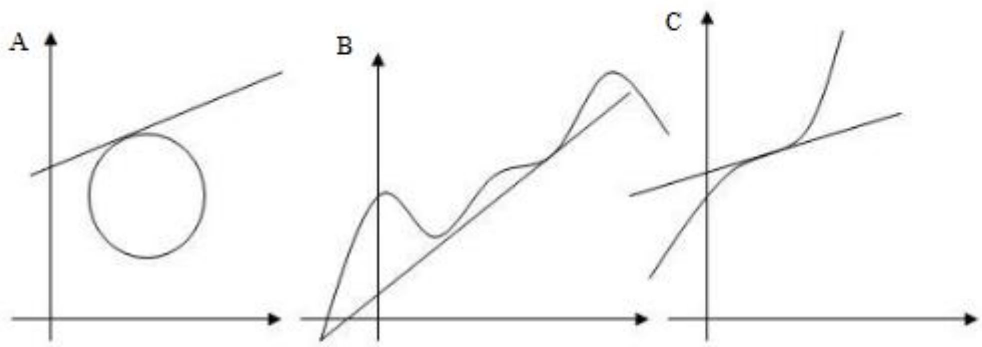
A.) no es posible determinar una recta tangente a la función que pase por el punto P.

B.) la recta tangente a la función en el punto P pasa muy cerca de ella pero sólo la toca en P.

C.) la reca tangente a la función en el punto P toca a la función únicamente en el punto P.

D.) la recta tangente a la función en el punto P coincide con la función lineal.

4. Ejercicio De las siguientes gráficas, la afirmación correcta es



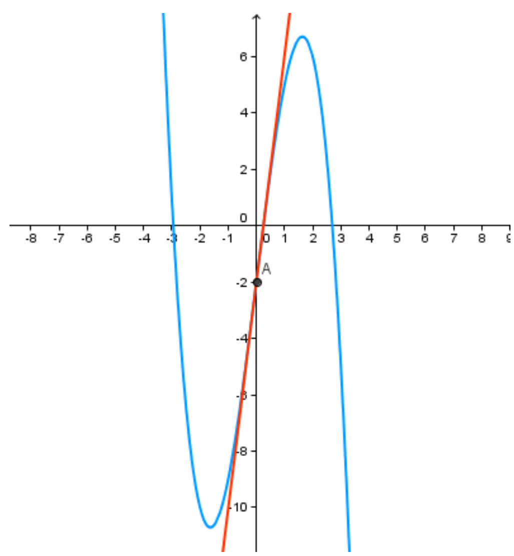
A.) solamente la gráfica A representa la recta tangente a la curva en un punto.

B.) B y C no son rectas tangentes a la curva, porque cortan a la curva.

C.) la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia es negativa.

D.) las rectas son tangentes a la curva en al menos un punto.

5. Ejercicio De la siguiente gráfica, la afirmación falsa con respecto al punto A es



A.) la función es creciente, en torno al punto A.

B.) la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A es positiva.

C.) el conjunto numérico de los enteros determina el conjunto rango de la curva y de la recta tangente a la curva en el punto A.

D.) en torno a A se presenta un cambio de concavidad.

Nivel 2

Creación de la imagen

Realizar distinciones de una función y su derivada con base en características y propiedades de la recta tangente.

OBJETIVO

Aprendizajes Esperados

Reconoce y diferencia una función y su derivada.

Establece la derivada de una función y hace uso de diferentes formas de representación.

Realiza relaciones e inferencias del concepto de pendiente y de derivada a partir de una experiencia dinámica.

Calcula el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto haciendo uso de procesos de razonamiento geométrico y aritmético.

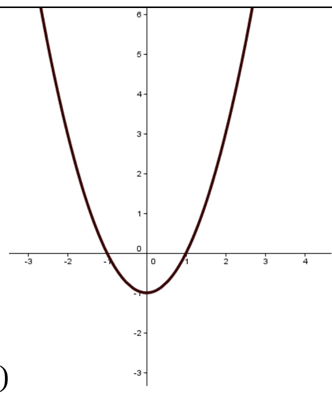
Emplea el haz de secantes para determinar la pendiente de rectas tangentes o secantes a una curva.

Acciones

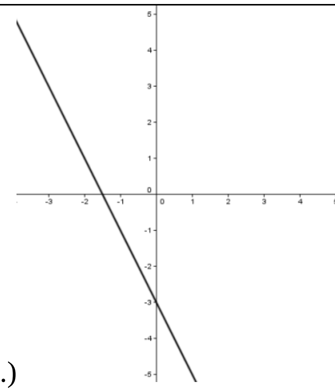
IMPORTANTE Se dice que una función $f(x)$ es creciente en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ con $x_1, x_2 \in I$.

EJEMPLO: La función $f(x) = 3x + 2$ es creciente en todo su dominio, porque si tomamos dos valores cualesquiera del dominio $x = -2$ y $x = 4$ con $-2 < 4$, entonces las imágenes serían $f(-2) = -4$ y $f(4) = 12$, donde se puede verificar que $f(-2) < f(4)$.

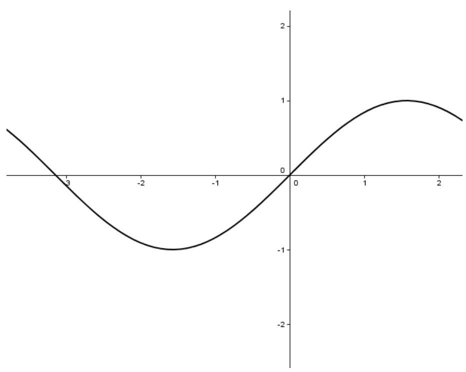
1. Ejercicio Según lo anterior, entre las siguientes gráficas, la que representa una función creciente en todo su dominio es



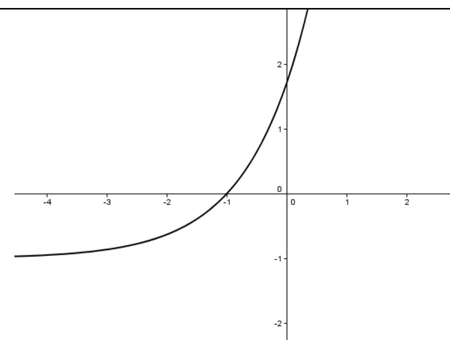
A.)



B.)



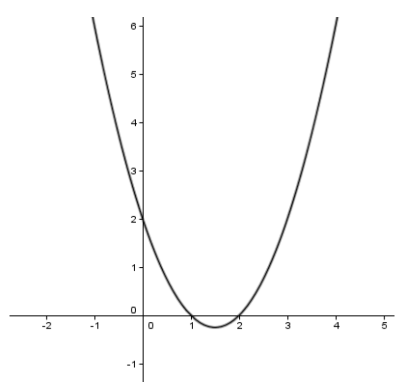
C.)



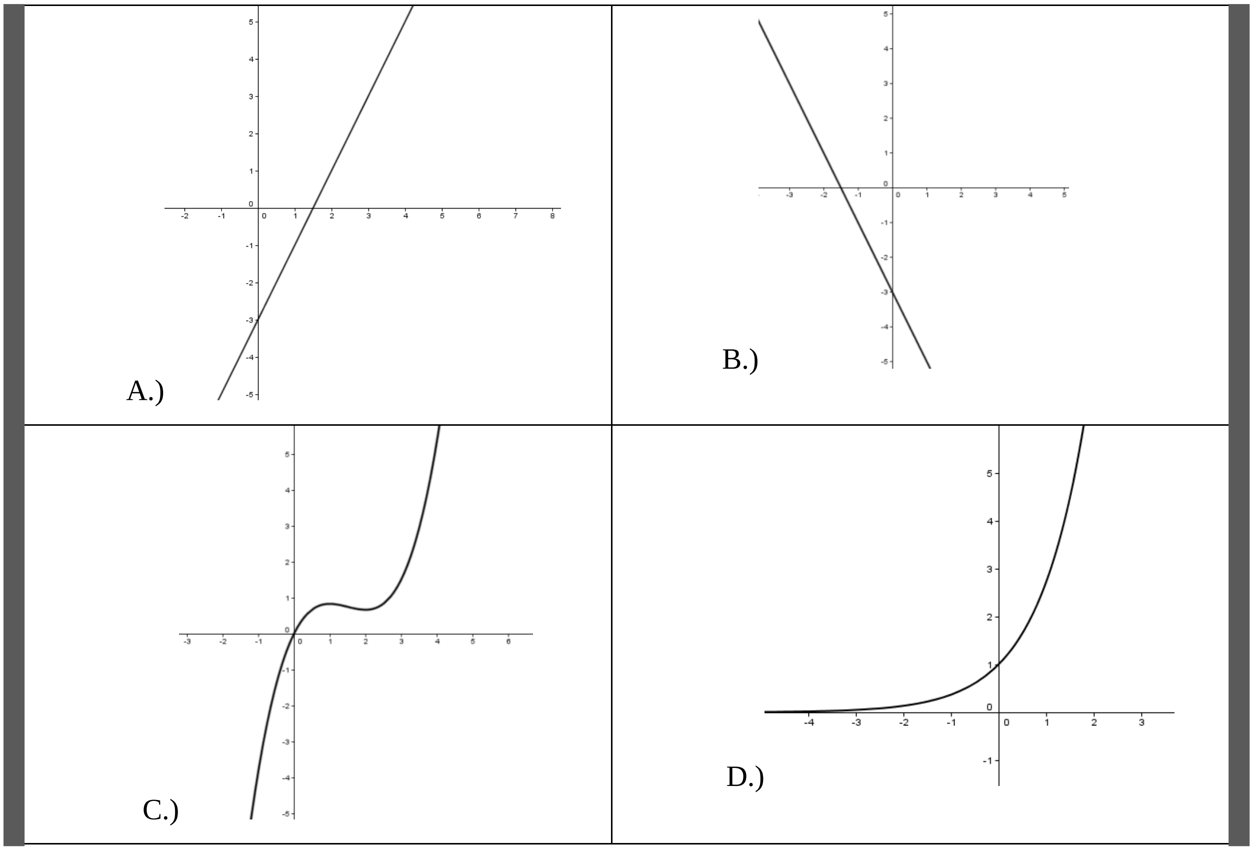
D.)

