UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Departamento de Ciencias Básicas

Nociones conceptuales de función en los estudiantes de noveno grado

Trabajo de grado que presentan:

Gabriel Ospina Muñoz

Daninson Reyes Mosquera

Para obtener el Grado de

Magister en educación matemática

Director de Tesis:

Dr. Luis Alexander Conde Solano

Medellín, Antioquia   Mayo de 2018

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Medellín, 17 de Marzo 2018

RESUMEN

En este trabajo de grado, se exponen los resultados obtenidos en una experiencia docente sobre las nociones conceptuales de función que expresan los estudiantes del noveno grado pertenecientes a dos instituciones educativas diferentes, una pública y la otra privada.

Esta investigación surge de nuestras prácticas como educadores matemáticos sobre las persistentes dificultades de los estudiantes al momento de asociar las representaciones con el objeto función y usar dichas nociones en el tratamiento de situaciones problema. Esta investigación es de corte cualitativa, donde mediante un estudio descriptivo y exploratorio buscamos una interpretación detallada sobre la realidad de los estudiantes frente al estudio del concepto de función. Uno de los hallazgos se refiere a las escasas experiencias de los estudiantes a temprana edad sobre el tratamiento numérico de situaciones problema que puedan orientar a los estudiantes a ideas algebraicas como la generalidad, la expresión de una generalización o la idea de variación y función. Misma realidad infiere que la interpretación gráfica de los estudiantes atañe a una interpretación discreta de los datos. Es decir, que ellos desconocen la variación implícita allí, por lo tanto, no logra visualizar, generalizar ni representar un proceso continuo expreso en una función.

Palabras clave: matemáticas, función, aprendizaje, representaciones.

ABSTRACT

In this degree work, we present the results obtained in a teaching experience on the conceptual notions of function expressed by the Ninth grade students belonging to two different educational institutions, public and the other private.

This research emerges from our practices as mathematical educators about the persistent difficulties of students when associating representations with the object function and using such notions in the problem situations treatment. This research is qualitative, where through a descriptive and exploratory study we seek for a detailed interpretation about the reality of the students facing the study of the concept of function. One of the findings refers to the scarce experiences of students at an early age about the numerical treatment of problem situations that can guide students to algebraic ideas such as generality, the expression of a generalization or the idea of variation and function. Same reality infers that the graphic interpretation of the students concerns a discrete interpretation of the data. That is to say, they do not know the implicit variation there, therefore, they cannot visualize, generalize or represent a continuous process expressed in a function.

Keywords: Mathematics, function, learning, representations.

ÍNDICE

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

AGRADECIMIENTOS

Expreso profundo agradecimiento a mi esposa Hableidy Palacios Perea y a mi hija Jaily Daniela Reyes Palacios por la paciencia y el apoyo brindado durante todo este tiempo, también de manera muy especial a la gobernación de Antioquia, por el apoyo económico proporcionado para la realización de esta maestría que culminan con el presente trabajo de tesis de grado.

Becario 2016/2017

Agradezco al Doctor Vladimir Zapata Villegas Rector del colegio Colombo Británico, y su incondicional colaboración es su aporte con la beca para realizar mis estudios en la Maestría, y de manera muy especial a mi esposa por estar siempre a mi lado.

Finalmente expresamos nuestro agradecimiento al Dr. Luis Alexander Conde Solano por todos sus aportes en la realización de este trabajo.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a:

Dedico este trabajo de investigación a mi esposa Mónica y a mi hijo Nicolás quienes son mi motivación e impulso de vida. A Dios gracias por las oportunidades que me da y por permitirme crecer cada día.

Gabriel Ospina

El presente trabajo de investigación está dedicado primordialmente a Dios, a mi esposa Hableidy Palacios y a mi hija Jaily Daniela Reyes quienes llegaron a mi vida para brindarme mucho amor y felicidad convirtiéndose en el motor que me impulsa día a día para crecer personal e intelectualmente.

Daninson Reyes

1. Introducción y planteamiento del problema

"No te preocupes por tus dificultades en matemáticas. Te puedo asegurar que las mías son aún mayores"

A. Einstein-L. Infield

1.1 Fenómeno de estudio

Cuando nos referimos al concepto de función apreciamos que éste es uno de los objetos matemáticos imprescindibles a la hora de la enseñanza de las matemáticas debido a sus múltiples aplicaciones contextualizadas. No obstante, hemos estimado desde nuestra experiencia y a través de reportes de investigaciones, que precisamente este tema es uno de los conceptos con mayores dificultades en su enseñanza y aprendizaje por su complejidad y la cantidad de subtemas que están inmersos dentro de este concepto.

Desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se siguiere el estudio de las relaciones entre los parámetros de expresiones algebraicas de una familia de funciones, así como los efectos de sus cambios representados gráficamente. El propósito es promover en los estudiantes a temprana edad el pensamiento variacional basados en la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos. El estudio de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines, pueden proveer a los estudiantes de elementos conceptuales sobre la construcción y representación de patrones matemáticos en diferentes contextos.

