ESTRATEGIAS Y FORMAS DE RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO EN TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE SUCESIONES Y SERIES POLINOMIALES

HÉCTOR EMILIO CORREA MUÑOZ

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MEDELLÍN
2017

ESTRATEGIAS Y FORMAS DE RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO EN TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE SUCESIONES Y SERIES POLINOMIALES

HÉCTOR EMILIO CORREA MUÑOZ

Trabajo de investigación para optar al título de
Magister en Educación Matemática

ASESOR:
Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MEDELLÍN
2017

Agradecimientos

A mi Madre Aida María, a mis hijas Libertad y Ana María, a mi hijo David quienes son la razón para impulsar las cosas con amor.

A los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Kennedy, por su disponibilidad, apertura, confianza y los valiosos aportes que fueron tan significativos para todos.

Al joven Yeferson Marín Alvarán del grado undécimo por abrir su mente y mostrarme otras vías para resolver un problema.

A María Elena Henao por su apoyo incondicional, amor y colaboración en todos los momentos vividos en mi estudio de Maestría.

A mi asesor Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa por sus orientaciones, colaboración, paciencia y apoyo constante para desarrollar este trabajo de investigación.

Introducción

El Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos están relacionados con la manera de ver, reconocer, identificar, caracterizar, modelizar y simbolizar fenómenos de variación (Colombia-MEN, 1998). Por consiguiente, se recomienda plantear situaciones que favorezcan el desarrollo del Pensamiento Variacional desde los primeros años de escolaridad con el fin de conducir a la apropiación de conceptos como el de función y otros del análisis matemático. El estudiar situaciones en donde se puedan establecer regularidades y patrones marcan el inicio para el desarrollo de este pensamiento. Dichas regularidades se pueden encontrar en el estudio de las sucesiones y las series. Es en el intento de encontrar una regla que rige una determinada sucesión o serie cuando el sujeto se adentra en la producción de conjeturas; allí, la experiencia, la imaginación y la manera de percibir el mundo, entran en juego para construir un modelo que represente y generalice lo que sucede en un fenómeno determinado.

Las actividades de generalización son un camino apropiado para el aprendizaje comprensivo y significativo de los procesos algebraicos (Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 1999). Cuando un estudiante verbaliza y luego usa la simbolización para representar aquellas reglas que ha identificado, toma sentido lo que ha hecho y avanza en los procesos de razonamiento, comunicación y ejercitación de procedimientos, como procesos inherentes a la actividad matemática (Arzaquiel, 1991).

El estudio de procesos de generalización ha sido sugerido por el Ministerio de Educación Nacional a través de la publicación del documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, como una manera de construir cimientos que permitan acceder comprensivamente a los conceptos propios del álgebra y del cálculo (Colombia-MEN, 2006).

No obstante, se ha podido evidenciar que el avance en el desarrollo de estos procesos de generalización es muy lento. A nivel local, en la experiencia cotidiana en clase de matemáticas se evidencian casos en los que estudiantes de últimos grados de Educación Media muestran poca destreza en tareas de generalización. Dichas evidencias están sustentadas en los bajos resultados en pruebas estandarizadas como Olimpiadas del Conocimiento de la Ciudad de Medellín y en las pruebas Saber ICFES. Así como en el desempeño de los estudiantes en el aula, frente a situaciones que buscan el nivel de comprensión en problemas de generalización.

En la revisión de literatura se encontraron producciones académicas que se han enfocado en la generalización; principalmente, a través de patrones lineales (Stacey ,1989; García-Cruz y Martion, 1997; Orton y Orton ,1999; Feifei ,2005; Radford ,2013; Akkan ,2013; Vergel ,2014; entre otras). No obstante, se encontraron algunas producciones que abordaron procesos de generalización con patrones cuadráticos (Cooper y Cooper y Sakane 1987, Orton y Orton 1999, Feifei 2005, Akkan 2013, Ávila et al. 2010). En este sentido, la investigación que se reporta en este documento tuvo como propósito aportar elementos y procedimientos que contribuyan al fortalecimiento de procesos de generalización de patrones de tipo polinomial no lineal. En particular, se puso atención a las diferentes estrategias que usan algunos estudiantes del grado undécimo, en la búsqueda de un modelo que generalice el término *n-ésimo* de una sucesión o de una serie. Así mismo, se hizo especial énfasis en la importancia de dinamizar el trabajo en el aula, a través de la comunicación y la socialización en la interacción entre estudiantes y estudiante – docente, como procesos que permiten enriquecer y refinar los conceptos, argumentaciones y procedimientos de ambos actores. En esta perspectiva, el estudiante cobra un protagonismo activo en el proceso enseñanza- aprendizaje.

Para dar cuenta de los planteamientos anteriores, en el presente trabajo de investigación se exhiben seis capítulos. En el capítulo 1 se presentan los antecedentes que justifican el problema de investigación. Para ello se tuvo en cuenta los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional en sus documentos de currículo de matemáticas (Colombia-MEN, 1998; 2006). La experiencia como profesor de matemáticas y la confrontación de esta experiencia con resultados de investigación reportados en la literatura generaron reflexiones y orientaciones para delimitar el problema de investigación.

En el capítulo 2 se presentan aquellos elementos teóricos que respaldan la investigación en lo que respecta a la generalización y a la actividad matemática en el aula. Entre estos elementos se tienen algunos planteamientos de Luis Radford en torno a la manera en que concibe el pensamiento algebraico, la generalización y la didáctica a partir de la perspectiva socio-cultural.

En el tercer capítulo se da cuenta de la metodología utilizada en la investigación. En esta, se describe el enfoque cualitativo, mediante un diseño fenomenológico, bajo la perspectiva de varios autores reportados en la literatura de metodología de la investigación (por ejemplo, discutidos en Hernández, Fernández, y Baptista 2014). Bajo este diseño se identificaron estrategias y formas de razonamiento en los estudiantes cuando se ocupan del estudio de situaciones que contienen sucesiones o series no lineales. Se describen las principales características de los estudiantes que participaron. Estos estudiantes cursaban el grado undécimo en la I.E. Kennedy del Municipio de Medellín.

Los resultados de la investigación son descritos en los capítulos 4 y 5. En el capítulo 4 se analizan razonamientos, procedimientos, estrategias y justificaciones que los estudiantes brindaron durante el desarrollo y ejecución de las diferentes situaciones, confrontados a la luz de los referentes teóricos y las observaciones realizadas. Este capítulo también está centrado en mostrar cómo los estudiantes, a partir del trabajo de sus compañeros y el propio en la búsqueda de generalización de patrones, pudieron refinar su proceso de generalización a tal punto de encontrar un método de generalización para cualquier tipo de sucesiones polinomiales.

El capítulo 5 recoge los resultados arrojados en el capítulo 4, analizados a la luz del investigador, ya que aportan significativamente a la formación académica de éste, en tanto brinda elementos para encontrar un camino y conjeturar generalizaciones de algunas series que son objeto de demostración por medio de la inducción matemática, inquietud que lo acompañaba desde sus estudios de pregrado. A manera de ilustración, es usual que en un curso de matemáticas universitario se solicite demostrar, por inducción matemática, la validez de la siguiente proposición:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sin embargo, esta investigación aporta elementos del cómo a partir de procesos de generalización se puede conjeturar el modelo algebraico de esta suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + n^2 = ?$$

En general se presenta, a través de las estrategias expuestas en el capítulo 4, una ruta para conjeturar $\sum_{i=1}^{n} i^p$

Finalmente, en el capítulo seis, se describen las conclusiones de esta investigación, entre las cuales se pueden identificar cinco estrategias que favorecen la generalización de sucesiones y series no lineales, en particular polinomiales (Generalización Recurrente, Generalización Contextual-Explícita aditiva, Generalización Contextual-Explícita Multiplicativa, Generalización Gaussiana y Generalización Pascalina). Se deja a consideración para investigaciones futuras, el estudio de estrategias implementadas y formas de razonar de los jóvenes frente a la generalización de modelos que corresponden a sucesiones alternantes.

En síntesis, este documento sugiere actividades que promueven la generalización como un proceso inherente a la actividad matemática; así mismo, plantea aspectos metodológicos para implementar en el aula, de tal manera que se posibilite una participación más activa en la interacción entre estudiantes y estudiantes-docente, y con ello la oportunidad de generar un ambiente en el cual ambos actores sean partícipes del proceso enseñanza aprendizaje.

Capítulo 1: Antecedentes de la investigación

En este apartado se expone el problema que originó la presente investigación. Este problema se justifica a partir de la experiencia y observaciones realizadas en la cotidianidad del quehacer docente. Se consideraron los planteamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos Curriculares (Colombia-MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Colombia-MEN, 2006); así como algunos elementos identificados en la revisión bibliográfica concerniente a la generalización de sucesiones y series lineales y no lineales. Estos elementos sustentan la necesidad y pertinencia de emprender la tarea de mejorar los procesos de generalización por parte de los estudiantes.

1.1. La generalización y el álgebra escolar en el aula

Con base en la experiencia docente del autor de esta investigación se han evidenciado diversas dificultades que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización que requieren de un análisis y razonamiento algebraico. En particular, se observaron falencias de tipo conceptual, procedimental y actitudinal en el grado undécimo y tercer semestre de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Estas dificultades se manifiestan por los estudiantes a pesar de haber realizado cursos con contenido algebraico. Algunas de estas dificultades parecen derivarse de prácticas escolares en las que el estudiante ejerce un rol pasivo que poco favorecen el proceso enseñanza - aprendizaje y se convierten más bien en un obstáculo para el trabajo en matemáticas.

Los estudiantes usan fórmulas sin comprender en realidad el fenómeno que modelan, solo se limitan a establecer valores numéricos (con dificultad) pero sin sentido. El álgebra no se incorpora desde la escuela, sino más bien como un cambio de entes matemáticos, pues hasta el grado séptimo el énfasis ha estado puesto en los aspectos aritméticos de las matemáticas. A propósito el Grupo Azarquiel (1993) escribe:

> Para que el método algebraico se pueda incorporar como algo natural, es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que

no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables. (p. 18)

Otro aspecto a reflexionar es que los estudiantes llegan al grado undécimo con dificultades para graficar por lo menos una línea recta (reconocimiento del modelo, establecimiento de relaciones entre las variables, cálculo de parejas ordenadas que corresponden a la gráfica, etc.) y si alguno lo hace, no es consciente del significado del cambio de una variable (independiente) con respecto a otra (dependiente); ello posiblemente se debe a que la enseñanza del álgebra en nuestras aulas se ha reducido al trabajo con expresiones algebraicas desprovistas de contextos. A propósito Vasco (2009) señala:

> (…) El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como *ba*, πr^2, o las de los modelos matemáticos de la física, como f=ma, V=IR, o s $= (1/2)gt2 + vot = (1/2)gt2 + vot$. Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para reemplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas. No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas; al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica. (p. 5)

A manera de ilustración, se describen a continuación algunos episodios que muestran claramente las dificultades mencionadas en el párrafo anterior:

En una escena de clase, con estudiantes del grado undécimo, se solicitó a los estudiantes que dijeran tres números naturales consecutivos. El silencio ante la petición dada por el docente, hizo suponer que no hay comprensión, bien sea en los conceptos de número natural o número consecutivo; o bien pudo suceder que había inseguridad o temor en manifestar la solución a lo solicitado.

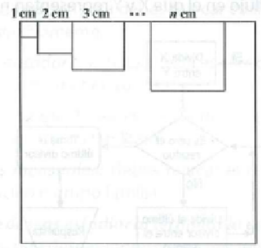
Ante esto, el profesor recurrió a dar varios ejemplos y luego realizó variaciones a la pregunta inicial y preguntó de nuevo, por ejemplo, él dio el primero de dichos números y les preguntó por los otros dos, o dió el segundo y preguntó por los otros dos, o el último (el mayor) y preguntó por los otros dos. Luego dinamizó la actividad a través de los siguientes interrogantes: ¿Si conozco el número menor, cómo encuentro los dos siguientes? ¿Si se conoce el número intermedio, cómo encuentro los otros dos? ¿Si conozco el número mayor, cómo encuentro los otros dos? Las respuestas dadas por los estudiantes no se hicieron esperar y estas se escucharon en coro ("se le sumo uno", "se le resta uno". Luego el profesor preguntó: ¿si el número menor es ***n***, cuáles son los otros dos? frente a los nuevos interrogantes, el coro dejó de funcionar, y sólo se escuchó un estudiante decir: **"*o*** y ***p*"**.

Lo anterior, dio a entender que la representación simbólica para ese menor número natural dada por el docente, carecía de significado algebraico para el estudiante. Aunque demostró tener claro que dado el número menor, bastaba con sumarle uno para encontrar el siguiente. De lo anterior, se hace evidente que se le dificulta expresar esta generalización en términos alfanuméricos, o por el contrario, si se dan los términos ***n*** y ***n+1***, siendo ***n*** un número natural, no logra proponer la correspondencia entre estas expresiones y dos números naturales consecutivos.

En otro episodio de la clase de matemáticas, se le asignó a los estudiantes la siguiente actividad tomada de las Olimpiadas del Conocimiento de la ciudad de Medellín del año 2011: Ilustración 1

RESPONDA LAS PREGUNTAS 5 A 8 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

Natalia está elaborando algunos diseños y para ello utiliza cartulinas cuadradas. De cada cartulina va recortando, sólo en uno de los lados, un cuadrado de lado 1cm, un cuadrado de lado 2cm, un cuadrado de lado 3cm... y así sucesivamente. El proceso se ilustra en la figura



Figura

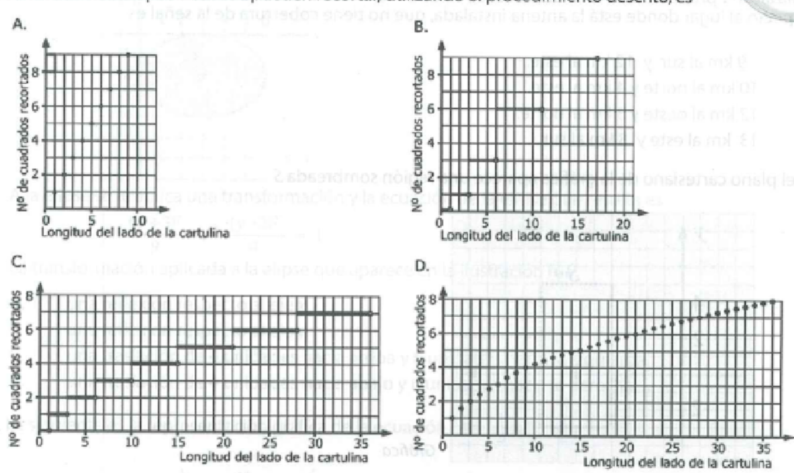
5. Si Natalia utiliza una cartulina cuadrada de 30 cm de lado, la longitud del lado del cuadrado más grande que puede recortar es

   A. 7 cm.
   B. 9 cm.
   C. 28 cm.
   D. 30 cm.

6. Si Natalia usa una cartulina cuadrada de 55cm de lado y recorta cuadrados, en la forma indicada en la figura, el número de cuadrados que obtiene es

   A. 10
   B. 11
   C. 45
   D. 55

7. La gráfica que representa la relación entre la longitud del lado de una cartulina y el número de cuadrados que de ella se pueden recortar, utilizando el procedimiento descrito, es



8. Si Natalia quiere recortar un cuadrado necesita una cartulina mínimo de 1cm de lado, si quiere recortar dos cuadrados (uno de lado 1cm y otro de lado 2cm) necesita una cartulina mínimo de 3cm de lado y así sucesivamente. Si ella quiere recortar n cuadrados necesita una cartulina con una longitud mínima de

   A. n centímetros.
   B. $\frac{n(n-1)}{2}$ centímetros.
   C. $\frac{n(n+1)}{2}$ centímetros.
   D. $n(n+1)$ centímetros.

Ilustración 1: *Actividad tomada de las Olimpiadas del Conocimiento de la ciudad de Medellín del año 2011*

Los resultados de 130 estudiantes del grado undécimo de la I.E. Kennedy para esta actividad, se encuentran registrados en la tabla 1:

Tabla 1: *Resultados obtenidos, 130 estudiantes.*

Pregunta	**Clave**	**No. Aciertos**	**%**
5	A	45	34,6%
6	A	38	29,2%
7	B	7	5,4%
8	C	5	3,8%

De los datos registrados en la tabla 1, es posible inferir que los estudiantes parecen tener poca comprensión de la situación planteada. Como se pudo constatar, en el momento de realizar la socialización con los estudiantes, quienes manifestaron no comprender lo que las gráficas representaban ni las expresiones en las opciones de respuesta de la pregunta 8. Incluso después de dar una explicación se les pedía que, en la expresión de la clave C, tomaran diferentes valores para la $\boldsymbol{n}$ y calcularan el resultado. Aproximadamente un 90% de ellos no pudieron calcularlo correctamente.

Por otra parte, con el ánimo de indagar un poco más allá de lo que sucede con estudiantes que han iniciado estudios universitarios cuando se enfrentan a situaciones de generalización de patrones, se realizó la siguiente actividad con un grupo de jóvenes que cursaban tercer semestre de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Siguiendo el patrón mostrado en las figuras 1,2 y 3,, resuelve las actividades propuestas:

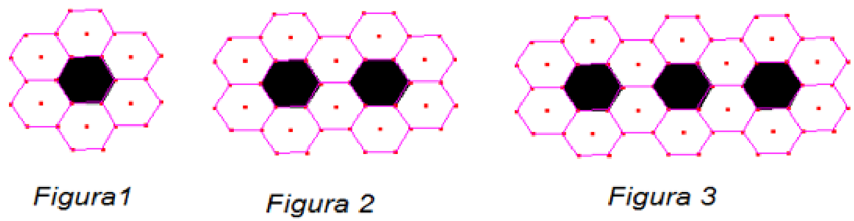


Ilustración 2: *Flores Hexagonales.*

Actividad 1

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para rodear 12 hexágonos negros?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para rodear 50 hexágonos negros?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para rodear ***n*** hexágonos negros?

Actividad 2

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las dos primeras figuras?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las tres primeras figuras?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las 10 primeras figuras?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las ***n*** primeras figuras?

La actividad uno buscaba la identificación y solución de una sucesión cuya generalización obedece a un patrón lineal. La actividad dos convoca a una generalización de tipo cuadrático. Durante el desarrollo de estas actividades se observó que para la uno, aunque se llegó a una generalización aritmética, no lograron expresarla en términos alfanuméricos. Para la actividad dos, los estudiantes solamente lograron exhibir algunos términos de la sucesión, pero se evidenció dificultad para emprender la tarea hacia una forma de generalización.

Como muestra de lo anterior, se presenta la solución de las tareas dadas por tres estudiantes:

Estudiante 1: Este estudiante recurrió a la correlación entre el número de la figura y la cantidad de hexágonos que esta requiere para construirla:

1=6

2=10

3=14

4=18

5=22

6=26

7=30

8=34

9=38

10=42

11=46

12=50

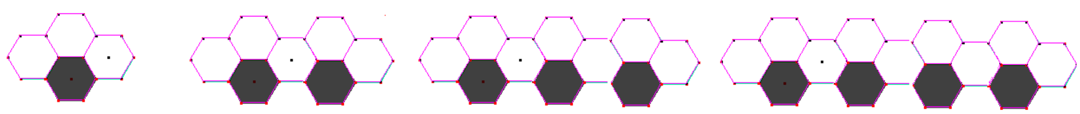


Ilustración 3:*Flores Hexagonales 2.*

"Profe yo noto que si divido por dos cada una de esta figuras, el número de hexágonos blancos corresponde a una secuencia de impares desde el 3, así: 3, 5, 7, 9, 11…Entonces yo concluyo que: haciendo una configuración de los hexágonos blancos siempre será una sucesión de números impares consecutivos multiplicada por dos, pero no sé cómo escribirlo"

"La segunda parte no sé cómo hacerla"

Estudiante dos: Este estudiante construyó la siguiente tabla, en la cual reconoció que dada una figura, para obtener la siguiente, había que "sumarle 4" hexágonos blancos.

1 hexágono neg 6 Blancos

2 hexágono neg 10 Blancos …+4

3 hexágono neg 14 Blancos

4 hexágono neg 18 Blancos

5 hexágono neg   22 Blancos

6 hexágono neg   26 Blancos

7 hexágono neg   30 Blancos

8 hexágono neg   34 Blancos

9 hexágono neg   38 Blancos

10 hexágono neg   42 Blancos

11 hexágono neg   46 Blancos

12 hexágono neg   50 Blancos

13 hexágono neg   54 Blancos

"Si para rodear 12 hexágonos negros utilizo 50 blancos, para 24 utilizo 98, ya que si sumamos los que rodea a dos figuras que contengan 12 hexágonos suman 100, pero al restarles los dos hexágonos blancos que comparten, el total es 98. Si para 24 utilizo 98, para 48 utilizo 194, puesto que se suman las figuras por separado y suman 196, pero como al unirse comparten 2 el resultado es 194. Para rodear 50 hexágonos negros se necesitan 202 hexágonos blancos..."

*"Para rodear a **n** hexágonos negros…"*

En el anterior razonamiento brindado por el estudiante, aunque no acude al uso de expresiones algebraicas que le permitan encontrar el ***n-ésimo*** término, está implícita una generalización, esto es, teniendo f(n) puede obtener f(2n), bajo la relación: f(2n)=2f(n)-2. Además, como la tarea era encontrar el término 50, usa lo hallado en los términos 2 y 48, y a pesar de cometer un error tal vez aritmético o de falta de atención, lo que plantea es: f(50)=f(2)+f(48)-2, es decir, al conocer *f(n)* y *f(m)*, puede calcular f(n+m) al usar la siguiente relación: f(n+m)=f(n)+f(m)-2.

Al desarrollar la actividad 2 escribe:

16" 1f=6,   2f=10

"30",   1f=6, 2f=10, 3f=14.

Allí aunque encuentra el número de hexágonos blancos para construir las tres primeras figuras y pronto se percata que la estrategia utilizada es ardua para calcular términos más lejanos; por lo tanto no aborda la solución de las otras preguntas ni establece el modelo cuadrático asociado con dicha secuencia.

Estudiante 3*:*Acudió a hacer los dibujos correspondientes (ilustración 4), y manifestó: *"Es la única manera que tengo de visualizar"*

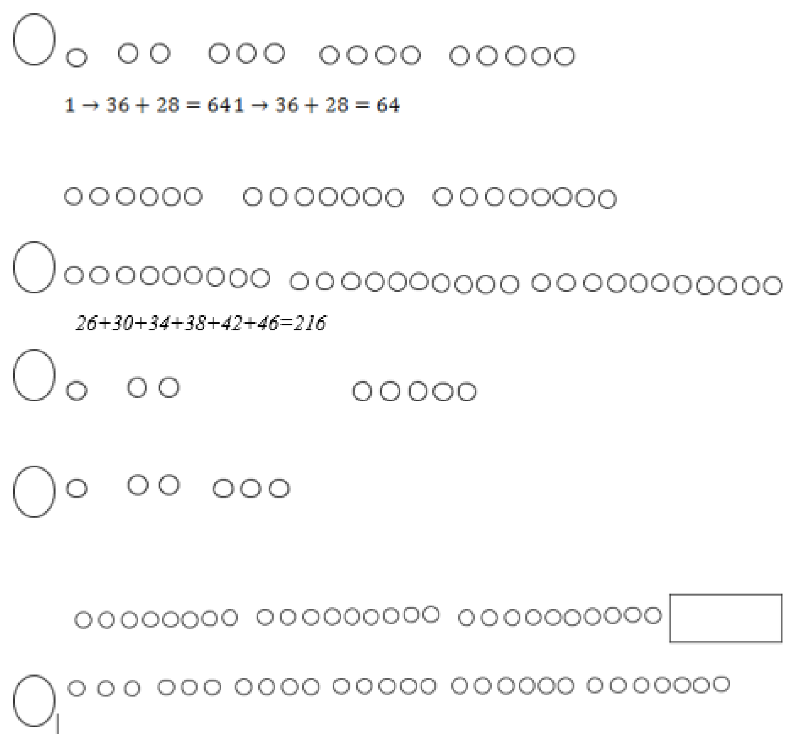


Ilustración 4: *Dibujos realizados por el estudiante 3.*

Este estudiante recurrió a una manera de solución pictórica que le permitió visualizar la posición de la figura y el número de hexágonos blancos, manifestando dificultad para establecer otra representación y reconoció que es la única manera que vio para resolverlo. Demostró claramente que usó un proceso iterativo en el que percibió la diferencia constante, pero no logró llevar la generalización en términos alfanuméricos.

Ante lo expuesto anteriormente, el panorama es desalentador, puesto que se supone que los estudiantes de undécimo grado y tercer semestre de universidad ya han abordado un estudio formal del álgebra; sin embargo demostraron dificultades para expresar sus observaciones y razonamientos en términos alfanuméricos que dieran cuenta de un tipo de generalización más refinado.

Así pues, como se pudo constatar en las experiencias de aula narradas anteriormente, son diversas las dificultades con las que un docente se puede encontrar en el aula en cuanto a la apropiación de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes, particularmente en lo que respecta al desarrollo del pensamiento variacional y al fortalecimiento de los procesos en la actividad matemática. Lo anterior invita a reflexionar con relación a aspectos relacionados con la práctica pedagógica. Una práctica como posibilitadora de ambientes favorables de aprendizaje, en los cuales se construyan a diario conceptos y procedimientos matemáticos cada vez más refinados.

Es así como surge la necesidad de potenciar, en los estudiantes, el desarrollo del pensamiento variacional y algebraico a través de tareas y la resolución de problemas que involucran sucesiones y series con el fin de establecer generalizaciones cada vez más sofisticadas. Por lo cual, se consideró pertinente presentar algunos elementos teóricos sustentados en los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016), concernientes a dicho pensamiento y en particular, a procesos de generalización en matemáticas.

1.2. El pensamiento variacional en el currículo de matemáticas en Colombia

El Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas en 1998, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) y articulados a estos, Los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) propone a los docentes de matemáticas orientar su quehacer pedagógico enmarcado en cinco tipos de pensamiento matemático, entre los cuales está el variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Así mismo, sugiere que la actividad matemática debe estar enmarcada en cinco procesos, a saber: la resolución y planteamiento de problemas; el razonamiento; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Dichos pensamientos deben ser abordados desde los primeros años de escolaridad; sin embargo, se observó, en la mayoría de los estudiantes, serias dificultades en los procesos llevados a cabo a la hora de resolver ejercicios y solucionar problemas inherentes a la actividad matemática, en lo que respecta a situaciones de generalización de sucesiones de tipo polinomial, los cuales se evidenciaron en los bajos resultados de las pruebas estandarizadas y en las actividades desarrolladas en el aula, como se pudo constatar en el desempeño arrojado en la actividad extraída de las Olimpiadas del Conocimiento de la Ciudad de Medellín 2011, y en la actividad de las flores con hexágonos, expuestas en el apartado anterior.

De la misma manera, en dichos documentos se propone incorporar, desde los primeros años de escolaridad, procesos de variación aritméticos que posteriormente serán fundamentales para el surgimiento del álgebra y la representación de formas más sofisticadas de generalización. En esta misma línea, sugiere abordar el trabajo con regularidades, siendo el estudio de las sucesiones y series una fuente importante para potenciar dicho pensamiento. En ese sentido el MEN (2006), propone:

> El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se

> desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (p. 66).

No obstante, aunque en los documentos oficiales se hace un llamado a desarrollar dicho pensamiento desde los primeros años de escolaridad, lamentablemente, el docente se encuentra con una realidad diferente en grados más avanzados, pues se evidencian dificultades relacionadas con el uso y manejo de expresiones algebraicas y con la búsqueda y el descubrimiento de reglas de formación, lo que hace que el docente tenga que recurrir a estrategias para implementar en el aula que le ayuden en el fortalecimiento de tareas de generalización.

Se hace necesario entonces, presentar algunas producciones académicas en torno a la generalización y a una apuesta metodológica en el aula, que permita favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de los diferentes actores del acto educativo.

1.3. Algunas producciones académicas con relación al pensamiento algebraico

En la revisión de literatura realizada, se encontró que la mayoría de las investigaciones en el campo del pensamiento algebraico apuntan hacia una concepción diferente del álgebra, la cual permite abordar un estudio temprano de esta a partir de la aritmética mediante problemas y situaciones de variación, lo que implicaría un cambio en la propuesta curricular. En esta dirección se describen algunos planteamientos de autores que se han referido al respecto.Kieran (1989) sugiere profundizar urgentemente en la investigación de la naturaleza del pensamiento algebraico. A partir de este llamado, surge una doble preocupación en la comunidad nacional e internacional. Por un lado, la preocupación se manifiesta en términos de la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los alumnos de primaria elaboran generalizaciones, y por otro, el llamado a promover desde los primeros grados de la Educación Primaria el desarrollo del pensamiento algebraico. Esta misma autora en el 2004, menciona al respecto que este pensamiento "*debe incluir el desarrollo de formas de pensar como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la* *resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción*" (Kieran, 2004, p. 49).

En esa misma línea, Kieran y Kaput (1998, 2000), citado en Socas (2011), se refieren a "*Early Algebra*" como una propuesta de cambio curricular en la que sugiere introducir el estudio del álgebra desde la Educación Primaria anclado al desarrollo de los demás contenidos matemáticos. De esta manera invitan a proponer en el aula actividades encaminadas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, que busquen potenciar el pensamiento algebraico.

De igual manera, Vasco (2002) propone abordar el estudio del pensamiento variacional desde los primeros años, a través del estudio de las regularidades y patrones, inyectándole a dicho pensamiento, una mirada dinámica, que implique la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003), realizaron un trabajo investigativo con maestros y sus estudiantes de 1° a 6° grado, en el cual indagaron sobre el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes. En esta investigación, los autores afirman que aunque los alumnos tienen mucho conocimiento implícito de las operaciones aritméticas, se pasa por alto hacer un tratamiento dinámico de las propiedades de las operaciones y de los números, que apunte a establecer generalizaciones. Finalmente, concluyen que una manera de evidenciar el pensamiento matemático de los alumnos, es mediante la inferencia de generalizaciones basados en las propiedades de los números o las operaciones.

Blanton y Kaput (2005, citados por Socas, 2011) de manera concreta, proponen incorporar en las aulas de Educación Primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Dichas actividades deberán proporcionar un ambiente de trabajo en matemáticas en la que los alumnos exploren, modelicen situaciones, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas, además de practicar habilidades de cálculo. En definitiva, se trata de desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico desde la Educación Primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del Álgebra en la Educación Secundaria.

En esta misma línea, autores como: Blanton y Kaput (2006), Molina (2006) y Molina (2011) coinciden en que el inicio de la enseñanza del álgebra desde los primeros grados puede propiciar una preparación hacia el estudio del álgebra en grados superiores. Además, se fundamentan en los enfoques propuestos por Van Ameron (2002) para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra que se describen a continuación:

Enfoque Generalización: Si se asume el álgebra como el resultado de tareas de generalización, su propósito debe ser la generalización a partir de expresiones relativas a propiedades de los números.

Enfoque Resolución de problemas: La elaboración y la resolución de ecuaciones para resolver problemas han estado presentes en algunas propuestas curriculares en cuanto al estudio del álgebra.

Enfoque de Modelación: Los estudiantes deben desarrollar habilidades para describir e interpretar fenómenos del mundo que los rodea. Esto implica el reconocimiento de diferentes representaciones como gráficas, tablas, fórmulas, que les permita transitar de una representación a otra.

Enfoque Función: Este enfoque se basa en el establecimiento de relaciones numéricas entre conjuntos de números. Una clasificación de funciones y una concepción sobre variables pueden surgir al respecto.

Por su parte, el Grupo Pretexto (1999) realiza una investigación en la cual pone de manifiesto algunos problemas que se presentan en la transición de la aritmética hacia el álgebra, lo cual sucede en los grados sexto a octavo y que si bien no aparecen explícitamente en el transcurso de dichos grados, sí determinan en gran medida la posibilidad de comprensión tanto de la relación entre aritmética y álgebra, como del álgebra misma. Ahora bien, este trabajo, junto con otras producciones en el contexto colombiano (Agudelo-Valderrama, 2000), coinciden con estudios realizados en el ámbito internacional, particularmente, Kieran (1989) quien clasifica las manifestaciones de estos problemas en relación con:

• El cambio de convenciones respecto del referente aritmético,

• La interpretación de las letras y

• El reconocimiento y uso de estructuras.

Agudelo-Valderrama (2000) señala que una de las áreas más problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares es el álgebra; no obstante, afirma que el estudio de las regularidades y patrones está al alcance de todo ser humano, y es vital para su activa participación como ser social, crítica y productiva; de ahí que surja la necesidad de que la escuela promueva ambientes favorables que conlleven a los estudiantes a pensar algebraicamente, y darle **sentido** matemático al mundo que lo rodea. En esta dirección, la autora muestra la necesidad de una innovación curricular enfocada en el proceso de transición de la aritmética al álgebra, que ponga en acción un cambio en las prácticas de enseñanza y que permita despertar el interés de los estudiantes por su aprendizaje.

Otros autores como Godino y Font (2000) se refieren en términos del desarrollo del pensamiento algebraico desde que se inicia la Educación Infantil. Los autores señalan que este implica generalizar y formalizar regularidades y patrones en contextos de las matemáticas, y que a medida que se desarrolla el razonamiento algebraico, se progresa en el uso propio del álgebra con miras a formalizar y generalizar, como procesos inherentes a la actividad matemática.

Bajo esta perspectiva, Blanton y Kaput (2001) sugieren prestar especial interés en aquellas actividades que promuevan el razonamiento algebraico de los estudiantes y proponen una algebrización de las situaciones diseñadas para la enseñanza, lo cual sugiere el diseño de acciones que promuevan el trabajo con regularidades, justificaciones, reconocimiento de variaciones, generalizaciones y formalizaciones.

Por su parte, Feifei (2005) afirma que los patrones cobran importancia en el plan de estudios de la escuela media como un acercamiento al álgebra y proporcionan la transición del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico. La evaluación diagnóstica del aprendizaje de patrones por parte de los estudiantes es útil para comprender las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas de patrones, y con la instrucción del maestro y el aprendizaje de los estudiantes. En su estudio, el autor desarrolló tres conjuntos de tareas de evaluación para diagnosticar el aprendizaje de los estudiantes en patrones numéricos en un período de 9 semanas de instrucción de patrones y funciones en las clases de matemáticas del 8vo grado en un distrito escolar urbano. Además, describió las creencias y comportamientos relacionados con la evaluación en el aula, incluyendo la autoeficacia, el valor de las tareas, las orientaciones de los logros, esfuerzo y estrategias de aprendizaje a través de los tres eventos de evaluación. Los resultados de los estudiantes en patrones lineales, cuadráticos y geométricos estuvieron altamente correlacionados. La correlación entre ellos varió a través de los eventos de evaluación, lo que sugiere diferentes patrones de cambio. Para patrones lineales y cuadráticos, la competencia de los estudiantes aumentó durante la instrucción, pero el incremento fue curvilíneo con una tendencia a la baja. Para patrones geométricos, la trayectoria de crecimiento fue lineal con heterogeneidad en los puntajes iniciales de competencia.

1.4. La generalización en matemáticas

Como se mencionó anteriormente, la generalización es de gran importancia en los procesos matemáticos. A la hora de resolver problemas, establecer definiciones y proposiciones, de teoremas, etc., se requiere de procesos de generalización, como lo afirma Mason, "*la generalización reside en el corazón de las Matemáticas*" (1999, p. 232), incluso sugiere que una lección sin la oportunidad de generalizar no es una lección de matemáticas. En esta perspectiva relaciona la capacidad de generalizar con la capacidad de agrupar, ordenar, de enfocar la atención desde diferentes ángulos, de imaginar lo que aún no se ha visto, conjeturar y poderlo comunicar. Este autor hace un especial llamado a la metodología a implementar en el aula con el ánimo de invitar y motivar a los estudiantes a usar dichas capacidades.

Krutetzki (1976, citado por García, 1998) se refiere a la habilidad para generalizar contenidos matemáticos (objetos, relaciones, operaciones) e identifica dos niveles: la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (validar un caso particular con un caso general ya conocido) y la habilidad para ver algo general y aún desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). Para este autor, una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a partir de casos particulares, y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares. En dicha investigación, Krutetzki diseñó materiales para estudiar la habilidad mostrada por los alumnos en el segundo nivel de generalización a través de un proceso de inducción finita. Como resultado se distinguieron cuatro niveles de habilidad para generalizar entre alumnos que poseen diferentes capacidades para las matemáticas, a saber:

Nivel 1. No generaliza material respecto de atributos esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos intermedios del mismo tipo.