IMPORTANTE Si f está definida en c, se dice que c es un **número critico** de f, si $f'(c)=0$ o si f' no está definida en c. Es decir, se entiende por punto crítico, un punto donde no esta definida la derivada o es nula.

2. Ejercicio áfica de la función $f(x)=(x-2)(x-1)$ que aparece a continuación



La gráfica de la función derivada está dada por:



IMPORTANTE El uso de la derivada de una función puede ayudar a determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo dado.

Sea f una función continua en un intervalo I que contiene a c, y f' existe en todos los puntos del intervalo I excepto posiblemente en c:

- Si f'(x) >0 $paratodaxenI, entoncesfescrecienteeneseintevalo.$
- Si f'(x) <0 $paratodaxenI, entoncesfesdecrecienteeneseintevalo.$
- Si f'(x) = 0 $paratodaxenI, entoncesfes$ constan$teeneseintevalo.$

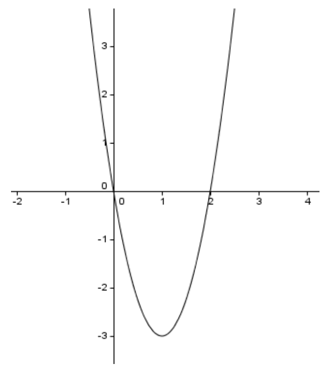
Además:

- f(c) es un mínimo si f(c) ≤ f(x)para todo $xenI$.
- f(c) es un máximo si f(c) ≥ f(x) para todo $xenI$.

El mínimo o el máximo de una función en un intervalo se llaman valores extremos o extremos de la función.

3.	Ejercicio

Si la siguiente gráfica corresponde a la función derivada de una función *f* (x), entonces sepuede afirmar con respecto a la función inicial *f* (x) que



A.) tiene un valor máximo relativo en x = 2.

B.) tiene un valor mínimo relativo en x = 2.

C.) tiene un valor mínimo relativo en x = 0.

D.) no tiene máximos ni mínimos relativos

4.	Ejercicio

La relación $x^2 + y^2 = 4$ representa una circunferencia con centro en $(0,0)$ y $r = 2$.

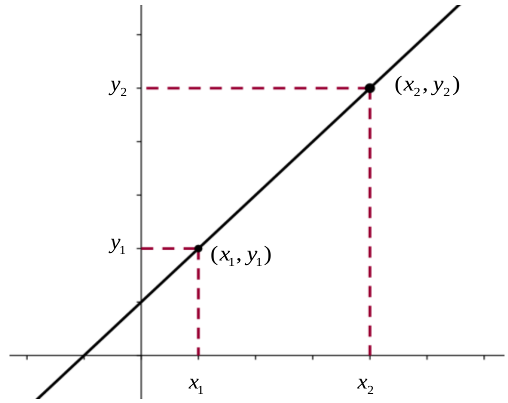
Identifique si la pendiente de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en: positiva, negativa, cero o no definida. En las siguientes coordenadas:

COORDENADAS	**SIGNO DE LA PENDIENTE DE LA TANGENTE**	**Grafique la circunferencia, ubique los puntos y trace las tangentes**
$(\sqrt{2},\sqrt{2})$		
$(-2,0)$		
$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$		
$(0,2)$		

IMPORTANTE

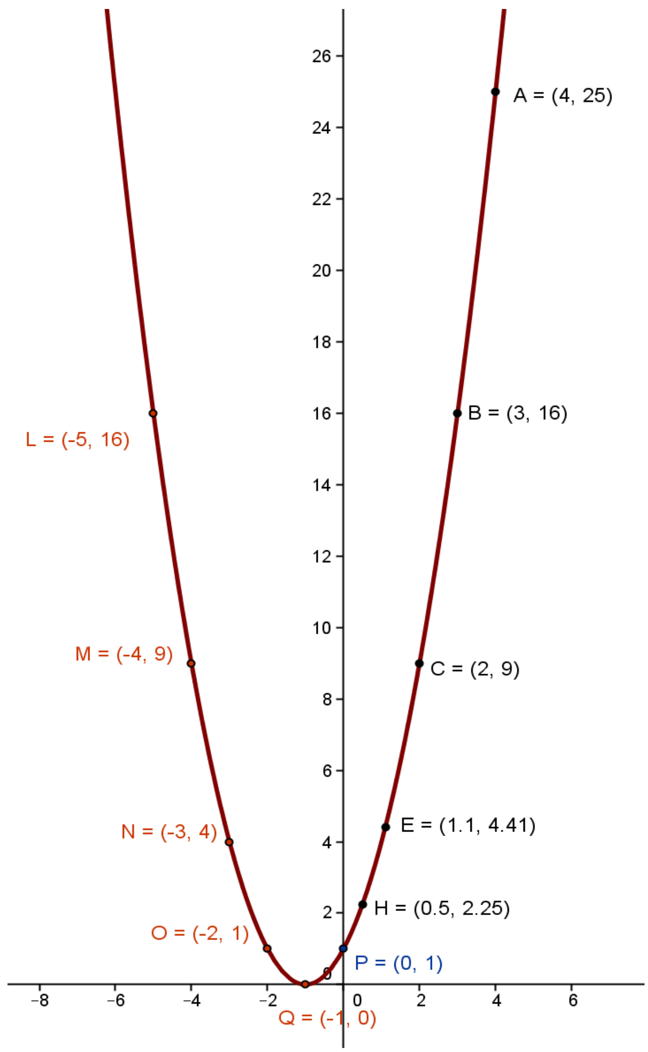
Dados dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) la pendiente, m, de la recta que los contiene se encuentra determinada por la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



5. Ejercicio

En la figura, P es un punto fijo



Traza rectas secantes desde P a los demás puntos (A,B,C…I) y determina el valor de la pendiente.

P		P_1		m
x_1	y_1	x_2	y_2	
(0	1)			

Traza rectas secantes desde P a los demás puntos (L,M,N…R) y determina el valor de la pendiente.

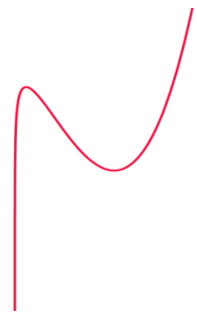
P		P_1		m
x_1	y_1	x_2	y_2	
(0	1)			

A partir de los datos obtenidos en la tabla, ¿Qué puedes concluir respecto al cambio de las variables x e y y la pendiente m?

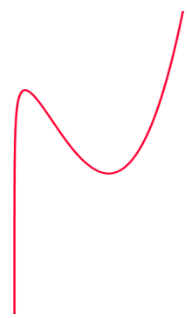
¿Es posible formular el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto P y es tangente a la curva $y = x^2 + 2x + 1$? ¿Cuál es este valor?

IMPORTANTE El tomar un punto P sobre una curva y trazar rectas secantes por puntos cada vez más cercanos a P, es llamado el **MECANISMO HAZ DE SECANTES** y es útil para el trazado de rectas tangentes en puntos dados sobre curvas.

6. Ejercicio Ubique un punto de la curva $f(x) = 1 / (10\,x^3 - 3x + \ln(x))$, donde la pendiente de la recta tangente sea positiva y trace la tangente en ese punto haciendo uso del mecanismo del haz de secantes.