En concordancia con lo anterior, los principios y estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM 2000), señalan que uno de los caminos para lograr la construcción de dichos conceptos, de manera clara y significativa, es mediante la resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal.

La relevancia del estudio de las funciones y en particular las lineales, en su extensa aplicación contextual, así como su relación estrecha con otras nociones propias del pensamiento variacional, se delimitan por: constante, variable, función, razón de cambio, dependencia e independencia entre variables. De aquí la importancia que los estudiantes construyan una idea próxima sobre funciones lineales y que establezcan conexiones entre ellas para analizar y modelar distintos fenómenos cotidianos en las ciencias naturales, sociales y particularmente en las matemáticas.

1.2 Planteamiento del problema

En el ejercicio de nuestra labor docente hemos podido evidenciar las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente la interpretación de funciones. La estructura abstracta de esta ciencia puede de alguna manera ser un obstáculo para el estudiante en la comprensión y asimilación de sus contenidos. El hecho de abordar el proceso de enseñanza de conceptos matemáticos de una manera tradicional, en donde las herramientas fundamentales son: el tablero, la tiza y en ocasiones un libro de texto guía, condiciona al estudiante a hacer uso de su imaginación para poder interactuar con estos objetos matemáticos y hacerse una idea de lo que se le está tratando de explicar.

Con respecto a dicha problemática centramos la atención en el trazo de funciones y en la interpretación de gráficos para la solución de situaciones problema. Esta dificultad no depende solamente de la capacidad cognitiva de los estudiantes, ya que también se puede asociar a la forma cómo los docentes enseñan tal concepto.

En la actualidad el sistema educativo a nivel nacional está orientado a potencializar en los estudiantes las competencias matemáticas básicas, esto ha ocasionado que las comunidades de educadores matemáticos desarrollen propuestas curriculares enfocadas a dar respuesta a las necesidades del mundo actual. En ese sentido el consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics NCTM) propuso en el año 2000 unos estándares de matemáticas cuyo objetivo principal era que los estudiantes no adquieran únicamente conocimientos declarativos, sino que puedan aplicarlos y ser capaces de explicar por qué deberían usarse al resolver un problema determinado. Por tal razón, nuestro propósito es promover experiencias en los estudiantes para que asuman "la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas, comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OECD, 2004, pág. 3).

Por tal motivo, en este trabajo apuntamos al concepto de función lineal, por su relevancia tanto en la matemática básica en el grado noveno, así como su uso en la construcción de conceptos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional.

Inmersos en un sistema de enseñanza actual, en este estudio pretendemos indagar sobre las ideas de función que los estudiantes tienen y sus posibles dificultades en el grado noveno tanto del Colegio Colombo Británico de carácter privado del municipio de Envigado como de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo de la Ceja Antioquia. Posteriormente, compartir las realidades de los estudiantes entre las instituciones participantes con el propósito de buscar puntos de encuentro sobre las ideas de funciones de sus estudiantes.

De los argumentos anteriores proponemos como pregunta de investigación:

¿Cuáles nociones conceptuales de función poseen los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico?

Para responde la pregunta de investigación planteamos los siguientes objetivos:

1.3 Objetivos de investigación

- Describir las nociones conceptuales de función que expresan los estudiantes del noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico.
- Establecer puntos de encuentro sobre las nociones conceptuales de función que poseen los estudiantes de las instituciones participantes.

2. Antecedentes

"Los seres humanos hacen su propia historia, aunque
bajo circunstancias influidas por el pasado."

Karl Marx

Una de las actividades frecuentes de los profesores de matemáticas es la realización de evaluaciones, que, por lo general, atienden a una valoración cuantitativa de los estudiantes frente al rendimiento de la asignatura. En nuestro caso se usó la aplicación de una prueba para indagar sobre las nociones conceptuales que poseen los estudiantes del grado noveno (ver Anexo 1). En cuanto al concepto de función se reconoce que las dificultades conciernen a diferentes factores que inciden de manera desfavorable en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, consideramos que uno de los aspectos puede atribuirse a la ausencia de articulación entre distintos registros de representación del objeto.

Según Artigue, Douady, & Moreno (1995), señalan que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, considerándose el estudio de las funciones como un objeto "inerte" (p. 105). Otros investigadores buscan un traramiento a la problemática de enseñanza y aprendizaje de las funciones desde la historia de las matemáticas sobre la construcción del concepto de función. Entre tanto, otros desde la modelación de situaciones cotidianas o en contexto del concepto de función que podrían provocar en el estudiante una aproximación a fenómenos físicos económicos o sociales, permitiéndole que éste analice y describa la trascendencia que tienen los objetos (simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos). Al respecto, Hitt (2000) comenta que "a través de las funciones podemos modelar matemáticamente, describir y analizar un fenómeno de la vida real, sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos escribiendo" (pág. 81).