Nivel 2. Generaliza material respecto de atributos esenciales con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos del mismo tipo, mostrando errores e imprecisiones.

Nivel 3. Generaliza material respecto de atributos esenciales por sí mismo, pero después de varios ejercicios del mismo tipo con errores insignificantes. Es capaz de realizar generalizaciones libres de error por medio de indicaciones y preguntas insignificantes hechas por el investigador.

Nivel 4. Generaliza material correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin ayuda por parte del experimentador y sin una práctica especial en resolver problemas del mismo tipo.

Estos niveles, afirma Krutetzki, señalan la estrecha relación que existe entre los procesos de abstracción, inducción y generalización en la formación de los conceptos matemáticos.

A continuación se exponen diferentes investigaciones que se han realizado sobre la generalización de pautas en las que se utilizan tareas sobre sucesiones lineales:

En esta dirección, Stacey (1989) reporta los resultados de un estudio realizado con estudiantes en edades comprendidas entre 9 y 13 años, correspondientes a tres fuentes (estudiantes de primaria y estudiantes de secundaria experimentados e inexpertos), en el cual explora sus respuestas a los problemas de generalización lineal a partir del punto de vista de la técnica y las estrategias empleadas. Además, describe los diferentes métodos usados, a partir de una clasificación elaborada para las respuestas de los niños de primaria, como base para un análisis cuantitativo de las respuestas de los niños de secundaria a tres preguntas generalizadoras lineales. Dichos métodos se describen en las siguientes categorías:

Método de conteo: Contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.

Método de la diferencia: Se asume de forma implícita que la adición repetida implica que

$f(n)=an$

Método Whole-object: Se asume implícitamente que $f(mn)=mf(n)$.

Método Lineal: Utilización de una pauta lineal, es decir, se reconoce que tanto las operaciones de suma y multiplicación están involucradas y que, además importa el orden en que se realizan las operaciones. Se asume implícitamente que $f(n)=an+b, b>0$.

Es importante resaltar dos tipos de generalización a los que la autora se refiere: **Generalización cercana:** este término es usado para denotar una pregunta que puede ser resuelta etapa por etapa, dibujando o contando, esto es, identificar un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla.

Generalización lejana: se usa para denotar una pregunta que va más allá de los límites razonables de la práctica de tal enfoque paso a paso. La intención es que para las generalizaciones lejanas los niños deben construir y usar reglas generales que juegan el papel del número generalizado.

Finalmente, la autora concluye que hay una inconsistencia en la elección del modelo. Los estudiantes que comenzaron correctamente una pregunta adoptaron con frecuencia un modelo más simple pero incorrecto para las partes más difíciles de la pregunta. Los estudiantes que habían emprendido un curso de resolución de problemas utilizaron implícitamente un modelo lineal con mayor frecuencia y sus explicaciones relacionaron los patrones espaciales y los patrones numéricos; estos estudiantes parecían entender la relación entre los datos y la regla de generalización, pero algunos presentaron dificultades en la capacidad técnica para coordinarlo.

García (1998) a partir de un marco teórico que parte de las ideas centrales de Piaget de la construcción del conocimiento, determina elementos clave en el proceso de generalización. En su investigación, García aporta evidencias del desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de secundaria cuando se enfrentan a problemas de generalización lineal. El autor persigue en su tesis, por un lado, estudiar el proceso de generalización, específicamente, determinar las acciones que los alumnos realizan y los invariantes que establecen al abordar las tareas denominadas *problemas de generalización lineal*. Por otro lado, se interesa en derivar orientaciones para la práctica educativa en el nivel de enseñanza secundaria. Los problemas planteados por García son representaciones pictóricas en las que se dan varios objetos de diferentes tamaños (n=1,2,…), los cuales tienen un número $f(n)$ de elementos. De esta forma se dan los primeros términos $f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,… de una progresión aritmética $f(n)=an+b, b\neq 0$, y se piden algunos términos $f(n)$. Cuando n es "pequeño" se hablará de generalización próxima y cuando n es "grande" de generalización lejana. García planteó las siguientes categorías referidas a la comprensión del contenido matemático (CM):

CM-1: Reconocer la diferencia constante, carácter iterativo de la pauta lineal.

CM-2: Expresar la relación para un cálculo.

CM-3: Extender tal relación a otros cálculos dentro de un mismo problema.

CM-4: Expresar verbalmente con relación a la sucesión la validez de la regla para un cálculo.

CM-5: Expresar verbalmente con relación al dibujo la validez de la regla para un cálculo.

CM-6: Utilizar datos disponibles para validar una expresión para el cálculo.

CM-7: Construir datos para validar la expresión para un cálculo.

CM-8: Distinguir una regla para el cálculo con diferencia constante de otra sin diferencia constante.

CM-9: Simbolizar mediante expresiones literales la regla para el cálculo.

CM-10: Simplificar la regla para el cálculo.

CM-11: Expresar acciones sobre la sucesión que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

CM-12: Expresar acciones sobre el dibujo que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

De la misma manera el autor plantea unas categorías de normas sociales de interacción (NSI) en el aula, que se describen a continuación.

NS-1. Apreciar que participar en la discusión en clase es beneficioso para el propio aprendizaje.

NS-2. Explicar cómo se llegó a un procedimiento de cálculo.

NS-3. Criticar la validez de una regla para el cálculo.

NS-4. Expresar con corrección y lo más concretamente posible cualquier argumento que se desee aportar a la discusión.

NS-5. Apreciar que mediante la explicación a un compañero de la estrategia de solución empleada por uno mismo, beneficia la propia comprensión del procedimiento empleado.

NS-6. Apreciar que la explicación debe ser clara y concisa para una perfecta comunicación.

NS-7. Ser tolerante con las explicaciones de los demás.

NS-8. Ayudar a un compañero que presenta dificultades en su explicación mediante preguntas que le ayuden a facilitar su comunicación, así como argumentos que no hayan sido tenidos en cuenta.

Además, establece unas categorías de normas sociomatemáticas (NSM), que se refieren específicamente al trabajo matemático en el aula.

NSM-1. Distinguir entre una explicación de la validez de la regla para un cálculo y la explicación sobre la validez de los cálculos efectuados

NSM-2. Argumentar de la validez de la regla para el cálculo.

NSM-3. Formular qué es lo que distingue una solución de otra.

NSM-4. Generar diferentes soluciones para un mismo problema.

NSM- 5. Expresar una regla para el cálculo, solución, diferente a una ya dada.

Callejo y Zapatera (2014) caracterizaron la flexibilidad (habilidad para modificar la estrategia de resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea) de estudiantes de educación secundaria (12-16 años) en problemas de reconocimiento de patrones. Los resultados indican tres perfiles de estudiantes con relación a la flexibilidad en el uso de estrategias y el éxito alcanzado. El primero agrupa a los estudiantes que usan sólo la estrategia recursiva; la mayor parte de ellos se bloquea al aumentar la demanda cognitiva de la tarea (predominan los estudiantes de 12-13 años). El segundo perfil corresponde a los que cambian de una estrategia recursiva a una aproximación proporcional dando un resultado incorrecto (es más frecuente en los estudiantes de 13-14 años). Finalmente, el tercer perfil agrupa a los estudiantes que al aumentar la demanda cognitiva de la tarea cambian con éxito de una estrategia recursiva a una funcional (su frecuencia aumenta con la edad). Los autores concluyen que la flexibilidad necesaria para identificar patrones cuando se incrementa la demanda de la tarea está relacionada con los conocimientos de los estudiantes y con el control y la regulación del proceso de resolución. Por otra parte, los estudiantes más jóvenes manifestaron menor grado de flexibilidad que los más mayores.

Orton y Orton (1996) mediante tareas que conllevan pautas lineales y cuadráticas en el desarrollo de habilidades de generalización con estudiantes en edades comprendidas entre 10 y 13 años, definen, en primera instancia cinco etapas (tabla 2):

Tabla 2: *Definidos por Orton y Orton.*

0	1	2	3	4
No hay progreso	Proporciona el siguiente término	Siguiente y 10° término	Siguiente, 10° y 50° términos	Siguiente, 10°, 50° y *n-ésimo* términos.

Nota. Recuperado de Orton, A. y Orton, J. (1996). *Making sense of children's patterning.* En *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, p83-90.*

Cada uno corresponde con un término de la sucesión, en el que se asume que si un alumno ha dado respuesta para el término veinte de la sucesión, entonces es capaz de dar respuesta para los anteriores.

Los autores reconocieron que esta era una clasificación fácil de usar que resultó difícil de aplicar en su estudio, pues no siempre era el caso de que una respuesta correcta para el término 100 había seguido una respuesta correcta para el término 20 y era difícil saber qué hacer con los alumnos que proporcionaron una respuesta satisfactoria para el n-ésimo término pero que no habían aportado una respuesta correcta para los términos 20 o 100. Esto condujo a subdivisiones de las etapas para cubrir todas las posibilidades, utilizaron las letras ***t*, *x*** y ***y*** para indicar errores en el próximo término, término 20 o 100, respectivamente. Así un niño que dio la respuesta correcta del término 100 pero incorrecta la del término 20 fue clasificado como en la etapa 3***x***, mientras que un estudiante que proporcionó la respuesta correcta para el término 20 pero no el próximo término estaba en etapa 2***t***. De acuerdo con consideraciones cualitativas, fueron usadas otras subdivisiones para la etapa 4:

* 4a Expresión verbal correcta.
* 4b Una expresión algebraica aproximada.
* 4c Una expresión algebraica correcta aunque no esté simplificada.

Lee y Wheeler (1987, citado por Stacey, 1998), usaron problemas de generalización que involucran patrones lineales y cuadráticos en su estudio de generalización y pensamiento algebraico con estudiantes de grado 10. Observaron gran variedad de percepción de patrones en todas las preguntas y encontraron que dos categorías de estudiantes fueron exitosas: aquellos que a través de una percepción utilizaron un patrón utilizable y aquellos que fueron flexibles en la percepción del patrón y pudieron ver un nuevo patrón cuando uno fue improductivo. De los ocho estudiantes entrevistados solo uno chequeó (validó) que su patrón funcionara.

Cooper y Cooper & Sakane (1987, 1986, citado por Stacey, 1989), investigaron las estrategias cognitivas y metacognitivas que usan los alumnos de octavo al trabajar un problema de generalización cuadrática. En particular, señalaron que cuando los estudiantes descubrieron un contraejemplo a su propia hipótesis, tendieron a dudar de los datos que la refutaban en lugar de reconocer que la hipótesis no era válida.

Ávila, M., López, C. y González, J.,(2010) elaboraron una investigación que explora las habilidades de generalización de patrones cuadráticos de ocho (8) estudiantes del nivel intermedio de la carrera de matemáticas en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Al hacer la revisión de los resultados, categorizaron 3 casos: El primero corresponde a aquellos estudiantes que solo pudieron establecer generalizaciones locales, sin establecer la expresión algebraica que lo generalizaba (66%). El segundo caso (1 estudiante) reconoció la aplicación de herramientas matemáticas de orden superior ya que usó sumatoria y planteó una expresión algebraica para describir la generalización, aunque no la validó. El tercer caso (1 estudiante), planteó un algoritmo que se sustentó en el cálculo de las primeras y segundas diferencias de la sucesión e identificó el comportamiento cuadrático en cada uno de los patrones y con ello planteó un sistema de ecuaciones para llegar a la expresión cuadrática particular. Como resultado de esta investigación, los autores sugieren fortalecer el trabajo con este tipo de sucesiones en el currículo escolar que permita avanzar en el estudio formal de los procesos de generalización.

Viel y Dores (2015) en un estudio realizado con 13 estudiantes de una Universidad norte de Paraná (Brasil) presentan algunos resultados derivados de la solución de una prueba ENADE (Nacional de Desempenho de Estudantestas), de procesos de pensamiento matemático avanzado. Lo autores concluyen, de acuerdo a la teoría de Dreyfus (2002), que seis estudiantes movilizan el proceso de representación simbólica, tres el proceso de escucha, cuatro el proceso de cambio de representaciones y la traducción entre ellos, dos el proceso de modelación, cuatro el proceso de síntesis, ningún estudiante movilizó el proceso de generalización. Otro resultado, derivado del análisis, es que las preguntas permitieron que los estudiantes evidenciaron algunos procesos de pensamiento matemático avanzado, más no todos.

Los autores consideran que los estudiantes deben ser conducidos para desarrollar los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, ya que algunos profesores aún conservan prácticas de enseñanza en las que prevalecen aspectos matemáticos más prácticos, y siguen la secuencia teorema-prueba-aplicación, que lleva a los estudiantes a aprender solo técnicas y repeticiones, teniendo una cantidad de conocimiento matemático, es decir, sin desarrollar la reflexión en los procesos que llevaron a matemáticos a construir las teorías.

Akkan (2013) realiza un estudio cuyo objetivo fue comparar y determinar las eficiencias, estrategias y representaciones de los alumnos de 6º a 8º grado en la solución de problemas relacionados con patrones lineales y cuadráticos. Los datos de la investigación se obtuvieron de las pruebas aplicadas a 246 estudiantes y las entrevistas clínicas realizadas con 18 estudiantes. En su investigación, Akkan demostró que a medida que se avanza en el grado de escolaridad, la eficiencia de los estudiantes en el patrón de generalización del patrón mejora de manera positiva en todos los niveles. Expresa que dicha mejora emerge del desarrollo cognitivo y de la experiencia matemática del estudiante. Además, a medida que aumentan los niveles de aprendizaje de los estudiantes de 6º y 8º grado, la variedad en las estrategias de generalización de patrones cambió al menos en todos los tipos de patrones. Mientras que los estudiantes de diferentes niveles de aprendizaje utilizan generalmente una estrategia recursiva para resolver todos los problemas, el número de estudiantes que utilizan estrategias explícitas es relativamente bajo. Los estudiantes, en los diferentes niveles de aprendizaje, mostraron mayor capacidad para trabajar con patrones lineales que con cuadráticos, y de igual manera, mayor capacidad con patrones numéricos que geométricos. Akkan afirma que este resultado guarda cierta similitud con el de Orton y Orton (1999) y Feife (2005); sin embargo, su diferencia puede ser entendida en la medida que se considere la manera en que los maestros abordan el trabajo en el aula; algunos centrarán más su atención en trabajar patrones lineales que cuadráticos, mientras que otros, además de los lineales, desarrollarán un poco más actividades con patrones cuadráticos. En síntesis, el éxito hacia la generalización dependerá de la familiaridad que se tenga con el modelo

Henriques y Ponte (2014) realizaron una investigación de tipo cualitativo basada en tres estudios de caso con estudiantes de segundo año de Educación Superior, en la cual analizaron los modos de representación y los procesos de razonamiento, cuando se enfrentaron a actividades propias de un curso de análisis numérico. Los resultados de su trabajo, muestran que los estudiantes utilizan un razonamiento inductivo, pero sugieren la necesidad de prestar mayor atención a dos procesos de razonamiento deductivo, en los cuales existen dificultades significativas: generalización y justificación.

Por su parte, Radford, ha realizado valiosos aportes al estudio del pensamiento algebraico, la generalización y la didáctica, a través de un número significativo de estudios e investigaciones (1996, 2000b, 2003, 2004, 2005b, 2006c, 2008b, 2010a, 2010c, 2011, 2013b) en las cuales hace énfasis en la importancia de desarrollar la capacidad de los niños y jóvenes para razonar algebraicamente desde los primeros años de escolaridad que tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico, como una manera de construir cimientos que permitan avanzar en esquemas asociados al pensamiento algebraico. En este sentido, Radford coincide con otros autores descritos en apartados anteriores y deja ver la necesidad de hacer una reflexión de las prácticas de aula llevada a cabo por los docentes orientadas a superar concepciones tradicionales del álgebra escolar, su enseñanza y su aprendizaje.

Con respecto a la generalización, Radford(1996) la define como un procedimiento que lleva a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. Además, Radford (2013) agrega que la generalización se constituye a través de tres problemas fundamentales, que se encuentran mutuamente relacionados: el Problema fenomenológico e intención perceptiva, el Problema Epistemológico y el Problema Semiótico.

Adicionalmente, Radford (2005b), afirma que generalizar es una actividad que implica observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. En una mirada Ontogenética, a este acto de percibir se desarrolla a través de un proceso durante el cual el objeto por ser visto emerge progresivamente. Los objetos y signos utilizados para objetivar el saber son, aquellos que han sido denominados por el autor como ***medios semióticos de objetivación***, y corresponden a todos aquellas representaciones que un sujeto utiliza para comprender determinado fenómeno objeto de estudio. Así mismo, Radford trabaja la teoría de la ***objetivación del saber***, la cual está enmarcada en los siguientes tèrminos:

> La actualización del general es articulada como un proceso emergente de instanciación [del general]. El adjetivo "emergente" significa que el salón de clase es visto como un sistema que evoluciona a través de "estados" y que esta evolución no puede ser determinada de antemano. Profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico. Dependerá de cómo los estudiantes y los profesores se involucran en la actividad, de cómo ellos responden uno al otro, etc. (2013a, p. 32).

Por su parte, el grupo Azarquiel (1993, citado por Rojas y Vergel, 2013) lleva a cabo sus estudios de investigación, a partir de un punto de vista cognitivo y establecen que el proceso de generalización requiere tres momentos bien diferenciados:

- la visión de la regularidad, la diferencia, la relación
- su exposición verbal, y

- su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

Vergel (2014), en su tesis doctoral, trabajó con estudiantes de los grados cuarto y quinto de primaria (9-10 años), realizó contribuciones hacia la reflexión, la emergencia o aparición de formas de pensamiento algebraico temprano. En esta investigación, mostró cómo las formas de pensamiento algebraico temprano factual y contextual emergen o aparecen como posibilidades a los cuales los estudiantes acuden durante la actividad. Esta se entiende, en su estructura, como el diseño didáctico de las tareas y el evento o actividad tal y como ocurrió en cada caso, es decir cómo se desplegó a partir de los diálogos que sostuvieron los estudiantes entre sí, con la profesora, y con el investigador. Las evidencias analizadas le permitieron constatar que es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico.

Los análisis llevados a cabo en dicho estudio ponen en evidencia que las secuencias figurales con apoyo tabular hacen movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no son movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas con apoyo tabular. Esta investigación muestra que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son inherentes a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Los análisis sugieren el papel importante del ritmo como ***medio semiótico de objetivación.***

En síntesis, como se pudo observar en la revisión bibliográfica, aunque existe un número considerable de producciones académicas en las que se ha abordado el tema de la generalización de sucesiones, se pudo comprobar que la mayoría de estas investigaciones están referidas a sucesiones cuyo modelo de generalización es de tipo lineal. Así mismo se encontraron algunos autores que trabajaron las sucesiones que conducen a modelos cuadráticos. Sin embargo, no se encontraron producciones con sucesiones y series que conduzcan a modelos de generalización de tipo polinomial. Se considera que una sucesión o serie es polinomial cuando su término general tiene la forma:

$$f_n = an^x + bn^{x-1} + cn^{x-2} + dn^{x-3} + \ldots + zn + \beta$$

con $x=0, 1, 2, 3, \ldots$

El grado lo define el mayor exponente del término en la variable ***n***, por ejemplo:

$f_n = 3n + 1$ es de grado uno y se llama lineal.

$f_n = 2n^2 - 3n + 5$ es de grado dos y se llama cuadrática

$f_n = 4n^3 + n^2 - 3n + 5$ es de grado tres y se denomina cúbica

En ese sentido, esta investigación aporta elementos teóricos y metodológicos hacia la implementación de estrategias que conduzcan a modelos de generalización de sucesiones y series polinomiales.

1.5. Delimitación del problema de investigación

Así, de acuerdo con lo observado en el aula y con algunas producciones teóricas formuladas nacional e internacionalmente, entre las cuales se pueden mencionar las orientaciones expuestas en el Ministerio de Educación Nacional, los elementos conceptuales de García(1998) y Radford (2002, 2003, 2005, 2008, 2009, 2010, 2010b, 2013, 2014, 2016) en lo referido a la generalización y la didáctica, así como también los postulados de Akkan (2013) en cuanto a la clasificación en estrategias de generalización, se llevó a cabo esta investigación con miras a identificar las estrategias y formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes, en la generalización de sucesiones y series polinomiales, y cómo ésta se fue refinando en la medida que se posibilitó la interacción entre estudiantes y estudiante-docente.

En ese orden de ideas, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué estrategias y formas de razonamiento emergen de los estudiantes del grado undécimo de la I.E Kennedy en la generalización de sucesiones y series polinomiales, a través de la actividad matemática en el aula?

1.6. Objetivos

- Identificar las estrategias y formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes del grado undécimo de la I.E Kennedy en la generalización de sucesiones y series polinomiales.
- Informar, a través de la interacción entre estudiantes y estudiante-profesor, cómo pueden emerger formas de razonamiento más refinadas en la generalización de sucesiones y series polinomiales.
- Presentar un procedimiento para conjeturar sucesiones y series de tipo polinomiales en función de las diagonales del triángulo de Pascal.

Capítulo 2: Marco conceptual

Conforme se mencionó en el capítulo anterior, esta investigación estuvo centrada en identificar las estrategias y formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes del grado undécimo cuando se enfrentan a tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales. Así mismo, intentó demostrar, cómo a partir de la actividad matemática en el aula, entre estudiantes y estudiante-profesor, pueden emerger formas de razonamiento más refinadas en la generalización. Este interés, llevó al investigador a ahondar en los trabajos referidos al pensamiento algebraico, la generalización y en particular, aquellos que permitieran sustentar cómo a través de la actividad matemática desarrollada en el aula, se enriquecen y fortalecen los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En ese sentido, se presentan a continuación los constructos teóricos que fundamentan la perspectiva teórica de la objetivación planteada por Radford, la cual está enmarcada en una perspectiva semiótica sobre aprendizaje, bajo el lente de la interacción social y la movilización, tanto de signos como de artefactos, que realizan los estudiantes. De esta manera, este marco conceptual, brindó valiosos elementos teóricos para lograr los objetivos de la presente investigación, en tanto sirvieron como herramientas analíticas para explicar y comprender el comportamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización. De igual manera, la investigación está sustentada en otros estudios (Radford, 2002, 2003, 2006, 2005, 2010b, 2013; García, 1998; Akan, 2013) que están en esta misma línea y que desarrollan un poco más lo que tiene que ver con la solución de problemas relacionados con patrones lineales y cuadráticos.

En el capítulo anterior se evidenció que tanto en la comunidad académica nacional como internacional ha surgido, desde hace varios años, la necesidad de realizar ajustes al currículo en matemáticas relativos a la enseñanza del álgebra. Dicha necesidad es manifiesta por las diversas dificultades que se presentan en los estudiantes en las prácticas algebraicas, por lo que se requiere profundizar en la comprensión y la emergencia del pensamiento algebraico de estos.

La presente investigación está inmersa en un marco de referencia conceptual basado en la concepción de álgebra, pensamiento algebraico y la generalización de patrones con un enfoque semiótico - cultural propuesto por Radford (2003, 2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2013, 2014, 2016, 2017).

Con respecto al pensamiento algebraico, Radford (2006), se refiere a este como una forma particular de reflexionar matemáticamente, y agrega que, *"dentro de una perspectiva semiótico-cultural, el pensamiento es considerado una actividad reflexiva sensorial y mediada por signos encarnada en la corporeidad de acciones, gestos y artefactos"* (Radford, 2010, p.3). En esta medida, el pensamiento algebraico está ligado al papel que juegan los sentidos en la conceptualización de los objetos; sin embargo, el pensamiento es una actividad que aunque es realizado por una persona y pasa por el cuerpo de esta, está ligado y fuertemente influenciado por la cultura en el cual se desarrolla. En particular, según el autor, el pensamiento algebraico *"es una praxis cognitiva histórica mediada por el cuerpo, los signos y las herramientas"* (2010, p. 4).

Además, este mismo autor (2006), caracteriza el pensamiento algebraico mediante tres elementos que se encuentran íntimamente interrelacionados a saber:

- **El sentido de indeterminancia:** alude a un sentido de indeterminación que es propia de los objetos básicos tales como: incógnitas, variables y parámetros; es precisamente esta indeterminancia la que hace posible la sustitución de una variable o de un objeto desconocido por otra.
- **La analiticidad:** hace referencia a la manera como se manejan analíticamente los objetos indeterminados, es decir, la forma de trabajar dichos objetos y el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- **La designación simbólica de sus objetos:** esta tiene que ver con lo que hace que el pensamiento algebraico sea también el peculiar modo simbólico que tiene para designar sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

A su vez, Radford (2010a) reconoce tres formas de pensamiento algebraicos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva; estas formas de pensamiento algebraico son: la Factual, la Contextual y la Simbólica. Sin embargo, el autor advierte que esta tipología no debe entenderse en términos de etapas de desarrollo en un sentido "naturalista", ni debe entenderse de una manera jerárquica rígida. De allí que según el contexto y el problema en cuestión, un estudiante puede moverse dentro de esas formas de pensamiento. Por lo tanto, estas formas de pensamiento, obedecen más bien a un intento por comprender los procesos que los estudiantes experimentan en su contacto con las formas de acción, reflexión y razonamiento que transmite la praxis históricamente constituida del álgebra escolar. A continuación se describen los tres tipos de pensamiento algebraico propuestos por el autor:

Pensamiento algebraico factual: los medios semióticos de objetivación de los estudiantes son los gestos, movimientos, las percepciones, las palabras; en este sentido la indeterminancia es evidenciada a través de señales gestuales o por palabras.

Pensamiento algebraico contextual: los medios semióticos de objetivación ya no son los gestos ni las palabras, por tanto, la indeterminancia se vuelve más explícita a través de frases contextualizadas de acuerdo a la actividad, y la formulación algebraica es una expresión del término general caracterizada por una forma reducida de expresión, usando el lenguaje natural (un estudiante puede expresar: "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total"). La fórmula algebraica es de hecho una descripción del término general tal como fue dibujado o imaginado.

Pensamiento algebraico simbólico: hay un cambio de representación semiótica con respecto a la contextual mediante expresiones como n+(n-1) ó 2n-1. Es decir, hay un cambio drástico en el modo de designación de los objetos del discurso. Se caracteriza por un lenguaje algebraico alfanumérico estándar para expresar la generalización, en donde se escribe poco pero se dice mucho.

Así, la simbolización es una representación simplificada del lenguaje natural. De ahí que Radford (2006) afirma que los objetos matemáticos son objetos "generales", y la actividad matemática es en esencia simbólica. En ese sentido, este autor (2010b), enfatiza que si bien es cierto que los objetos matemáticos del álgebra se representan a través de incógnitas, variables y otros objetos algebraicos, los cuales son representados indirectamente a través de construcciones basadas en signos, que pueden ser letras, aclara que se puede hacer álgebra usando otras representaciones semióticas, y que el usar letras no necesariamente equivale a hacer álgebra.

Adicional a lo anterior, Radford (2006) plantea la necesidad de reflexionar, explícitamente, sobre la relación entre el pensamiento algebraico y los procesos de generalización. Por consiguiente, hace una invitación a mejorar las prácticas educativas, a través del diseño e implementación de actividades que permitan el desarrollo temprano tanto del pensamiento algebraico como de los procesos de generalización, los cuales se pueden favorecer a partir del reconocimiento de patrones en sucesiones.

En la generalización de patrones algebraicos, es necesario centrar la atención en aquellos aspectos que varían o no, para establecer relaciones que permitan captar regularidades y ser capaces de predecir directamente un término mediante una expresión que la generalice. En palabras de Radford

> La generalización de un patrón se basa algebraicamente en la capacidad de captar una comunalidad observada en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que esta comunalidad se aplica a todos los términos de S y es capaz de usarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S (2010b, p. 42).

Al respecto, Radford (2013) distingue varios elementos envueltos en la generalización, primero, a partir de un número finito de términos, se nota una característica común local, esta etapa requiere una escogencia entre determinaciones sensibles. Luego dicha característica común es generalizada a los demás términos de la secuencia. La generalización de la secuencia común corresponde a lo que Peirce llama una abducción (abduction), esto es, algo que es solamente plausible (Peirce, 1931-1958, CP 2.210). Si la Abducción es simplemente para pasar de un término a otro, se llega a una generalización aritmética; en cuyo caso no hay deducción de una expresión directa que permita calcular cualquier término de la secuencia. Si los alumnos recurren a un procedimiento por ensayo y error, pueden producir una fórmula, pero esta no es deducida, la cual es sometida a un número finito de pruebas (esta generalización, no es aún algebraica). Para que la generalización sea algebraica, se requiere que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica (ilustracón 5). Por lo tanto, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, la cual es extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. La propiedad común pasa, de entidad plausible, a hipótesis.

Ilustración 5: *Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales, presentada en Radford (2013b, p.7).*

Según Radford (2013), la generalización algebraica de patrones es un proceso que requiere:

1. Identificar una propiedad o característica común percibidas en algunos elementos de la secuencia. Dichas propiedades se enmarcan en un terreno fenomenológigo de observación sobre algunos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$)
2. La aplicación o generalización de esta propiedad a los demás términos de la secuencia, es decir a los términos subsecuentes ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$).
3. La capacidad de usar esa propiedad común, que le permite conjeturar una expresión directa que permite calcular el valor numérico de la secuencia.

En síntesis, se puede observar que la generalización es un proceso que requiere el reconocimiento de una regularidad, la aplicación o generalización de dicha regularidad a los demás términos de la secuencia, y finalmente, la capacidad de usar dicha generalidad para conjeturarla a través de una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia.

Así mismo, es importante tener en cuenta que la generalización está caracterizada por los medios semióticos de objetivación a los que los estudiantes recurren para hacer sus propias generalizaciones. Estos medios pueden ser gestos, dibujos, ritmos, frases, señales, palabras, lenguaje natural, lenguaje simbólico, entre otros. En coherencia con lo anterior, Radford (2003, 2006, 2010a) plantea una tipología de generalización que está intrínsecamente relacionada y en correspondencia con las diferentes formas de pensamiento algebraico y que tienen que ver precisamente con los diferentes medios que los estudiantes utilizan para expresar la generalización.

De esta manera, se describen a continuación los diferentes tipos de generalización propuestos por el autor:

1. **Generalización Factual:** (captando una propiedad común local)**.** En este tipo de generalización, la indeterminación no alcanza el nivel de enunciación, esta es expresada a través de acciones concretas; por tanto los medios de expresión usados son los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras. Por ejemplo, un estudiante indica con su mirada, señala con su índice, realiza un movimiento con el lápiz, dice “aquí”, vuelve a señalar y dice “más 2”.

2. **Generalización Contextual:** (mostrando vs diciendo)**.** Se caracteriza porque los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios de expresión como frases “clave”, contextualizadas. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” ó “dos por la figura menos uno”. Dichas frases “son contextuales porque se refieren a objetos contextualizados, encarnados, como “la figura siguiente”, que supone un punto de vista privilegiado desde donde se ve supuestamente la secuencia, haciendo posible hablar de la figura y la siguiente figura” (Radford, 2006, p. 12).

3. Generalización Simbólica: (escribiendo poco mientras se dice mucho). En este tipo de generalización, los medios semióticos de objetivación están dados a través de símbolos alfanuméricos. Por ejemplo, en la generalización contextual, un estudiante podía haber dicho "el siguiente más uno", en la generalización simbólica, esta expresión sería sustituida por la fórmula (n+1) + 1. Las letras de las que se compone la fórmula juegan efectivamente el papel de los índices que apuntan a las palabras de las generalizaciones contextuales y fácticas de los estudiantes.

Vinculado a las diferentes formas y características del pensamiento algebraico, y a los tipos de generalización, Radford (2013) señala que la generalización se constituye a través de tres problemas fundamentales mutuamente relacionados; los cuales hacen parte de un complejo proceso cultural cognitivo, en ese sentido, se observan diferencias y similitudes no simplemente porque se reciban a través de los sentidos, sino porque además, los sentidos están dotados de una información histórica y culturalmente adquirida. Conforme a lo anterior, el autor define dichos problemas de generalización, así:

Problema Fenomenológico: está relacionado con la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención la sensibilidad. Por ejemplo, para generalizar determinada secuencia los alumnos deben proceder a la escogencia de una serie de determinaciones sensibles para notar similitudes y diferencias, esto es, los estudiantes pueden fijar su atención en la forma de los términos (color, espacio entre ellos, cantidad, etc.).

Problema Epistemológico: consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto. De esta manera, por ejemplo, si se dan los cuatro primeros términos de una sucesión, y los alumnos han encontrado una regularidad, una propiedad común, esta es aplicada para obtener los términos 5, 6, 7, 8. Los alumnos han hecho una generalización. Aunque el procedimiento es operacional para términos cercanos, se vuelve impráctico para posiciones lejanas, por ejemplo término 25.

Problema Semiótico: resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado. La generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación

En síntesis, se presenta a continuación (tabla 3) un breve resumen de los elementos teóricos planteados por Radford, en lo referido a las características y formas de pensamiento algebraico, niveles de generalización y los tres problemas en torno a la generalización:

Tabla 3: *Características y formas de pensamiento algebraico, niveles y problemas en torno a la generalización*

Características del Pensamiento Algebraico	**Formas de Pensamiento algebraico**	**Tipos de Generalización**	**Tres problemas de Generalización**
El Sentido de la Indeterminancia: Alude a un sentido de la indeterminación que es propia de los objetos básicos tales como: incógnitas, variables y parámetros; es precisamente esta indeterminancia la que hace posible la sustitución de una variable o de un objeto desconocido por otra.	**Pensamiento Algebraico Factual:** Se apoya en mecanismos altamente evolucionados de percepción y una sofisticada coordinación rítmica de gestos, palabras y símbolos. La indeterminancia es evidenciada a través de señales gestuales o por palabras.	**Generalización Factual:** Los medios de expresión usados son los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras. Por ejemplo, un estudiante señala con su mirada, con su índice, realiza un movimiento con el lápiz, dice “aquí”, vuelve a señalar y dice “más 2”.	**Problema Fenomenológico:** Planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención la sensibilidad.

La Analiticidad:	**Pensamiento Contextual:**	**Generalización Contextual:**	**Problema Epistemológico:**
Hace referencia a la manera cómo se manejan analíticamente los objetos indeterminados, es decir, la manera de trabajar dichos objetos y el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.	Los medios semióticos de objetivación ya no son los gestos ni las palabras, ya la indeterminancia se vuelve más explícita a través de frases contextualizadas de acuerdo a la actividad, y la formulación algebraica es una expresión del término general caracterizada por una forma reducida de expresión usando el lenguaje natural.	Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios de expresión como frases "clave". Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" ó "dos por la figura menos uno".	Consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto. De esta manera, por ejemplo, si se dan los cuatro primeros términos de una sucesión, y los alumnos han encontrado una regularidad, una propiedad común, ésta es aplicada para obtener los términos 5, 6, 7, 8. Los alumnos han hecho una generalización. Aunque el procedimiento es operacional para términos cercanos, se vuelve impráctico para posiciones lejanas, por ejemplo, término 25.

La designación simbólica de los Objetos:	**Pensamiento algebraico estándar:**	**Generalización simbólica:** Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos. Por ejemplo, mediante expresiones como:	**Problema Semiótico:**
Tiene que ver con lo que hace que el pensamiento algebraico sea también el peculiar modo simbólico que tiene para designar sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar sus objetos.	Hay un cambio de representación semiótica con respecto a la contextual mediante expresiones como n+(n-1) ó 2n-1. Es decir, se caracteriza por una combinación de signos matemáticos y lenguaje natural para expresar la generalización, en donde se escribe poco, pero se dice mucho.	n+(n–1) ó 2n–1.	Resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado. la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación.

Nota. tomado de Radford, L. (2003, 2006, 2010, 2013)

Por último, atendiendo a los intereses de la presente investigación es preciso, centrar la atención en algunos referentes teóricos que han abordado las diferentes estrategias implementadas por los estudiantes cuando se enfrentan a actividades con tareas de generalización de patrones.

2.1. Estrategias de generalización.

García-Cruz (1999), en su tesis doctoral, aporta a la definición de estrategia de solución como la combinación de acciones utilizadas en el transcurso de la solución, en ese sentido afirma que *una estrategia de solución está formada por la combinación de acciones, esquemas de la acción e invariante establecido en el curso de la resolución* (pág. 5).