7. Ejercicio En la misma curva anterior ubique puntos donde la recta tangente a la curva es creciente. Trace la recta tangente en los puntos indicados.



8. Ejercicio Con tus propias palabras define los siguientes elementos matemáticos.

PENDIENTE	TANGENTE	FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE

Nivel 3

Comprensión de la imagen

OBJETIVO

Distinguir el concepto de derivada de ciertas funciones básica a través de la pendiente de una recta tangente a una función continua en un punto dado.

Aprendizajes Esperados

Reconoce las características fundamentales de una función a partir de la derivada.

Caracteriza y gráfica una función de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada.

Realiza representaciones gráficas de funciones elementales y traza la respectiva función derivada, haciendo uso de algunos puntos representativos.

Reconoce que la pendiente de la recta tangente a una curva es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

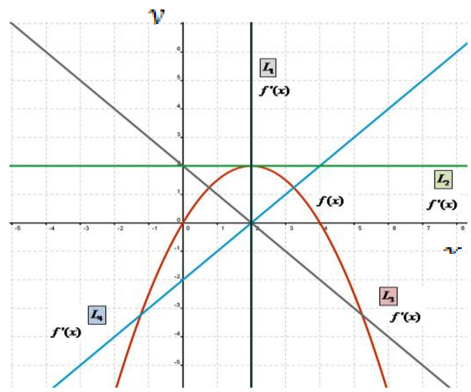
Elabora un mapa conceptual amplio (con al menos 30 conceptos relacionados) que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.

Acciones

1. Ejercicio

A continuación se muestra la gráfica de la función $f(x) = bx - ax^2$.

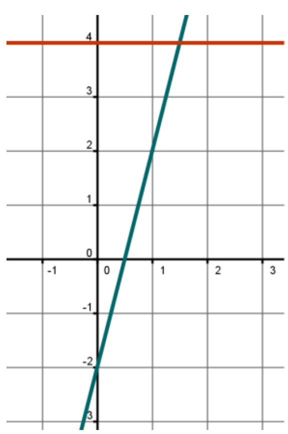
Además, se ilustran algunas representaciones que intentan dar cuenta de su derivada, $f'(x)$

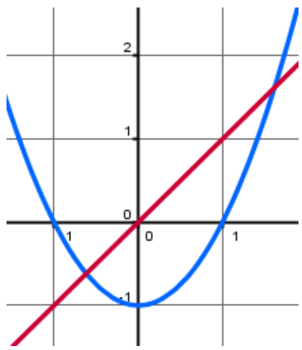
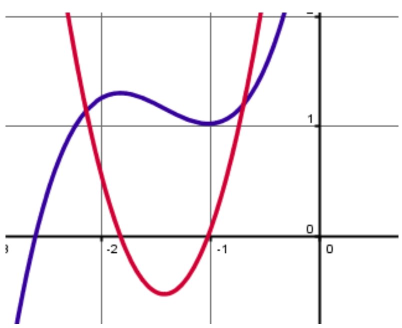


La función lineal que indica la derivada de $f(x)$, es		
		Justificación
A.)	L_1	Porque la expresión algebraica de la derivada corresponde a una función lineal y en el punto de maximo (x =2) valor la pendiente puede ser horizontal
B.)	L_2	Porque en x =2 existe un máximo de la función y en este valor, es claro, que la derivada es la recta tangente
C.)	L_3	Porque, además de corresponder a una recta con pendiente negativa; en el punto (2,2), la función tiene un máximo, y por tal el valor de la derivada debe ser cero.
D.)	L_4	Porque, además de corresponder a una recta con pendiente positiva; en el punto (2,2), la función tiene un máximo, y por tal el valor de la derivada debe ser cero.
A.)	L_1	Porque la expresión algebraica de la derivada corresponde a una función lineal y en el punto de maximo (x =2) valor la pendiente puede ser horizontal

2 Ejercicio

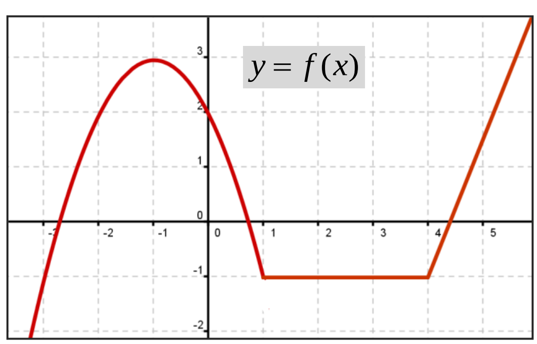
A continuación se presenta una función $f(x)$ y su correspondiente derivada $f'(x)$. Según el argumento ¿Cuál de estas gráficas es la representación correcta? Justifique su opción

	Representación	Argumento	Justificación
A.)		La gráfica corresponde a una función lineal, una linea recta cuya pendiente es 4. De lo que se puede deducir su derivada es $f'(x) = y' = 4$. Entonces las gráficas representan a una función y su derivada.	Porque: F V

	Representación	Argumento	Justificación
B.)		En $x=0$ la función tiene un mínimo; la derivada es nula. La recta tangente tendría que pasar por el punto de coordenadas $(0,-1)$. Estas gráficas no corresponden a una función y su derivada.	F V Porque:
C.)		En $x=-1$, la función tiene un mínimo; la derivada es nula y está tendría que pasar por el punto (-1,0). Las gráficas no representan a una función y su derivada.	F V Porque:

3. Ejercicio

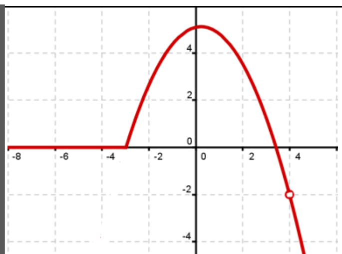
La gráfica corresponde a la función $y=f(x)$.



	Luego	Justificación
A)	$f'(-1) =$	
B)	$f'(3) =$	
C)	$f'(5) > 0$	
D)	$f'(1) =$	
E)	$f'(4) =$	

4. Ejercicio

Observa las gráficas de las siguientes funciones. Indica en que puntos no es posible que exista la derivada



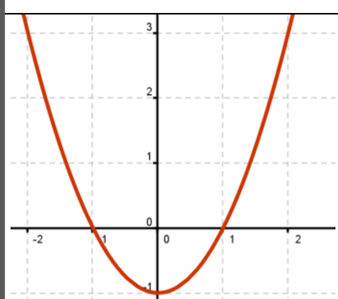
A.) ¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x?

Si____ NO____

Porque:____

____

____



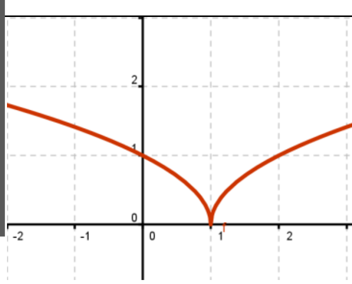
B.) ¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x?

Si____ NO____

Porque:____

____

____



C.) ¿Existe la derivada de $h(x)$ para todo x?

Si____ NO____

Porque:____

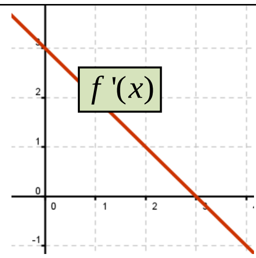
____

____

5. Ejercicio

Las gráficas corresponden a las representaciones de las funciones derivadas de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $p(x)$

A)



¿Existe la derivada de $f(x)$ para todo x?

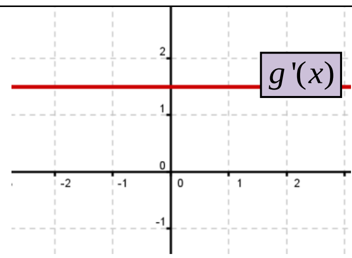
Si____ NO____

Porque:________________________________

____

____

B)



¿Existe la derivada de $g(x)$ para todo x?

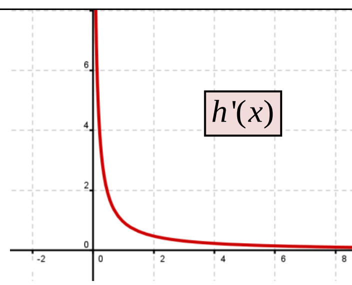
Si____ NO____

Porque:________________________________

____

____

C)



¿Existe la derivada de h(x) para todo x?

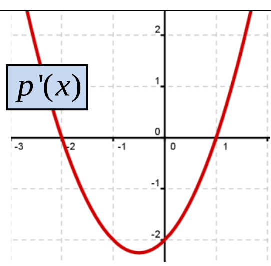
Si____ NO____

Porque:________________________________

____

____

D)



¿Existe la derivada de p(x) para todo x?

Si____ NO____

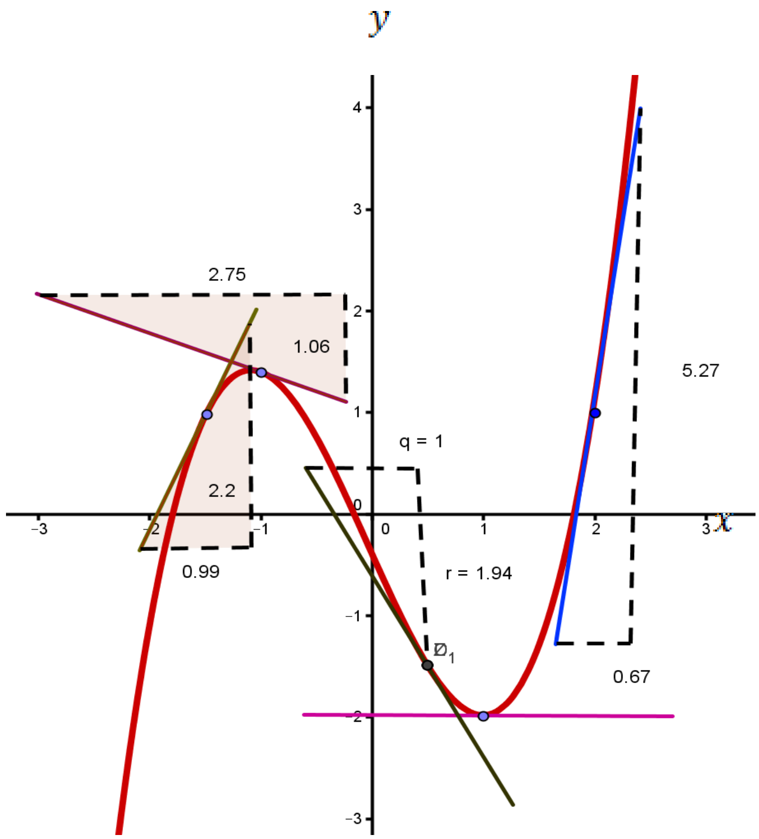
Porque:________________________________

____

____

6. Ejercicio

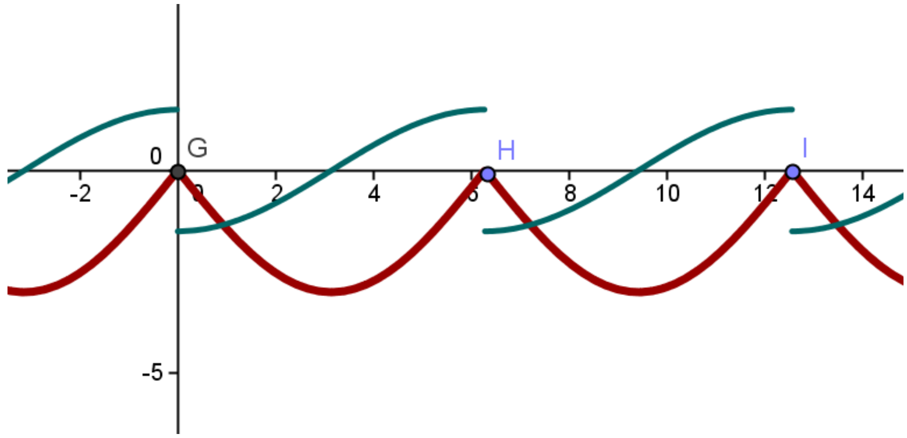
La figura muestra la representación gráfica de una función de orden superior. En ella, se indica además, el trazo y el valor de la pendiente en determinados puntos.



Determina	Justificación
$f'(-1) =$	
$f'(2) =$	
De los puntos dados, la derivada es nula en $x =$	
Intervalos para los cuales $f'(x) > 0$	
Intervalos en donde $f'(x) < 0$	
Un intervalo $[a,b]$ en el que : $\{x : x \in [a,b] \rightarrow f'(x) > 0\}$	

7. Ejercicio La figura muestra las representaciones de una función $f(x)$ y su correspondiente derivada $f'(x)$.

.



Los números críticos en el intervalo $[2,10]$ son:	
¿Cuál es el valor de la derivada en esos números críticos?	Explica:
Indica los intervalos para los cuales la función es creciente	
Indica los intervalos para los cuales la función es decreciente	

8. Actividad final Elabora un mapa conceptual amplio (con al menos 30 conceptos relacionados) que refleje los conocimientos adquiridos y contenidos abordados en el curso sobre el concepto de derivada.

Este documento y el mapa conceptual lo entregas el próximo lunes en el horario programado para la entrega del examen final.

Amable estudiante, agradecemos y valoramos tu importante disposición y participación en el proceso de ejecución del presente proyecto de investigación.

LA DERIVADA EN GEOGEBRA ®

PENDIENTE Y DERIVADA

A continuación se indica el procedimiento para la determinar la representación gráfica de la derivada a una función dada. Observa el comportamiento de los siguientes parámetros:

- La función.
- La tangente.
- La derivada.

CONSTRUCCIÓN

1. Introduce en la barra de entrada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
2. Haz clic derecho sobre la curva, y en propiedades del objeto haz clic en básico y activa Muestra Rótulo para luego seleccionar nombre y valor.
3. Haz clic derecho sobre la curva, y en propiedades del objeto haz clic en color y escoge color violeta
   y haz clic en estilo y asigna a la curva grosos 5.
4. Introduce en la barra de entrada a=2
5. En la vista algebraica, haz clic derecho sobre la expresión $a = 2$, elige *muestra objeto* la figura que aparece a la derecha (al lado de la gráfica) es un segmento con un punto móvil, esta figura se denomina deslizador.
6. Haz clic derecho sobre el deslizador ponle el color rojo al parámetro a, grosor 5 y haz clic en la opción deslizador modifica el intervalo dando valor mínimo de -10 y máximo de 10, en incremento escribe $0{,}01$, el ancho de 300. En la opción repite selecciona ***incremento.***
7. Introduce en la barra de entrada escribe la expresión P **=(a, *f(a)*),** aparece este punto P sobre la curva,
8. Haz clic derecho sobre el punto P , y en propiedades del objeto selecciona básico y activa muestra rótulo, luego selecciona nombre y valor. Y además ponle el color rojo, tamaño de punto 5.
9. Verifica que al deslizar a, el punto P se moverá sobre la curva.

10. Introduce en la barra de entrada la expresión B=$(a, f\,'(a))$. Aparece el punto B en la gráfica, haz clic derecho sobre este punto B y en propiedades del objeto selecciona muestra rótulo, luego selecciona nombre y valor, y asígnale grosor 3.
11. De nuevo haz clic derecho sobre este punto B selecciona avanzado en colores dinámicos en la fila verde escribe la expresión $f\,'(a) > 0$ y en la fila color azul escribe la expresión $f\,'(a) < 0$.
12. En la barra de entrada introduce la expresión $t(x) = Tangente[a, f]$. Muestra su nombre y valor. Grosor 5 y en el menú avanzado colores dinámicos en verde escribe $f\,'(a) > 0$ y en azul escribe la expresión $f\,'(a) < 0$.
13. Arrastra el deslizador a y observa el comportamiento de la recta. ¿Qué observas en la gráfica?

____

____

____

____

14. En el menú contextual del punto B, darle *activa rastro*.
15. En el menú contextual del control a activa ***animación automática.***

Nota: Guarda y envía el archivo con las conclusiones a jabedoya@udem.edu.co

Escribe lo que interpretas:

ANEXO N° 4

EL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE UN ENFOQUE SEMIÓTICO Y DINÁMICO

EL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE UN ENFOQUE SEMIÓTICO Y DINÁMICO

INTERVENCIÓN N°2

And I dare say that this is not only the most useful and most general problem in geometry that I know, but even that I ever desired to know.
Descartes

RECTAS Y PENDIENTES

La siguiente actividad tiene como propósito que el estudiante pueda establecer relaciones y diferencias a partir del comportamiento de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado.

ACTIVIDAD

1. En la situación *Conjunto de Rectas*

Identifica:

a. Cuál es la recta de mayor pendiente ___________________

b. Cuál es la recta de mayor pendiente ___________________

c. Consideraciones respecto al ángulo.	¿Cuál es el comportamiento de m?
$si\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	
$si\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	
$si\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	
$si\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$	

REPRESENTACIONES GRAFICAS

2. Con ayuda del Geogebra ® , construir la representación gráfica de la función $y = x^2$ Emplea los comandos: punto y tangente de una curva del software, para trazar rectas tangentes a la curva dada en varios puntos e identificar el valor de la pendiente.