En lo que respecta a las estrategias de generalización, varios autores (Stacey, 1989, García-Cruz y Martion, 1997, Orton y Orton, 1999, Krebs, 2003, Rivera y Becker, 2005, Ebersbach, Wilkening, 2007, Amit y Neria, 2008), se han dedicado a realizar investigaciones que han aportado al reconocimiento de las diferentes estrategias de generalización. Dichos estudios han sido recopilados en el trabajo de investigación realizado por Akkan (2013), el cual se encuentra sintetizado en la tabla 4:

Tabla 4: *Marco de las estrategias de generalización.*

Estrategia	Descripción
Conteo	Consiste en contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.
Recursivo o aditivo	Incluye el uso del término anterior en un patrón para encontrar el siguiente término o términos. Los estudiantes generalmente tratan de encontrar la diferencia entre los dos términos y añadir esta diferencia al último término para encontrar el siguiente. Debido al continuo repetitivo y aditivo, este proceso se llama estrategia aditiva (adición).
Diferencia:	Incluye multiplicar la diferencia entre los dos términos consecutivos (sucesivos) de la secuencia. Esto ocurre especialmente en la generalización de la relación lineal, y los estudiantes son conscientes de la diferencia estable entre los términos. Describen el enésimo término como multiplicando la diferencia y el "n" mismo. Se asume de forma implícita que f(n)=an. Este enfoque es válido para una secuencia como 3, 6, 9, ... (3n), pero no es válido para una secuencia 7, 11, ... (4n).

Whole object:	Incluye el uso del razonamiento proporcional para resolver problemas de patrones. Lannin (2003) describe esta estrategia como "usar una porción como una unidad para construir una unidad más grande usando múltiplos de la unidad; Por ejemplo, si 3 manzanas son TL, 9 manzanas son 27 TL. Adivina y comprueba: Incluye una especie de regla de predicción independientemente de la regla que funcione. Se propone una regla algebraica que representa (simboliza) el estado del problema. Los estudiantes nunca piensan en la validez de la regla durante el proceso. La estructura algebraica que generan los estudiantes suele incluir números y procesar los problemas. Se asume implícitamente que $f(mn)=mf(n)$.
Contextual	Incluye la configuración de una regla centrada en la información que proporciona el caso. Esta regla se asocia con la técnica de cálculo. Se acude al uso de fórmulas con las cuales el estudiante está familiarizado (una fórmula usada para resolver el tipo de problema abordado).
Explícita	Esta estrategia incluye la generalización de la relación entre las dos variables para determinar cualquier valor. Este es el primer paso de un progreso gradual para determinar las funciones mediante el uso de ecuaciones y fórmulas. Cuando se utiliza esta estrategia, se vuelve estable y factible tanto para términos lejanos como cercanos, por lo que ayuda a encontrar el término "n" y anota una regla general.

Adicionalmente, Akkan (2013), menciona otro tipo de estrategia de generalización de patrones llamada “adivinar y comprobar” la cual -como su nombre lo dice- consiste en adivinar una fórmula y someterla a su respectiva comprobación; no obstante, el autor advierte que si bien es cierto que esta fórmula puede funcionar no necesariamente el estudiante puede explicar algebraicamente la regla. Contrario a esto, Radford (2010) afirma que las reglas así formadas son hipótesis que trabajan sobre bases de razonamientos probables cuya conclusión va más allá del contenido de sus premisas, en otras palabras, dice el autor, es un tipo de inducción que califica como ingenua. De esta manera, en lugar de generalizar algo, lo que el estudiante está haciendo es una inducción pero no una generalización.

García - Cruz (1999) distingue tres modalidades de estrategias de solución implementadas en la generalización de patrones a saber:

Visual: el dibujo juega un papel esencial en el establecimiento del invariante, al ser el medio donde se desarrollan las acciones.

Numérica: la sucesión numérica juega un papel esencial en el establecimiento del invariante.

Mixta: las acciones se desarrollan en la sucesión numérica y el dibujo es un medio para comprobar la validez de los cálculos realizados.

Adicional a este trabajo, García-cruz y Martinon (1998), hacen un análisis más detallado de las acciones que se suelen utilizar como medio para comprobar los cálculos y que pueden conducir o no, a estrategias generalizables, las cuales se describen a continuación:

A1: Es una acción mental que involucra una imagen del dibujo dado en el problema, y que consiste en construir mentalmente, o imaginar mediante un esbozo completo de la figura del objeto del tamaño requerido, un dibujo de un cierto tamaño a partir del primer tamaño o de un tamaño dado, añadiéndole partes semejantes entre sí, cada una formada por un número constante de elementos. El número constante de elementos puede coincidir con la diferencia constante o no. Aquí un aspecto esencial es que no se realiza ningún recuento directo sobre el dibujo realizado.

A2: Consiste en contemplar la sucesión de términos numéricos a partir de uno ya calculado, o dado por el problema, y contar a partir de él el número de diferencias constantes que deben ser añadidas.

A3: Consiste en considerar que un tamaño buscado tiene el doble de elementos que el tamaño mitad correspondiente.

A4: Realiza sobre los datos numéricos y consistente en la búsqueda de una relación de tipo funcional entre el tamaño del objeto ***n*** y el número de elementos del mismo ***f(n)***.

A5: Es una acción sobre los datos numéricos y consiste en actuar sobre los números mediante el algoritmo de la regla de tres.

A6: Es una acción realizada sobre los datos numéricos del problema y consiste en aplicar la expresión simbólica para calcular un término cualquiera de una progresión aritmética.

A7: Consiste en extender la sucesión numérica mediante suma iterada de la diferencia constante ***d***. Esta acción es la manifestación del carácter iterativo de la pauta numérica. Aunque es una acción puramente rutinaria, a través de ella se resalta la diferencia constante que separa a cada término del anterior, hecho que no queda siempre claro en la acción rutinaria de realizar un dibujo del objeto y contar los elementos que lo componen.

2.2. La teoría de la objetivación: una aproximación semiótico-cultural

La teoría de la objetivación es una teoría educativa propuesta por Luis Radford fundamentada en una concepción materialista dialéctica hegeliana-marxista del conocimiento. Dentro de esta línea de pensamiento, el conocimiento no es algo que los individuos poseen, adquieren o construyen; va más allá de una cuestión transmisiva en la que los maestros son quienes poseen el conocimiento y los estudiantes quienes carecen de él. Igualmente, difiere de las teorías llamadas "progresistas" que se basan en gran parte en las ideas de la autorregulación racional, autonomía y autosuficiencia, a partir de las cuales el conocimiento se concibe como adquisición personal, así el estudiante no está allí para ser enseñado, sino más bien para pensar y aprender a través de sus propios hechos.

Radford (2016), señala que el conocimiento como posibilidad no es algo eterno, estático o independiente de toda experiencia humana, sino que emerge del trabajo social humano y se produce a través de él; por tanto, el conocimiento es una síntesis cultural de las acciones de la gente en la medida que se relaciona con los demás y con el mundo .

En ese orden de ideas, la teoría de la objetivación está inmersa en una línea de pensamiento en la que los seres humanos se conciben como parte del mundo, de la cultura en que viven, son producto de sus interrelaciones sociales. No obstante, Radford (2014), agrega que más que pertenecer a ese mundo y cultura, los seres humanos son consustanciales a ella, es decir hay cierta semejanza e identificación entre un individuo y la cultura en la que vive y ha vivido; por tanto, *"lo que los seres humanos piensan, hacen, sienten, imaginan, esperan y sueñan está profundamente ligado a su cultura"* (p. 2). De aquí que no se pueda concebir dentro de esta teoría educativa, el proceso de enseñanza-aprendizaje desprendido de la relación entre saber y ser. *Desde un punto de vista ontológico, el ser y el saber están interrelacionados de una manera profunda en la que uno no ocurre sin el otro* (Radford, 2014, pg. 136).

Así mismo, Radford (2017), afirma que la teoría de la objetivación considera la meta de la Educación Matemática como un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca, a través de la interacción y la discusión, personas reflexivas y éticas, capaces de asumir posiciones críticas en torno a discursos y prácticas matemáticas en permanente evolución, constituidas histórica y culturalmente.

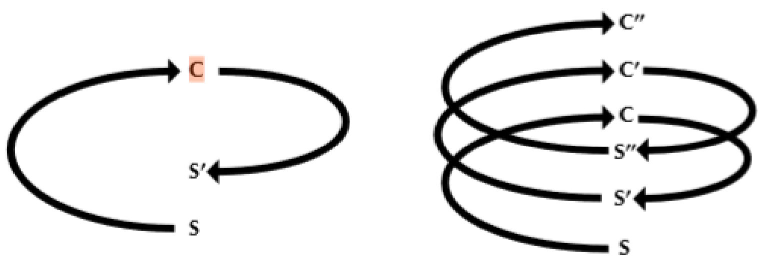
Bajo esta perspectiva, Radford (2017) se refiere a tres aspectos de suma importancia; el saber, el conocimiento y el aprendizaje. Radford considera el saber no como un objeto que se construye o se transmite, sino como posibilidad, como algo potencial que se deriva de la actividad humana y que se incorpora en un proceso de movimiento, de devenir. Por ejemplo el saber algebraico es una potencialidad incrustada en la cultura, y se da como una posibilidad ofrecida a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera, pero dichas posibilidades están mediadas por la cultura, a través de sus acciones, de sus reflexiones, sus sufrimientos sus esperanzas. De esta manera el autor define el saber así: *"el saber es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente"* Radford (2017, p, 101).

Ahora bien, como el saber es potencialidad, el conocimiento Radford lo define como actualización o materialización del saber. Dicha actualización se realiza a través de la actividad, por medio de la cual demarca la manera en la que el saber se manifiesta en el conocimiento, es decir, la actividad es la mediadora entre el saber y el conocimiento, por lo tanto para que haya conocimiento debe haber mediación, no hay conocimiento inmediato. La actividad mediadora se realiza a través de artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.), sus **formas** de uso y también por medio de las **formas** y modos de interacción humana que son históricos y culturales. De hecho, el conocimiento proviene del trabajo social humano y se produce a través de él.

En resumen, Radford establece la relación entre el saber (S), la actividad (A) y el conocimiento (C) Así:

> Las Figuras 12a y 12b tratan de capturar la relación entre el saber (S), la actividad (A) y el conocimiento (C). Desde un punto de vista filogenético, en cierto momento del desarrollo de una cultura, el saber S (ver Figura 12a) es puesto en movimiento por la actividad humana (simbolizada por las flechas) y, al actualizarse o materializarse, se revela a la conciencia de los sujetos concretos en el conocimiento C. A través de la actividad, que es siempre movimiento y que es afectada por S y por el emergente C, los individuos concretos pueden ahora refinar, ajustar, expandir, transformar el saber S,

dando como resultado un nuevo saber S’. El nuevo saber S’, convertido en nueva potencialidad, puede, a través de la mediación de otras actividades (las flechas en la Figura 12b), revelarse o actualizarse en otro conocimiento C’, etc. (ver Figura 12b)(Radford, 2017, p. 110).



Figuras 12a (a la izquierda) y 12b (a la derecha). La actividad efectúa la mediación del saber que permite su actualización o materialización como conocimiento.

Ilustración 6: *Relación entre el saber, la actividad y el conocimiento.*

Como se ha referido antes, la idea fundamental es que los individuos llegan a conocer cuando participan en prácticas sociales. De esta manera, Radford afirma que el aprendizaje es la adaptación por medio de mecanismos sociales a un mundo de prácticas culturales que conllevan al refinamiento de saberes a través de la actividad matemática.

2.3. Fundamentos teóricos de la teoría de la objetivación

A continuación se describen los fundamentos y orientaciones teóricas que enmarcan y guían la propuesta educativa de la teoría de la objetivación. Por consiguiente, se presenta la relación entre los procesos de objetivación y subjetivación, la idea de estudiante y maestro, la manera en que se produce el conocimiento y su rol dentro de él. Por último, se describe el concepto de actividad y cómo ésta se reformula dentro del concepto de trabajo conjunto .

2.3.1. Objetivación y subjetivación.

Teniendo como premisa que la educación matemática no sólo se debe centrar en los saberes específicos, Radford (2014) en su Teoría de la objetivación hace el planteamiento sobre el objetivo de la Educación Matemática desde una perspectiva política y sociocultural en la cual, a través de prácticas matemáticas construidas histórica y culturalmente, se propone crear personas con espíritu crítico y reflexivo. De esta manera, la educación matemática se concibe como una serie de acciones dadas histórica y culturalmente puestas en escena continuamente en la práctica social, teniendo presente que en la enseñanza y el aprendizaje no sólo se enfatiza en un dominio de procesos y conceptos matemáticos (producción de saberes), sino también en la formación del individuo (producción de subjetividades). Desde este punto de vista, se resalta la importancia del ser y el saber, que están interrelacionados de tal manera que uno no sucede sin el otro. Por lo anterior, se debe incentivar aquellas formas de acción pedagógica que le apuesten a una comprensión de los conceptos matemáticos, pero a su vez con la intención de formar en el estudiante un ser político y social dentro del cual se promueva el desarrollo de subjetividades reflexivas, solidarias y responsables.

En ese orden de ideas, este autor se refiere a dos procesos esenciales que ocurren durante la construcción del conocimiento: la objetivación y subjetivación. Radford señala que la objetivación *se relaciona con aquellas acciones destinadas a poner o lanzar algo delante de alguien o a hacer algo aparente. Un cierto aspecto de un objeto concreto, como su color, su tamaño o una propiedad matemática general* (2003, pág. 4).

De esta manera, dentro de la teoría de la objetivación, el individuo, comienza a conocer el mundo a través de un proceso social, emocional y sensible mediado por signos, artefactos, lenguaje, gestos, movimientos, sonidos, etc., es decir, comienza a tomar conciencia ("conociendo" – "knowing"). Estos artefactos, gestos, signos y demás recursos semióticos que utiliza el individuo para objetivar el conocimiento es lo que Radford llamó *medios semióticos de objetivación* y que serán explicados de manera detallada más adelante.

Recapitulando, la objetivación como proceso emocional, infiere que el sujeto que participa en la objetivación es un sujeto en formación que siente, que goza, que sufre; un sujeto que se constituye y es constituido al participar de las actividades sociales de su cultura. Surge pues, el concepto de Subjetivación que Radford define formalmente de la manera siguiente:

> La subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo. (2014, pág.142).

El sujeto, a través de la experiencia, de las posibilidades brindadas por el medio y de las normas culturalmente establecidas llega a conocer un objeto, ese conocimiento de dicho objeto hace que el sujeto entre en una relación históricamente mediada con el objeto y otros sujetos. De esta manera el objeto se hace perceptible al sujeto y el sujeto se hace perceptible a sí mismo tomando posición en las prácticas culturales.

2.3.2. Medios semióticos de objetivación.

Radford (2003), señala que

> los procesos de producción del conocimiento están incrustados en sistemas de actividad que incluyen otros medios físicos y sensuales de objetivación que escribir (como Herramientas y habla) y que dan una forma corporal y tangible al conocimiento también. Dentro de esta perspectiva y desde un punto de vista psicológico, la objetivación de los objetos matemáticos aparece vinculada a los esfuerzos mediados y reflexivos de los individuos dirigidos al logro de la meta de su actividad (pág. 4).

Para entrar en conocimiento con el objeto, el autor menciona que el individuo realiza acciones, no obstante, para llevar a cabo estas acciones, el sujeto tiene que recurrir al uso y unión de diferentes signos y artefactos como símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, dibujos, metáforas, analogías, entre otros, que le permitirán manifestar sus intenciones y poder así lograr el objetivo de sus actividades. Como se mencionó en párrafos anteriores estos artefactos, gestos, signos y demás recursos semióticos que utiliza el individuo para objetivar el conocimiento han sido llamados por Radford como *medios semióticos de objetivación.*

De acuerdo a Radford (2003) los *medios semióticos de objetivación* son todos aquellos recursos, objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos usan y movilizan intencionalmente en los procesos de creación de significado social para lograr una forma estable de conciencia, manifestar sus intenciones y llevar a cabo sus acciones en pro de alcanzar el objetivo de sus actividades.

Adicional a esto, Radford (2003), afirma que estos medios aparecen inmersos en procesos de creación de significados enmarcados por modos culturales de conocimiento que alientan y legitiman formas particulares de los individuos frente al uso y/o descarte de signos y herramientas durante su actividad y que es precisamente la manera en que los individuos recurren y vinculan a estos, lo que puede arrojar alguna luz sobre el problema de la construcción social del conocimiento.

2.3.3. Maestros y estudiantes.

Como se mencionó anteriormente, el conocimiento se produce de manera colectiva, por lo cual, se deriva de dicha naturaleza, que tanto maestros como estudiantes trabajan juntos en la producción de conocimiento; al respecto, Radford dice que *al participar en las actividades de la clase, los profesores y los estudiantes no sólo producen conocimientos. También se co-producen. Se co-producen de acuerdo no sólo a las formas de producción del conocimiento sino también de acuerdo con las formas de colaboración humana de la actividad* (2014, pág.8).

Estas formas de colaboración humana están dadas por una especie de comercialización en la cual los agentes de la actividad educativa, esto es, docentes y estudiantes, mutuamente intercambian servicios que obedecen a los intereses particulares de cada uno, en donde se promueven valores éticos como la solidaridad, la responsabilidad el respeto, se fortalece la capacidad de argumentación, se colocan en escena formas dinámicas de pensar y de hacer en el contexto de la actividad.

Radford (2014), menciona que la caracterización del conocimiento como un movimiento de posibilidades a concretarse o realizarse a través de la mediación de la actividad, ofrece un espacio para dotar de nuevas formas la relación entre docentes y estudiantes, y agrega que *Al participar en la actividad, el conocimiento es algo que los profesores y los estudiantes producen. Es decir, el conocimiento es algo que ellos "hacen avanzar". Esto es lo que "producir" significa etimológicamente: hacer avanzar algo (en este caso, posibilidades de acción matemática y reflexión)* (2014, pág.8).

En síntesis, la teoría de la objetivación concibe tanto a maestros y estudiantes como individuos que participan en una actividad conjunta en la producción de conocimiento y subjetividades, abiertos a todo aquello que puedan aprender del mundo, comprometidos en un mismo esfuerzo en el cual sufren, luchan y trabajan juntos en la búsqueda de nuevas posibilidades de acción y pensamiento. En palabras de Radford,

> Dentro de la lógica materialista dialéctica de la producción que aquí expongo, maestros y estudiantes llevan a cabo juntos la actividad mediadora del conocimiento. El conocimiento se produce colectivamente. La naturaleza colectiva de la producción del conocimiento significa que los estudiantes y los profesores trabajan juntos para proponer posibles interpretaciones matemáticas y cursos de acción. La producción de conocimiento se refiere a emergentes aula colectiva y formas dinámicas de pensar y hacer surgiendo en el contexto de la cultura y la historia. Incluyen modos de investigación matemática, concepciones de verdad, evidencia, argumentación matemática, uso de símbolos y creación de significado (2014, pág.8).

Así pues, esta teoría cambia el enfoque de maestros y estudiantes de las teorías tradicionales y constructivistas en tanto, cambia la manera en que estos reciben y producen el conocimiento. Bajo esta perspectiva, no hay poseedores del conocimiento, ni la producción de éste es una mera cuestión de autorregulación, autosuficiencia y autonomía, es una labor conjunta en la cual ambos actores están dispuestos a mostrar apertura hacia los demás y a la adquisición de nuevos aprendizajes.

2.3.4. El concepto de actividad y trabajo conjunto

Radford (2016), afirma que la naturaleza del ser humano es de ser social, un ser que se concibe con el otro y desde el otro, inmerso en la naturaleza que le rodea y lo condiciona. Desde que nace, el individuo se va constituyendo bajo condiciones de vida que son instauradas histórica y culturalmente, van surgiendo necesidades, como la necesidad natural de supervivencia, las necesidades creadas por él y por la cultura en la sociedad (laborales, artísticas religiosas, etc.), necesidades cuya satisfacción encuentra en objetos por fuera de sí mismo. Para satisfacer las necesidades, el ser humano se involucra activamente en el mundo, produciendo socialmente aquellas cosas que satisface sus necesidades, ese proceso de producción social, dentro de la teoría de la objetivación es lo que Radford llama *actividad*.

Por lo tanto la actividad es ante todo un proceso colectivo en el que la interacción es la pieza fundamental en la construcción de significados, es la construcción de una conciencia individual mediante procesos socioculturales. A través de la actividad es que el saber se dinamiza, se pone en movimiento, para ser materializado en conocimiento, para actualizarlo. Dicho conocimiento, como se ha mencionado antes, debe ser mediado a través de la actividad, a través de ese proceso histórico cultural de producción social. Ahora bien, la actividad matemática en el aula toma un papel de suma importancia en la enseñanza y el aprendizaje, ya que se piensa en una actividad mediada por acciones por un sujeto y entre sujetos que están en constante interacción, cooperación y reflexión mutua dentro de una práctica social de individuos que ejercen la práctica matemática (estudiantes y profesor).

De esta manera se pretende, a través de las formas de reflexión y de posicionamiento crítico en el aula valorar las formas de pensar, los aportes y contribuciones que tanto estudiantes como profesores realizan en la solución de un determinado problema. Alumnos y profesor trabajando juntos promoviendo la responsabilidad y la solidaridad, en donde se evidencia una participación activa, se abre el espacio al debate, hay respeto y solidaridad por el otro y hacia el otro. Desde esta óptica, Radford enfatiza:

> "El profesor de matemáticas y los estudiantes necesitan trabajar juntos para presentar diversas interpretaciones matemáticas y hacerlas el objeto de una experiencia intelectual, reflexiva y estética. Este trabajo conjunto es, simultáneamente, intelectual y emocional; No pueden separarse. Son dos caras de la misma moneda. Podemos concluir, entonces, al notar que, aunque hay una división del trabajo que es inducida por la manera en que los maestros y los estudiantes participan en su trabajo-división del trabajo que tiene que ver con la conciencia del maestro de las intenciones didácticas, etc.-el maestro y los estudiantes se necesitan mutuamente para llevar adelante el conocimiento. La ética comunitaria mencionada en la sección anterior encuentra su plena expresión en la articulación teórica y en la elaboración práctica de esta "necesidad" mutua de docentes y estudiantes. Nos interesa una ética que fomente modos de colaboración de carácter no utilitario y no egocéntrico, modos de colaboración e interacción humanos que más bien promuevan la solidaridad, la postura crítica y la responsabilidad". (2014, pág.12)

Así pues, Radford se refiere al concepto de ***trabajo conjunto*** con la firme intención de diferenciar y enfatizar la idea de actividad que entraña la teoría de la objetivación *como forma de vida estética históricamente producida en la que la materia, el cuerpo, el movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación aparecen en primer plano* (2016, pág. 200) y que difiere en gran medida de otras concepciones y significados tradicionalmente abordados por otras teorías de la educación.

De acuerdo con Radford (2016), el concepto de trabajo conjunto ofrece una reconceptualización de la enseñanza y aprendizaje, pues esta perspectiva teórica concibe ambas actividades desde una visión conjunta en la que son una sola y misma actividad, donde profesores y estudiantes -sin hacer las mismas cosas-, se comprometen intelectualmente y emocionalmente en la producción de una obra común.

Bajo este enfoque, los conceptos de maestro y estudiante referidos por algunos paradigmas educativos es replanteado, y adopta por tanto, una nueva mirada. Por un lado, los estudiantes dejan de ser concebidos como sujetos pasivos que esperan recibir el conocimiento de su profesor, o en el caso contrario, como individuos autónomos que construyen su propio conocimiento. Por otro lado, los docentes ya no aparecen como los poseedores del conocimiento que entregan o transmiten conocimiento ni se reducen a un papel de *agentes tecnológicos y burocráticos-guardianes y ejecutores del plan de estudios* (Radford, 2006, pág. 200). Por el contrario, docentes y estudiantes, llevan a cabo la actividad mediadora del conocimiento, ambos individuos trabajan juntos en la producción de un *trabajo común* que difiere de un *trabajo compartido*.

Al respecto, Radford (2016), afirma que trabajando juntos, estudiantes y maestros están produciendo a través de los gestos, posturas, actividad perceptiva, lenguaje y artefactos, un trabajo común que le permite a los estudiantes tomar conciencia progresiva de las diferentes maneras de pensar un problema, además, el autor agrega que ambos actores *no sólo crean y recrean conocimiento, sino que también se co-producen como sujetos en general y como sujetos de educación en particular* (pág. 201).

En consecuencia, se desprende de todo esto dos aspectos a los cuales recurre el concepto de trabajo conjunto y que son mencionados por Radford: *las formas colectivas específicas de producción de conocimiento en el aula y los modos definidos de colaboración humana que descansan en la ética crítica de la comunidad* (2016, pág. 201).El autor hace énfasis aquí, señalando que las formas éticas de la colaboración humana además de están impulsadas por una actitud general hacia el mundo, sirven para configurar el trabajo conjunto de maestros y estudiantes dentro del aula, en la medida que difuminan las fronteras que siempre los han separado y facilitan el trabajo, de tal forma que funcionan de manera semejante a lo que Radford llama en *concierto como uno solo* (2006, pág. 201).

Como consecuencia de todo esto, se reformula el concepto de aula de matemáticas en tanto ya no aparece como un simple espacio que acoge a maestros y estudiantes sino que en términos de Radford,

> El aula aparece como un espacio público de debates en el que se anima a los estudiantes a mostrar apertura hacia los demás, responsabilidad, solidaridad, cuidado y conciencia crítica. El aula se presenta como un espacio de encuentros donde profesores y estudiantes se convierten en lo que Paulo Freire (2004) denominó presencias en el mundo. Es decir, el aula aparece como un espacio de encuentros, disidencia y subversión, donde maestros

> y estudiantes se convierten en individuos que son más que en el mundo: son individuos con intereses creados el uno en el otro y en su empresa conjunta; Individuos que intervienen, transforman, soñan, aprueban, sufren y esperan juntos (2016, pág. 201).

Así, después de hacer una revisión a la literatura de las producciones en las que se han abordado las sucesiones, y presentar los conceptos teóricos y metodológicos para llevar a cabo en el aula, planteados desde la teoría de Luis Radford, este estudio es pertinente en tanto brinda elementos encaminados a ilustrar cómo a través de la interacción entre estudiantes y estudiante-docente, pueden emerger formas de razonamiento más refinadas en la generalización de sucesiones y series polinomiales entre los participantes del acto educativo. Consecuente con esto, se eligió un enfoque de tipo cualitativo en la medida que intentó describir las estrategias y formas de razonamiento evidenciados en los estudiantes y que será detallado con más detenimiento en el siguiente capítulo.

Capítulo 3: Metodología de la investigación

En el campo de la investigación, han surgido diversas corrientes que han abierto caminos hacia la búsqueda del conocimiento y que básicamente se han polarizado en dos enfoques de investigación: El cualitativo y el cuantitativo. Ambos enfoques recurren a procesos de observación, descripción, análisis e interpretación de los fenómenos o personas sometidos a estudio.

En ese orden de ideas, en este capítulo se presenta inicialmente una justificación de la elección del enfoque en el que se enmarca el presente trabajo investigativo desde las orientaciones de Hernández, Fernández, y Baptista (2014); luego, se describe el diseño metodológico que guió todo el desarrollo de la investigación, esto es, la descripción del contexto en que tuvo lugar el estudio, la selección de los participantes, las fuentes de recolección de datos, así como los criterios a tener en cuenta en el momento de interpretar y analizar la información obtenida; finalmente, se presentan los alcances y limitaciones de la investigación.

3.1 Enfoque metodológico cualitativo

3.1.1 Surgimiento de la idea.

Hernández, Fernández, y Baptista, hacen alusión a los intereses y experiencias personales como una fuente potencial de surgimiento de ideas afirmando que *para desarrollar ideas de investigación una estrategia puede ser relacionarlas con nuestras ideas personales y experiencias. (2014, pág. 29).*

Así, una de las motivaciones que llevaron al investigador está relacionada con un interés personal que surgió desde sus estudios de pregrado; esto derivado de algunos cursos en los que se realizaban demostraciones, usando el método de inducción matemática. Se pedía entonces, realizar la demostración de modelos de sucesiones y series polinomiales que ya tenían una fórmula que los generalizaba, y la cual era sometida a prueba a través del método de demostración mencionado; no obstante, se desconocía la manera en que había sido establecido dicho modelo. A manera de ejemplo, se pedía demostrar por inducción matemática que:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pero no se explicitaba cómo había surgido el modelo generalizado

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

que corresponde a la suma:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+n^2$$

Además, estos mismos autores, agregan que *las buenas ideas deben alentar al investigador, ser novedosas y servir para la elaboración de teorías y la resolución de problemas. (2014, pág. 29).* Por lo cual, se recurre a la revisión de literatura en la cual se pudo evidenciar que existe un amplio trabajo relacionado con generalización de sucesiones de tipo lineal, muy poco con la generalización de sucesiones de tipo cuadrático y menos aún con sucesiones polinomiales en general.

Con lo anterior y teniendo en cuenta las dificultades evidenciadas por los alumnos al momento de generalizar sucesiones y series polinomiales, así como la oportunidad de contar con los estudiantes del grado once de la institución en la cual el investigador labora, surgió la idea de plantear el problema de investigación que indagara por las diferentes estrategias que usaban los estudiantes del grado undécimo en tareas de generalización de sucesiones y series de tipo polinomial. En este sentido Hernández, Fernández, y Baptista, acerca del surgimiento de las ideas en la investigación afirman:

> *Entre los "motores" que pueden generar ideas tenemos: inspiración, oportunidad, necesidad de cubrir "huecos de conocimiento", conceptualización y necesidad de resolver una problemática.·(2014, pág. 29)***.**

3.1.2 Elección del enfoque de investigación.

Como se mencionó en apartados anteriores, este trabajo se centró en identificar las estrategias que los estudiantes utilizan en la generalización de sucesiones y series de tipo polinomial, así como las maneras en que éstos razonaban a medida que interactuaban y socializaban sus experiencias en la ejecución de la tarea. Ello implicaba prestar especial atención a todos aquellos medios semióticos de objetivación a los cuales los estudiantes acudían en la solución de una tarea o actividad que requería la generalización de patrones, su manera particular de razonar e interpretar determinada situación y las construcciones que cada uno iba haciendo a partir de sus saberes previos y la interacción que se propiciaba en el aula. Por esta razón, se asumió un enfoque de tipo cualitativo en la medida que éste *se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados.* (Punch, 2014; Lichtman, 2013; Morse, 2012; Encyclopedia of Educational Psychology, 2008; Lahman y Geist, 2008; Carey, 2007, y DeLyser, 2006, citado en Hernández, Fernández, y Baptista 2014, pág. 358*).* Además*,* Hernández, Fernández, y Baptista, definen este enfoque como:

> *Un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo "visible", lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen). (*2014 *página 9).*

Por tanto, para la realización de dichas prácticas interpretativas, se requirió de un proceso de observación, interacción entre los estudiantes-estudiantes y estudiantes-docente, así como de la descripción y análisis de las observaciones confrontados con los referentes teóricos que sustentan el presente trabajo. Bajo este enfoque se hace necesario prestar especial interés a las diferentes maneras de percibir el fenómeno objeto de estudio, a la experiencia, al surgimiento de nuevas ideas generadas por la interacción con el otro. Al respecto, Hernández, Fernández, y Baptista*,* agregan:

> *En la aproximación cualitativa hay una variedad de concepciones o marcos de interpretación, que guardan un común denominador: todo individuo, grupo o sistema social tiene una manera única de ver el mundo y entender situaciones y eventos, la cual se construye por el inconsciente, lo transmitido por otros y por la experiencia, y mediante la investigación, debemos tratar de comprenderla en su contexto.(*2014 *pág. 9).*

Un elemento clave que se tuvo en cuenta al momento de elegir la metodología de investigación estuvo centrado en el proceso de indagación que permitiera obtener elementos que dieran cuenta de las estrategias y formas de razonamiento que utilizan los estudiantes en la generalización de sucesiones y series polinomiales, y por tanto, el logro de los objetivos inicialmente propuestos. Dicha pesquisa se concibió desde una perspectiva abierta, libre y flexible a todo aquello que pudiera surgir en el trabajo de campo y que respondiera a las experiencias y al contexto particular de los estudiantes. *El proceso de indagación es más flexible y se mueve entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Su propósito consiste en "reconstruir" la realidad, tal como la observan los actores de un sistema social definido previamente. Es holístico, porque se precia de considerar el "todo" sin reducirlo al estudio de sus partes. (*Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, pág. 9).

Es importante mencionar que durante la ejecución de las actividades asignadas por el docente, inicialmente cada estudiante se enfrentaba de manera individual a las tareas propuestas, con miras a observar actitudes, estrategias y formas de razonamiento de los estudiantes. Luego, se propiciaba un espacio de interacción en la que ellos se asociaban en pequeños grupos de manera libre, natural y espontánea, guiados por las estrategias implementadas por otros compañeros y su éxito en el logro de la meta propuesta, se sentían atraídos hacia lo que hacían, y así, poco a poco fueron modificando (favorablemente) su actitud y por ende, iban encontrando diferentes maneras de abordar la tarea, nuevas ideas, estrategias, y nuevos procedimientos a tal punto que se generó un grado de confianza en los estudiantes que permitía ir en la búsqueda de procedimientos más sintéticos, a generalizaciones más refinadas. Esta confianza permitía que surgieran preguntas, por parte de ellos de situaciones más complejas, las cuales con la ayuda del investigador se les pudo hallar respuesta. Es importante mencionar el rol desempeñado por el investigador durante la ejecución de las actividades. En primera instancia, observando lo que cada uno hacía y generando algunas preguntas de acuerdo a lo observado, luego, iba interactuando con cada grupo, igualmente, escuchando y observando lo que hacían y generando preguntas que iban surgiendo de acuerdo a la estrategia utilizada en los grupos. Cada vez que un equipo de trabajo compartía con sus compañeros lo que habían realizado, servía de apoyo y motivación para los demás, de tal manera que surgían nuevas ideas que le daban solución al problema, unas más refinadas que otras. Es importante resaltar que las ideas y estrategias se socializaban así no respondieran de manera acertada a la solución de la tarea.

Es importante resaltar que en la solución de la tarea, algunos estudiantes al no tener éxito en su solución, la abandonaban. Esto pudo obedecer a diversos factores que tuvieron que ver con la falta de atención e interés, inseguridad y poca confianza en sus procedimientos y estrategias implementadas y algunas dificultades referidas a las habilidades comunicativas de los jóvenes (argumentaciones, gestos, movimientos corporales, registros orales, registros escritos, entre otros).

Se escuchan expresiones como “no soy capaz”, “eso está muy difícil”, “yo no entiendo”, “es que a mi no me entran las matemáticas”, entre otras. Esta falta de confianza manifestada por el estudiante se pudo vencer debido, primero a la estrategia metodológica usada en el aula en la que el investigador motivaba con base en preguntas que buscaban mirar el grado de comprensión de la tarea y daba orientaciones; segundo, porque algunos al ver que otro compañero era capaz de encontrarle solución los animaba a seguir buscando e intentando resolverla; tercero porque se valoraba el aporte de ellos aunque estuvieran equivocados y se daban orientaciones para mejorarlas.

3.2 Diseño de la investigación.

Debido a que la presente investigación buscaba identificar las estrategias y formas de razonamiento que los estudiantes usaban en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales, se fundamentó en un diseño fenomenológico. Desde esta perspectiva *se explora, describe y comprende lo que los individuos tienen en común de acuerdo con sus experiencias con* *un determinado fenómeno (categorías que comparten en relación a éste)*, (Creswell, 2013b; Wertz et al., 2011; Norlyk y Harder, 2010; Esbensen, Swane, Hallberg y Thome, 2008; Kvåle, 2007; Creswell et al., 2007; y O'Leary y Thorwick, 2006, citado en Hernández, Fernández, y Baptista 2014).

Dentro de esas características comunes se pudieron percibir gestos, preocupaciones, alegrías, inseguridades, temores confianza, etc. y con la interacción entre estudiantes y estudiantes-investigador se pudo posibilitar un ambiente para fortalecer las visiones y las formas de percibir el fenómeno objeto de estudio, incluso superar las barreras que obstaculizaban la elaboración de las tareas. .

De acuerdo con Creswell (2013b), Mertens (2010) y Álvarez-Gayou (2003), el diseño fenomenológico se fundamenta en las siguientes premisas:

- Se pretende describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente.
- Se basa en el análisis de discursos y temas, así como en la búsqueda de sus posibles significados.
- El investigador confía en la intuición, imaginación y en las estructuras universales para lograr aprender la experiencia de los participantes.
- El investigador contextualiza las experiencias en términos de su temporalidad (momento en que sucedieron), espacio (lugar en el cual ocurrieron), corporalidad (las personas que las vivieron) y el contexto relacional (los lazos que se generaron durante las experiencias). (citado en Hernández, Fernández, y Baptista 2014. pág. 494)

Finalmente, con la idea de llevar a cabo de manera ordenada un hilo articulador entre los diferentes momentos que tuvieron lugar dentro de la investigación, se presenta a continuación las principales acciones que guiaron el desarrollo del presente trabajo investigativo bajo las orientaciones de Hernández, Fernández, y Baptista (2014, pág. 495):

1. Elección del contexto y participantes.
2. Inmersión en el campo.
3. Recolección de los datos.

4. Transcripción y revisión de las narrativas de las experiencias.
5. Identificación de unidades de análisis.
6. Generación de categorías.
7. Validación.
8. Reporte final.

3.2.1 Elección del contexto y participantes.

La elección del contexto estuvo determinada ser el lugar de trabajo del investigador y por ende significó tener un conocimiento amplio del lugar, de los estudiantes y de las problemáticas contextuales. Esto permitió una mejor relación con ellos durante la investigación, la cual se llevó a cabo en términos de empatía, amabilidad, confianza y respeto. En palabras de Hernández, Fernández, y Baptista,

> La primera tarea es explorar el contexto que se seleccionó inicialmente, lo que significa evaluarlo para cerciorarnos que es el adecuado. Incluso, para considerar nuestra relación con el ambiente y resolver cualquier situación que pueda entorpecer el estudio, Esterberg (2002) recomienda que nos preguntemos: ¿me conocen en dicho ambiente? Si es así, ¿cómo puedo solucionarlo? Y si soy muy distinto a los participantes del estudio, ¿cómo puedo solventarlo? ¿Qué significados tiene para mí el contexto? ¿Puedo manejarlos? (2014, pág 366)

En ese orden de ideas, el trabajo de campo se desarrolló en la Institución Educativa Kennedy, ubicada en la zona noroccidental, comuna 6, del Municipio de Medellín, perteneciente al núcleo Educativo 921, que atiende en promedio a 3000 estudiantes cuyas familias pertenecen en su mayoría a los estratos 1 y 2. La institución cuenta con 5 secciones, una principal en la que atiende desde el grado sexto hasta el grado undécimo y 4 secciones que atienden desde preescolar hasta el grado quinto. En las diferentes sedes está establecida la doble jornada, y en la Media Técnica se ofrecen dos alternativas laborales de formación; en Desarrollo de Software y en Diseño de Multimedia las cuales están en convenio con el SENA.

Los integrantes que participaron en la investigación fueron 40 estudiantes que cursaban el grado undécimo, con edades comprendidas entre 15 y 18 años, los cuales fueron elegidos por sus habilidades comunicativas y relación de empatía existente con el investigador-docente. Por principios éticos y legales, no se reveló la identidad de los participantes; para referirse a ellos, se usaron seudónimos elegidos previamente por ellos. Además, se dispuso de consentimiento informado, firmado por los acudientes en la que autorizaba la participación en la mencionada investigación.

El aula de clase, es el espacio físico en el cual se llevaron a cabo las actividades para la investigación. Es un espacio en el cual el piso es rectangular de 9m por 7m (63 m^2) y con una altura de de 4 m (252 m^3). El aula está decorada con un ambiente propicio para el trabajo en matemáticas, hay exhibidos cuadros con fotografías de algunos matemáticos, del techo se han instalado cuerpos geométricos los cuales fueron construidos por los mismos estudiantes, está exhibido permanentemente el triángulo de pascal con 17 filas, e igualmente está exhibida permanentemente una tabla de multiplicar con 20 filas y 20 columnas.

3.2.2 Inmersión en el campo.

Durante la etapa de la inmersión en el campo, la labor del investigador estuvo centrada en un proceso riguroso de observación que demandó la mirada atenta a todo aquello que pudiera emerger durante la ejecución de las actividades asignadas por el docente. Así, *la mente del investigador al ingresar al campo tiene que ser inquisitiva. De cada observación debe cuestionarse: ¿qué significa esto que observé? ¿Qué me dice en el marco del estudio? ¿Cómo se relaciona con el planteamiento? ¿Qué ocurre o sucedió? ¿Por qué? También es necesario evaluar las observaciones desde diversos ángulos y las perspectivas de distintos participantes (*Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, pág. 368*)*

Es indispensable entonces *observar lo que ocurre en el ambiente (desde lo más ordinario hasta cualquier suceso inusual o importante). Aspectos explícitos e implícitos, sin imponer puntos de vista y tratando, en la medida de lo posible, de evitar el desconcierto o interrupción de actividades de las personas.* (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, pág. 368). Por lo tanto, se prestó especial atención a todos aquellos movimientos, gestos y expresiones orales y escritas de los estudiantes, que daban cuenta de sus estrategias y formas de razonar frente a las tareas asignadas, tratando siempre de escucharlos permitiendo el flujo libre de todo lo que surgía de ellos.

A continuación, se describe la forma en que se realizó el trabajo de campo de la presente investigación, el cual se desarrolló en dos fases: la primera para seleccionar las unidades de análisis y la segunda fase, para realizar las situaciones de intervención con los participantes elegidos.

En la primera fase se hizo un trabajo riguroso de observación que determinaba la escogencia de los estudiantes de la investigación, teniendo en cuenta las siguientes pautas: interés por parte de los estudiantes en participar en la investigación y habilidades comunicativas en la justificación de los diferentes procedimientos y estrategias. En esta fase se desarrolló una actividad llamada Solución Prueba Olimpiadas Medellinenses del Conocimiento (2011), la cual fue aplicada a 130 estudiantes de la Institución Educativa Kennedy que cursaban el grado undécimo:

Situación uno: Solución Prueba Olimpiadas Medellinenses del Conocimiento (2011).

Objetivo: Identificar las habilidades comunicativas (lenguaje oral, gestual y escrita) de los estudiantes que harán parte del estudio, al momento de justificar sus diferentes procedimientos y razonamientos, durante el desarrollo de una actividad que permitiera establecer procesos de generalización en matemáticas.

Descripción de la actividad

La actividad se implementó en cuatro grupos del grado undécimo de la I.E. Kennedy, para un total de 130 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre los 15 y 18 años.

Las observaciones obtenidas durante esta actividad se encuentran en los escritos de los estudiantes y fotos de sus notas, en los que dan cuenta de sus procesos, estrategias y razonamientos, y el diario de campo del investigador de todas aquellas justificaciones orales y escritas que algunos de los estudiantes hicieron de sus procedimientos, así como de lo observado durante la actividad.

Esta actividad se llevó a cabo en tres momentos, a saber:

Primer momento

Los estudiantes se enfrentaron a la prueba de escogencia múltiple con única respuesta. Las claves que ellos elegían no requerían presentar procedimientos, aunque se les entregó una hoja para ello.

Segundo momento

Se hizo la revisión de los resultados y posteriormente se discutieron en grupo, buscando que los estudiantes argumentaran sus respuestas o motivos que los llevaron a elegir determinada clave.

Tercer momento

Se hace la intervención por parte del investigador sobre las formas de razonar y las estrategias utilizadas por los estudiantes y se plantean nuevos interrogantes para analizar la comprensión de los símbolos o fórmulas matemáticas contenidas en las respuestas de la prueba.

En la segunda fase se desarrollaron tres actividades denominadas Situación dos: El juego de la Ranita; Situación tres: Números Pentagonales, y Situación cuatro: Sucesiones en las diagonales del Triángulo de Pascal.

Situación dos: El Juego de la Ranita.

La siguiente actividad fue implementada con el grupo de undécimo seleccionado para llevar a cabo la investigación, a partir de la cual surgieron las unidades de análisis.

Objetivos: Analizar las estrategias y formas de razonar de los estudiantes en la generalización de una sucesión de tipo no lineal, así como la búsqueda de un modelo matemático que la generalice.

Observar todos aquellos medios semióticos que los estudiantes utilizan (gestos, expresiones símbolos, etc) en la solución de tareas relacionadas con generalización de patrones no lineales.

Descripción:

El siguiente diagrama muestra un juego en el que en cada movimiento sólo se puede desplazar una ficha, un cuadro o hacerla saltar sobre una ficha de distinto color. Además, las fichas blancas sólo se pueden desplazar a su izquierda y las negras a su derecha. El objetivo del juego es, de acuerdo con las instrucciones anteriores, intercambiar de posición las fichas de tal manera que las negras queden a la derecha y las blancas a la izquierda.

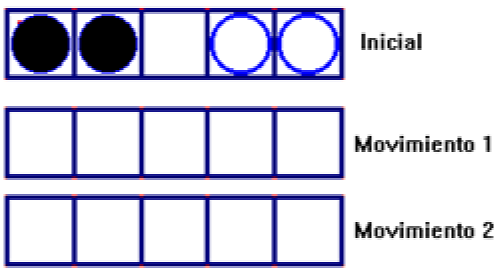


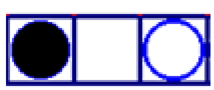
Ilustración 6: *juego de la ranita.*

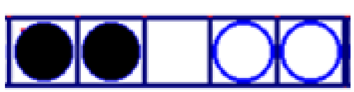
Luego de haberse familiarizado con el juego, se les pide resolver lo siguiente:

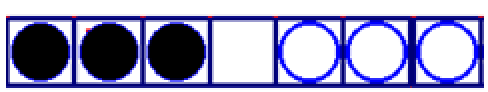
1- ¿De acuerdo con lo que has observado, qué aspectos se deben tener en cuenta, al momento de mover una ficha para tener éxito en el juego?

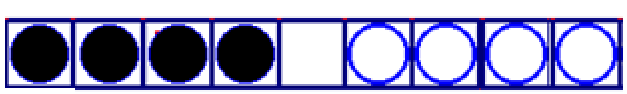
2- Hallar el mínimo número de movimientos que permite cambiar las fichas blancas por las negras.

3- Hallar el mínimo número de movimientos que permite intercambiar las posiciones de las fichas para cada uno de los siguientes tableros.

a.  (una ficha de cada color)

b.  (dos fichas de cada color)

c.  (tres fichas de cada color)

d.  (cuatro fichas de cada color)

e. 5 fichas de cada color.

f. 10 fichas de cada color.

g. ***n*** fichas de cada color.

Situación tres: Números Pentagonales.

Objetivo: Explorar, a través de un modelo geométrico, la generación de una sucesión de tipo no lineal y la búsqueda de estrategias utilizadas por los estudiantes de un modelo matemático que la generalice.

Descripción

Se le presenta al estudiante, una representación geométrica de los números pentagonales y se le indaga por la búsqueda de un modelo matemático que lo generalice.

A cada figura que se presenta a continuación le corresponde un número de acuerdo a la cantidad de puntos:

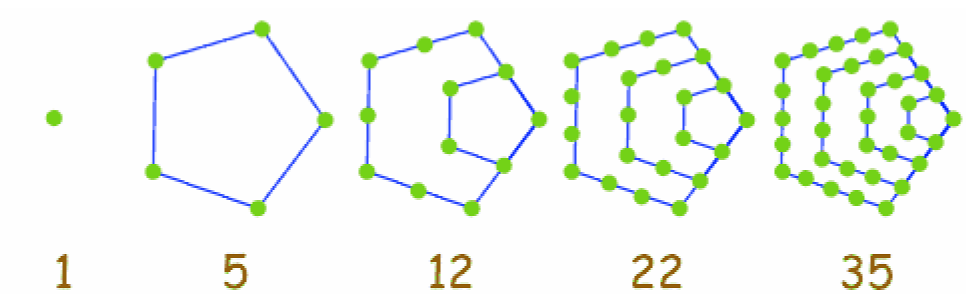


Ilustración 7: *Números pentagonales.*

Se dinamiza la actividad a partir de los siguientes interrogantes:

¿Cuántos puntos le corresponden a la figura 6?

¿Cuántos puntos le corresponden a la figura 10?

¿Cuántos puntos le corresponden a la figura 20?

¿Cuántos puntos le corresponden a la figura ***n***?

Situación Cuatro : Sucesiones en las Diagonales del Triángulo de Pascal.

Objetivo: Analizar las sucesiones generadas por las diagonales del triángulo de Pascal con el propósito de explorar estrategias utilizadas por los estudiantes que conduzcan al establecimiento de un modelo matemático que las generalice.

Descripción

Se presenta a los estudiantes el triángulo de Pascal, se recuerda la forma general que tienen las diagonales cero, uno y dos, y se establece la pregunta de cómo establecer una generalización para las siguientes diagonales (esta situación surgió por la pregunta de un grupo de estudiantes)

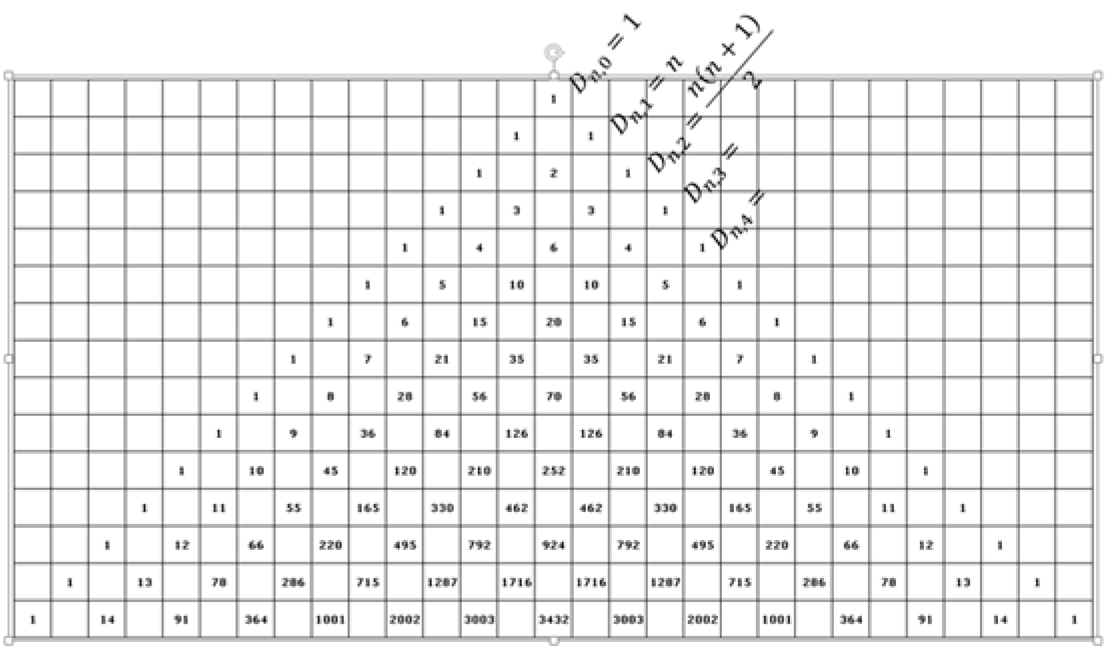


Ilustración 8: *Sucesiones en las diagonales el triángulo de Pascal.*

Cabe resaltar que en el diálogo entre estudiantes e investigador se generaron interrogantes que permitieron ir refinando las estrategias y razonamientos en la generalización.

3.2.3 Recolección de los datos.

Los datos recolectados se registraron oportuna y cronológicamente en el diario de campo del investigador. Por tanto, se tuvo especial interés en dejar anotaciones de los aspectos importantes detectados y observados por el investigador sucedidos desde el inicio del estudio y durante todo el trabajo de campo; así como también, en registrar todas aquellas *descripciones de lo que estamos viendo, escuchando, olfateando y palpando del contexto y de los casos o participantes observados. Regularmente van ordenadas de manera cronológica. Nos permitirán contar con una narración de los hechos ocurridos (qué, quién, cómo, cuándo y dónde)* (Hernández et al. 2014, pág. 371). Se describen los contextos, el ambiente de aula, las observaciones en el trabajo individual y en el grupal, las interacciones que se iban generando, se registraron las interpretaciones percibidas de acuerdo a los gestos, Además, se recolectaron datos que provinieran del lenguaje escrito, verbal y no verbal que servían de fuente para conocer e identificar sus estrategias implementadas, la manera en que estaba comprendiendo o abordando la tarea, su forma de razonar, el proceso que iba teniendo cada estudiante frente a la situación, etc.

Igualmente se registraron todas aquellas ideas, categorías y descubrimientos que a juicio del investigador se iban presentando; se tomaron los registros de aquellos cambios detectados en estudiantes generados tanto por el investigador como por otros estudiantes en la interacción durante el desarrollo de las actividades.

Durante la ejecución de las actividades se realizaron preguntas abiertas que permitieran una conversación entre investigador y estudiantes, y así poder obtener más información de las estrategias y razonamientos que iban teniendo; para tal fin, se elaboraron previamente algunas preguntas por cada actividad encaminadas a:

1. Motivar hacia la elaboración de la tarea,
2. Confrontar las ideas propias con las de otros,
3. Dinamizar la ejecución de la actividad,
4. Reorganizar las ideas que se iban generando de manera individual y grupal,

5. Generar nuevos interrogantes, y finalmente,
6. Refinar procedimientos y razonamientos utilizados por los estudiantes.

Algunos hechos fueron registrados en medio fotográfico y scanner ya que correspondían a todos aquellos registros escritos como anotaciones, ideas, intentos y procedimientos realizados por los estudiantes en sus cuadernos de apuntes, con el fin de tener evidencias para su correspondiente análisis.

Cabe mencionar aquí que una vez se recolectaban, revisaban y se organizaban los datos, éstos se iban analizando casi que de manera paralela a la obtención de éstos. Esto conforme a Hernández, Fernández, y Baptista (2014) quienes mencionan que *la recolección y el análisis ocurren prácticamente en paralelo; además, el análisis no es uniforme, ya que cada estudio requiere un esquema peculiar*. (pág. 418), y por otra parte, como una estrategia de información para la preparación y elaboración de las próximas actividades.

3.2.4 Transcripción y revisión de las narrativas de las experiencias.

Debido a que el trabajo en el aula era de constante interacción entre estudiantes y estudiantes-investigador en torno a la solución de las tareas planteadas por el investigador y que en esa dinámica no era posible que el investigador registrara en el diario de campo, de inmediato, lo acontecido en el aula, se hacía necesario tomar registros fotográficos, escanear algunos escritos de las notas de los estudiantes y tomar apuntes con palabras clave de lo observado y escuchado, que luego de la actividad eran transcritas al diario de campo por el investigador. No se recurrió a la grabación de voz ni de video, para que el trabajo en el aula se desarrollara de una manera natural.

De manera puntual, es importante mencionar el papel que jugaron todos los sonidos y elementos paralingüísticos, ya que estos pueden en su momento significar duda, replanteamiento, fracaso, incertidumbre, seguridad, alegría, entre otros, en la transcripción de los diálogos entre estudiantes e investigador. Hernández, Fernández y Baptista recomiendan que es importante *transcribir todas las palabras, sonidos y elementos paralingüísticos: muecas, interjecciones (como ¡oh!, ¡mmm!, ¡eh! y demás)*. Así mismo, añaden la necesidad de *indicar pausas (pausa) o silencios (silencio); expresiones significativas (llanto, risas, golpe en la mesa); sonidos* *ambientales (timbró el teléfono móvil; se azotó la puerta); hechos que se deduzcan (entró alguien); cuando no se escucha (inaudible), etc.. (2014, pág. 424),* que enriquecen en gran medida cada una de sus expresiones y percepciones frente a la situación y brindan elementos que aportan al análisis e interpretación de los datos recolectados.

3.2.5 Identificación de unidades de análisis.

Antes de la recolección de los datos ya se contaba con un conocimiento del contexto debido a que el docente investigador laboraba en la institución donde se llevó a cabo la investigación, además tenía una cierta familiaridad con cada uno de los estudiantes que hicieron parte del estudio.

Ahora bien, con el fin de desarrollar diferentes perspectivas, realizar un diagnóstico, generar hipótesis, describir algo problemático y seleccionar el grupo o las personas que potencialmente harían parte de la investigación se realizó una actividad con los cuatro grupos de undécimo que involucraba actividades de generalización de patrones.

Luego de la recolección de estos datos iniciales, y debido a las capacidades comunicativas de uno de los grupos de undécimo (los que pertenecían a la Media Técnica de Desarrollo de Software) y con la oportunidad de que las relaciones de empatía cordialidad y respeto que en particular sostenían los estudiantes del grupo con el investigador, se tomó como muestra dicho grupo, el cual estaba constituido por 40 estudiantes, y que básicamente en palabras de Hernández Fernández y Baptista (2014), obedeció a una muestra de orientación a la investigación cualitativa por conveniencia y oportunidad.

Después de la inmersión en el campo, fue necesario entonces entrar a evaluar los factores que incidieron en el número de casos que compondrían la muestra. De acuerdo a Hernández Fernández y Baptista (2014): *Tres son los factores que intervienen para "determinar" o sugerir el número de casos que compondrán la muestra: 1) capacidad operativa de recolección y análisis, 2) el entendimiento del fenómeno o saturación de categorías y 3) la naturaleza del fenómeno en análisis.* (pág. 491). Conforme a esto, se tuvieron en cuenta los siguientes elementos:

1. Las diferentes maneras de abordar el fenómeno objeto de estudio por cada uno de los subgrupos. Éstos fueron conformados de manera natural y espontánea por los estudiantes quienes se vieron motivados por diferentes factores (grados de confianza, lazos de amistad, por conveniencia, entre otros). Esta conformación facilitaba la recolección y análisis de los datos.
2. Cada grupo en su exploración de la tarea de generalización manifestaron una percepción que se podía diferenciar de los otros subgrupos. Lo que obedecía a la manera particular de comprender el fenómeno en cuestión.
3. En vista de que el interés estaba orientado en observar, describir y analizar las estrategias implementadas por los estudiantes en tareas de generalización de sucesiones y series polinomiales, era necesario contar con un número significativo de casos que pudieran proporcionar una riqueza en la variedad de dichas estrategias.

Por consiguiente, y debido a las dinámicas que emergieron en el aula, del grupo de 40 estudiantes surgieron 14 subgrupos, los cuales, para los intereses de la investigación, se consideró, cada uno, como unidad de análisis. Es importante anotar que los subgrupos, de manera natural, se establecieron de la siguiente manera: cinco grupos de dos estudiantes (que se denominaron G1, G2, G3, G4 y G5), seis grupos de tres estudiantes (G6, G7, G8, G9, G10, G11) y tres grupos de cuatro estudiantes (G12, G13 y G14). De cada grupo, por sus habilidades comunicativas, se eligió un moderador quien era el encargado de presentar los avances y hallazgos en la actividad, pero en el momento de establecer los diálogos a partir del trabajo que exponían, estos se daban entre investigador y cualquier integrante del grupo expositor, que para tal efecto se representará como Integrante G1, Integrante G2, Integrante G3, …, Integrante G14 que hace referencia a cualquier integrante del grupo expositor correspondiente.

3.2.6 Generación de categorías.

Conforme se mencionó anteriormente, una vez recolectados los datos, se hacía de manera simultánea un análisis inicial de éstos que brindaba información sobre lo que estaba ocurriendo frente al fenómeno de estudio y por ende, permitía encausar y planear las siguientes actividades a desarrollar. Hernández et al, (2014, pág. 426), afirman que en la mayoría de los estudios cualitativos se hace una *codificación* de los datos que consiste en sistematizarlos y eliminar todo aquello que se considere irrelevante, todo esto con el fin de tener una mejor descripción de éstos y así una mayor comprensión del material analizado. *Usamos la codificación para comenzar a revelar significados potenciales y desarrollar ideas, conceptos e hipótesis; vamos comprendiendo lo que sucede con los datos (empezamos a generar un sentido de entendimiento respecto al planteamiento del problema).* (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, pág. 426)

Esta codificación se realizó así: por un lado se identificaron las unidades de significado, se categorizaron y se les asignó un código o etiqueta a cada categoría; por otra parte se hizo una comparación entre dichas categorías que facilitó *agruparlas en temas y buscar posibles vinculaciones* (Saldaña, 2012; Matthew y Price, 2009a; Wicks, 2009; y Miles y Huberman, 1994, citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Es decir, una vez hecha esta comparación entre categorías, el investigador hacía un análisis conceptual, evaluaba las similitudes y diferencias entre éstas lo que finalmente, determinaba si se creaba una nueva categoría o si consolidaban las ya creadas.

Así pues, en primera instancia, se seleccionaron y clasificaron todas aquellas estrategias y razonamientos empleados por los estudiantes en la generalización de sucesiones y series polinomiales, que habían sido recolectadas y analizadas en el trabajo de campo, para posteriormente, ser codificadas en determinada tipificación de categoría. En segunda instancia, se realizó una comparación entre categorías con miras a establecer si era necesario eliminar, consolidar o crear nuevas categorías.

3.2.7 Validez y credibilidad de la investigación.

En toda investigación surge el cuestionamiento sobre la confiabilidad o la validez de las interpretaciones que se le dan a los datos. Durante el estudio, el investigador tuvo claridad sobre los fundamentos teóricos que fundamentaron el estudio y del diseño metodológico aplicado; de igual manera se describió detalladamente el contexto, los criterios de selección de los participantes, la obtención de las unidades de análisis y los instrumentos usados en la recolección de los datos; se detalló claramente los roles de los participantes y del investigador en el cual se privilegió la interacción entre estudiantes y estudiantes-investigador; se prestó especial interés en documentar los hallazgos con el fin de evitar sesgos; se tuvo cuidado con la recolección de los datos registrándose de manera condensada e inmediata para luego ser descritos de manera más detallada en el diario de campo, indagando por lo pertinente y necesario con respecto al planteamiento del problema de investigación y clasificándolos de acuerdo a las categorías que fueron emergiendo. La validez de las interpretaciones de los datos recogidos se realizó mediante un proceso de triangulación que de acuerdo a Hernández et al. (2014, p. 456) es una "*medida para incrementar la credibilidad*". En ese orden de ideas, durante la investigación se realizó triangulación de la información de diferentes fuentes de datos (fotos, entrevistas, producciones de los estudiantes, etc), el cual se llevó a cabo a la luz de los elementos teóricos, metodológicos y análisis de los datos obtenidos. De igual manera, se hizo un proceso de triangulación entre investigador y asesor, en el cual ambos investigadores, hicieron sus respectivas interpretaciones de la información recolectada y seguidamente, se dió un espacio de discusión con el fin de refutar, modificar o confirmar las diferentes categorías que fueron emergiendo, todo esto, con el fin de obtener mayor riqueza interpretativa y analítica, así como mayor credibilidad en la investigación. Creswell (2013a), Neuman (2009), y Franklin y Ballau (2005), citados en Hernández et al. (2014, p. 456) mencionan la triangulación como una de las medidas que el investigador puede adoptar para incrementar la credibilidad, de esta manera, se puede acudir a una triangulación *de investigadores (varios observadores y entrevistadores que recolecten el mismo conjunto de datos), con el fin de obtener mayor riqueza interpretativa y analítica;* en ese mismo sentido, propone realizar *una triangulación de datos (diferentes fuentes e instrumentos de recolección de los datos, así como distintos tipos de datos*; finalmente, estos mismos autores se refieren a las "*inconsistencias*" del estudio, *las cuales deben analizarse para considerar si realmente lo son o representan expresiones diversas.*

Capítulo 4: Desarrollo de la investigación

La actividad del juego de la ranita, los números pentagonales y las diagonales del Triángulo de Pascal, una ruta emergente hacia la generalización de sucesiones y series polinomiales

Como se mencionó en el capítulo anterior, la presente investigación se desarrolló en dos fases: la primera, para identificar y seleccionar los estudiantes partícipes del estudio; y la segunda, consistió en llevar a cabo las situaciones de intervención por parte de los participantes elegidos (Juego de la Ranita, números Pentagonales y Sucesiones derivadas de las Diagonales del Triángulo de Pascal).

Un elemento a tener en cuenta al iniciar la actividad del Juego de la Ranita (intercambiar las fichas siguiendo las reglas) estuvo centrado en presentar a los estudiantes la solución de la actividad de manera individual en el que se pudo observar que varios de ellos, ante el fracaso en sus intentos por resolver la tarea, la abandonaban expresando que era muy difícil. No obstante, en la medida que otro estudiante del grupo manifestaba haber hallado la solución, y expresar unas pequeñas claves, éstos se sentían de cierta manera atraídos y volvían a emprender la solución de ésta con éxito. Una vez establecida la sucesión asociada al problema de la ranita (3, 8, 15, 24, …) y buscando la solución que pretendía establecer la generalización del término general de esta sucesión, los estudiantes de manera natural se fueron organizando en grupos de trabajo, colocando en escena esa parte social del ser humano y demostrando así la necesidad de trabajar de manera conjunta, ante lo cual la escuela no puede estar ajena. Al respecto, Radford afirma:

> Dentro de la lógica materialista dialéctica de la producción que aquí expongo, maestros y estudiantes llevan a cabo juntos la actividad mediadora del conocimiento. El conocimiento se produce colectivamente. La naturaleza colectiva de la producción del conocimiento significa que los estudiantes y los profesores trabajan juntos para proponer posibles interpretaciones matemáticas y cursos de acción. La producción de conocimiento se refiere a emergentes aula colectiva y formas dinámicas de pensar y hacer surgiendo en el contexto de la cultura y la historia. Incluyen modos de investigación matemática,

> concepciones de verdad, evidencia, argumentación matemática, uso de símbolos y creación de significado. (2014, pág.8)

Así pues, una vez recolectados los datos en el trabajo de campo, se seleccionaron y clasificaron todas aquellas estrategias y razonamientos empleados por los estudiantes en la generalización de sucesiones y series polinomiales; posteriormente, se codificaron y se tipificaron en determinada categoría. Luego, se hizo un proceso de comparación entre éstas con miras a establecer si era necesario eliminar, consolidar o crear nuevas categorías. Cabe rescatar la importancia de la triangulación de las diferentes fuentes de datos y de las interpretaciones dadas entre investigador-asesor a la luz del marco teórico y de la información obtenida con miras a obtener una mayor credibilidad. En ese orden de ideas, emergieron las siguientes categorías:

4.1 Generalización recurrente.

En lo que respecta a las estrategias de generalización, varios autores (Stacey, 1989, García-Cruz y Martion, 1997, Orton y Orton, 1999, Krebs, 2003, Rivera y Becker, 2005, Ebersbach, Wilkening, 2007, Amit y Neria, 2008), se han dedicado a realizar investigaciones que han aportado al reconocimiento de las diferentes estrategias de generalización. Dichos estudios han sido recopilados en el trabajo de investigación realizado por Akkan (2013), el cual, dentro de una de las estrategias de generalización denominada Recurrente o aditivo que consiste en el uso del término anterior en un patrón para encontrar el siguiente término o términos. Así, para encontrar el término 10, 20 y el n-ésimo en la sucesión derivada del juego de la Ranita, los estudiantes generalmente trataron de encontrar la diferencia entre dos términos consecutivos generando otra sucesión a la cual vuelven y le aplican la diferencia entre dos términos consecutivos y encontraron una diferencia constante; a partir de esta diferencia constante, generan los términos que requiere (10, 20), pero no logra obtener el n-ésimo término. Es de anotar que este proceso de generalización fue el común denominador en las estrategias iniciales utilizadas por los estudiantes, en particular, se describe a continuación la socialización de lo realizado por el G1.

Estrategia G1.

G1 presentó una forma de resolver la actividad a través de *diferencias sucesivas*, mostrando un patrón de diferencia constante en el segundo nivel (sucesión de tipo cuadrático), tal como se ilustra:

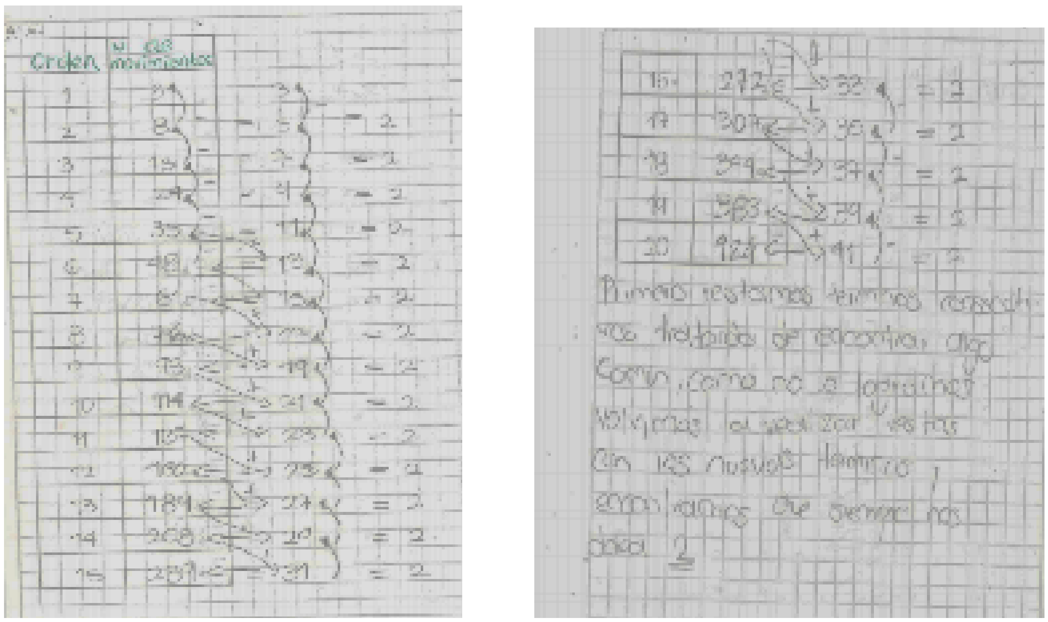


Ilustración 9: *Estrategia G1.*

Se puede observar que para llegar al término de la sucesión en la posición 10, el G1 continuó diligenciando el cuadro hasta llegar al término pedido. De manera similar procedió para la obtención del término de la sucesión en la posición 20, pero no lograron una expresión para la posición n.

A partir de la observación de los términos de la sucesión, el G1 identificó una propiedad común, (la de las diferencias sucesivas en el segundo nivel) y la hizo extensiva para los términos siguientes, sin embargo no logró establecer una expresión general para calcular el **n-ésimo** término de la secuencia. Según Radford (2013), la generalización algebraica de patrones es un proceso que requiere:

1. Identificar una propiedad o característica común percibidas en algunos elementos de la secuencia. Dichas propiedades se enmarcan en un terreno fenomenológico de observación sobre algunos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3,...,p_k$)

2. La aplicación o generalización de esta propiedad a los demás términos de la secuencia, es decir a los términos subsecuentes ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$).

3. La capacidad de usar esa propiedad común, que le permite conjeturar una expresión directa que permite calcular el valor numérico de la secuencia.

En el caso del G1, se evidenció el logro de los dos primeros procesos, pero sin éxito en el tercero.

El procedimiento usado por el G1, aunque parece ser engorroso, es una forma incipiente de generalización; no obstante, el trabajo de realizar las "tediosas sumas" tiene inherente un proceso sumamente importante en matemáticas como lo es el de las series (progresiones aritméticas). Además se está generando dos nuevas sucesiones que los estudiantes retomarán más adelante en estrategias de generalización más refinadas.

- Sucesiones de segunda diferencia: $a_n = \{2, 2, 2, 2, \ldots, 2\}$
- Sucesiones de primera diferencia: $b_n = \{3, 5, 7, 9, \ldots, 2n+1\}$

Con la sucesión a_n. Identifican que para cualquier número natural n, $a_n = 2$

De antemano se evidencia que reconocen la secuencia 3, 5, 7, 9, …

Hasta este punto, los estudiantes lograron observar la secuencia que corresponde a números impares consecutivos que inicia en 3, y que por lo tanto $b_n = 2n+1$. Sin embargo, hasta el momento ningún estudiante pudo conjeturar una "fórmula para generalizar" f_n, pero a través de las diferencias lograron construir la sucesión de una manera recurrente, esto es:

$f_1 = 3$, $f_2 = 3 + 5 = f_1 + 5$, $f_3 = 8 + 7 = f_2 + 7$

El siguiente diálogo con Integrante G1 muestra que para conocer un determinado término de la secuencia, basta con conocer el anterior y aumentarle una sucesión lineal que reconoce.

Integrante G1: "Para obtener un número de la sucesión debo conocer la anterior y sumarle un número impar"

Profesor: "¿Cuál debe ser ese número impar?". Por ejemplo para calcular el sexto término, cómo debo proceder?