¿Cuál es comportamiento de las rectas tangentes para los intervalos indicados?

$-\infty < x < 0$	En el vértice de la parábola	$0 < x < \infty$

Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es de pendiente indefinida.

3. Se traza la curva $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{3x^3}{4} - \frac{5x^2}{4} - \frac{7x}{4} - 1$ Se toma un punto de referencia P (a, f(a)), y otro Q (b, f(b)) (no muy cercano a P) que pertenezcan a la curva. Se traza la recta tangente a la curva en el punto P, traza la recta que pasa por P y Q, movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P, tanto como sea posible,

¿Qué sucede con el valor de la pendiente de la recta PQ, a medida que el punto Q se aproxima al punto P?

Glosario

Atención: Es el proceso cognitivo encargado de seleccionar de uno o varios estímulos, actúa como un filtro de aquellos estímulos que inciden sincrónicamente en los órganos sensoriales.

Complementariedad de la acción y la expresión: Característica del modelo de Pirie y Kieren para la Comprensión en la que se debe acentuar la atención sobre el desempeño y la expresión manifestadas por los estudiantes de acuerdo a las acciones propuestas y en referencia a su tránsito por los niveles internos, a excepción del nivel 1 y el nivel 8. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles.

Comprensión según Pirie y Kieren: Para el modelo la comprensión puede ser entendida como una estructura geométrica en forma de anillos, constituida por elipses o niveles sucesivos. La Comprensión deviene como proceso dinámico, no lineal y a su vez, tampoco jerárquico, teniendo en cuenta la recursividad como un elemento de suma importancia para el proceso de aprendizaje.

Folding Back: Una de las principales características del modelo de Pirie y Kieren para la Comprensión. Consiste en la posibilidad de "Redoblar" o volver hacia atrás, hacia los niveles previos, es decir, le permite a un estudiante que está en un nivel exterior, regresar a uno de los niveles internos, con el fin de reconstruir la comprensión de un concepto o afianzar elementos que no fueron necesarios en el paso por dicho nivel, pero que es necesario para la superación y avance en los niveles externos. El estudiante que avanza, retrocede o redobla hacia el nivel interno, mejora su comprensión y regresa al nivel externo para continuar con el proceso.

Geogebra ® = Una de las herramientas dinámicas más utilizadas en el ámbito computacional, es el Geogebra, software matemático interactivo y libre (respeta la libertad de todos los usuarios para ser usado, copiado, estudiado y distribuido de varias formas), creado para la educación en colegios y universidades por Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores en la universidad de Salzburgo en el año 2001. Escrito en Java, fácil de utilizar y disponible en múltiples plataformas. Es un procesador geométrico y algebraico, que reúne geometría, algebra y cálculo, el cual es un recurso didáctico útil y enriquecedor en la práctica de la docencia de las matemáticas; puesto que permite la construcción, visualización y el trazado dinámico de objetos matemáticos.

Imagen del Concepto: De acuerdo con Vinner (1991), el individuo adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, es decir la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto. Aquí se hace importante resaltar, que se debe entender imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, tabular, algebraica, numérica, simbólica,…).la imagen del concepto es una representación no siempre verbal que se asocia mentalmente al concepto, es decir, aquel conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. El desarrollo de las representaciones mentales se da como resultado de una interiorización de las percepciones que se tengan del mismo.

Inteligencia: Autogobierno mental superior, con tres dimensiones: capacidad de resolución de problemas, capacidad verbal, inteligencia práctica o social.

Mapas Conceptuales: Es un instrumento usado para representar gráficamente el conocimiento. Es una red de conceptos que permite identificar la progresión de la comprensión de un individuo frente a un contenido específico, en la medida que ayuda a visualizar las ideas o concepciones y las relaciones jerárquicas que pueda establecer entre los mismos.

Memoria: Es el proceso cognitivo facultado de almacenar, retener, y recuperar información de eventos - acciones pasadas procedentes del entorno (imágenes, sonidos, sabores, olores y tacto de las cosas), es un proceso fundamental en la cognición y el aprendizaje en general.

Modelo Educativo: son aquellos que tienen que ver con el desarrollo intelectual, los procesos de enseñanza y/o aprendizaje, al ser el conjunto de lineamientos generales orientadores del accionar académico. Está fuertemente determinado por los procesos históricos y la utilidad en el contexto social en el cual está inscrito y son recopilaciones o síntesis de distintas teorías o enfoques pedagógicos que orientan a la comunidad educativa en la elaboración de programas de estudio y en la sistematización del proceso pedagógico. En síntesis, un modelo educativo es un instrumento de gestión académica y administrativa que contribuye de forma integral y coherente al desarrollo de los miembros de la comunidad educativa, en el marco de la visión institucional. Su pertinente conocimiento le permite a los docentes y a todos en general liderar procesos innovadores de transformación educativa a través de planeaciones e intervenciones pedagógicas.

Modelo de Pirie y Kieren: Propuesta de un marco teórico a partir del cual es posible identificar la evolución en la comprensión de un objeto de estudio matemático. Es una teoría de carácter constructivista porque el estudiante debe reflexionar y reorganizar sus constructos personales para poder construir nuevas estructuras conceptuales. El modelo de Pirie y Kieren plantea ocho niveles o estratos de naturaleza anidada que estructuran la teoría y dan cuenta de la evolución y el progreso de la comprensión del estudiante con respecto al saber matemático, permitiendo identificar el grado de conocimiento y desarrollo de las estructuras cognitivas que intervienen.

Modelo de Van Hiele: Es un modelo educativo que se refiere al razonamiento, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en general, creado por los esposos Van Hiele, basados en observaciones iníciales y estudios relevantes realizados en la geometría.

Niveles de razonamiento de Van Hiele: Son una estratificación del razonamiento humano. Su presencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje es bastante evidente en los actores involucrados, en el marco de los problemas de comprensión que atañen, primordialmente, la complejidad de los conceptos abordados.

Obstáculos epistemológicos: Se presentan en el aprendizaje de los conceptos científicos como elementos correspondientes al entendimiento que dificultan el conocimiento de lo real. Estas dificultades devienen como obstáculos que intervienen sustancialmente en la asimilación adecuada del conocimiento formal. Estos conflictos, de carácter psicológico, se convierten en obstáculos que se identifican con las inherentes limitaciones de la capacidad orgánica de los sentidos, presente en los seres humanos, para dar cuenta y aprehender los diferentes fenómenos presentes en la naturaleza o con el empleo inadecuado de dispositivos materiales al momento de participar en la investigación y estudio de los eventos naturales.

Pensamiento Matemático Avanzado: Procesos matemáticos entre los cuales se destaca la abstracción que se puede definir como la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana. Busca clarificar la formación de las ideas y el lenguaje matemático en el individuo, es decir, el proceso de adquisición y representación de los contenidos matemáticos en la mente de los mismos hasta llegar a procesos más complejos de formalización. Aunque existen categorías diferenciadoras entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo.

Percepción: Es un proceso cognitivo básico a través del cual se interpreta la información que es recibida a través de los sentidos, los cuales a través de las sensaciones, proporcionan una información, la interpretación de éstas en el cerebro establecen las percepciones, las cuales son el resultado del el efecto inmediato de la actividad mental por estimulaciones externas que deben ser transmitidas y transformadas en vivencias.

Procesos cognitivos: Son las actividades mentales encargadas de procesar la información, atribuyendo significado a lo que se percibe, estableciendo relaciones entre éstas y las experiencias o conocimientos evocados.

Razonamiento: Es un proceso cognitivo superior, el cual le permite a un individuo resolver problemas, extraer conclusiones y aprender de manera consciente a partir de premisas o acontecimientos dados previamente.

4 HALLAZGOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como se señaló al inicio de este trabajo de investigación, éste se inscribe en el marco teórico del Modelo para la Comprensión de los conceptos matemáticos de Pirie y Kieren. En la revisión y análisis de los antecedentes presentados en el primer capítulo de este trabajo se evidenció que aunque la derivada como objeto matemático ha sido referente de investigación desde diferentes consideraciones, las unidades de análisis en torno a la comprensión conceptual desde un enfoque geométrico, es un espacio que permite la exploración y la creación de estrategias y herramientas pertinentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los componentes constitutivos del pensamiento matemático avanzado.

En este capítulo se expondrán los hallazgos, las conclusiones basadas en el análisis de cada uno de los instrumentos cualitativos utilizados en la recolección de la información, sobre el desarrollo y evolución del concepto de la derivada en su componente geométrico que tienen los estudiantes participantes de este trabajo, las implicaciones de la investigación en la enseñanza del concepto objeto de estudio, y finalmente las limitaciones y las recomendaciones para futuras investigaciones en torno al tema.