Integrante G1: "Al término anterior, que es el quinto que corresponde a 35, le debo aumentar 13 porque como ya vamos para el sexto término debe ser (3, 5, 7, 9, 13) lo que le aumento al 35 para que de 48".

Profesor: ¿Cómo obtenemos el 13 sin tener que enunciar los anteriores?

Integrante G1: "Profe, como corresponde al quinto, y los números varían de 2 en 2, entonces es 2*5+3=10+3=13

Profesor: "Con este procedimiento, ¿cómo calculamos el término 21, es decir f_{21}?

Integrante G1: $f_{21} = f_{20} + 2 * 20 + 3$

Profesor: ¿Puedes conjeturar una fórmula para f_{n+1} ?

Integrante G1: Profe, según la frecuencia, sería:

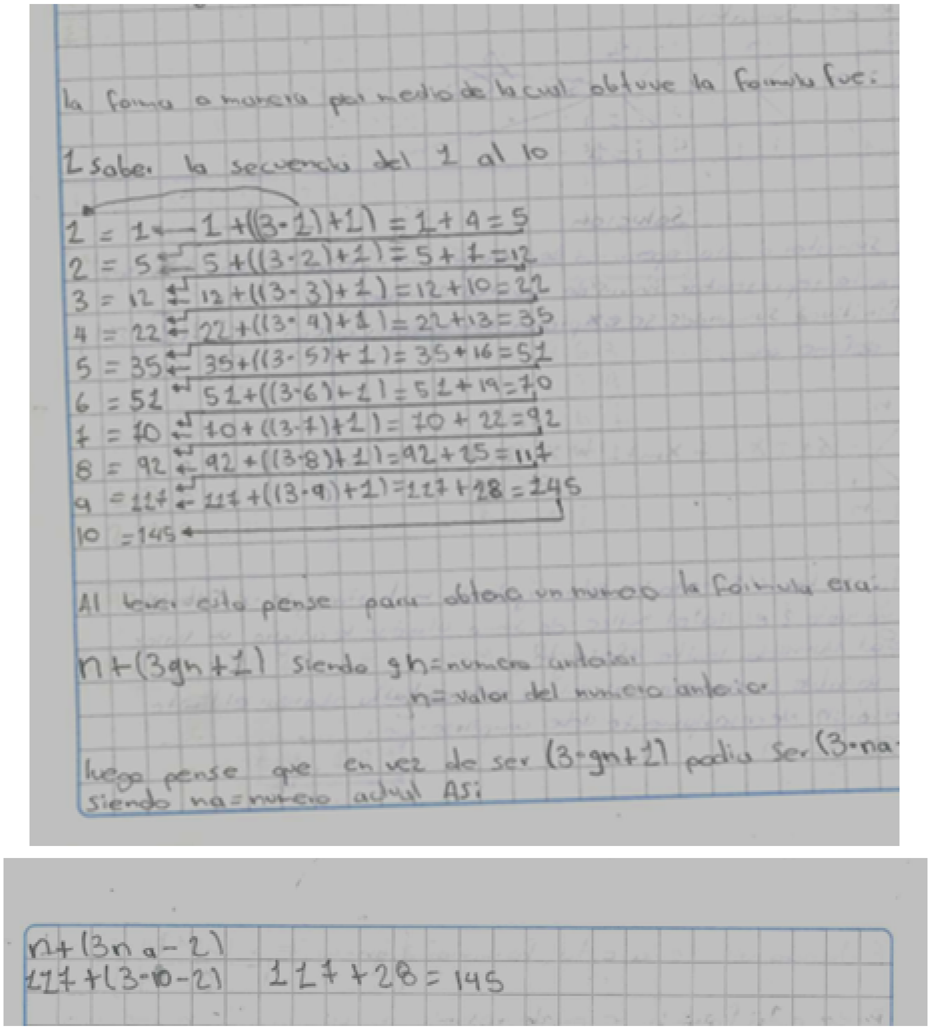
$$f_{n+1} = f_n + 2n + 3$$

El diálogo con Integrante G1 surgió porque al momento de compartir, con los otros grupos, la manera que percibieron los términos de la secuencia no sólo manifestó que la segunda diferencia siempre es dos, sino que al parecer reconoció que los números impares están relacionados con la secuencia. Integrante G1 infiere que para conocer un término de la sucesión debe conocer el anterior y sumarle un impar. Inicialmente Integrante G1 debe enunciar todos los impares hasta llegar al que debe agregar, pero luego reconoce el patrón lineal de la secuencia de impares y la generaliza aritméticamente.

Una vez que Integrante G1 compartió con los demás grupos, su manera de resolver el problema, otros grupos usaron lo compartido por éste y de esta forma, refinaron un poco más sus estrategias en la búsqueda de otras que permitieron darle solución a la situación planteada.

Estrategia G13.

La siguiente estrategia fue presentada por el G13 para la generalización de la sucesión de los números pentagonales (se pedía encontrar los términos 6, 10, 20 y n-ésimo):



la forma o manera por medio de la cual obtuve la formula fue:

1 sabe. la secuencia del 1 al 10

1 = 1 ← 1+((3·1)+1) = 1+4 = 5
2 = 5 ← 5+((3·2)+1) = 5+7 = 12
3 = 12 ← 12+((3·3)+1) = 12+10 = 22
4 = 22 ← 22+((3·4)+1) = 22+13 = 35
5 = 35 ← 35+((3·5)+1) = 35+16 = 51
6 = 51 ← 51+((3·6)+1) = 51+19 = 70
7 = 70 ← 70+((3·7)+1) = 70+22 = 92
8 = 92 ← 92+((3·8)+1) = 92+25 = 117
9 = 117 ← 117+((3·9)+1) = 117+28 = 145
10 = 145

Al hacer esto pense para obtener un numero la formula era:

n+(3gn+1) siendo gn = numero anterior
n = valor del numero anterior

luego pense que en vez de ser (3·gn+1) podia ser (3·na
siendo na = numero actual Así

n+(3n a − 2)
117+(3·10−2) 117+28 = 145

Ilustración 10: *Estrategia G13.*

La forma de organizar los datos deja ver que el G1 mantiene una correlación con la posición, e identificaron variantes e invariantes. Este grupo parece saber, por ejemplo, que para obtener la cantidad de puntos correspondiente a la figura 10 toma el resultado de la figura 9 (117) y le suma $3 * 9 + 1$ para obtener 145 que es la cantidad de puntos asociada a la figura 10.

Los medios semióticos de objetivación utilizados por G13 hacen notar un esfuerzo para representar simbólicamente las conclusiones observadas y avanzar en el proceso de generalización llegando a la expresión:

$$n+(3na-2)$$

En donde ***n*** representa el valor anterior de la secuencia

na representa el número actual (término que quiere hallar)

4.2 Generalización Contextual-Explícita aditiva.

Diversos autores como (Stacey, 1989, García-Cruz y Martion, 1997, Orton y Orton, 1999, Krebs, 2003, Rivera y Becker, 2005, Ebersbach, Wilkening, 2007, Amit y Neria, 2008), se han dedicado a realizar investigaciones que han aportado al reconocimiento de las diferentes estrategias de generalización. Dichos estudios han sido recopilados en el trabajo de investigación realizado por Akkan (2013), en el cual se refiere a una estrategia de generalización denominada *Generalización contextual* la cual está asociada con una técnica de cálculo e incluye la configuración de una regla centrada en la información que proporciona el caso, es decir, el estudiante acude al uso de fórmulas con las cuales ya está familiarizado (una fórmula usada para resolver el tipo de problema abordado) para llegar a la generalización objeto de estudio.

Estrategia G2.

Lo anterior se puede ilustrar en la siguiente estrategia realizada por el G2, en la solución de la sucesión del juego de la Ranita:

Estrategia G1.

Naturales	Secuencia		
1	3	$3-1=2$	$\rightarrow 1\times 2=2$
2	8	$8-2=6$	$\rightarrow 2\times 3=6$
3	15	$15-3=12$	$\rightarrow 3\times 4=12$
4	24	$24-4=20$	$\rightarrow 4\times 5=20$
5	35	$35-5=30$	$\rightarrow 5\times 6=30$
6			
7			
8			
9			
10	120	$120-10=110$	$\rightarrow 10\times 11=110$
⋮			
n	F_n	$F_n-n=$	$\rightarrow$ ¿?

De lo anterior Concluyo que:

De acuerdo a lo que Observamos en la Secuencia, para Obtener una formula para poder hallar Cualquier término notamos que $F_n - n = n(n+1) \Rightarrow F_n = n(n+1)+n \Rightarrow n(n+2)$

Ilustración 11: *Estrategia G2*.

En el último renglón se explicita la fórmula para el término general de la sucesión que se reescribe a continuación:

$$f_n - n = n(n+1) \Rightarrow f_n = n(n+1) + n \Rightarrow f_n = n(n+2)$$

Se puede observar la manera en que el G2, de acuerdo con la información contextual (suministrada en la tabla), acude a una comparación de la sucesión por diferencia entre cada término de la sucesión y la sucesión de los números naturales, obteniendo así otra nueva sucesión (2, 6, 12, 20,...), la cual reescribe como el producto de dos números consecutivos, que reconoce fácilmente. Dicho reconocimiento permite a este grupo llegar a una forma explícita del término general de la sucesión, esto es, este grupo utiliza una fórmula en la que relaciona las variables (posición y término) que le permite calcular cualquier término de la sucesión. Al respecto Akkan (2013) se refiere a este tipo de estrategia como *Generalización Explícita*; esta estrategia incluye la generalización de la relación entre las dos variables para determinar cualquier valor. Este es el primer paso de un progreso gradual para determinar las funciones mediante el uso de ecuaciones y fórmulas. Cuando se utiliza esta estrategia, se vuelve estable y factible tanto para términos lejanos como cercanos, por lo que ayuda a encontrar el término **"n"** y anota una regla general.

En síntesis, la *Generalización Contextual-Explícita Aditiva*, se caracteriza por establecer una comparación por adición o sustracción (las cuales se incluyeron dentro de esta misma categoría por ser operaciones que obedecen al esquema aditivo) entre los términos de la sucesión y otra sucesión ya conocida, con el objetivo de establecer una nueva sucesión más familiar, de esta manera busca reescribir la nueva sucesión mediante el uso de fórmulas explícitas ya conocidas.

Hubo un elemento importante en el trabajo de este grupo, ante el cual se prestó especial interés en tanto fue un elemento clave que abrió caminos para que los integrantes de los demás grupos exploraran nuevas ideas que condujeran a una nueva solución de la situación mediante una ruta distinta. Dicho elemento consistió en que los integrantes de este grupo centraron la mirada en elementos dados de la sucesión y descompusieron los términos en función de la posición y otro término del cual podían establecer una fórmula más familiar, más conocida. En este sentido acudieron al uso de diferentes *medios semióticos de objetivación* que ampliaron la gama de opciones para llegar a la solución de la actividad tales como la representación tabular, el dibujo de flechas a los lados, de fórmulas conocidas, de símbolos matemáticos y el uso de operaciones en este caso, una diferencia entre el término de la sucesión y su respectivo ordinal, lo cual condujo a una forma explícita de representar el término general de la sucesión.

Lo anterior, es coherente con lo expuesto por Radford (2003), quien afirma que para entrar en conocimiento con el objeto, el individuo realiza acciones, no obstante, para llevar a cabo estas acciones, el sujeto tiene que recurrir al uso de diferentes signos y artefactos como símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, dibujos, metáforas, analogías, entre otros, que le permitirán manifestar sus intenciones y poder así lograr el objetivo de sus actividades.

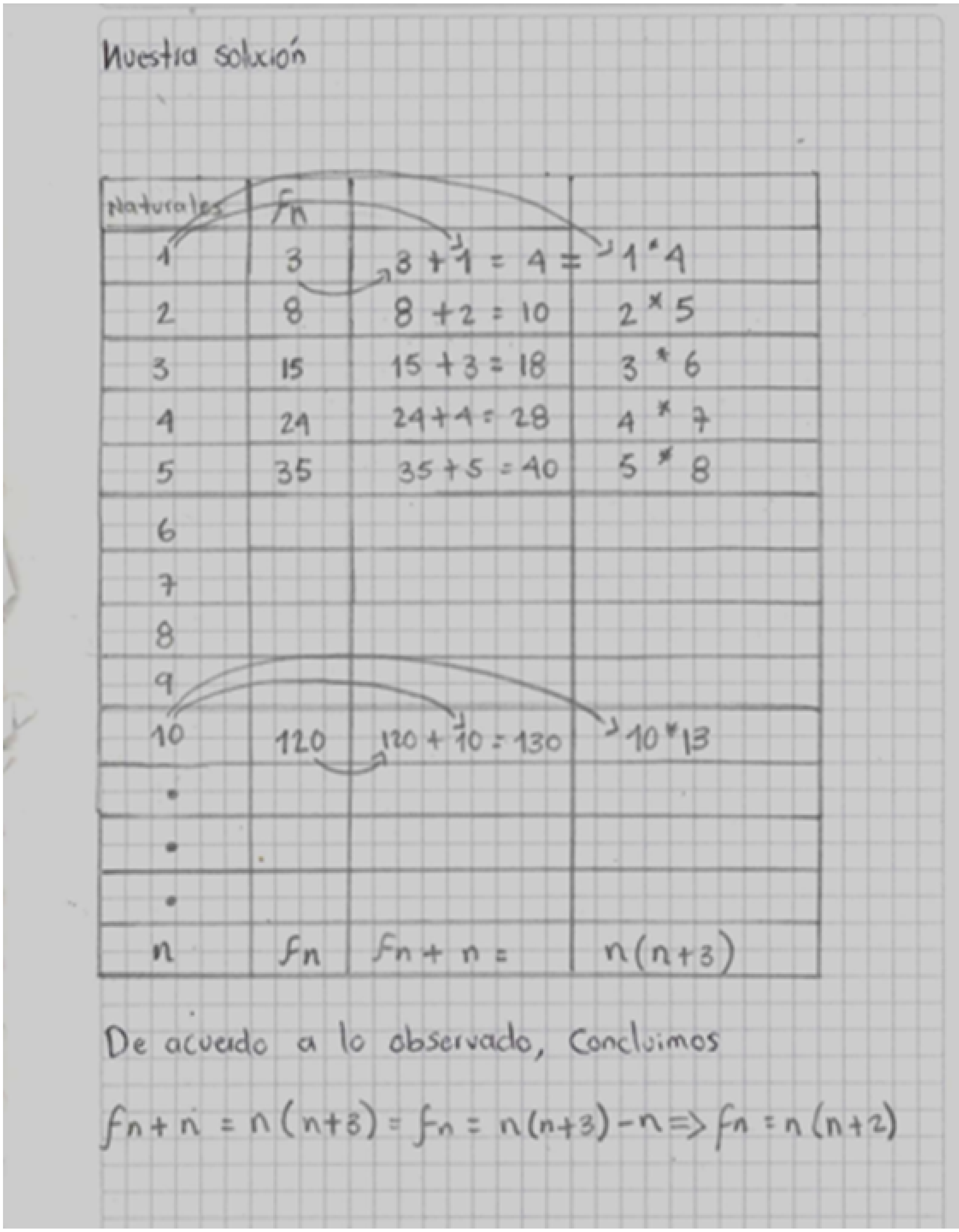
A continuación se describen otras estrategias utilizadas por otros grupos de estudiantes, que se incluyen dentro de esta misma categoría, que aunque son similares a las presentadas por G2, llama la atención que se desprendieran de la manera presentada por éste y acudieran a otros medios semióticos de objetivación que le permitieron llegar a la solución bajo una misma estructura pero a partir de operaciones y el uso de fórmulas de otras sucesiones:

Estrategia G3.

La siguiente estrategia fue presentada por el G3, en la generalización de la sucesión derivada del problema de la Ranita.

Este grupo, pudo establecer el término general de la sucesión bajo la comparación por adición. A través de ésta, propuso una nueva secuencia y la reescribió usando la misma idea empleada por el G2.

De esta manera, G3 presentó otra manera de relacionar los términos de la sucesión con los de la posición, pero lo hizo por adición:



Nuestra solución

Naturales	f_n		
1	3	$3+1=4=$	$1*4$
2	8	$8+2=10$	$2*5$
3	15	$15+3=18$	$3*6$
4	24	$24+4=28$	$4*7$
5	35	$35+5=40$	$5*8$
6			
7			
8			
9			
10	120	$120+10=130$	$10*13$
.			
.			
.			
n	f_n	$f_n+n=$	$n(n+3)$

De acuerdo a lo observado, Concluimos

$$f_n+n=n(n+3)=f_n=n(n+3)-n \Rightarrow f_n=n(n+2)$$

Ilustración 12: *Estrategia G3*.

Esta manera de establecer la coordinación entre la posición y el término general de la sucesión le permitió a G3, a partir de la adición entre la posición y la sucesión, identificar una forma de sucesión familiar y expresar el término general.

Estrategia G4.

Esta estrategia fue presentada por el G4 de igual manera que la anterior para la sucesión del juego de la Ranita.

G4 estableció una comparación entre la sucesión con los números cuadrados y notó que cada término de ésta es un número cuadrado menos 1:

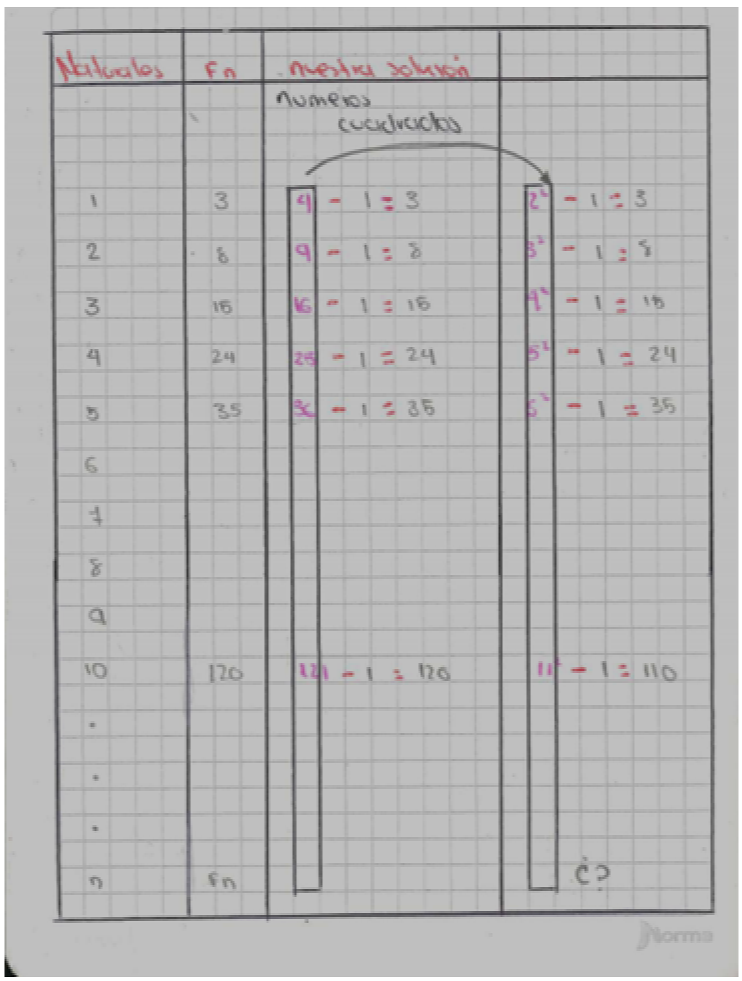


Ilustración 13: *Estrategia G4.*

Se estableció el siguiente diálogo con un integrante del G4

Integrante G4: Profesor, el resultado es un número cuadrado menos 1. Por ejemplo:

$$f_{10} = 11^2 - 1$$

Profesor: Según lo observado, ¿cómo escribirías f_n?

Integrante G4: de lo anterior se tiene que:

$$(n+1)^2 - 1 = f_n \Rightarrow n^2 + 2n + 1 - 1 = f_n$$
$$\Rightarrow f_n = n^2 + 2n = n(n+2)$$

Profesor: Integrante G4, ¿y por qué se te ocurrió compararla con los números cuadrados?

Integrante G4: Profe, es que me puse a observar la tabla de multiplicar que tenemos allá (señalando el tablero en el que se exhibe la tabla de multiplicar) y noté que los números de la diagonal principal de esa tabla, disminuidos en 1, correspondían a los de la secuencia que estamos resolviendo.

De lo anterior se pudo inferir que el G4 estableció una relación de la sucesión con los números cuadrados. Esta manera de observar los números de la secuencia y compararlos con los números cuadrados difiere de las estrategias anteriores porque directamente está llegando a una forma cuadrática de la secuencia.

Es de anotar que el ambiente de aula jugó un papel importante en la solución planteada por el G4; en este sentido Radford (2014) afirma: "*El sujeto, a través de la experiencia, de las posibilidades brindadas por el medio y de las normas culturalmente establecidas llega a conocer un objeto, ese conocimiento de dicho objeto hace que el sujeto entre en una relación históricamente mediada con el objeto y otros sujetos. De esta manera el objeto se hace perceptible al sujeto y el sujeto se hace perceptible a sí mismo tomando posición en las prácticas culturales*" (p.142).

Estrategia G5.

La siguiente estrategia también fue derivada de la sucesión de la Ranita.Aquí el G5 aprovecha lo expuesto por G2, pero lo hace de una manera muy particular, como se puede observar en la ilustración 14:

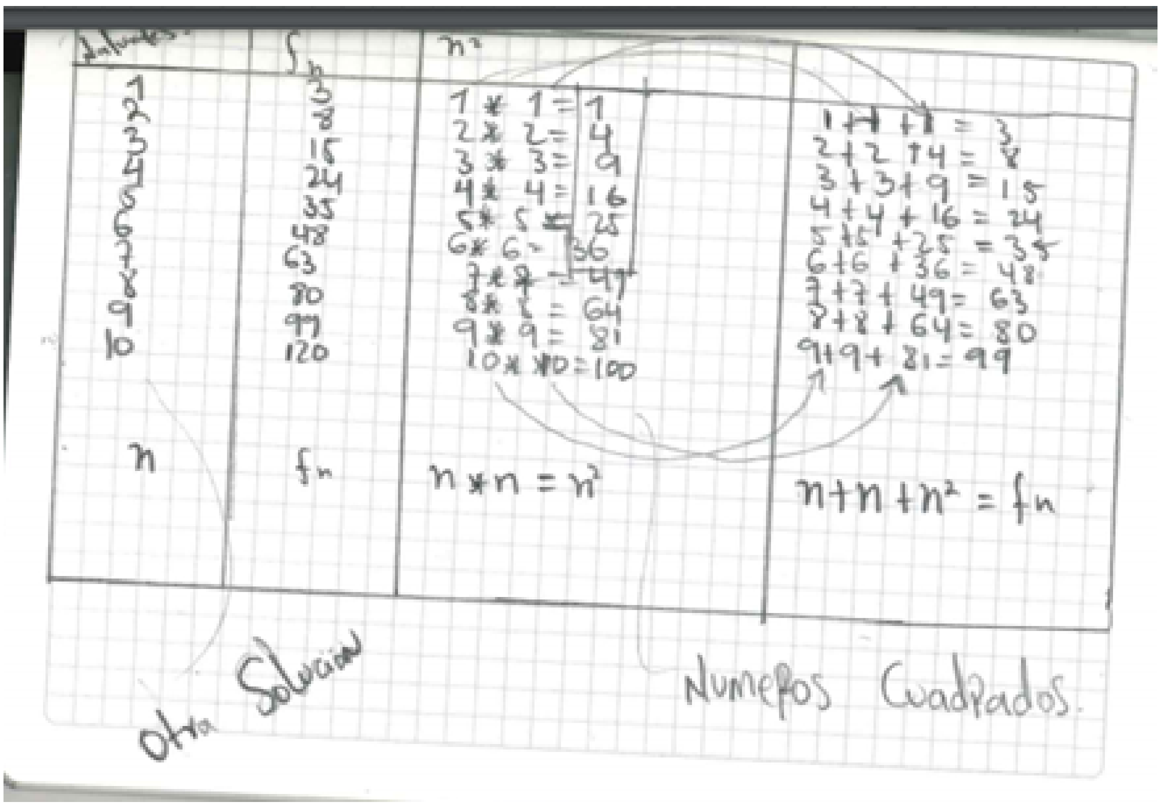


Ilustración 14: *Estrategia G5.*

La expresión de Integrante G5 fue: “profe, yo cambio el **por,** por un **más** y también el **igual** por un **más** y me da el número”.

Profesor: Integrante G5, explícanos la estrategia.

Integrante G5: Ejemplo: Para hallar el tercer término hago lo siguiente:

$3 * 3 = 9$, *lo cambio por* $3 + 3 + 9 = 15$ *que es el tercer término*

Para el cuarto término procedo igual:

$$4 * 4 = 16, \textit{ lo cambio por } 4 + 4 + 16 = 24 \textit{ que es el cuarto término}$$

Esta manera de "jugar" con los números y los símbolos le permitió al G5 llegar a la expresión general.

Profesor: ¿Cómo sería para el término en la posición n?

Integrante G5: Para el término en la posición n, sería:

$$n * n = n^2, \textit{ lo cambio por } n + n + n^2 = f_n$$

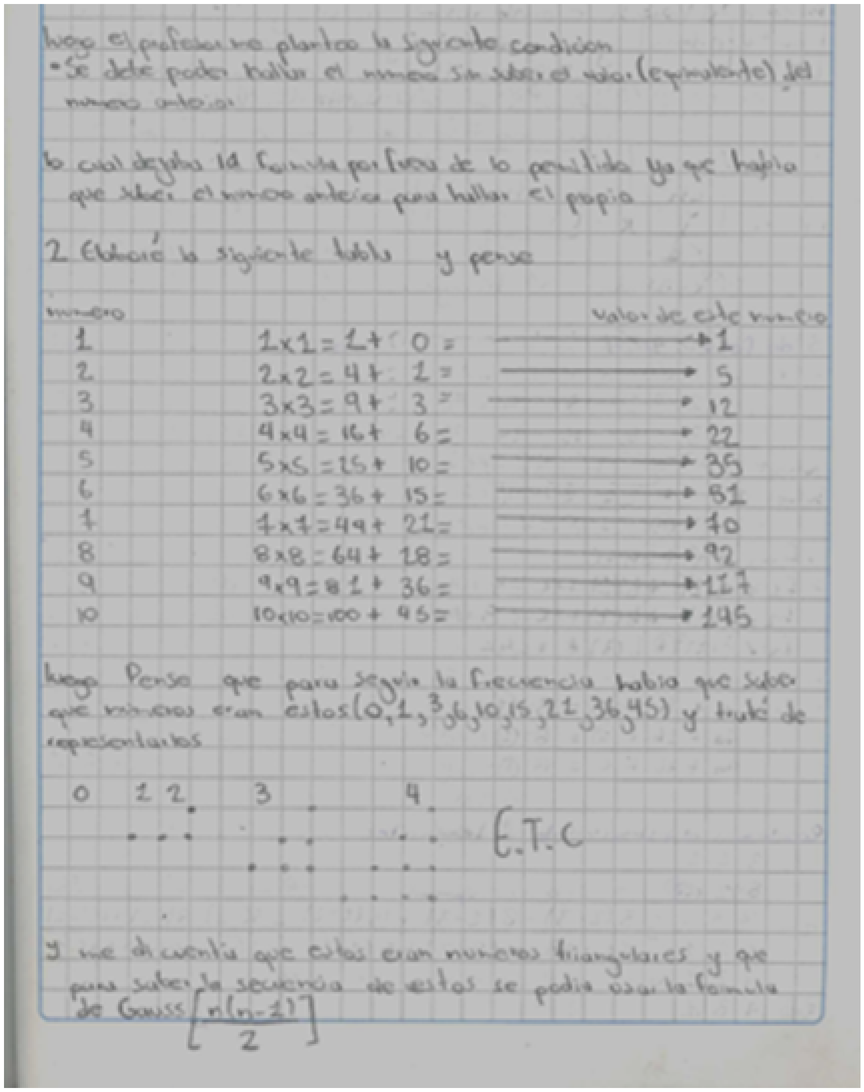
$$\Rightarrow f_n = 2n + n^2 \Rightarrow f_n = n(n+2).$$

La estrategia utilizada por G5, aunque es una observación muy particular en la secuencia que se está estudiando, es una mirada diferente de lo que sucede y procede con una "transformación" de símbolos que le permitieron observar una relación, que en el caso particular de la secuencia funciona.

La siguiente estrategia fue presentada por G13, como una modificación de la estrategia presentada anteriormente por este mismo grupo, que se inserta en esta categoría de generalización.

La estrategia surgió al establecer el diálogo con Integrante G13, cuando expuso la estrategia recurrente presentada anteriormente relativa a la sucesión de los números pentagonales:

Profesor: Eso está muy bien, pero, para hallar el término de la figura 10 se necesitó conocer el término de la figura 9. La idea es: ¿cómo obtener dicho resultado sin conocer los anteriores?



luego el profesor nos planteo la siguiente condicion
• Se debe poder hallar el numero sin saber el valor (equivalente) del numero anterior

lo cual dejaba la formula por fuera de lo permitido ya que habia que saber el numero anterior para hallar el propio

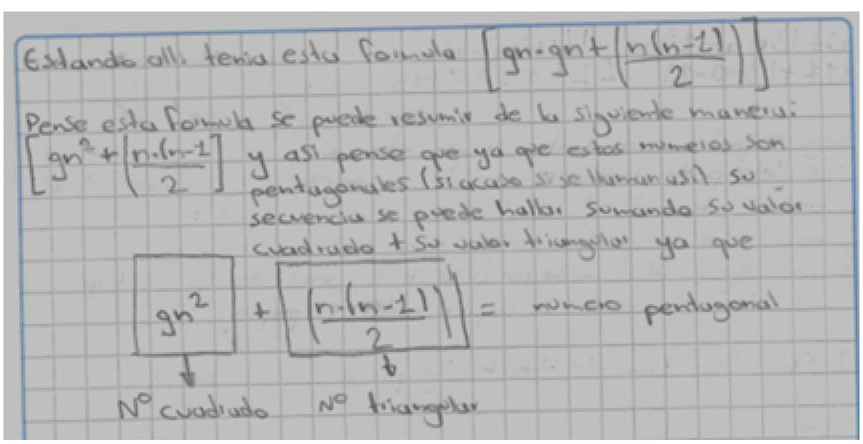
2 Elaboré la siguiente tabla y pense

numero		valor de este numero
1	$1 \times 1 = 1 + 0 =$	1
2	$2 \times 2 = 4 + 1 =$	5
3	$3 \times 3 = 9 + 3 =$	12
4	$4 \times 4 = 16 + 6 =$	22
5	$5 \times 5 = 25 + 10 =$	35
6	$6 \times 6 = 36 + 15 =$	51
7	$7 \times 7 = 49 + 21 =$	70
8	$8 \times 8 = 64 + 28 =$	92
9	$9 \times 9 = 81 + 36 =$	117
10	$10 \times 10 = 100 + 45 =$	145

luego Pense que para seguir la frecuencia habia que saber que numeros eran estos (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 36, 45) y traté de representarlos

0 1 2 3 4 E.T.C

y me di cuenta que estos eran numeros triangulares y que para saber la secuencia de estos se podia usar la formula de Gauss $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$



Estando alli tenia esta formula $\left[gn \cdot gn + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\right]$

Pense esta formula se puede resumir de la siguiente manera:
$\left[gn^2 + \left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right)\right]$ y asi pense que ya que estos numeros son pentagonales (si acaso si se llaman asi) su secuencia se puede hallar sumando su valor cuadrado + su valor triangular ya que

$$\underbrace{\boxed{gn^2}}_{\text{Nº cuadrado}} + \underbrace{\boxed{\left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right)}}_{\text{Nº triangular}} = \text{numero pentagonal}$$

Ilustración 15: *Intento de generalización G13.*

Es muy importante ver todo el esfuerzo realizado por el G13 para hallar una expresión que generalice a los números pentagonales; el uso de otros medios semióticos de objetivación, hace ver una maduración progresiva en la búsqueda de nuevos caminos para resolver el problema. La visualización de la suma de dos sucesiones (números cuadrados y números triangulares) le permitió a G13 hallar una solución para la sucesión objeto de estudio.

4.3 Generalización contextual-explícita multiplicativa.

A diferencia de las estrategias usadas en la categoría antes descrita, la generalización Contextual-Explícita multiplicativa es abordada a través de productos o cocientes entre sucesiones ya conocidas, las cuales surgieron después de la discusión de las estrategias aditivas. Es de anotar que si bien es cierto que ambas categorías pudieron estar incluidas en una misma (Contextual- Explícita), se optó por hacer una clasificación teniendo como criterio que una obedecía al esquema aditivo y la otra al esquema multiplicativo.

Este tipo de Generalización se ilustra a partir de las siguientes estrategias usadas por algunos grupos:

Estrategia G6.

El moderador de G6 presenta otra manera de abordar la generalización para el juego de la Ranita. Este grupo reescribió el cuadro usado en las estrategias anteriores, de la siguiente manera:

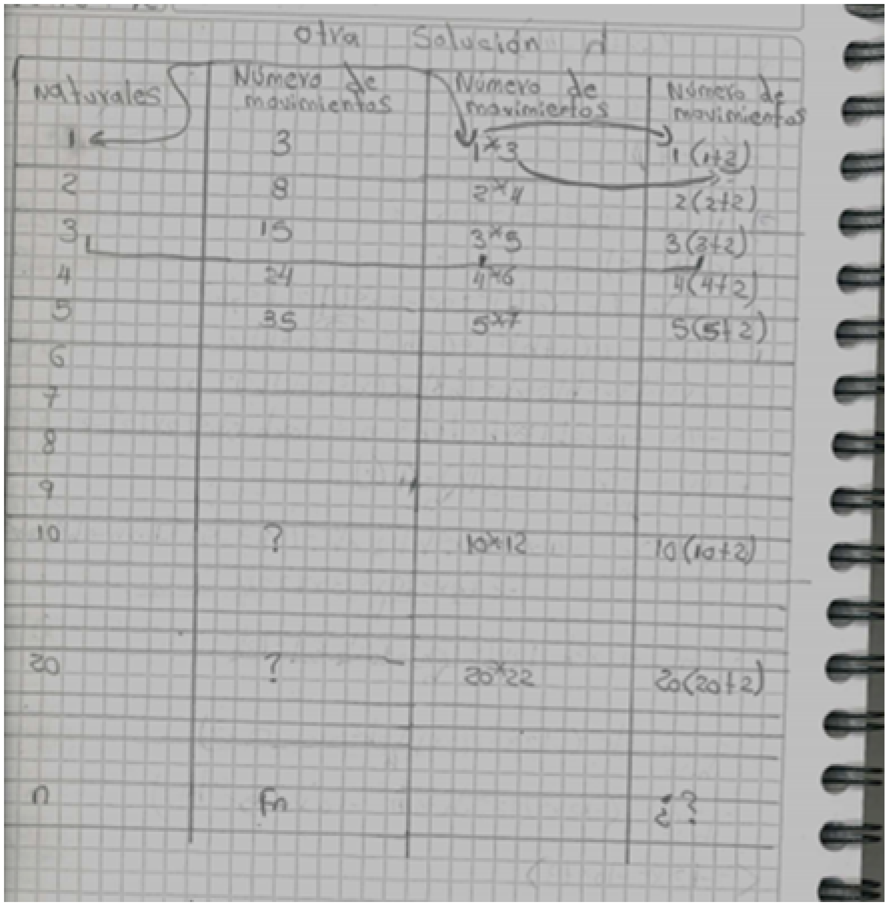


Ilustración 16: *Estrategia G6.*

Esta forma de reescribir la tabla le permitió al G6 centrar la atención entre lo que varía y lo que permanece constante y le permite llegar más facilmente a la generalización explícita. El hacer la flecha deja percibir la correlación entre la posición de la secuencia y uno de los factores hallados. Al preguntarle por el otro factor no tuvo dificultad en reconocerlo y representarlo como suma de la posición y la constante 2. Es muy importante la manera de presentar los datos por el grupo G6, pues de una generalización aritmética pudo inferir generalización algebraica contextual explícita.

$$f_n = n(n+2)\,.$$

De acuerdo las características y formas de pensamiento algebraico, niveles y problemas en torno a la generalización (Radford, 2003, 2006, 2010, 2013), el G6 para la solución de esta tarea usó pensamiento algebraico contextual que lo llevó a una generalización contextual y utilizó un pensamiento algebraico explícito que lo condujo a una generalización explícita. Los medios por los cuales el G6 realizó su solución fueron particulares, pero obedecieron a procedimientos similares que otros compañeros utilizaron. Radford (2003), afirma que estos medios aparecen inmersos en procesos de atribución de significados enmarcados por modos culturales de conocimiento que alientan y legitiman formas particulares de los individuos frente al uso o no uso de signos y herramientas durante su actividad y que es precisamente la manera en que los individuos recurren y vinculan a estos, lo que puede arrojar alguna luz sobre el problema de la construcción social del conocimiento.

El siguiente procedimiento, aunque en esencia es el mismo de G6, difiere en la forma de comparar las sucesiones, esto es, mientras que G6, se limitó a multiplicar los términos de la columna uno por el correspondiente de la columna dos, (en el cual hay implícita una factorización que el grupo no percibió), el G7 recurrió a una división entre los términos de la secuencia y su correspondiente ordinal.

Estrategia G7.

Otra estrategia que surgió del juego de la Ranita fue presentada por el moderador del G7. Este grupo, observó que los resultados son los mismos del segundo factor encontrado por el G6.

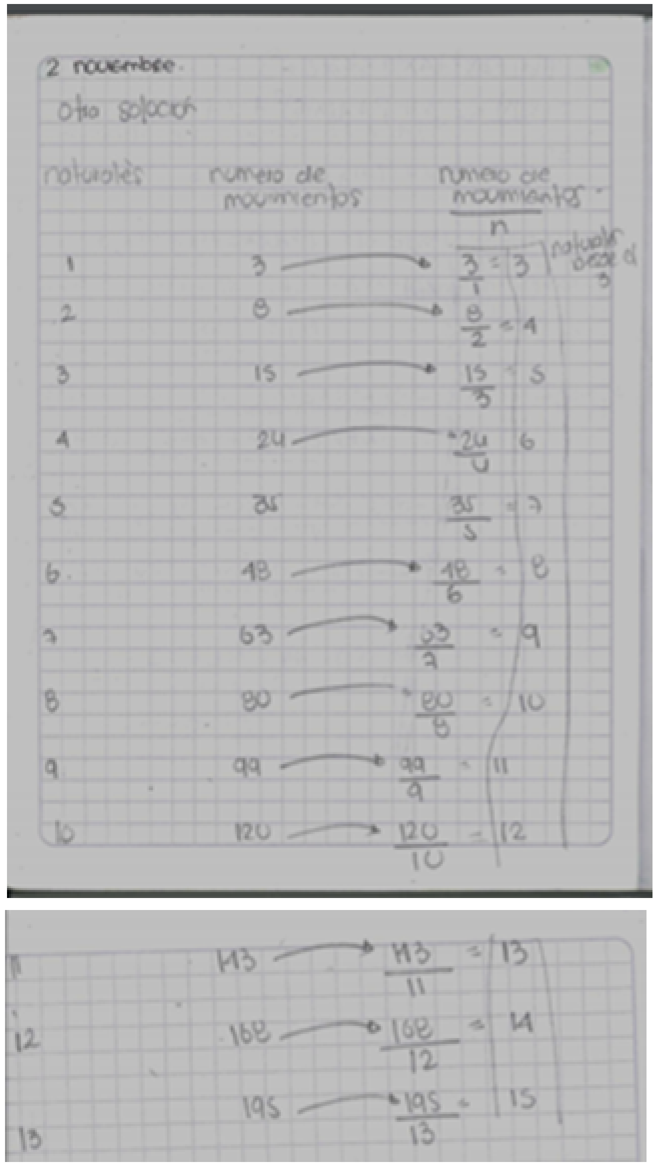


Ilustración 17: *Estrategia G7.*

Se establece el siguiente diálogo con Integrante G7:

Profesor: Integrante G7, explícanos tu estrategia.

Integrante G7 : Yo dividí, cada término de la secuencia entre la posición que le correspondía, y el resultado es la secuencia de los naturales pero desde el 3 (3, 4, 5, 6, …). La misma que se ve en la que hizo G6.

Por ejemplo $\frac{f_5}{5} = \frac{35}{5} = 7$, dos más que el 5.

Profesor: Y si realizas el mismo procedimiento para el término en la posición n, ¿puedes conjeturar algo?

Integrante G7: Siguiendo el mismo comportamiento debería ser:

$$\frac{f_n}{n} = n + 2$$

Profesor: ¿Sabes despejar f_n de la expresión anterior?

Integrante G7: De este procedimiento se deduce:

$$\frac{f_n}{n} = n + 2 \Rightarrow f_n = n(n + 2)$$

Esta manera de relacionar los números de la sucesión con la posición permitió establecer una comparación por cociente, la cual, en este caso condujo, a la expresión general.

Estrategia G8.

De igual manera el G8 realizó un procedimiento similar para la solución de la sucesión de los números pentagonales, pero con una pequeña variación, como se muestra a continuación:

La estrategia del G8 consistió en multiplicar los números de la secuencia por 2 y luego, dicho resultado lo dividió entre el correspondiente de la posición y observó que los resultados son de la forma $3n - 1$.

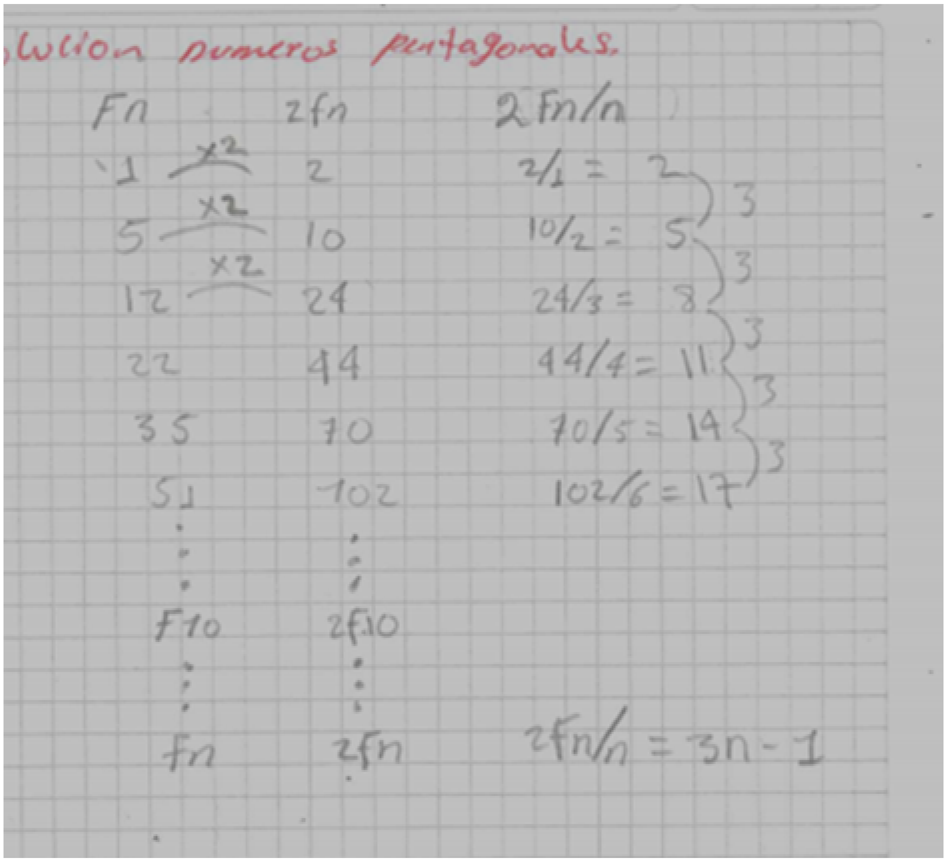


Ilustración 18: *Estrategia G8.*

De esta manera resulta que:

$$\frac{2f_n}{n} = 3n - 1$$

$$f_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Es de anotar que la dinámica llevada a cabo en el aula posibilitó el trabajo cooperativo, en el cual, en palabras de García Cruz (1998), se está aplicando implícitamente *normas sociomatemáticas* (NSM) que de acuerdo con el autor deben estar siempre durante la actividad matemática.

NSM-1. Distinguir entre una explicación sobre la validez de la regla para un cálculo y la explicación sobre la validez de los cálculos efectuados.

NSM-2. Argumentar sobre la validez de la regla para el cálculo.

NSM-3. Formular lo que distingue una solución de otra.

NSM-4. Generar diferentes soluciones para un mismo problema.

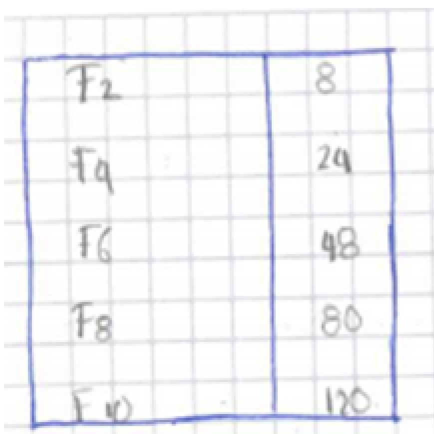
NSM- 5. Expresar una regla para el cálculo, solución, diferente a una ya dada

La siguiente estrategia fue presentada por el moderador de G8. Entre otras formas de llegar a la generalización para f_n (sucesión del juego de la Ranita), el G8 centró la mirada en algunos términos de la sucesión y planteó lo siguiente:

Integrante G8: Profe, los términos pares de la sucesión son:

$$f_2 = 8,\ f_4 = 24,\ f_6 = 48,\ f_{10} = 80$$

Y los presentó en una tabla:



F2	8
F4	24
F6	48
F8	80
F10	120

Ilustración 19: *Tabla realizada por G8.*

Profesor: ¿Qué puedes concluir de la tabla?

Integrante G8: Que todos estos datos están en la tabla del 8.

Profesor: Trata de reescribir cada valor como un producto entre dos números tal que el 8 sea uno de los factores:

Integrante G8 completa la tabla como sigue:

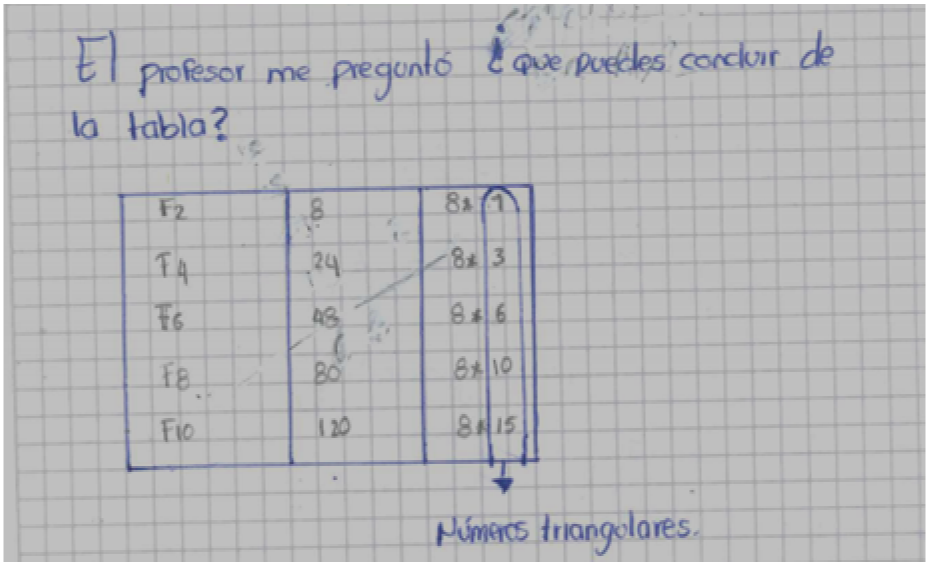


Ilustración 20: *Tabla realizada por G8 II.*

Integrante G8: Concluyo que cada término en la posición par de la sucesión se puede factorizar como el producto de 8 por un número triangular (señala el triángulo de Pascal que se encuentra exhibido en el aula.

Profesor: Integrante G8, entonces ¿cómo podrías generalizar lo que observaste?

Integrante G8: Profe como estamos refiriéndonos a posiciones pares de la sucesión, entonces sería:

$$f_{2n} = 8[\frac{n(n+1)}{2}] = 4n(n+1)$$

Profesor: Este resultado qué información te suministra?

Integrante G8: Profe, que también pude haber escrito los términos de la sucesión como ¡el producto entre 4 y dos números naturales consecutivos! “Esto es mágico”.

Esta es una generalización que no se estaba buscando pero que a través de la observación se pudo conjeturar una forma general.

La discusión de este procedimiento permitió que otros estudiantes también buscaran otras relaciones.

Estrategia G9.

La siguiente estrategia (para la solución de la sucesión del juego de la Ranita) fue presentada por el G9. Este grupo, manifestó, con gran asombro: “profe, entonces de lo que se trata es de jugar con los números y centrar la mirada en situaciones ya conocidas”.

Y observa lo siguiente:

Integrate G9: Profesor, nosotros observamos lo siguiente:

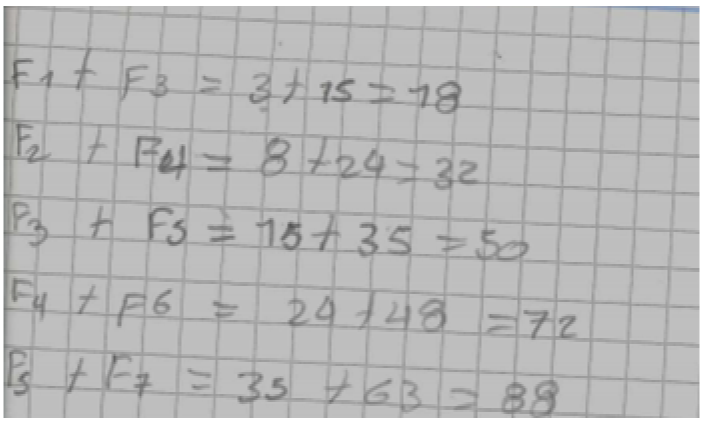
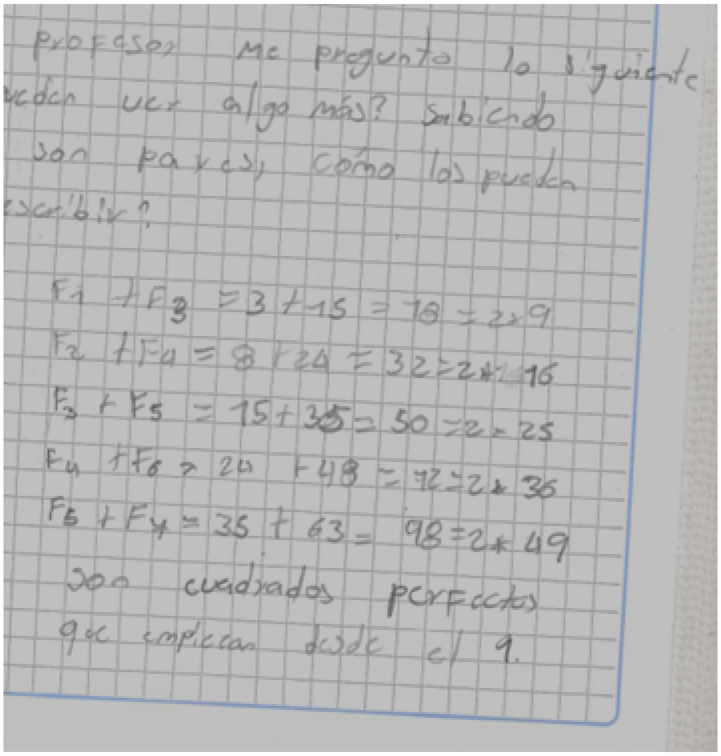


Ilustración 21: *Estrategia G9.*

Notamos que los resultados son números pares

Profesor: ¿Pueden ver algo más? Sabiendo que son pares, ¿cómo los pueden reescribir?

Integrante G9: los podemos factorizar teniendo al **2** como factor:



profesor me pregunto lo siguiente
ueden ver algo más? sabiendo
son pares, cómo los pueden
scribir?

F1 + F3 = 3 + 15 = 18 = 2*9
F2 + F4 = 8 + 24 = 32 = 2*16
F3 + F5 = 15 + 35 = 50 = 2*25
F4 + F6 = 24 + 48 = 72 = 2*36
F5 + F7 = 35 + 63 = 98 = 2*49
son cuadrados perfectos
que empiecan desde el 9.

Ilustración 22: *Procedimientos G9.*

¡Entonces es el doble de un cuadrado perfecto!

Profesor: ¿Cuál cuadrado?

Integrante G9: El de la posición mayor. Por ejemplo se podría asegurar que:

$$f_8 + f_{10} = 2 * 10^2 = 2 * 100 = 200$$

Profesor. ¿Cómo podemos generalizar la propiedad observada, si el menor es f_n **?**

Integrante G9: El otro término sería f_{n+2}, por lo tanto la propiedad sería:

$$f_n + f_{n+2} = 2(n+2)^2$$

Esta manera que usa el G9 de “jugar” con los términos de la secuencia, motivado por lo realizado por Integrante G8 los llevó a establecer otra propiedad de la sucesión y abrió otras posibilidades para que otros compañeros exploren otras relaciones.

Estrategia G10.

La siguiente estrategia fue presentada por G10. Este grupo, motivados por la propuesta de solución realizada por el G9 en la solución del juego de la Ranita, encontró otra relación diferente a la observada por G10.

Tabla realizada por G10:

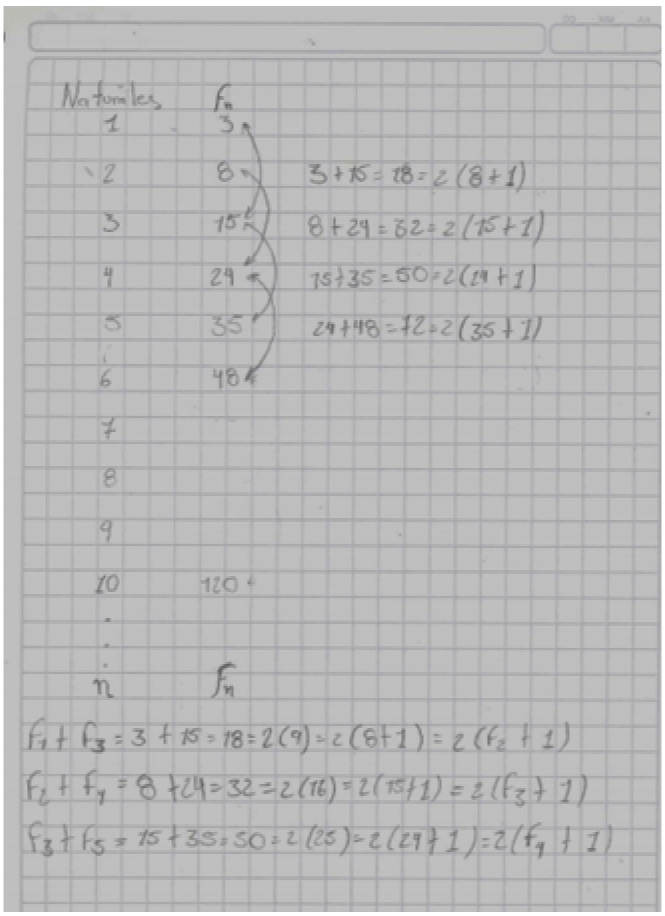


Ilustración 23: *Estrategia G10.*

Se reescribe la parte inferior de la hoja.

$$f_1 + f_3 = 3 + 15 = 18 = 2(9) = 2(8 + 1) = 2(f_2 + 1)$$

$$f_2 + f_4 = 8 + 24 = 32 = 2(16) = 2(15 + 1) = 2(f_3 + 1)$$

$$f_3 + f_5 = 15 + 35 = 50 = 2(25) = 2(24 + 1) = 2(f_4 + 1)$$

$$f_n + f_{n+2} == 2(f_{n+1} + 1)$$

Es muy importante no dejar pasar por alto lo sucedido con las estrategias G8, G9 y G10, pues el estudiante no sólo está buscando llegar a la solución de la pregunta hecha por el maestro sino que propone otras rutas que pueden conducir a conclusiones de suma importancia. Que el estudiante explore otros posibles caminos, derivados de su manera de percibir e interpretar el fenómeno en cuestión, puede conducir a soluciones que posiblemente el maestro no haya tenido en cuenta o que ni había advertido que sucedían.

Según Radford (2014), lo que caracteriza al conocimiento es el movimiento de posibilidades a concretarse o realizarse a través de la mediación de la actividad, ofrece un espacio para dotar de nuevas formas de relación entre docentes y estudiantes, agregando: *Al participar en la actividad, el conocimiento es algo que los profesores y los estudiantes producen. Es decir, el conocimiento es algo que ellos "hacen avanzar". Esto es lo que "producir" significa etimológicamente: hacer avanzar algo (en este caso, posibilidades de acción matemática y reflexión)* (2014, pág.8).

Estrategia G14.

Es importante resaltar que la estrategia de generalización contextual-explicita multiplicativa le permitió a G14 encontrar una generalización para las diagonales del triángulo de Pascal a partir de la ya conocida de los números triangulares (segunda diagonal).

- Término general para las sucesiones correspondientes a las diagonales del triángulo de Pascal:

Ya se conoce que la segunda diagonal del triángulo de Pascal corresponde a los números triangulares (T_n) , que en este caso se ha nombrado como $D_{n,2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Se propone hallar la forma general para $D_{n,3}$ que corresponde a la secuencia de la tercera diagonal.

El siguiente diálogo se llevó a cabo con un estudiante de G14.

Integrante G14: Profesor se me ocurrió dividir cada término de la sucesión con los términos correspondientes de los números triangulares; noté que algunos denominadores eran tres y reescribí los otros de tal manera que también tuvieran el 3 como denominador. Observo que el numerador es lineal de la forma $n+2$

Tabla 5: *Estrategia G14.*

n	$D_{n,3}$	$D_{n,2}$	$\frac{D_{n,3}}{D_{n,2}}$
1	1	1	$\frac{3}{3}$
2	4	3	$\frac{4}{3}$
3	10	6	$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$
4	20	10	$\frac{20}{10}=2=\frac{6}{3}$
5	35	15	$\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$
6	56	21	$\frac{56}{21}=\frac{8}{3}$

Por lo tanto se puede deducir que:

$$D_{n,3}=\frac{D_{n,2}(n+2)}{3}=\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2*3}$$

Profesor: Integrante G14, ya puedes conjeturar una fórmula para $D_{n,4}$?

Integrante G14: Profesor, siempre aumento 1 en el numerador y en el denominador.

Profesor: Integrante G14, ¿como así que siempre aumentas 1 tanto en el numerador como en el denominador?.

Integrante G14: Sí profe, en el numerador sería n+3, le aumenté 1 al 2; y en el denominador hice lo mismo.

$$D_{n,4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2*3*4}$$

Profesor: ¿Será que funciona? Verifícala por ejemplo para el sexto término de esa diagonal. Debe dar 126, según el Triángulo de Pascal.

Integrante G14: $D_{6,4} = \frac{6(6+1)(6+2)(6+3)}{2*3*4} = \frac{6*7*8*9}{2*3*4} = 7*2*9 = 126$

Profesor: De acuerdo con lo anterior, si la diagonal es la diagonal k, ¿cómo sería una expresión general para $D_{n,k}$?

Integrante G14: Los factores del numerador serían:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+(k-1))$$

Los factores del denominador serían:

$$2*3*4*\ldots*(k)$$

Entonces

$$D_{n,k} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+(k-1))}{2*3*4*\ldots*(k)}$$

Integrante G14 ha usado una de las estrategias utilizadas por sus compañeros y le ha dado resultado para establecer una expresión general para las diagonales del Triángulo de Pascal.
Es interesante ver que la estrategia usada para los casos particulares de la sucesión del juego de la Ranita y la de los números Pentagonales (sucesiones cuadráticas), ha sido consistente para las sucesiones polinomiales de las diagonales del Triángulo de Pascal.

4.4 Generalización Gaussiana

Este tipo de estrategia fue denominado Generalización Gaussiana porque los estudiantes acudieron a un procedimiento análogo al utilizado por Gauss para la obtención de la fórmula que representa los números triangulares, como la suma de los primeros números naturales, la cual consiste, mediante restas sucesivas, identificar una sucesión lineal asociada al problema, luego, a través de la suma de los términos de dicha sucesión lineal se generan los términos de la secuencia objeto de estudio, después, se suma el primer término con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente, lo que arroja una suma constante, posteriormente, esa suma constante se multiplica por la mitad de los términos.

Lo anterior obedeció, posiblemente, a que los estudiantes en sesiones anteriores a la presente investigación, ya habían abordado sucesiones de tipo lineal, la sucesión de los números cuadrados y la sucesión de los números triangulares; y en consecuencia, habían tenido acceso al procedimiento realizado por Gauss descrito en el párrafo anterior.

Esta estrategia se trae a colación porque dos grupos la usaron para la solución tanto de la situación de la sucesión del Juego de la Ranita como para la sucesión de los números pentagonales, mostrando cierta consistencia porque las tres sucesiones (la de los números triangulares, la que se derivó del juego de la ranita y la de los pentagonales), pertenecen a la misma familia.

Estrategia G11.

La siguiente estrategia, para la sucesión del juego de la Ranita, fue presentada por el grupo G11. El G11 advirtió que los términos de la sucesión son la suma de los primeros números impares pero iniciando desde el 3 y hace un ejemplo para calcular f_{10} .

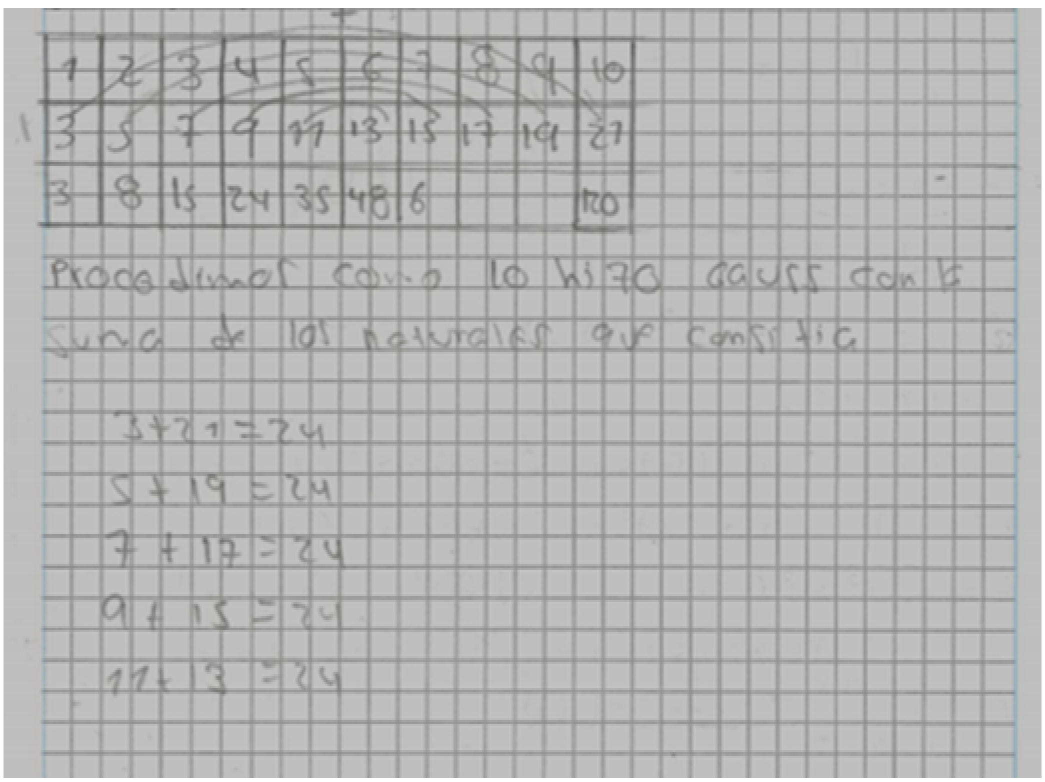


Ilustración 24: *Estrategia G11.*

Integrante G11: la suma se pudo realizar al estilo de Gauss.

Profesor: ¡explícanos!

Integrante G11: Para hallar el término No. 10 tomé el primero y lo sumé con el último (3+21=24) y se notó que al tomar el segundo y sumarlo con el penúltimo también da 24 y así sucesivamente:

$$3 + 21 = 24$$
$$5 + 19 = 24$$
$$7 + 17 = 24$$
$$9 + 15 = 24$$
$$11 + 13 = 24$$

De esta manera el término 10 se calcula sumando el primero más el último y luego este resultado se multiplica por la mitad de los términos porque se tomaron por parejitas.

Por lo tanto el $f_{10} = (3+21)\frac{10}{2} = 24 * 5 = 120$

Pero no sabemos cómo expresar el término general.

Profesor: ¿Ya reconocen la secuencia: **3, 5, 7, 9, 11,…**?

Integrante G11: sí profe, son los números impares desde el 3.

Profesor: ¿Y ya tienen una expresión general para generar esa secuencia?

Integrante G11: !ah¡, claro es $2n+1$, por ejemplo si $n = 1$, entonces obtengo el **3**, si $n = 2$ entonces obtengo el **5** y así sucesivamente.

Entonces el término general lo obtenemos: primero más último y este resultado se multiplica por la mitad de los términos

Entonces usando el procedimiento anterior se concluye que:

$$f_n = \frac{n[3+(2n+1)]}{2}$$

$$f_n = \frac{n[2n+4]}{2} = n(n+2)$$

El procedimiento utilizado por Integrante G11 permite explicar lo siguiente.

Haciendo uso del procedimiento anterior, y conociendo que:

$$\sum_{i=1}^{n} a = an$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ba_i = b\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Se aprovecha el procedimiento anterior para escribirlo de la siguiente manera:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n}(2i+1) = \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i + n = 2\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$f_n = \sum_{i=1}^{n}(2n+1) = n(n+1) + n = n(n+2)$$

Estrategia G12.

El G12 usó la misma estrategia que G11 para resolver el problema de los pentagonales; el abordar este procedimiento para este tipo de sucesión es una generalización consistente de una estrategia porque como se mencionó anteriormente las sucesiones pertenecen a una misma familia de sucesiones cuadráticas.

La siguiente estrategia, para resolver la secuencia con respecto a los números pentagonales fue realizada por G12**.**

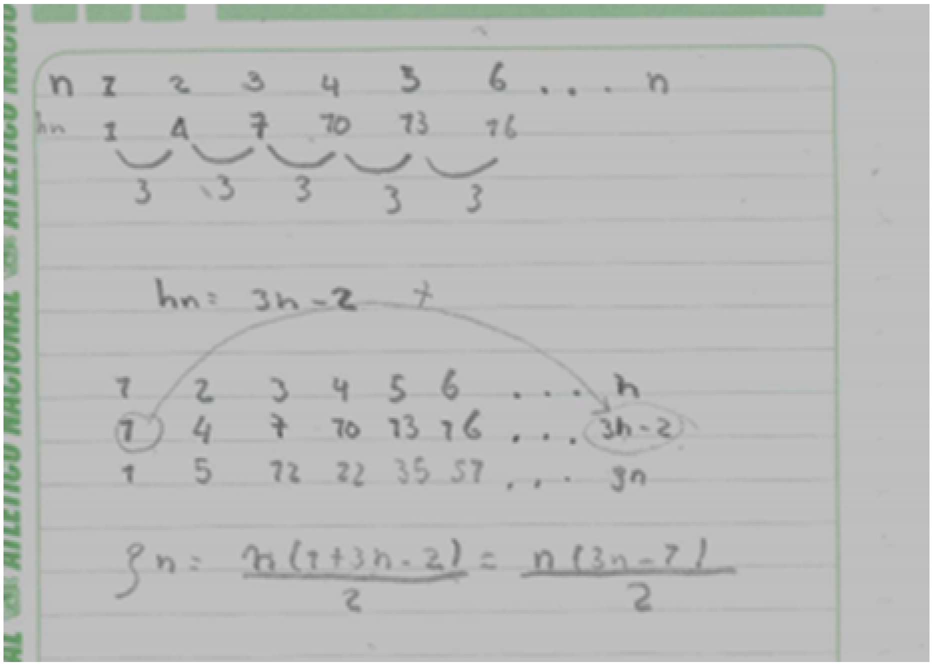


Ilustración 25: *Estrategia G12.*

Es claro que G12 ha utilizado la forma "Gaussiana" usada por G11, para encontrar el término general de esta secuencia

$$g_n = \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 3\sum_{i=1}^{n} i - 2n = \frac{3n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n(n+1)-4n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

G12 ha realizado una extensión de la estrategia evidenciando que es el mismo tipo de sucesión que el de la Ranita.

4.5 Generalización Pascaliana

Este tipo de estrategia fue denominado *Generalización Pascaliana* porque los estudiantes acudieron a relacionar, en primera instancia, la diagonal dos (la de los números triangulares), la diferencia constante y una sucesión de tipo lineal para generar la sucesión objeto de estudio, de esta manera, la Generalización Pascaliana consiste en reescribir la sucesión objeto de estudio como un polinomio cuyas variables son las diagonales del triángulo de Pascal; a manera de ejemplo, si la sucesión, a través de diferencias sucesivas, conduce a una diferencia constante (***d***) en el segundo nivel (sucesión cuadrática), su término n-ésimo será un polinomio cuyas variables son los términos de la diagonal dos (números triangulares), la diagonal uno (números naturales) y la diagonal cero (sucesión constante 1)

$$a_n = dD_{n,2} - (2d - b)n + (d + a_1 - b)$$

En donde $b = a_2 - a_1$

Esta última estrategia permitió generalizar un procedimiento para cualquier sucesión de tipo polinomial cuya diferencia constante se encuentra en el k-ésimo nivel, como un polinomio cuyas variables son la k-ésima diagonal del triángulo de Pascal:

$$a_n = dD_{n,k} - m_1 D_{n,(k-1)} - m_2 D_{n,(k-2)} - \dots - m_k D_{n,0}$$

En donde cada k, desde k=0, 1, 2, 3,… corresponde a la k-ésima diagonal del triángulo de Pascal. En donde d es la diferencia constante.

Es importante resaltar que lo anterior obedeció posiblemente, a que los estudiantes tuvieron acceso visual al Triángulo de Pascal ya que éste hace parte de la decoración del aula, y por tanto, se convirtió en una herramienta clave en el desarrollo de esta estrategia.

Es de anotar que a pesar que G13 ha encontrado una expresión general para el ***n-ésimo*** término de la sucesión, ha madurado otra idea. En excel, G13 generó diferentes sucesiones, cuyas segundas diferencias sean constantes. En particular se expone la solución que le dió a una de ellas, la cual dió la pauta para repensar cómo se podría generalizar el procedimiento, primero para cualquier sucesión de este tipo (cuadrática), luego para cuyas diferencias constantes están en el tercer nivel (cúbicas), cuarto nivel, quinto nivel, etc..

Sucesión generada por G13

4, 13, 27, 46, 70,...,f_n

G13, a través de restas sucesivas buscó la diferencia constante y el nivel de dicha diferencia. A esa diferencia la llama base.