4.1 HALLAZGOS

Las fases del análisis, descritas en el capítulo anterior, permitieron encontrar evidencias de cómo evolucionan en procesos de comprensión y cómo utilizan los estudiantes los elementos matemáticos relativos al concepto de la derivada en su componente geométrico. En el análisis de los instrumentos de recolección de la información y los teóricos, especialmente en el marco del Modelo de Pirie y Kieren, se pudo comprobar que la construcción del conocimiento es progresivo y continuo, y el paso de un nivel al siguiente se evidencia a través de las relaciones que el estudiante es capaz de realizar entre los elementos constitutivos del objeto matemático y la manera cómo los utiliza en la resolución de distintas tareas.

Los elementos matemáticos que utilizan, se podría concluir, que son los mismos, aunque varían de un estudiante a otro por la forma cómo los usan en la solución de las actividades propuestas, muchos de estos son recordados y por ende utilizados de forma incorrecta y/o con concepciones erróneas, tal y como se describe a continuación:

- Aunque los estudiantes, en su mayoría, determinaban el valor de la pendiente de las rectas, se les dificulta presentar una interpretación formal de ésta; es posible que preserven la definición estática y particular de pendiente como inclinación de la recta, que se les es transferida a lo largo del proceso educativo y donde no se les permite reinterpretar el texto o el concepto matemático abordado.

- La presentación del Obstáculo Euclídeo para la comprensión de la recta tangente es recurrente. Los estudiantes tienen una concepción griega de tangente que persiste desde sus cursos elementales, en la cual la recta tangente a una curva la toca en un solo punto de la misma, al dar respuestas como la siguiente: *"no cumple la condición de tangencia porque toca la curva en más de un punto"*. Además persiste la imagen visual de la recta tangente a una circunferencia. Tanto la concepción como la imagen mental, como tal obstaculizan notablemente el tránsito de una concepción global, propia de la geometría euclidiana, a una concepción local, como propiedad fundamental del cálculo.

- Tienen dificultad para establecer diferencias entre las diversas representaciones de las funciones (polinómicas, trascendentales…) y no diferencian si la representación gráfica de las rectas horizontales y verticales en el plano cartesiano cumplen la condición de ser función.

- El uso que hacen de los elementos geométricos dista de la manera convencional, es decir confunden los conceptos preliminares y propiedades fundamentales de la Geometría Euclidiana, por ejemplo recta con segmentos de recta. Además evidencian una distorsión entre el postulado que dice que por un punto pasan infinitas rectas con la propiedad de la recta como recta tangente a una curva en un punto.

- Tienen la errónea concepción de que la recta tangente de una recta en punto, es otra que pasa muy cerquita sin tocarla excepto en el punto indicado. Y preservan una imagen visual y textual con la palabra “único” y “sólo” punto de la definición de recta tangente a una curva

- Debilidad al realizar asociaciones incorrectas entre las representaciones algebraicas, geométricas y analíticas de un objeto matemático, por ejemplo el de derivada.

- Dificultad para reconocer relaciones entre las propiedades globales del concepto de derivada y las propiedades de la recta tangente, que originan la presencia de números críticos en relación a los extremos relativos y puntos de inflexión y su incidencia general en el valor de la pendiente en estos puntos de interés local.

- Confusión para reconocer las características y comportamiento de una función a partir de la función derivada.

En un comienzo de desarrollo de las actividades, en el nivel 1 de los Conocimientos primitivos, se evidencia que la apropiación del lenguaje matemático utilizado por los estudiantes y la interrelación de conceptos, se inscriben en un nivel básico en la profundidad y jerarquización con la cual se intenta dar cuenta del proceso y nivel de comprensión en el aprendizaje de los conceptos del pensamiento de la matemática avanzada tal y como lo propone el modelo. Presentaban dificultad en utilizar un lenguaje formal para representar objetos matemáticos, especialmente en actividades donde debían utilizar expresiones algebraicas para la obtención de expresiones que permitieran la generalización de un concepto. Preservaban una imagen textual o visual de la definición y representación de recta tangente a una curva, delimitada por la representación de la recta tangente a una circunferencia. Este último, en palabras de Tall y Vinner, lo que los estudiantes evidenciaban una ruptura entre la imagen del concepto y la definición de los conceptos de función y de recta tangente.

En el nivel 2, en la Creación de la Imagen, se evidencian las primeras apariciones de un intento de relación entre la función, la recta tangente y la derivada, aunque de manera aislada, difusa e inconclusa. Pero a partir de las actividades propuestas pudieron evolucionar en la comprensión y así pudieron relacionar e inferir acerca del concepto de pendiente y de derivada de una curva. Además, consiguieron aproximarse analíticamente al cálculo de la recta tangente a través de aproximaciones de las rectas secantes. De forma creciente y progresiva en los niveles de Conocimientos Primitivos, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen se van incrementando las relaciones de una función y su derivada haciendo uso de diferentes formas de representación, llegando a comprensiones más avanzadas del concepto objeto de estudio.

Aunque algunos de los estudiantes recuerdan con facilidad los elementos o propiedades de la recta tangente a una curva como producto de una instrucción previa, al utilizarlos en el desarrollo de las tareas algunos lo hacen con errores, porque demuestran que aún no han evolucionado en el concepto de derivada como un objeto matemático y con propiedades geométricas; otros, a pesar de establecer un intento de relación entre estos elementos, al concluir la resolución de algunas tareas y manifiestan dificultad al establecer una síntesis entre los diferentes sistemas de representación, principalmente el gráfico. Pues se evidencia en los estudiantes debilidad en la comprensión de la imagen, puesto que aunque hay dominio del algoritmo del concepto, se les dificulta caracterizar y realizar distinciones, de acuerdo al comportamiento gráfico de la derivada y de su función original, las asociaciones que hacen a partir de sus justificaciones por medio de expresiones verbales, evidencia una desvinculación de la definición del concepto con la imagen del mismo.

No obstante, el interés en los estudiantes existe la necesidad de profundizar en otras actividades que permitan, por un lado caracterizar una función a partir de la derivada y además establecer parcialmente una síntesis entre los sistemas de representación geométrico, algebraico y analítico de estos objetos matemáticos, por lo que finalmente, se ubica a los cuatro participantes del trabajo en un nivel 2, al no alcanzar un nivel más avanzado de comprensión del objeto geométrico de la derivada.

Según lo anterior, se observó la necesidad de implementar actividades y retroalimentarlas bajo la luz del modelo de Pirie y Kieren, que condujeran a la superación de las dificultades descritas, basadas en el manejo de las diferentes representaciones y que le permitieran evolucionar en la comprensión del concepto, en la aplicación y en las características propias de la recta tangente y su directa relación con la derivada. Por ello los instrumentos estuvieron pensados de manera que permitieran al estudiante asumir un papel activo y reflexivo en el procesamiento y adquisición de la información, interpretando y verificando acontecimientos, en un esfuerzo de atribuir significado a las actividades que se le proponían. Así pues, las actividades de intervención, sobre el concepto de la derivada en su componente geométrico, posibilitaron el trabajar en un ambiente donde fue posible la discusión y la argumentación, la representación y la confrontación del contenido enseñado, favoreciendo el desarrollo intelectual del estudiante, posibilitando así el entendimiento y comprensión de los conceptos, en éste caso el de derivada como concepto local.

Asimismo, la incorporación de las TIC como actividad dinámica, generó un ambiente en el que el estudiante, en cada una de las Instituciones en las que se intervino con el proyecto, tuvo la oportunidad para aprender a producir demostraciones formales como la noción de límite, el valor de la pendiente de la recta tangente como aproximación de las rectas secantes, entre otras, a través de la exploración dinámica que proporcionan los sistemas computacionales, en este caso la herramienta dinámica del Geogebra ®. La utilización de éste software interactivo para la representación y exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, le permitió a los estudiantes conocer las propiedades de la recta tangente a una curva y concebir una idea más global, abstracta o generalizada, analizar el comportamiento de funciones y sus derivadas, obteniéndose así la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

Se evidenció, la advertencia de la teoría, respecto al manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de la derivada en su componente geométrico. Por ejemplo, cuando a los estudiantes se les presentaron gráficas de funciones y su correspondiente derivada en el Instrumento Evaluativo (Ver Anexo 3), la primera reacción de algunos estudiantes fue identificar puntos comunes entre las dos representaciones. Duval señaló que estos errores, por lo general, se pueden interpretar como la falta de coordinación de los sistemas de representación.

4.2 CONCLUSIONES

En Novak y Gowin (1999) citado por Bedoya, Jorge y Otros (2006), los mapas conceptuales son una herramienta que permite analizar los avances a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje, pues los mapas conceptuales ayudan a desarrollar destrezas cognitivas como las conexiones que hace con ideas previas, tanto al inicio del proceso, como después de su conclusión, la capacidad de inclusión, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel que implica su relación, la diferenciación progresiva entre ellos y la integración de otros nuevosa través de relaciones cruzadas válidas entre ellos.