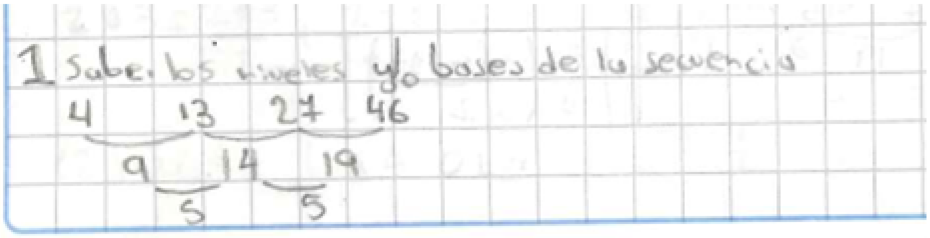


Ilustración 26: *I Procedimiento realizado por G13.*

Después se despliega un procedimiento que lo conduce a la solución:

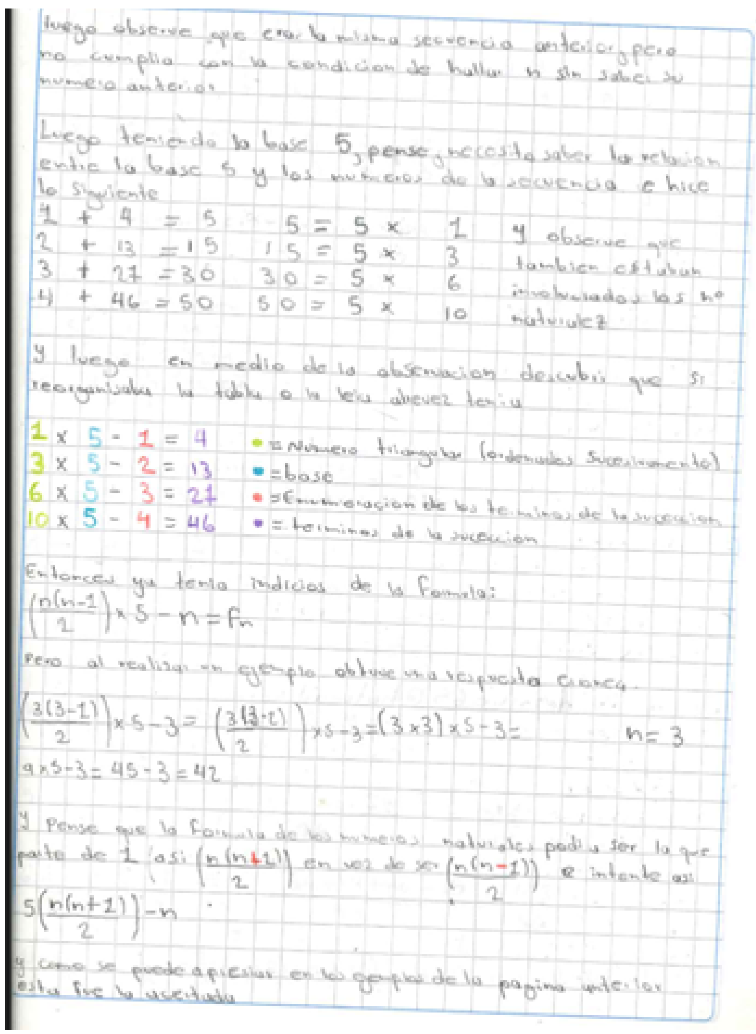


Ilustración 27: *II Procedimiento realizado por G13.*

El procedimiento anterior hace pensar a G13 que siempre debe multiplicar la "base" (diferencia constante) por los números triangulares, luego le debe restar un número a ese producto para obtener la sucesión deseada.

Para dar una mayor claridad, frente a lo que G13 descubre después de este proceso, se realiza una trascripción de los procedimientos surgidos a través del diálogo entre G13 y el investigador:

Para establecer la generalización la explica mediante la tabla 6:

Tabla 6: *Procedimiento para establecer la generalización, realizado por G13.*

Naturales	f_n	Triangulares	$3[\frac{n(n+1)}{2}]$	$3[\frac{n(n+1)}{2}]-2n$
1	1	1	3	3-**2**=1
2	5	3	9	9-**4**=5
3	12	6	18	18-**6**=12
4	22	10	30	30-**8**=22
5	35	15	45	45-**10**=35
n				3[n(n+1)/2]-**2n**=f_n

El número resaltado se debe a que, inicialmente el Integrante G13 deja el espacio vacío y luego lo llena para que la igualdad sea correcta. De esta manera centra su mirada en la sucesión que así se genera

Integrante G13: El 3 corresponde a la diferencia constante y el – 2 corresponde al resultado entre el primer término menos la diferencia constante (1 – 3 =– 2).

Profesor: entonces, ¿este procedimiento se podría aplicar a la secuencia derivada del juego de la ranita?

Integrante G13: Veamos si resulta:

El primer término es 3

La diferencia constante es 2

$$a_n = 2[\tfrac{n(n+1)}{2}] + n =$$

$$a_n = n(n+1) + n = n(n+2)$$

Profesor: ¿Es posible encontrar el término general de cualquier sucesión con las mismas características? Es decir, ¿cuyas segundas diferencias sean una constante d y cuyo primer término sea a_1?

Dada la siguiente sucesión:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n$$

Cuyas segundas diferencias es d,

Integrante G13: entonces, de acuerdo con el resultado anterior, se tiene que:

$$a_n = d[\tfrac{n(n+1)}{2}] + (a_1 - d)n$$

$$a_n = \frac{dn(n+1)+2(a_1-d)n}{2}$$

$$a_n = \frac{n[d(n+1)+2(a_1-d)]}{2}$$

$$a_n = \frac{n[dn+d+2a_1-2d]}{2}$$

$$a_n = \frac{n(dn+2a_1-d)}{2}$$

Profesor: Y, ¿esta fórmula funciona para cualquier sucesión que cumpla con las condiciones dadas? Construye en Excel sucesiones de este tipo y valida su solución.

Integrante G13: Profe he generado varias sucesiones y encontré una en la que no funciona..

La siguiente sucesión es un contraejemplo de la conjetura:

$$3, 12, 28, 51, 81, 118, \ldots,\ a_n$$

De acuerdo con el resultado anterior debería ocurrir que:

Tabla 7: *sucesión hallada como contraejemplo, realizado por G13.*

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n
sucesión	3	12	28	51	81	118	
primera diferencia		9	16	23	30	37	
segunda diferencia			7	7	7	7	

$$a_1 = 1,\ d = 7$$

$$a_n = \frac{n(dn+2a_1-d)}{2}$$

$$a_n = \frac{n(7n+2(1)-7)}{2}$$

$$a_n = \frac{n(7n-5)}{2}$$

La cual no es válida, pues

$$a_1 = \frac{1(7(1)-5)}{2} = 1 \neq 3$$

Al hacer una revisión de "la familia de sucesiones" para las cuales era válida la conjetura, Integrante G13 observa que ha funcionado para aquellas sucesiones que cumplen que:

$$a_1 + d = a_2 - a_1$$

Por lo tanto la conjetura sigue siendo válida siempre que se cumpla la condición.

Profesor: Integrante G13, entonces ¿cómo encontrar el término general para la sucesión del contraejemplo?

Integrante G13 realizó el mismo procedimiento descrito en los cuadros anteriores y, en el ejemplo en particular observa:

Tabla 8: *Término general para la sucesión del contraejemplo, realizado por G13.*

Naturales	a_n	$Triangulares$	$7[\frac{n(n+1)}{2}]$	$7[\frac{n(n+1)}{2}]$ -(5n-1)
1	3	1	7	7-4=3
2	12	3	21	21-9=12
3	28	6	42	42-14=28
4	51	10	70	70-19=51
5	81	15	105	105-24=81
6	118			
n	a_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$7[\frac{n(n+1)}{2}]$	$7[\frac{n(n+1)}{2}] - (5n - 1) = a_n$

$7[\frac{n(n+1)}{2}] - (5n - 1) = a_n$

Después de exhibir varios ejemplos, G13 ha mostrado que el procedimiento sugerido por él, siempre lo lleva a la generalización del término a_n.

Se establece el siguiente diálogo con Integrante G13 para ver si es posible establecer una generalización para este tipo de sucesiones:

Profesor: Integrante G13, ¿qué aspectos permanecen constantes y cuales varían en todas las expresiones que has hallado?

Integrante G13: La primera parte permanece igual que en el caso anterior y la segunda parte corresponde a una sucesión lineal.

Profesor: De acuerdo con lo que acabas de analizar, trata de establecer una expresión general para toda sucesión bajo las siguientes condiciones:

Dada la siguiente sucesión:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n$$

En la cual, las segundas diferencias es una constante d.

Y se tiene que $a_2 - a_1 = b$

Profesor: Y si la segunda sucesión (la lineal) la nombras f_n

Integrante G13: la fórmula sería:

$$a_n = d[\tfrac{n(n+1)}{2}] - f_n$$

Profesor: Trata de observar la forma de f_n, para ello debes despejar a f_n de la expresión anterior.

Integrante G13:

$$f_n = -a_n + d[\tfrac{n(n+1)}{2}]$$

Profesor: Ahora calcula $f_1, f_2, f_3,$ teniendo en cuenta que

$$a_2 - a_1 = b \Rightarrow a_2 = a_1 + b$$

$$a_3 - a_2 - (a_2 - a_1) = d \Rightarrow a_3 = d + 2a_2 - a_1 \Rightarrow a_3 = d + a_1 + 2b$$

Integrante G13:

$$f_1 = -a_1 + d\,[\tfrac{1(1+1)}{2}] = d - a_1$$

$$f_2 = -a_2 + d[\tfrac{2(2+1)}{2}] = 3d - a_1 - b$$

$$f_3 = -a_3 + d[\tfrac{n(n+1)}{2}] = -d - a_1 - 2b + d[\tfrac{3(3+1)}{2}] = 5d - a_1 - 2b$$

Profesor: ¿Qué se puede conjeturar de acuerdo con los resultados anteriores?

Integrante G13: Que si la secuencia continúa el mismo comportamiento, entonces:

$$f_n = (2n-1)d - (n-1)b - a_1$$

De esta manera resulta que:

$$a_n = d[\tfrac{n(n+1)}{2}] - [(2n-1)d - (n-1)b - a_1]$$

$$a_n = \frac{dn^2+(2b-3d)n+2(a_1+d-b)}{2} - \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$an = \frac{dn^2+(2b-3d)n+2(a_1+d-b)}{2}$$

Profesor: ¿qué sucede si $a_1 + d = b$?

Integrante G13: En el caso que en la sucesión se cumpla que $a_1 + d = b$, entonces resultaría que:

$$a_n = \frac{dn^2+(2a_1+2d-3d)n}{2}$$

$$a_n = \frac{dn^2+(2a_1-d)n}{2}$$

$$a_n = \frac{n\,[dn+(2a_1-d)]}{2}$$

Después de haber hallado una expresión que pudiera generalizar el término a_n de una sucesión cuyas segundas diferencias fueran una constante, a Integrante G13 le surge una pregunta con la cual se establece el siguiente diálogo:

Integrante G13: Profesor, y si la sucesión tuviera la diferencia constante, no en la segunda fase sino en la tercera, ¿cómo sería? será que, ¿si analizo el mismo procedimiento con la siguiente diagonal me funciona?

Profesor: Debes colocar a prueba tu idea:

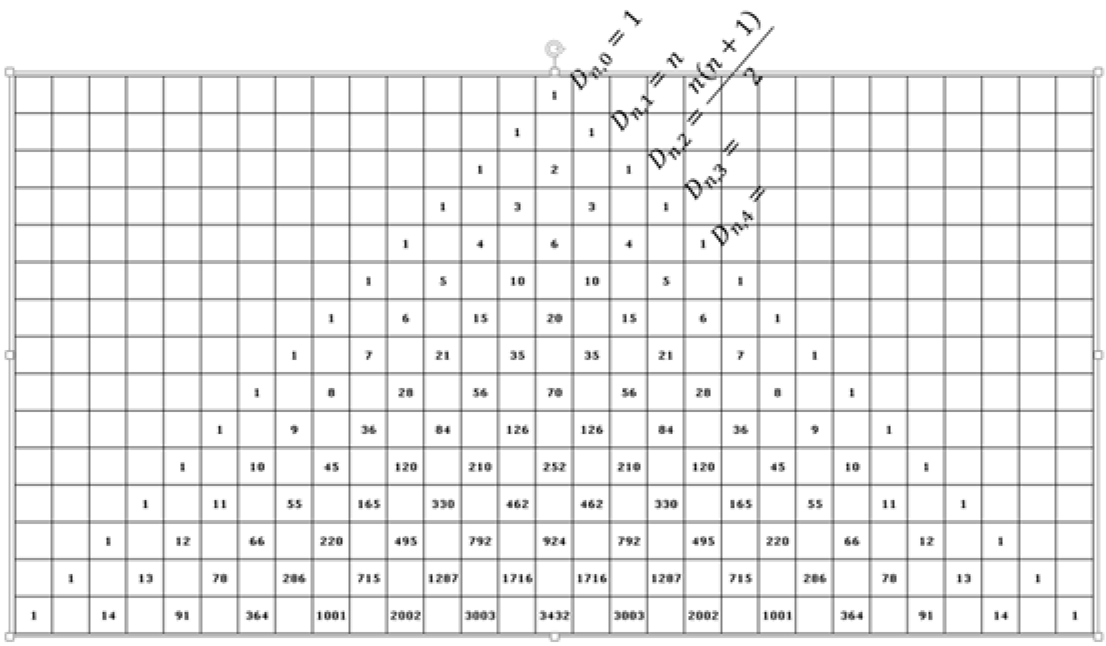


Ilustración 28: *Diagonales del triángulo de pascal.*

Analiza las diagonales y dime lo que observas:

Integrante G13: En la diagonal uno están los números naturales y en la diagonal dos están los números triangulares.

Profesor: ¿Cómo se generan los números triangulares?

Integrante G13: Es la suma de los números naturales, es decir la suma de los términos de la diagonal 2.

Profesor: ¿Cómo se generan los términos de la diagonal 3?

Integrante G13: Se generan sumando los de la diagonal 2, es decir con la suma de los números triangulares. Y cada diagonal se obtiene sumando los términos de la diagonal anterior.

Profesor: Muy bien Integrante G13. Ahora, de acuerdo con tu resultado para las sucesiones cuadráticas vamos a escribir el término general en función de la diagonal 2 y en función de n. Llamemos $D_{n,k}$ a las diagonales. Por ejemplo a la diagonal 2 sería $D_{n,2}$, la diagonal 1 sería $D_{n,1} = n$

De esta manera, para una sucesión cuyas segundas diferencias es una constante d tendríamos:

$$a_n = dD_{n,2} - (2d - b)n + (d + a_1 - b)$$

En donde $b = a_2 - a_1$.

¿Será que tu idea funciona para las sucesiones cuya terceras diferencias es una constante ***d***, pero con los términos de $D_{n,3}$?

Por ejemplo para la sucesión: $4,\ 7,\ 12,\ 24,\ 48,\ 94,\ 177,\ \ldots,\ a_n$

Realiza tus operaciones en una hoja de cálculo.

Integrante G13: Profesor, he hecho el procedimiento sugerido y encuentro que:

Tabla 9: *Procedimiento realizado por el integrante G13 a sugerencia del profesor.*

n	a_n	$D_{n,3}$	$5D_{n,3}$	$5D_{n,3} - a_n$
1	4	1	5	1
2	7	4	20	13
3	12	10	50	38
4	34	20	100	66
5	48	35	175	127
6	94	56	280	186
7	177	84	420	243
n	a_n	$D_{n,3}$	$5D_{n,3}$	$5D_{n,3} - a_n$

El resultado es una sucesión cuyas segundas diferencias es una constante, la cual ya tengo un procedimiento para generarla:

$$a_n = 5D_{n,3} - f_n$$

Para f_n se tiene: $d = 13,\ a_1 = 1,\ b = 12$

Sucesión	1	13	38	76	127	191
Primeras diferencias	12	25	38	51	64	77
Segundas diferencias	13	13	13	13	13	

Luego $f_n = 13D_{n,3} - 14n + 2$

Por lo tanto:

$$a_n = 5D_{n,4} - 13D_{n,3} + 14n - 2$$

Profesor: Ahora, teniendo en cuenta que G1, para la sucesión asociada al juego de la ranita tuvo en cuenta las sucesiones asociadas. Halla las sucesiones asociadas al problema anterior.

Integrante G13: He realizado un cuadro en Excel y obtuve lo siguiente:

Tabla 10: *Cuadro 1 realizado en excel por el integrante G13.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Término general:
Tercera diferencia	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	$a_n = 5$
Segunda diferencia	2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	$a_n = 5n - 3$
Primera diferencia	3	5	12	24	41	63	90	122	159	201	$a_n = 5D_{n,2} - 8n + 6$
Sucesión	4	7	12	24	48	89	152	242	364	523	$a_n = 5D_{n,3} - 13D_{n,2} + 14n - 2$

Profesor: Integrante G13, ¿a partir de la sucesión de diferencias constantes, cómo obtenemos las otras hasta llegar a la sucesión inicial?

Integrante G.13: Para la sucesión lineal el factor 5 es el de las diferencias constantes,

Para el término independiente se obtiene de $(5 - 2 = 3)$. Se resta del anterior porque veo que se alternan los signos.

Para la sucesión cuadrática, el coeficiente del "término cuadrático" $D_{n,2}$ es la diferencia constante.

El coeficiente del término lineal es 8, que se obtiene de $5 - (-3) = 8$. El término independiente +6, se obtiene del término independiente del anterior y del primer término de la sucesión correspondiente $(-3 - 3 = -6)$, como los signos se alternan da $-(-6) = +6$.

Profesor: Integrante G13, de acuerdo con ese análisis escribe el término a_n para la siguiente sucesión:

2 3 9 24 55 112 208 359 584 905 a_n

Integrante G13:

Tabla 11: *Cuadro 2 realizado por el integrante G13.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Término general:
Cuarta diferencia	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Tercera diferencia	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	$3n-(-1)=3n+1$
Segunda diferencia	5	9	16	26	39	55	74	96	121	149	$3D_{n,2}-2n-(-4)=3D_{n,2}-2n+4$
Primera diferencia	1	6	15	31	57	96	151	225	321	442	$3D_{n,3}-5D_{n,2}+6n-3$
Sucesión	2	3	9	24	55	112	208	359	584	905	$a_n=3D_{n,4}-8D_{n,3}+11D_{n,2}-9n+5$

Como puede observarse el procedimiento sugerido por el G13 conduce a una generalización en un nivel más elevado, él ha establecido que dado este tipo de sucesiones en los cuales en las diferencias sucesivas de los términos se llega a una diferencia constante, entonces su término es un polinomio cuyas variables son diagonales del triángulo de Pascal, además establece la forma de obtener los coeficientes de dicho polinomio.

Es de anotar que este conocimiento se ha dado gracias a la interacción entre estudiantes y maestro, en la cual el conocimiento ha surgido de manera colectiva, al respecto, Radford dice que *al participar en las actividades de la clase, los profesores y los estudiantes no sólo producen conocimientos. También se co-producen. Se co-producen de acuerdo no sólo a las formas de producción del conocimiento sino también de acuerdo con las formas de colaboración humana de la actividad* (2014, pág.8).

De igual manera, el mismo autor (2016), afirma que la naturaleza del ser humano es de ser social, un ser que se concibe con el otro y desde el otro, inmerso en la naturaleza que le rodea y lo condiciona. Desde que nace, el individuo se va constituyendo bajo condiciones de vida que son instauradas histórica y culturalmente, van surgiendo necesidades, como la necesidad natural de supervivencia, las necesidades creadas por él y por la cultura en la sociedad (laborales, artísticas religiosas, etc.), necesidades cuya satisfacción encuentra en objetos por fuera de sí mismo. Para satisfacer las necesidades, el ser humano se involucra activamente en el mundo, produciendo socialmente aquellas cosas que satisface sus necesidades, ese proceso de producción social, dentro de la teoría de la objetivación es lo que Radford llama *actividad*.

Por lo tanto la actividad es ante todo un proceso colectivo en el que la interacción es la pieza fundamental en la construcción de significados, es la construcción de una conciencia individual mediante procesos socioculturales. A través de la actividad es que el saber se dinamiza, se pone en movimiento, para ser materializado en conocimiento, para actualizarlo. Dicho conocimiento, como se ha mencionado antes, debe ser mediado a través de la actividad, a través de ese proceso histórico cultural de producción social. Ahora bien, la actividad matemática en el aula toma un papel de suma importancia en la enseñanza y el aprendizaje, ya que se piensa en una actividad mediada por acciones por un sujeto y entre sujetos que están en constante interacción, cooperación y reflexión mutua dentro de una práctica social de individuos que ejercen la práctica matemática (estudiantes y profesor).

De esta manera se pretende, a través de las formas de reflexión y de posicionamiento crítico en el aula valorar las formas de pensar, los aportes y contribuciones que tanto estudiantes como profesores realizan en la solución de un determinado problema. Alumnos y profesor trabajando juntos promoviendo la responsabilidad y la solidaridad, en donde se evidencia una participación activa, se abre el espacio al debate, hay respeto y solidaridad por el otro y hacia el otro. Desde esta óptica, Radford enfatiza:

> "El profesor de matemáticas y los estudiantes necesitan trabajar juntos para presentar diversas interpretaciones matemáticas y hacerlas el objeto de una experiencia intelectual, reflexiva y estética. Este trabajo conjunto es, simultáneamente, intelectual y emocional; No pueden separarse. Son dos caras de la misma moneda. Podemos concluir, entonces, al notar que, aunque hay una división del trabajo que es inducida por la manera en que los

> maestros y los estudiantes participan en su trabajo-división del trabajo que tiene que ver con la conciencia del maestro de las intenciones didácticas, etc.-el maestro y los estudiantes se necesitan mutuamente para llevar adelante el conocimiento. La ética comunitaria mencionada en la sección anterior encuentra su plena expresión en la articulación teórica y en la elaboración práctica de esta "necesidad" mutua de docentes y estudiantes. Nos interesa una ética que fomente modos de colaboración de carácter no utilitario y no egocéntrico, modos de colaboración e interacción humanos que más bien promuevan la solidaridad, la postura crítica y la responsabilidad". (2014, pág.12)

Es pertinente resaltar que a través del desarrollo de las actividades propuestas en el trabajo con sucesiones, surgieron de manera natural, normas sociales de interacción (NSI) en el aula, planteadas por García Cruz (1998) y que fueron claves en el refinamiento alcanzado en las estrategias usadas por los estudiantes que participaron en esta investigación. Estas normas sociales estuvieron presente o se pudieron evidenciar en las intervenciones y socializaciones de lo realizado por cada grupo, ante las cuales hubo respeto por la palabra y maneras de razonar por incipientes o diferentes que fueran, valoración por lo trabajado, entrega por explicar sus procedimientos, lo cual no sólo fue importante para fortalecer las estrategias de los demás sino las propias, apertura hacia las explicaciones de los compañeros, entre otros, propiciando así, un ambiente de cooperación en el cual estudiantes y profesor trabajan juntos, en la búsqueda de un objetivo común.

Capítulo 5: Generalización de la generalización -metageneralizacion

En el presente capítulo se hace una aplicación de los resultados arrojados en el capítulo 4, ya que aportan significativamente en la formación académica del investigador, en tanto proporciona elementos para encontrar un camino y conjeturar generalizaciones de algunas series que son objeto de demostración por medio de la inducción matemática, inquietud que lo acompañaba desde sus estudios de pregrado. Es muy diferente demostrar que una determinada fórmula es válida a través de un método de demostración (como lo es el de inducción matemática), que conjeturar una expresión general. A manera de ilustración, es usual que en un curso de matemáticas universitario se solicite demostrar, por inducción matemática, la validez de la siguiente proposición:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sin embargo, esta investigación brinda elementos sobre, ¿cómo a partir de procesos de generalización se puede conjeturar el modelo algebraico de esta suma?

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + n^2 = ?$$

Dicho interrogante se resuelve, a partir de las estrategias expuestas en el capítulo 4, así como otros que surgieron en el transcurso de la investigación, estos son:

Una vez presentadas y discutidas la variedad estrategias usadas por los diferentes grupos, se propuso la solución de las siguientes situaciones:

- ¿Cuántos cuadrados se pueden contar en un tablero de ajedrez? Generalice para un tablero de ***n*** cuadrados por cada lado.
- Si un cubo está formado a partir de unidades cúbicas iguales (de un cm de arista), cuántos cubos se pueden contar en un cubo formado por 512 cubitos de arista 1cm? generalice para un cubo conformado por n^3 cubitos de 1 cm de arista

- Halle una expresión general para calcular la suma de los primeros $2n-1$ cuadrados perfectos:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$$

- Halle una expresión general para calcular la suma de los primeros $2n$ cuadrados perfectos:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^2$$

- Halle una expresión general para calcular:

a. $S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 =$

b. $S_n^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 =$

c. $S_n^6 = \sum_{i=1}^{n} i^6 =$

d. $S_n^7 = \sum_{i=1}^{n} i^7 =$

Solución a los interrogantes anteriores:

- ¿Cuántos cuadrados se pueden contar en un tablero de ajedrez? Generalice para un tablero de ***n*** cuadrados por cada lado

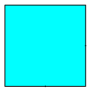
Se requiere encontrar una sucesión o serie que esté asociada al problema. Para ellos se resuelve el problema, de manera sistemática, partiendo de lo más simple a lo más complejo:

Es más fácil contar los cuadrados en tableros más pequeños, y utilizar una técnica de conteo que permita observar la comunalidad de los términos encontrados:

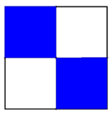
Abordemos el problema, considerando sucesivamente tableros:

1x1, 2x2, 3x3, 4x4,...

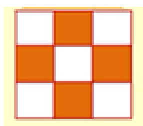
en general, tableros de nxn



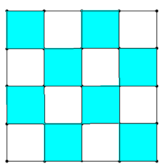
1



1+4=5



1+4+9=14



1+4+9+16=30

Como se puede notar, el número de cuadrados de cada arreglo, responde a la siguiente estructura:

$$1 = 1$$
$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

Veamos una solución haciendo uso de la estrategia Generalización Contextual-Explícita Multiplicativa:

Tabla 12: *Estrategia de generalización contextual-explícita multiplicativa.*

n	f_n	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{f_n}{T_n}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = 1 = \frac{3}{3}$
2	5	3	$\frac{5}{3}$
3	14	6	$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$
4	30	10	$\frac{30}{10} = 3 = \frac{9}{3}$
5	55	15	$\frac{55}{15} = \frac{11}{3}$
6	91	21	$\frac{91}{21} = \frac{13}{3}$
n	f_n	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{fn}{Tn} = \frac{2n+1}{3}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{T_n(2n+1)}{3} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución usando la estrategia Pascaliana:

	1	5	14	30	55
Primera diferencia	4	9	16	25	
Segunda diferencia	5	7	9		
Tercera diferencia	2	2			

Sucesión Tercera diferencia (Constante): 2

Sucesión de segunda diferencia (Sucesión lineal): $2n + 3$

Sucesión de primera diferencia (Sucesión cuadrática): $2D_{n,2}+n+1$

Sucesión original (Sucesión cúbica): $2D_{n,3}-D_{n,2}$

Como $D_{n,3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $\quad y \quad$ $D_{n,2}=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2D_{n,3}-D_{n,2} = 2\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para dar respuesta para el caso particular del tablero de ajedrez (***n=8***) tenemos:

$$\sum_{i=1}^{8} i^2 = 204$$

- Halle una expresión general para calcular la suma de los primeros $2n-1$ cuadrados perfectos:

$$1^2 = 1$$
$$1^2+3^2 = 1+9 = 10$$
$$1^2+3^2+5^2 = 1+9+25 = 35$$
$$1^2+3^2+5^2+7^2 = 1+9+25+49 = 84$$
$$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2 = 1+9+25+49+81 = 165$$
$$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2 = 1+9+25+49+81+121 = 286$$

n	g_n	$I_n = 2n-1$	$\frac{g_n}{I_n}$
1	1	1	$\frac{1}{1}=1=\frac{3}{3}=\frac{1*3}{3}$
2	10	3	$\frac{10}{3}=\frac{2*5}{3}$
3	35	5	$\frac{35}{5}=7=\frac{21}{3}=\frac{3*7}{3}$
4	84	7	$\frac{84}{7}=12=\frac{4*9}{3}$
5	165	9	$\frac{165}{9}=\frac{55}{3}=\frac{5*11}{3}$
6	286	11	$\frac{286}{11}=26=\frac{78}{3}=\frac{6*13}{3}$
n	f_n	$I_n = 2n-1$	$\frac{g_n}{I_n}=\frac{n(2n+1)}{3}$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{I_n[n(2n+1)]}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

La solución anterior se realizó utilizando la estrategia de Generalización Contextual-Explícita Multiplicativa, obteniéndose el término general de la serie. Esta solución es una alternativa al procedimiento mediante el uso de propiedades de la sumatoria que a continuación se ilustra:

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4i^2-4i+1) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = 4\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\tfrac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = 2\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{2n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{2n(n+1)(2n+1-3)+3n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{2n(n+1)(2n-2)+3n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{4n(n+1)(n-1)+3n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{4n(n^2-1)+3n}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{n(4n^2-4+3)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1)^2 = \tfrac{n(4n^2-1)}{3}$$

- Halle una expresión general para calcular la suma de los primeros $2n$ cuadrados perfectos:

$$2^2 = 4$$

$$2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 = 4 + 14 + 36 = 56$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ... += 4 + 16 + 36 + 64 = 120$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4 + 16 + 36 + 64 + 100 = 220$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 = 4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 = 364$$

n	h_n	
1	4	4*1
2	20	4*5
3	56	4*14
4	120	4*30
5	220	4*55
n	h_n	$h_n = 4[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$

Resuelto por medio de propiedades de sumatoria, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 4i^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}] = 2[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}]$$

- Si un cubo está formado a partir de unidades cúbicas iguales (de un cm de arista), ¿cuántos cubos se pueden contar en un cubo formado por 512 cubitos de arista 1cm? generalice para un cubo conformado por $\boldsymbol{n^3}$ cubitos de 1 cm de arista

Se aborda la solución al problema, de manera sistemática, tal como se procedió con el problema del tablero de ajedrez y se analizan sus resultados

$$1 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

n	S_n^3	S_n^3
1	1	1^2
2	9	3^2
3	36	6^2
4	100	10^2
5	225	15^2
n	S_n^3	$S_n^3 = T_n^2 = [\frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = T_n^2 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

Para la situación particular, ***n=8***, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{8} i^3 = T_8^2 = [\frac{8(8+1)}{2}]^2 = 1296$$

- Halle una expresión general para calcular $S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4$

$$1 = 1$$

$$1^4 + 2^4 = 1 + 16 = 17$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 1 + 16 + 81 = 98$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 979$$

n	S_n^4	S_n^2	$\frac{S_n^4}{S_n^2}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = \frac{5}{5} = \frac{6-1}{5} = \frac{6*1-1}{5}$
2	17	5	$\frac{17}{5} = \frac{18-1}{5} = \frac{6*3-1}{5}$
3	98	14	$\frac{98}{14} = 7 = \frac{35}{5} = \frac{36-1}{5} = \frac{6*6-1}{5}$
4	354	30	$\frac{354}{30} = \frac{59}{5} = \frac{60-1}{5} = \frac{6*10-1}{5}$
5	979	55	$\frac{979}{55} = \frac{89}{5} = \frac{90-1}{5} = \frac{6*15-1}{5}$

n	S_n^4	$S_n^2 = \frac{T_n(2n+1)}{3}$	$\frac{S_n^4}{S_n^2} = \frac{6*T_n-1}{5}$

$$S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{S_n^2(6*T_n-1)}{5} = \frac{\frac{T_n(2n+1)}{3}*(6*T_n-1)}{5} = \frac{(2n+1)(6T_n{}^2-T_n)}{15}$$

$$S_n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

- Hallemos S_n^5

$$S_n^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5$$

n	S_n^5	S_n^3	$\frac{S_n^5}{S_n^3}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{4*1-1}{3}$
2	33	9	$\frac{33}{9} = \frac{11}{3} = \frac{12-1}{3} = \frac{4*3-1}{3}$
3	276	36	$\frac{276}{36} = \frac{23}{3} = \frac{24-1}{3} = \frac{4*6-1}{3}$
4	1300	100	$\frac{354}{30} = \frac{59}{5} = \frac{60-1}{5} = \frac{4*10-1}{3}$
5	4425	225	$\frac{4425}{225} = \frac{59}{3} = \frac{60-1}{3} = \frac{4*15-1}{3}$
n	S_n^5	$S_n^3 = \frac{T_n(2n+1)}{3}$	$\frac{S_n^5}{S_n^3} = \frac{4*T_n-1}{3}$

$$S_n^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{S_n^3(4*T_n-1)}{3} = \frac{T_n{}^2*(4T_n-1)}{3} = \frac{4T_n{}^3-T_n{}^2}{3}$$

- Hallemos S_n^6

$$S_n^6 = \sum_{i=1}^{n} i^6 = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6$$

n	S_n^6	S_n^2	$\frac{S_n^6}{S_n^2}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = \frac{7}{7}$
2	65	5	$\frac{65}{5} = 13 = \frac{91}{7}$

3	794	14	$\frac{794}{14} = \frac{397}{7}$
4	4890	30	$\frac{4890}{30} = 163 = \frac{1141}{7}$
5	20515	55	$\frac{20515}{55} = 373 = \frac{2611}{7}$
n	S_n^6	$S_n^2 = \frac{T_n(2n+1)}{3}$	$\frac{S_n^6}{S_n^2} = \frac{a_n}{7}$

Sucesión	7	91	397	1141	2611	5167	9241	$72D_{n,4} - 72D_{n,3} + 6D_{n,2} + 1$
primera d	84	306	744	1470	2556	4074		$72D_{n,3} + 0D_{n,2} + 6n + 6$
tercera d	222	438	726	1086	1518			$72D_{n,2} + 72n + 78$
cuarta d	216	288	360	432				$72n + 144$
quinta d	72	72	72					72

Ahora tratemos de expresar el término general de la sucesión en función de $D_{n,2} = T_n$

Tengamos en cuenta que:

$$D_{n,4} = \frac{D_{n,3}(n+3)}{4}, \qquad D_{n,3} = \frac{D_{n,2}(n+2)}{3}, \qquad D_{n,4} = \frac{D_{n,2}(n+3)(n+2)}{3*4}$$

$$a_n = (72D_{n,4} - 72D_{n,3} + 6D_{n,2} + 1)$$

$$a_n = (72\ \frac{D_{n,2}(n+3)(n+2\ )}{3*4} - 72\ \frac{D_{n,2}(n+2\ )}{3} + 6D_{n,2} + 1)$$

$$a_n = (6D_{n,2}(n+3)(n+2) - 24D_{n,2}(n+2) + 6D_{n,2} + 1)$$

$$a_n = 6D_{n,2}[(n+3)(n+2) - 4(n+2)] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}[n^2 + 5n + 6 - 4n - 8] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}[n^2 + n - 2] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}[n(n+1) - 2] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}[\frac{2n(n+1)}{2} - 2] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}[2D_{n,2} - 2] + 6D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 12D_{n,2}{}^2 - 12D_{n,2} + 6D_{n23} + 1$$

$$a_n = 12D_{n,2}{}^2 - 6D_{n,2} + 1$$

De esta manera se tiene que:

$$\frac{S_n^6}{S_n^2} = \frac{a_n}{7} \Rightarrow S_n^6 = \frac{\frac{D_{n,2}(2n+1)}{3}(12D_{n,2}{}^2 - 6D_{n,2}+1)}{7}$$

$$S_n^6 = \frac{D_{n,2}(2n+1)(12D_{n,2}{}^2 - 6D_{n,2}+1)}{21}$$

$$S_n^6 = \frac{D_{n,2}(2n+1)(12D_{n,2}{}^2 - 6D_{n,2}+1)}{21}$$

- Ahora calculemos S_n^7

$$S_n^7 = \sum_{i=1}^{n} i^7 = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7$$

n	S_n^7	T_n	S_n^3	$3S_n^7$	$S_n^3 = a_n$
1	1	1	1	3	3
2	129	3	9	387	43
3	2316	6	36	6948	193
4	18700	10	100	56100	561
5	96825	15	225	290475	1291
6	376761	21	441	113028 3	2563
7	1200304	28	784	360091 2	4593

Sucesión	3	43	193	561	1291	$36D_{n,4} - 36D_{n,3} + 2D_{n,2} + 1$
primera d	40	150	368	730	1272	$36D_{n,3} + 0D_{n,2} + 2n + 2$
segunda d	110	218	362	542	0	$36D_{n,2} + 36n + 38$
tercera d	108	144	180			$36n + 72$
cuarta d	36	36				36

$$a_n = 36D_{n,4} - 36D_{n,3} + 2D_{n,2} + 1$$

Tengamos en:

$$D_{n,4} = \frac{D_{n,3}(n+3)}{4}, \qquad D_{n,3} = \frac{D_{n,2}(n+2)}{3}, \qquad D_{n,4} = \frac{D_{n,2}(n+3)(n+2)}{3*4}$$

$$a_n = 36\,\frac{D_{n,2}(n+3)(n+2)}{3*4} - 36\,\frac{D_{n,2}(n+2)}{3} + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}(n+3)(n+2) - 12D_{n,2}(n+2) + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[(n+3)(n+2) - 4(n+2)] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[n^2 + 5n + 6 - 4n - 8] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[n^2 + n - 2] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[n(n+1) - 2] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[\tfrac{2n(n+1)}{2} - 2] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 3D_{n,2}[2D_{n,2} - 2] + 2D_{n,2} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,3}{}^2 - 6D_{n,3} + 2D_{n,3} + 1$$

$$a_n = 6D_{n,2}{}^2 - 4D_{n,2} + 1$$

$$S_n^7 = \frac{D_{n,2}{}^2(6D_{n,2}{}^2 - 4D_{n,2} + 1)}{3}$$

Como se pudo apreciar, estos resultados nos indican que es posible expresar cada una de estas sumas en función de las diagonales del triángulo de Pascal, y por ende en función de los números triangulares.