El instrumento tal como lo propone Novak y Gowin (1988), efectivamente, deviene en estrategia de aprendizaje, enseñanza, evaluación y particularmente como medio para planificar acciones. La estructura de los mapas conceptuales presentados por los estudiantes permite leer entre otras las siguientes movilizaciones: la jerarquía que le ofrecen a los conceptos, así como el empleo de los elementos proposicionales y de enlace tratan de dar cuenta de la visibilización que presentan los estudiantes frente a otros contenidos más cercanos al objeto de estudio.

4.2.1 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

En relación al objetivo general

La presente investigación tuvo su génesis a partir de la praxis de sus investigadores, pues en ella había sido recurrente la consideración de la problemática que subyace en el acto del aprendizaje de las matemáticas, en términos de indagación hacia los procesos cognitivos, que desde el quehacer de la enseñanza, son de relevante importancia tener en viva cuenta, al momento de volcar el interés pedagógico y didáctico hacia el proceso de la Comprensión, más que al de la simple adquisición de habilidad procedimental, como es lo usual, incluso ahora, en algunas de las prácticas y experiencias de aprendizaje.

La búsqueda del objetivo general, consistía en cómo promover avances en la comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico, empleando representaciones semióticas, mapas conceptuales y el software dinámico y con la aplicación del Modelo de Pirie y Kieren hacer visible la evolución de la Comprensión de los cuatro estudiantes. El objetivo se pudo alcanzar puesto que el empleo del mapa conceptual inicial permitió orientar las acciones para cada nivel, mientras que con el mapa conceptual final cada estudiante lo logró emplear como estrategia de aprendizaje y para comunicar la relación global del concepto. Además, el empleo de otras representaciones y el software dinámico contribuyeron notablemente, en tanto variables visuales, a la superación de la dificultad en los estudiantes para Comprender el trazo y el concepto formal de la recta tangente a un punto, desde su definición local y global.

Respecto a la teoría del Modelo, se evidenció la evolución de la Comprensión del concepto como proceso dinámico, especialmente en los niveles Conocimientos Primitivos, Creación de la Imagen y Comprensión de la Imagen, cobrando importancia considerable, para el progreso en los niveles, la característica del *Folding Back* como instancia de retroalimentación, y la *Complementariedad de la acción y la expresión,* con el fin de re-construir la Comprensión de un concepto para potenciar la coherencia entre la imagen del concepto y la definición del concepto, principalmente en las acciones del nivel 2. No obstante, se debe dejar constancia de la dificultad presente en algunos de los estudiantes en su trayecto para el nivel 3 respecto a la comprensión de la imagen, siendo el reconocimiento de las características fundamentales de una función a partir de la representación gráfica de la derivada el obstáculo de mayor incidencia para superar dicho nivel y que garantiza, ciertamente, evolución en la Comprensión de la definición formal del concepto.

Finalmente, es necesario hacer hincapié en las bondades que ofrece el Modelo de Pirie y Kieren para hacer visible y promover la evolución en la Comprensión de un concepto matemático. Estas se encuentran básicamente en las características propias de la teoría que permiten, además, de movilizaciones cognitivas, hacer objeto de estudio el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de Comprensión de los objetos o contenidos de estudio. También permite, reconocer la acción y la expresión que acontece en el estudiante, para comunicar, para razonar y para dar cuenta con argumentos propios las relaciones y asociaciones que se encuentra en capacidad de hacer toda vez que se le presenta una situación.

En relación a los objetivos específicos

Para el desarrollo del trabajo de investigación y en apoyo al objetivo general, se definieron cuatro objetivos específicos que permitieron perfilar una búsqueda de estrategias e instrumentos que hicieran posible la construcción de nexos y asociaciones útiles para hacer intervención adecuada en el escenario sobre el cual se desarrollaría la experiencia de aprendizaje. Además, de orientar la mirada y la indagación analítica hacia el complejo mundo de la comprensión humana en relación a los conceptos matemáticos.

El siguiente fue el panorama de estos objetivos: dos cuya acción estaba dirigida, el primero al diseño de actividades para la intervención en el aula como espacio de encuentro con los estudiantes que a su vez sirviera como elemento para explorar y recoger información; y un segundo tendiente a crear una propuesta de Instrumento Evaluativo con un grupo de acciones, destinadas a los tres primeros niveles del Modelo de Pirie y Kieren, que permitiera, en tanto el estudiante realizara una intervención completa, tener una idea sobre el progreso de la Comprensión. Un tercer objetivo centralizó su acción en describir cómo se da, en los estudiantes, la evolución en la Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico con el empleo de las representaciones semióticas, los mapas conceptuales y el software dinámico. El tercer objetivo concentró su interés en identificar los obstáculos cognitivos y epistemológicos presentes en los estudiantes en relación a la conceptualización y comprensión de la derivada.

En este sentido, el encuentro y la forma observada en los estudiantes para afrontar y dar respuesta a las diferentes acciones propuestas en las intervenciones, permite concluir que dicho objetivo fue alcanzado, puesto que gracias a lo que se alcanzó evidenciar en esos procedimientos, en tanto medio de comunicación y visibilización, y a la riqueza valorativa inherente a ellos, en virtud del proceso hermenéutico, fue posible explorarlos y reflexionarlos a la luz de la teoría del Modelo para tomar conciencia de las diversas dificultades, en contravía a permitir evolución en la Comprensión, que aún subsisten arraigadas frente a la categoría conceptual estudiada y a la red de significantes que determina.

Por su parte y como constancia de haber sido alcanzado, en el anexo se presenta el diseño planteado como Instrumento Evaluativo, el cual puede ser tenido en cuanta como un instrumento de significativa utilidad cuando la praxis educativa en general y la del aprendizaje en particular se encuentran orientadas con mayor interés hacia la Comprensión de los conceptos, que a la aplicación algorítmica de los mismos. O si se quiere para cuando la preocupación didáctica y pedagógica se encuentra orientada hacia el justo medio entre Comprensión y procedimiento.

En los análisis presentados para cada uno de los estudiantes participantes en la investigación se da viva cuenta, a través de un proceso de detallada descripción y apoyados en la teoría del Modelo de Pirie y Kieren, de la forma en que acontece la evolución de la Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrico. El objetivo en este sentido queda verificado, puesto que es posible observar, con base en los instrumentos, las acciones y las consideraciones tenidas en cuenta, el trayecto que cada uno de los actores de la investigación realizó en su tránsito por los tres primeros niveles del Modelo, valga decir, por el nivel de los Conocimientos Primitivos, en donde los mapas conceptuales tuvieron considerable efecto, como estrategia de aprendizaje y medio de comunicación para asociar conceptos importantes; luego en la Creación de la Imagen, el mecanismo del haz de secantes y la herramienta del software dinámico intervinieron con notable incidencia, fundamentalmente para permitir claridad en el trazo y definición formal del concepto de recta tangente y en la identificación de características geométricas importantes y necesarias al momento de presentar el concepto de derivada; finalmente, en la Comprensión de la Imagen , el más exigente de los tres, se da cuenta sobre el por qué algunos de los estudiantes no alcanzaron los descriptores. Además, las acciones para los tres niveles se plantearon con conciencia y en perspectiva de la importancia que tiene, gracias a su ayuda para la Comprensión, el empleo de varios registros semióticos para un mismo concepto.

La metodología cualitativa de la presente investigación, en su enfoque estudio de casos, permitió a la vez que identificar, corroborar la existencia de los obstáculos epistemológicos (la experiencia primera, la generalización, el verbal y el cuantitativo) y didácticos (la asociación del concepto de derivada con la variación y la noción de límite, la primacía de los procedimientos algorítmicos sobre la problematización y Comprensión del mismo, y uno de los de mayor dificultad, dado su arraigo en las estructuras mentales del estudiante, la concepción global que excluye el concepto de tangencia local) presentados, en su momento por Bachelard (2000), D'Amore (2006) y Dolores (2000), como elementos en los que se estructuran el cúmulo de errores y dificultades que impiden, con marcada incidencia, el progreso o la evolución en la Comprensión de los conceptos matemáticos.

Algunas de estas dificultadas, principalmente el concepto global y local de tangencia y la derivada como el límite de las secantes se vieron confrontadas y en alguna forma superadas, gracias al empleo de las diferentes representaciones y, principalmente, a la visualización ofrecida por la intervención del software y el mecanismo del haz de secantes, la cual permitió generar conflicto cognitivo y con ello movilización de esos obstáculos.