A manera de conclusión, la Generalización de sucesiones de tipo Polinomial se puede hacer de manera escalonada a partir del establecimiento de las diferencias constantes y regresar hasta la sucesión planteada. Por ejemplo, para una sucesión polinomial de grado 5, sería:

	d	d
Grado1	d_1	$dn - d + d_1$
Grado 2	d_2	$dD_{n,3} - (2d - d)n + (d + d_2 - d_1)$
Grado 3	d_3	$dD_{n,4} - (3d - d_1)D_{n,3} + (3d - 2d_1 + d_2)n - (d + d_2 - d_1 - d_3)$
Grado 4	d_4	$dD_{n,5} - (4d - d_1)D_{n,4} + (6d - 3d_1 + d_2)D_{n,3} - (4d - 3d_1 + 2d_2 - d_3)n + (d + d_2 - d_1 - d_3 - d_4)$
Grado 5	d_5	$dD_{n,6} - (5d - d_1)D_{n,5} + (10d - 4d_1 + d_2)D_{n,4} - (10d - 6d_1 + 3d_2 - d_3)D_{n,3}$ $+ (5d - 4d_1 + 3d_2 - 2d_3 - d_4)n - (d + d_2 - d_1 - d_3 - d_4 - d_5)$

Lo importante de esta estructura es que es de fácil aplicación comenzando desde las sucesiones de diferencia constante hasta llegar a la sucesión que se busca establecer.

A manera de ejemplo tenemos:

Halle el término general de la sucesión: $3,\ 1,\ 4,\ 14,\ 36,\ 82,\ 175,\ 353,\ \ldots,\ a_n$

d (constante)	4	4	4	4	4	4
grado1	3	7	11	15	19	$4n - 1$
grado 2	2	5	12	23	38	$4D_{n,3} - 5n + 3$
grado 3	5	7	12	24	47	$4D_{n,4} - 9D_{n,3} + 8n + 2$
grado 4	-2	3	10	22	46	$4D_{n,5} - 13D_{n,4} + 17D_{n,3} - 6n - 4$
grado 5	3	1	4	14	36	$4D_{n,6} - 17D_{n,5} + 30D_{n,4} - 23D_{n,3} + 2n + 7$

El alcance de la generalización implícita en el capítulo 4, permitió resolver problemas más complejos que incluso fueron aprendizaje para el investigador, que en primera instancia sólo pretendía buscar estrategias de solución para la generalización de sucesiones de tipo cuadrático.

Capítulo 6: Resultados de la investigación

6.1. Conclusiones

La puesta en escena de esta investigación planteó aspectos importantes no sólo en lo que respecta a nivel teórico, sino a consideraciones metodológicas; las cuales, a través de la actividad matemática de los estudiantes, fueron un eje articulador y dinamizador en el surgimiento y refinamiento de estrategias de generalización de sucesiones polinomiales.

Inicialmente, de acuerdo a lo observado en el aula y la revisión de algunas producciones académicas se planteó la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad a partir del estudio de los fenómenos de variación y cambio, así como de los procesos de generalización. En ese sentido, esta investigación da un aporte significativo a tal pretensión, puesto que brinda caminos hacia la evolución del pensamiento aritmético (pre-algebraico), factual, contextual y simbólico, obteniendo como resultado fórmulas cada vez más sofisticadas.

Se observó cómo los estudiantes en una fase inicial de la investigación, usaban algunas fórmulas o relaciones sin comprender, el fenómeno que modelaban, sólo se limitaban a establecer valores numéricos pero sin sentido. A través de este trabajo investigativo, se demostró cómo la escuela puede promover ambientes favorables que conlleven a los estudiantes a pensar algebraicamente, a partir de un proceso de transición de la aritmética al álgebra, el cual requiere de un cambio en las prácticas de enseñanza que permita despertar el interés de los estudiantes por su aprendizaje y darle sentido matemático al mundo que lo rodea.

La pregunta de investigación que se planteó en la presente investigación fue: ¿Qué estrategias y formas de razonamiento emergen de los estudiantes del grado undécimo de la I.E Kennedy en la generalización de sucesiones y series polinomiales, a través de la actividad matemática en el aula?

Considerando los análisis realizados sobre las producciones de los estudiantes, a través de la actividad matemática en el aula en torno a tareas de generalización de sucesiones polinomiales, se pudo constatar que las estrategias de razonamiento fueron emergiendo y refinándose en la interacción entre estudiantes, y estudiante – investigador; en donde el rol protagónico del estudiante en el aula es de suma importancia, ya que no sólo puede potenciar sus propias estrategias sino que contribuye a fortalecer la de los demás e incluso la del profesor.

De dichos análisis, se consideró pertinente categorizar cinco estrategias de generalización en el trabajo con sucesiones polinomiales; la primera fue denominada ***Generalización Recurrente***, la cual se caracteriza por la búsqueda a través de restas sucesivas de una diferencia constante y con ella la capacidad de construir la sucesión o escribir un término de la sucesión a partir del anterior. Cabe resaltar que esta estrategia de generalización, en primera instancia, fue el común denominador en las producciones de los estudiantes, en donde sólo llegaban a establecer una regla recurrente para encontrar términos cercanos. No obstante, durante esta investigación se demostró que la discusión de estos primeros procedimientos, conjugados con el establecimiento de los diálogos con el investigador, dieron pie a que se contemplaran nuevos caminos hacia generalizaciones cada vez más refinadas.

Así mismo, otro elemento que cobró gran importancia dentro del refinamiento de las estrategias de generalización estuvo relacionado con el uso de diferentes medios semióticos de objetivación que proporcionaron mayor riqueza interpretativa permitiendo una mejor comprensión del fenómeno objeto de estudio y por ende, avances en los razonamientos y uso de simbolización matemática para expresar la generalización.

Ahora bien, estos avances en los razonamientos posibilitaron el surgimiento de otras estrategias. Así, una segunda categoría observada se denominó ***Generalización Contextual-Explícita Aditiva***, la cual se caracteriza por establecer una comparación por adición o sustracción entre los términos de la sucesión y otra sucesión ya conocida, con el objetivo de encontrar una nueva sucesión más familiar. La tercera categoría denominada ***Generalización Contextual-Explícita Multiplicativa***, se caracteriza por establecer una comparación por producto o por cociente entre los términos de la sucesión y los términos de otra ya conocida, con el objetivo de identificar una sucesión más familiar. Aunque estas dos últimas categorías resultan ser muy similares en cuanto a que comparan sucesiones, su diferencia radica más que cualquier cosa, en que la primera obedece al esquema aditivo y la segunda al esquema multiplicativo.

En ese ir y venir de ideas, razonamientos, estrategias e intentos por generar diferentes soluciones a un mismo problema en el que la perseverancia jugó un papel importante en tanto las generalizaciones ya establecidas no fueron consideradas un producto ya terminado, sino más bien detonantes hacia la búsqueda de estrategias más eficaces y consistentes, surge entonces la cuarta estrategia denominada ***Generalización Gaussiana***. Este tipo de estrategia es propia de algunas sucesiones cuadráticas porque establece un procedimiento análogo al utilizado por Gauss para la suma de los primeros números naturales la cual consiste, mediante restas sucesivas, en identificar una sucesión lineal asociada al problema, luego, a través de la suma de los términos de dicha sucesión se generan los términos de la secuencia objeto de estudio, posteriormente se suma el primer término con el último para establecer una suma constante, la cual se multiplica por la mitad de los términos.

Así, en esa empresa formada para la búsqueda de nuevas estrategias, y teniendo como fundamento lo construido anteriormente se pusieron en juego elementos creativos e innovadores que aportaron al surgimiento de generalizaciones aún más refinadas y consistentes, que a diferencia de la Generalilzación Gaussiana, (solo funciona para un tipo de sucesiones cuadráticas) se extienden a todo tipo de sucesión polinomial. Esto permitió hablar de una quinta estrategia denominada ***Generalización Pascaliana,*** que consiste en escribir el término general de la sucesión como un polinomio cuyas variables son las diagonales del triángulo de Pascal; de esta manera, si la sucesión, a través de diferencias sucesivas, conduce a una diferencia constante en el segundo nivel (sucesión cuadrática), su término *n-ésimo* será un polinomio cuyas variables son los términos de la diagonal dos (números triangulares), la diagonal uno (números naturales) y la diagonal cero (sucesión constante 1):

$$a_n = dD_{n,2} - (2d - b)n + (d + a_1 - b)$$

$$\text{En donde } \; b = a_2 - a_1$$

Esta última estrategia permitió generalizar un procedimiento para calcular el término general de cualquier sucesión de tipo polinomial cuya diferencia constante se encuentra en el *k-ésimo* nivel:

$$a_n = dD_{n,k} - m_1 D_{n,(k-1)} - m_2 D_{n,(k-2)} - \ldots - m_k D_{n,0}$$

En donde cada k, desde k=0, 1, 2, 3,… corresponde a la *k-ésima* diagonal del triángulo de Pascal, y d es la diferencia constante,

El surgimiento de estas cinco estrategias fueron posibles, debido a la dinámica de clase que promovió la actividad matemática llevada a cabo en el aula, en donde el saber emerge como un movimiento de ideas y posibilidades, dicho movimiento es generado por la instauración de nuevas formas de relación entre docente y estudiantes, dotando a estos últimos de un rol protagónico hacia la producción del conocimiento. Las ideas y posibilidades no surgieron como el resultado de un trabajo independiente en donde el estudiante se incrusta en su mundo sin depender ni conocer lo que los demás hacen, por el contrario, el saber surge como una actividad conjunta en donde tanto el profesor como estudiantes, a través de la socialización de sus estrategias de solución y el establecimiento de los diálogos, perseguían nuevas formas de generalización de sucesiones y series polinomiales.

Esta perspectiva deja en evidencia dos aspectos con respecto al conocimiento, el primero es que éste no está a cargo exclusivo del docente, quien en su labor lo transmite a sus estudiantes; el segundo es que tampoco es adquirido como un trabajo individual. El conocimiento es una producción social, y por ende, en el aula de clase debe ser algo que tanto profesores como estudiantes, de manera conjunta y solidaria, adquieren. De esta manera se pretende, a través de las formas de reflexión y de posicionamiento crítico en el aula valorar las formas de pensar, los aportes y contribuciones que tanto estudiantes como profesores realizan en la solución de un determinado problema. Alumnos y profesor trabajando juntos promoviendo la responsabilidad y la solidaridad, en donde se evidencia una participación activa, se abre el espacio al debate, hay respeto y valoración por el otro y hacia el otro.

Como consecuencia de todo esto, se reformula el concepto de aula de matemáticas en tanto ya no aparece como un simple espacio que acoge a maestros y estudiantes, sino que se convierte en un medio semiótico de objetivación, en tanto, genera un ambiente que física y visualmente, puede brindar elementos en la búsqueda de soluciones a problemas planteados. Es así como el tener exhibidos la tabla de multiplicar y el triángulo de Pascal, como parte cotidiana de la decoración del aula, se convirtió en un medio propicio y familiar que fue de vital importancia para el surgimiento de nuevas ideas que se materializaron en conocimiento matemático para ambos actores. El aula de clases de matemática se convierte en un escenario donde el estudiante deja de ser pasivo, y toma ese papel protagónico en el quehacer matemático, para el enriquecimiento de las experiencias propias, la de sus pares y la del docente.

Se destaca la importancia de las intervenciones, justificaciones, razonamientos y estrategias empleadas por los estudiantes en la formación pedagógica y académica del maestro, brindándole nuevas miradas de ver o abordar un problema o situación, así como algunos caminos y rutas hacia soluciones que no había contemplado, y que por tanto, fueron fundamentales para dar respuesta a los interrogantes que tenía desde su pregrado y que fueron analizados en el capítulo 5. Lo anterior, pone de manifiesto el hecho de que el docente no es sujeto dueño del conocimiento, ni que el aprendizaje de los estudiantes se concibe como algo estático, y poco útil, sino que puede darse de manera dinámica en ambos sentidos; tanto maestros como estudiantes en relaciones de horizontalidad ponen en escena la manera en que surgieron las matemáticas y de manera conjunta construyen conocimiento matemático y se construyen a la vez, como sujetos y seres humanos sociales.

6.2. Alcances y limitaciones de este estudio

Dado que esta investigación es de corte cualitativo bajo la perspectiva de un diseño fenomenológico, que permitió el análisis particular del objeto de estudio, en este caso, la generalización de sucesiones y series no lineales (polinomiales) de los estudiantes de grado undécimo de la I. E Kennedy, se considera que los resultados no deben ser generalizables a otros contextos. Es preciso tener en cuenta que este grupo de estudiantes disfrutaban de unas condiciones especiales que de cierta manera influyeron en su desempeño en las actividades de la investigación, entre las cuales se pueden mencionar:

* El ambiente de aula era muy agradable en lo que tenía que ver con la decoración y espacio físico; en una de sus paredes tenía exhibida una tabla de multiplicar de doble entrada de 20 x 20 y un triángulo de Pascal con 17 filas que sirvió de gran ayuda en los procesos de generalización y en las estrategias implementadas por los estudiantes.

* En sesiones anteriores al trabajo de la presente investigación, los jóvenes ya se había enfrentado a situaciones y tareas de generalización con sucesiones lineales, la sucesión de los números cuadrados y la sucesión de los números triangulares, por lo que ya estaban familiarizados.

* Las relaciones de empatía entre estudiantes y estudiantes e investigador facilitó la participación de una manera natural y espontánea, en términos de comunicación y socialización y de las diferentes maneras de abordar la misma situación al interior de cada grupo y entre los grupos, influyendo de manera significativa en el refinamiento de sus razonamientos y estrategias, y por ende, en el desarrollo progresivo de las actividades propuestas.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el interés de la presente investigación estuvo centrado en observar e identificar las estrategias y formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que involucran fenómenos de generalización, es preciso decir que estas características presentadas por estos estudiantes, pueden ser comunes en un contexto similar.

6.3. Consideración finales

En la dinámica de la actividad matemática en el aula, surgieron diversos interrogantes que en la medida de lo posible se le buscaron solución y fueron enriqueciendo el trabajo conjunto. En particular, en el capítulo 5 se dio solución al problema que indaga por el número de cuadrados que se pueden contar en un tablero de ajedrez, y en general en un tablero de ***n*** unidades cuadradas por cada lado, cuya solución obedece a la suma de los cuadrados perfectos. Una vez resuelto el problema un estudiante preguntó: ¿en un tablero de 8 por 8 pero triangular, cuántos triángulos se podrán contar? Al realizar un procedimiento análogo al problema del tablero del ajedrez se llegó a una sucesión cuyas diferencias consecutivas no condujeron a diferencias constantes sino a diferencias alternantes:

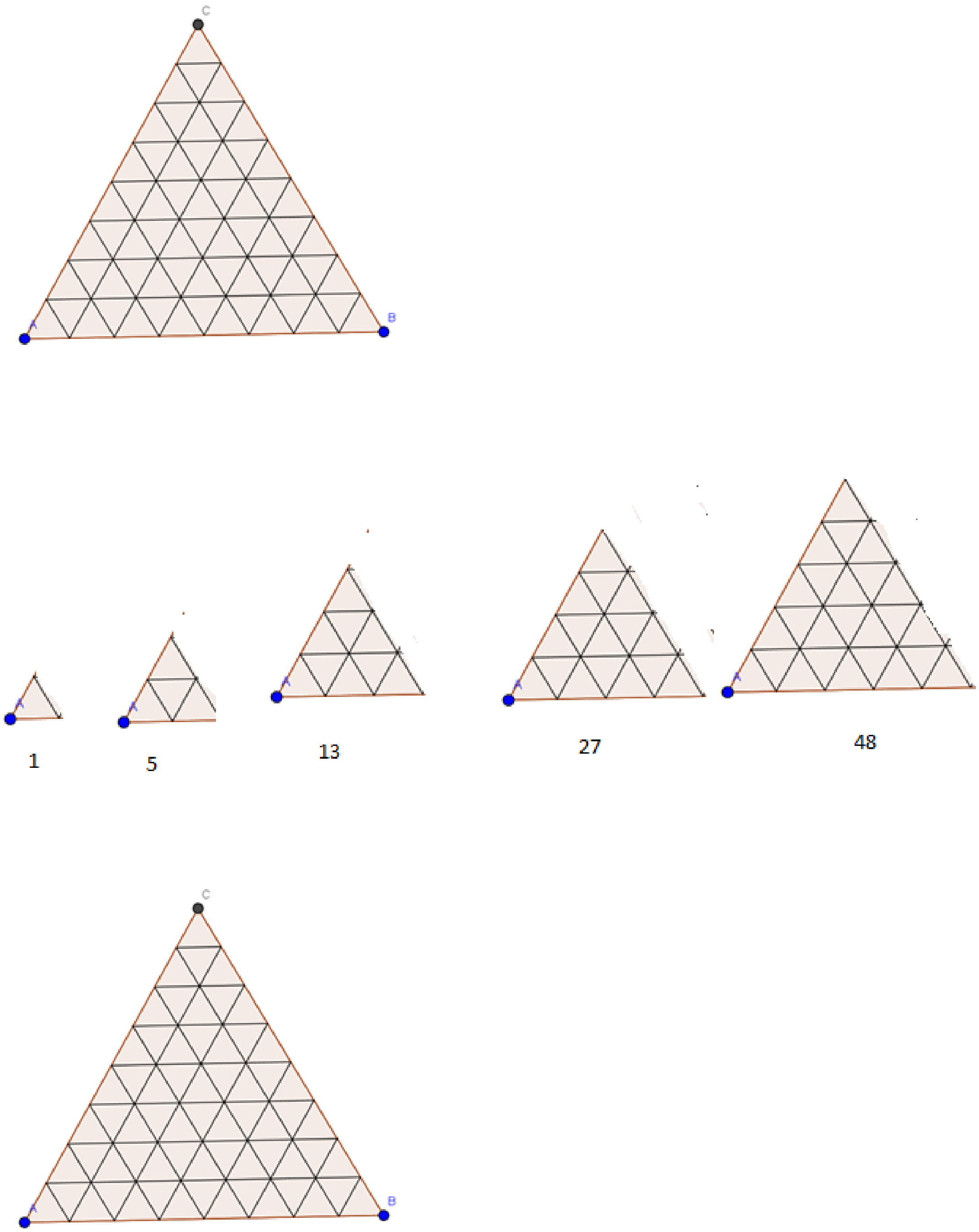


Ilustración 29: *Situación análoga al conteo de cuadrados.*

Cuya solución se puede calcular, sistemáticamente, resolviendo primero un problema más simple, esto es, resolviendo la pregunta para los siguientes triángulos:

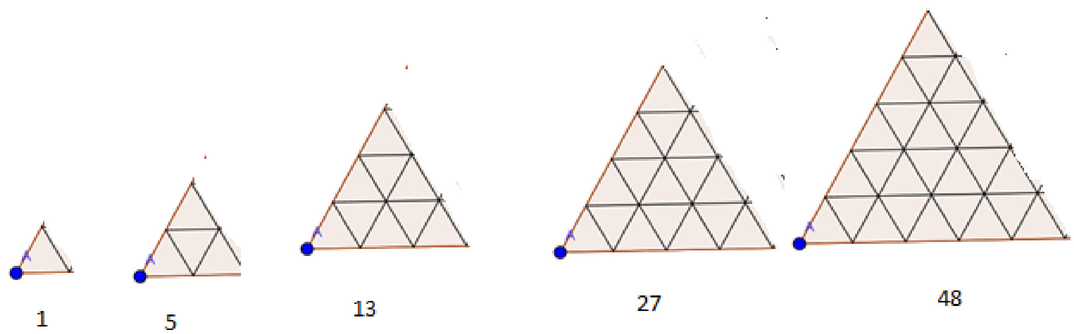


Ilustración 30: *Solución a la situación análoga.*

Se puede observar que la solución a este problema, genera una sucesión en la que las diferencias sucesivas no conlleva a una constante sino una sucesión alternante:

Sucesión	1	5	13	27	48	78
Primeras diferencias	4	8	14	21	30	
Segundas diferencias	4	6	7	9		
Terceras diferencias	2	1	2			

Las terceras diferencias no son constantes, se alternan los números 2 y 1, generando la sucesión alternante 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, …

De esta manera, se deja a consideración para investigaciones futuras, el estudio de las diferentes estrategias y razonamientos que utilizan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas y situaciones de generalización de modelos que corresponden a sucesiones alternantes.

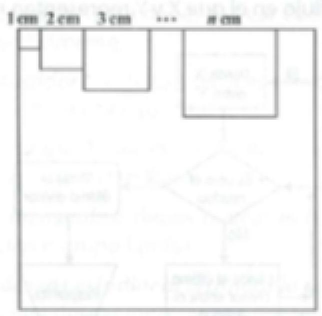
Anexo 1: Actividades para los estudiantes

Actividad 1: Olimpiadas Medellinenses del conocimiento 2011

· En las Olimpiadas Medellinenses del conocimiento del año 2011 se plantea lo siguiente:

RESPONDA LAS PREGUNTAS 5 A 8 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

Natalia está elaborando algunos diseños y para ello utiliza cartulinas cuadradas. De cada cartulina va recortando, sólo en uno de los lados, un cuadrado de lado 1cm, un cuadrado de lado 2cm, un cuadrado de lado 3cm... y así sucesivamente. El proceso se ilustra en la figura



Figura

5. Si Natalia utiliza una cartulina cuadrada de 30 cm de lado, la longitud del lado del cuadrado más grande que puede recortar es

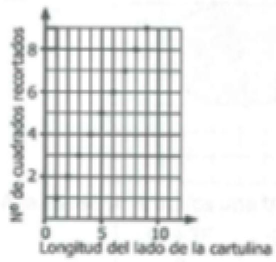
A. 7 cm.
B. 9 cm.
C. 28 cm.
D. 30 cm.

6. Si Natalia usa una cartulina cuadrada de 55cm de lado y recorta cuadrados, en la forma indicada en la figura, el número de cuadrados que obtiene es

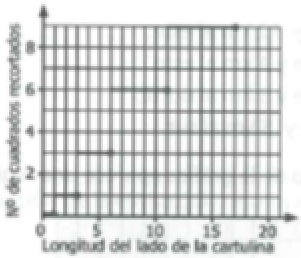
A. 10
B. 11
C. 45
D. 55

7. La gráfica que representa la relación entre la longitud del lado de una cartulina y el número de cuadrados que de ella se pueden recortar, utilizando el procedimiento descrito, es

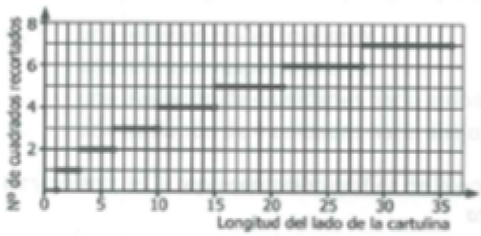
A.



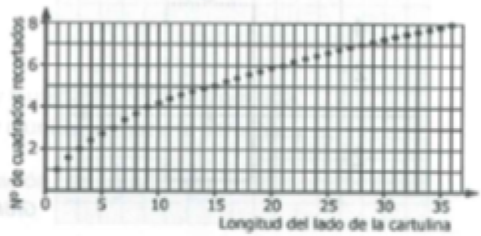
B.



C.



D.



8. Si Natalia quiere recortar un cuadrado necesita una cartulina mínimo de 1cm de lado, si quiere recortar dos cuadrados (uno de lado 1cm y otro de lado 2cm) necesita una cartulina mínimo de 3cm de lado y así sucesivamente. Si ella quiere recortar n cuadrados necesita una cartulina con una longitud mínima de

A. n centímetros.

B. $\frac{n(n-1)}{2}$ centímetros.

C. $\frac{n(n+1)}{2}$ centímetros.

D. $n(n+1)$ centímetros.

Actividad 2: Flores con Hexágonos negros y blancos

Siguiendo el patrón mostrado en las siguientes figuras, cuántos hexágonos blancos se requieren para rodear 12 hexágonos negros? ¿Y para rodear 50 hexágonos negros? ¿Y para rodear **n** hexágonos negros?

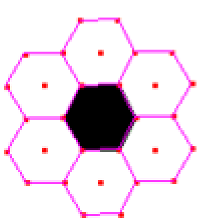


Figura1

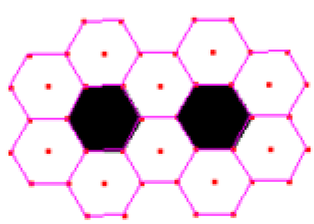


Figura 2

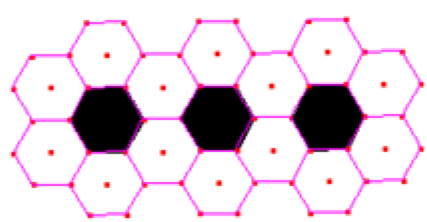


Figura 3

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las dos primeras figuras?

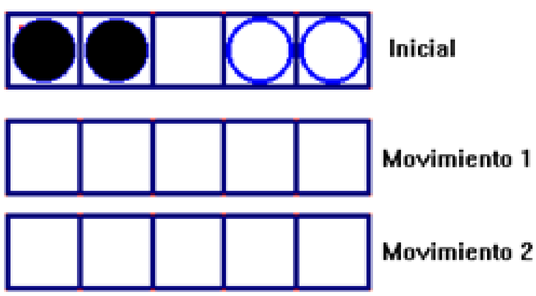
¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las tres primeras figuras?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las 10 primeras figuras?

¿Cuántos hexágonos blancos se requieren para construir las ***n*** primeras figuras?

Actividad 3: Juego de la Ranita

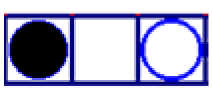
El siguiente diagrama muestra un juego en el que en cada movimiento sólo se puede desplazar una ficha, un cuadro o hacerla saltar sobre una ficha de distinto color. Además, las fichas blancas sólo se pueden desplazar a su izquierda y las negras a su derecha.

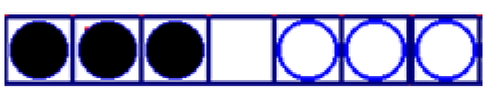


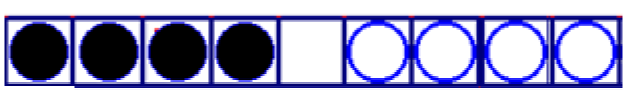
Tomado de prueba de admisión Universidad de Antioquia

1. Hallar el mínimo número de movimientos que permite cambiar las fichas blancas por las negras.

2. Responder la misma pregunta para los siguientes tableros

a.  (una ficha de cada color)

b.  (tres fichas de cada color)

c.  (cuatro fichas de cada color)

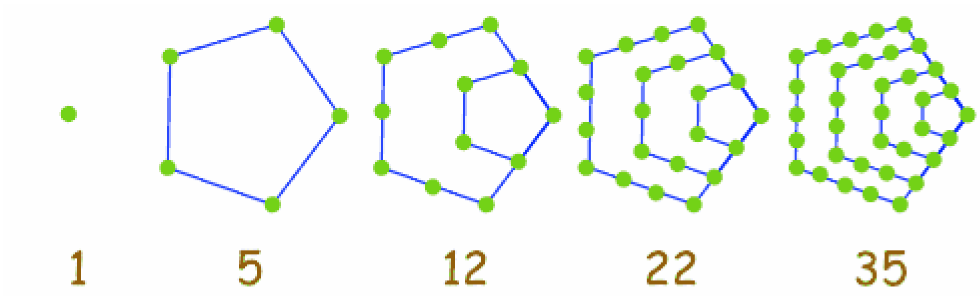
d. 5 fichas de cada color.

e. 10 fichas de cada color.

f. fichas de cada color.

Actividad 4: Números Pentagonales

A cada figura que se presenta a continuación le corresponde un número de acuerdo a la cantidad de puntos:

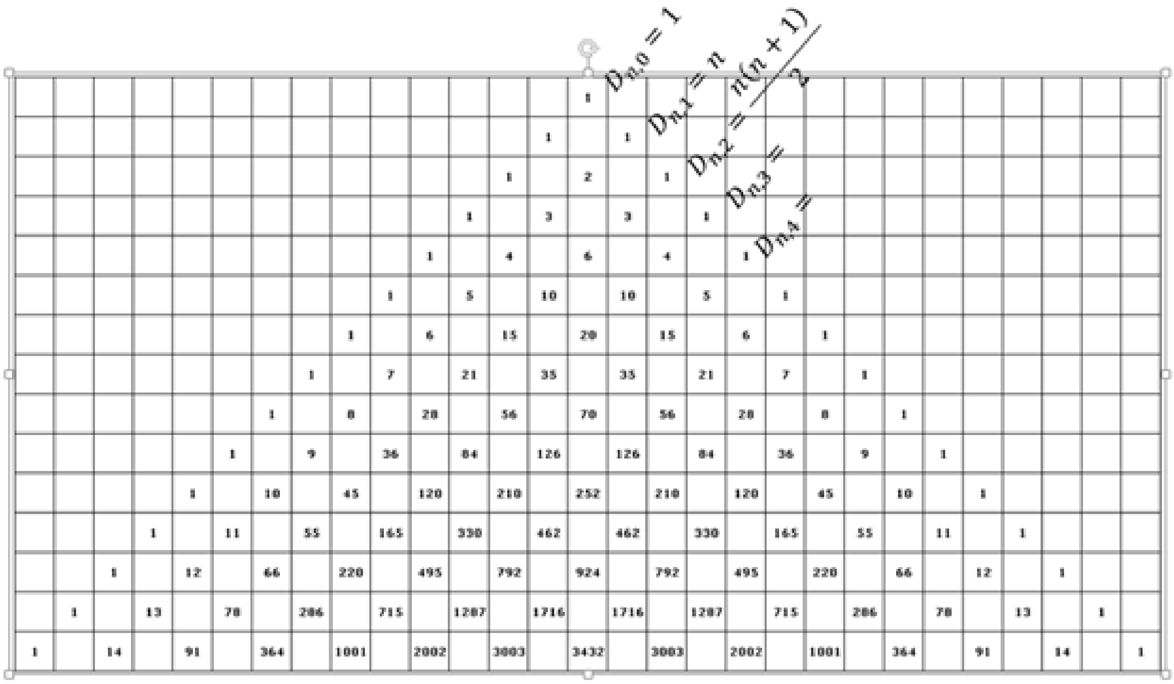


¿Cuántos puntos le corresponden a la figura ?

¿Cuántos puntos le corresponden a la figura ?

Actividad 5: Sucesiones en las Diagonales del Triángulo de Pascal

Teniendo como base la Generalización de la Diagonal dos del triángulo de Pascal: Conjeturar una generalización para las sucesiones determinadas por las diagonales siguientes (



Cabe resaltar que en el diálogo entre estudiantes e investigador se generaron interrogantes que permitieron ir refinando las estrategias y razonamientos en la generalización.

Anexo 2: Solicitud permiso de los padres de familia

Medellín, 01 de febrero de 2015.

Cordial saludo

La presente carta es para solicitar su autorización como padre de xxxxxx, para participar de la investigación que se llevará a cabo en la Institución Educativa Kennedy, dicha investigación es netamente académica y está enfocada en estudiar las estrategias y formas de razonamiento en estudiantes de undécimo grado, lo que significa que el objeto de estudio no son los estudiantes como tal, sino dichas estrategias y razonamientos.

Es necesario aclarar que no publicaremos identidad de su hijo, y en caso tal que hagamos uso de videos o fotografías, siempre velaremos por proteger que sus rostros no sean publicados, con el fin de evitar alguna estigmatización o comentarios peyorativos.

Atentamente

______________________________ _________________________________

Bibliografía

Akkan, Y. (2013). *Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns.* En: *Bolema, Vol 27, p703-732.* Brasil.

Amit, M. y Neira, D.(2008). *Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*. En: *ZDM Mathematics Education, v.40 p.111-129*. Diciembre 2008, https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0141-9?wt_mc=Banner.Springer.com%20banner.8.CON434.IZ%2FZDM%2F10years%2F2008

Ávila, M., López, C. y Gonzales, J.,(2010). *La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas.* Universidad Autónoma de ciudad Juárez, Ciudad Juárez: México.

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

Becker, J.R. y Rivera, F.(2005). *Generalization strategies of beginning high school algebra students*. En: *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 29th*. Universidad de Melbourne, Melbourne, Australia.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). *Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning.* En*: Journal for Research in Mathematics Education, Vol.36, p.412-446*. Noviembre 2005, https://www.jstor.org/stable/30034944?seq=1#page_scan_tab_contents

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2014). *Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria.* Universidad Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro: Brasil

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, Inglaterra: Heinemann.

Dreyfus, T. (2002) *Advanced mathematical thinking p. 25–41*. Dordrecht, Holanda.

Ebersbach, M. y Wilkening, F. (2007). *Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth*. En: *Children Development. v.78, p.296-308*. Zúrich, Suiza.

Feifei, Y.(2005*) Diagnostic assessment of urban middle school student learning of pre-algebra patterns*. Universidad de Ohio, Ohio, Estados unidos.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife, España.

Garcia-Cruz, J.A. y Martinon, A.(1997) *Actions and invariant schemata in linear generalizing problems*. En: *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.21th*.Universidad de Helsinki, Helsinki, Finlandia.

Godino, J y Font, V. (2000). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada ,Granada, España.

Henriques, A. y Da Ponte, J.P. (2014). *As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação.* En *Bolema Vol.28, n.48, p.276-298*. Brasil.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). *Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures*. En *The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, p. 344-351).* Melbourne, Australia.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. En *Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra, p.33-56*. Míchigan, Estados Unidos.

Kieran, C. (2004). *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educato*r. Universidad de Quebec, Montreal, Canadá.

Krebs, A.S.(2003) *Middle grade students' algebraic understanding in a reform curriculum*. En: *School Science and Mathematics, Vol.103, p.233-243*. 17 Marzo 2010 http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18204.x/epdf?r3_referer=wolytracking_action=preview_clickyshow_checkout=1ypurchase_referrer=onlinelibrary.wiley.comypurchase_site_license=LICENSE_DENIED

Krutetzki, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Traducido del ruso por J. Teller. Editado por J. Kilpatrick y I. Wirszup. Revista de la Universidad de Chicago. Chicago, Estados unidos.

Lee, L. y Wheeler, D.(1987). *Algebraic Thinking in High School Studets: Their Conceptions of Generalization and Justification.* Universidad Concordia, Montreal, Canadá.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Mason, J. (1999) *La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: las secuencias de Tunja*. En *Revista EMA, vol. 4, p.232-247.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, Colombia-MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, Colombia-MEN (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, Colombia-MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Orton, A. y Orton, J. (1996). *Making sense of children's patterning.* En *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, p83-90*. Universidad de Valencia, Valencia, España.

Orton, A. y Orton, J. (1999). *Pattern and the approach to algebra p.104 - 120*. Londres, Inglaterra.

Pretexto Grupo (1999*). La transición aritmética-álgebra*. Bogotá, Colombia: Gaia.

Radford, L. (2002). *The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge.* En *For the Learning of Mathematics, p14-23*. Ontario, Canadá.

Radford, L. (2000b). *Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis.* En *Educational Studies in Mathematics, p.237-268.*Universidad laurentian Sudbury, Canadá

Radford, L. (2003). *Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization.* En *Mathematical Thinking and Learning, p.37-70.* Pensilvania, Estados Unidos.

Radford, L. (2004). *La généralisation mathématique comme processus sémiotique.* En *atti del convegno di didattica della matematica* Locarno, Suiza: G. Arrigo.

Radford, L. (2005b). *¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification Vol. 1,p.143-145*. Melbourne, Australia: Helen L. Chick, Jill L. Vincent.

Radford, L. (2006c). *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective*. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. Universidad Pedagógica Nacional, Mérida, Mexico: S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez.

Radford, L. (2008b). *Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts, p.83-96.* Sudbury, Canada.

Radford, L. (2010a). *Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective, p.1-19.* 12 Febrero 2010, http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14794800903569741?scroll=topyneedAccess=true.

Radford, L. (2011). *Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking*. En *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. (pp. 303-322)* Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013b). *Entorno a tres problemas de la generalización*. En Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro p.3-12*. Granada, España: Comares.

Stacey, K. (1989).*Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems.Educational.* Universidad de Melbourne, Melbourne, Australia.

Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition.* Universidad en Utrecht, Países Bajos.

Vasco, C. E. (2009). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vasco, C. E. (2002). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.