4.3 RECOMENDACIONES

- Se recomienda que en la enseñanza de los conceptos de la matemática avanzada, independiente de cuál sea el escenario de la aplicación como experiencia de aula Institucional de educación Media o Superior, se aborde el concepto de derivada desde distintas representaciones para la consecución y comprensión del mismo. En ese sentido, se pueden incorporar metodologías y estrategias que respondan y faciliten los procesos de conversión entre representaciones que faciliten la evolución en la comprensión del concepto, por ejemplo, el empleo de los mapas conceptuales.

- Incluir en los programas de cálculo diferencial aplicaciones del concepto de derivada a partir de situaciones geométricas, donde los estudiantes puedan comprender el concepto desde otro contexto, por ejemplo a través del mecanismo del haz de secantes.

- Es notable la necesidad de acudir a otras estrategias didácticas o representacionales para valorar el proceso de comprensión de los estudiantes de los objetos matemáticos. Sin lugar a dudas los mapas conceptuales revelan el dominio conceptual y el lenguaje matemático empleado por el estudiante en relación al objeto de estudio. Además ofrecen la posibilidad de personalizar y evidenciar el saber y la evolución en la comprensión del concepto.

- El aprendizaje y el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante, como el razonamiento, la comprensión, la abstracción, entre otras, se ha convertido en uno de los mayores desafíos de la sociedad, por ello se hace necesario el desarrollo de propuestas orientadas a la incorporación de nuevos y variados métodos de enseñanza o de las nuevas tecnologías o software como el Geogebra ® , de tal manera que se pueda lograr en el estudiante, del grado Undécimo o de los primeros semestres de Universidad, una mayor integración del conocimiento, la capacidad de resolver problemas acertadamente, fomentar el trabajo colaborativo e incentivar la autonomía y la creatividad, además de la exploración de los conceptos geométricos y algebraicos, deben permitir la validación del conocimiento matemático, la sofisticación de los procesos de razonamiento y rigor en la demostración formal y así lograr la comprensión y convencimiento en el estudiante.

- Se debe incorporar la representación como una estrategia y herramienta didáctica que permita a los estudiantes acercarse a los objetos matemáticos y relacionarlos a imágenes mentales adecuadas de tal manera que los acerquen al concepto.

- Las actividades que se planeen para rastrear los conocimientos primitivos, deben ser sencillas, graduales y no extensas, para que el estudiante se sienta en confianza, cómodo, pueda evidenciar los conocimientos matemáticos que trae y participar en actividades de socialización a nivel grupal, para propiciar un ambiente favorable y motivante que invite al grupo de estudiantes a contrastar, reestructurar y construir el conocimiento, de igual forma esta estrategia para la evolución en el proceso de la comprensión se puede hacer extensiva para los demás niveles del Modelo de Pirie y Kieren.

- Finalmente, intervenir en el universo escolar, en aras al despliegue amplio de lo educativo en cuanto a sus acciones y sus prácticas, para fomentar una reflexión-acción de tipo pedagógica, en las Instituciones de Educación Media adscritas a la Secretaría de Educación de Medellín como en el caso de la Institución Educativa Pbro. Antonio José Bernal Londoño, el empleo de algún Marco Teórico apropiado, que pueda ser tomado como un recurso educativo fundamental y el punto de partida necesario para cualquier indagación pedagógica, al interior del proceso educativo; que permita, además, de aproximar en diferentes formas, los contenidos propios del área de Matemáticas, a su vez también facilite visibilizar otras variables, inherentes al proceso de enseñanza-aprendizaje y que por las lógicas relacionales y trayectos compartidos al interior del aula quedan silenciadas, olvidadas o demandando otro tipo de lecturas e interpretaciones, dificultando con ello el descubrimiento o redescubrimiento de otros panoramas, la búsqueda de nuevos horizontes disciplinares, conceptuales o metodológicos que sean condescendientes con una actitud educativa como un estado vivencial con espíritu de impulso creativo e investigativo.

BIBLIOGRAFÍA

Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas.* España: Mc Graw Hill.

Apostol, T. M. (1988). *Calculus. Cálculo confunciones de una variable, con una introducción al algebra lineal.* Barcelona: Reverté.

AZARQUIEL, G. (1993). *Ideas y actividades ara trabajar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Bachelard, G. (2000). *La formación del Espíritu Científico.* México: Siglo XXI .

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (1996). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* México, D.F.: Limusa, S.A.

Bedoya Beltrán, J. A., Esteban Duarte, P. E., & Vasco Agudelo, E. D. (2006). *Los mapas conceptuales en las fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele.* . San José de Costa Rica: D. N. A.J Cañas.

Bell, E. T. (1995). *Historia de las Matemáticas.* Nueva York.: McGraw-Hill.

Bishop, A. (1994). *Implicaciones didácticas de la investigación matemática.Antología en educacón matemática.* Compiladores: Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G.

Castañeda, S. (2009). *Diseño de un modelo de Estrategias Cognitivas que permitan el desarrollo del pensamiento creativo.* Perú: Universidad Nacional Pedro Riuz Gallo.

Cienfuegos, A. G. (2012). *Desarrollo de procesos cognitivos.* Bogotá: Kimpres Ltda.

D'Amore, B., & Fandiño., M. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

De la Torre Gómez, A. (2003, Volumen 24). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 99-121.

De Zubiria, J. (1994). *Tratado de pedagogía conceptual: Los modelos pedagógicos.* Bogotá: Fundación Merani.

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didactica para la enseñanza de la derivada. En El futuro del cálculo infinetesimal.* México: Grupo editorial Iberoamerica.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D.* Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1999). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Santiago de Cali: Unversidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Santiago de Cali: PeterLang S.A; Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Echeverría, J. (2008). Apropiación social de las tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad.*, 171-182.

Esteban D, P. V., Vasco A, E. D., & Bedoya B, J. A. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas, 28*, 77 - 95.

Esteban Duarte, P. V. (2006). *Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables.* Medellin: Educacion y pedagogia , XVIII (45), 119-131.

Flórez Ochoa, R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento.* Bogotá: McGraw-Hill.

Godino, J. D. (2003). *TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: Claves teóricas.* Aravaca (Madrid): Mc Graw Hill.

Gutierrez, J. A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. (S. S. Linnares, Ed.) *Teoría y práctica en educacion matemática (Colección "Ciencia de la educación"n°4)*(4), 295-384.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezuela, Volumen X*(Número 2).

Huerta, M., Galán, E., & Granell, R. (2000). *Concept Maps in Mathematics Education: A Possible Framework for Students' Assessment.* Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (Today Ministerio de Ciencia y Tecnología),.

Karelin, O., Rondero, C. G., & Tarasenko, A. (2008). *Desigualdades. Métodos de cálculo n tradicionales.* Madrid, Buenos Aires, México: Diaz de Santos.

Llinares, S., Sanchez-Matamoros, G., & García, M. (Mayo de 2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.* Recuperado el 13 de Junio de 2013, de Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Redalyc): http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511205

Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre las cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Lozano, Y. A. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite.* Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Facultad de Matemáticas e Ingenierías.

Lyndon, S. P. (2000). The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding. *Mathematics Education Research Journal., 12 (2)*, 127-146.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 221- 271.

Morin, E. (1994). *El Método. El conocimiento del conocimiento.* Madrid: Cátedra.

Newman, J. R. (1994). *El mundo de las matemáticas 1*. Barcelona: Grijalbo.

Novak, J., & Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca. S.A.

Pirie, S. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics , 26 (2/3)*, 165-190.

Posada, F. &.-O. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Medellín: Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia.

Posada, F. &.-O. (2006b). Razonamiento algebraico y la modelación matemática. (&. G. En F. Posada, Ed.) *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico , Vol. 2*, págs. 127 - 163.

Presmeg, N. (1986). *Visualization and Mathematical Giftedness. Educational Studies in Mathematics.*

Rendon Ramírez, R. A. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Resnick, L. B. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós-MEC.

Rivas Navarro, M. (2008). *Procesos Cognitivos y Aprendizaje Significativo.* Madrid: Organización Educativa de la Comunidad de Madrid.

Romero, J. G. (2004). *Diagnóstico y Evaluación de la Comprensión del Conocimiento Matematico.* Málaga: Universidad de Málaga.

Ruiz, A. (2002). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Madrid: EUNED.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Estados Unidos de América: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tall, D. y. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.[31].

Tünnerman, C. (2005). *Modelos Educativos.* México: BUAP.

UNESCO. (2004). *Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación docente. Guía de planificación.* Paris: UNESCO.

Uribe Calad, J. A. (2001). *Matemática Experimental 11.* Medellin: Uros Editores.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). *La comprensión de la tasa de variación para una aroximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Villa-Ochoa, J. A., & Posada Balvin, F. A. (2004). *Una aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Zill, D., & Dewar, J. (1998). *Algebra y Trigonometría.* México.: McGraw Hill.