Las dificultades del aprendizaje del concepto de función generalmente pueden estar asociadas a la implementación de reglas algorítmicas, dejando de lado sus significados alrededor de los conjuntos numéricos y sus operaciones, las expresiones algebraicas y su correspondencia con el plano cartesiano. Así los estudiantes desde temprana edad pueden reconocer diferentes procesos de variación que influyen directamente sobre ellos.

En estudios de Leinhart et al (1990) obtuvieron tres categorías de errores concerniente al concepto de función: i) Confusión punto-intervalo; ii) confusión pendiente-altura e iii) interpretación icónica. También, Hitt (2005) señala dos tipos de conflictos promovidos por tareas que consisten en obtener una gráfica a partir de puntos obtenidos por sustitución de valores en una expresión algebraica: i) El asociado a la falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones y ii) El asociado a la concepción de continuidad de la función.

Según Duval (1992) la vía del punteo -hacer la lectura de las coordenadas de un punto sobre la gráfica- es inadecuada para hacer una interpretación global de la gráfica cartesiana, ya que esta requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la unidad significante de la representación algebraica. Leer puntos aislados no permite establecer la relación entre la pendiente (*m*) y la dirección de la recta se puede convertir en un obstáculo que frena el proceso de conversión de hallar la expresión algebraica que representa. Por lo tanto, la interpretación global de la gráfica cartesiana que requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la *unidad significante* -valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación- de la representación algebraica.

De igual manera Duval manifiesta que la articulación entre los registros gráficos y el algebraico no queda establecida luego del estudio de las funciones afines. A esto atribuye directamente al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica que existen entre el registro de representación gráfico y el registro algebraico, de la misma forma al desconocimiento de los fenómenos de *no congruencia* entre registros de representación.

Duval menciona que la conversión entre dos representaciones es *congruente*, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.

Para Planchart (2000) los estudiantes muestran falencias en la comprensión del concepto de función y para tratar de mejorar en estas dificultades propone una forma de enseñanza enmarcada en las representaciones semióticas del concepto matemático, la visualización, la modelación y la tecnología.

Así Planchart presenta a los estudiantes ejercicios de modelación y simulación con la ayuda de la tecnología, que requieren para su solución la articulación de diferentes registros de representación. Los hallazgos más importantes obtenidos en este estudio son los siguientes:

- ✓ Para algunos estudiantes el realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico se les presenta mucha dificultad y en el registro tabular habitualmente esperan que respondan a una ecuación, poniendo en duda que representen una función.
- ✓ Los estudiantes frecuentemente tienden a pensar que las funciones deben ser continuas, lo cual es favorecido, en numerosos casos, por el docente quien tiene una gran preferencia por las funciones continúas definidas con una fórmula única.
- ✓ Presentan dificultades en la notación de las funciones, lo que remite a un manejo inadecuado de las reglas de formación propias del sistema algebraico.
- ✓ En su mayoría los problemas son resueltos en el registro gráfico, quizás por producto del trabajo visual con tecnología.
- ✓ En los ejercicios que corresponden a situaciones físicas, los estudiantes presentan dificultades para hacer la conversión al registro algebraico, ya que se requiere de un mayor razonamiento para identificar las variables y combinarlas. Cuando se solicitó pasar de la situación en registro verbal al registro gráfico, en numerosos casos los estudiantes señalaron la forma de la gráfica correctamente sin lograr dar justificaciones, lo que induce a pensar que realizaron una traslación icónica
- ✓ La modelación es una herramienta que favorece en gran medida a que los estudiantes puedan coordinar y hacer conversiones en los distintos sistemas de representación semiótica para una situación planteada en contexto.

En el estudio de Planchart (2000) se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para realizar conversiones desde el registro gráfico al registro algebraico, además utilizan el registro tabular como un registro intermedio que les ayuda a transitar desde el registro algebraico al gráfico, poniendo en duda que también es una representación del concepto de función.

Guzmán (1998) realiza el estudio con 75 estudiantes de cálculo diferencial del primer año de ingeniería aplicando un cuestionario de 16 preguntas en donde las conclusiones más importantes de la investigación fueron:

- ✓ Se evidenció el hecho de que no se ha dado la suficiente importancia a la relación que existe entre las diversas formas en que es posible representar una función.
- ✓ En general los estudiantes son *"mono registros"*, lo cual indica que sus respuestas están dadas en el registro en que es formulada la pregunta, en algunas ocasiones acuden al registro algebraico, pero en la mayoría de los casos no coordinan dos registros o más.
- ✓ Las respuestas de los estudiantes revelan cierta dificultad para dar explicaciones verbales, lo cual sugiere que el registro del lenguaje natural debe tener mayor relevancia dentro del aula.
- ✓ La traducción de un lenguaje a otro y la coordinación de registros no es una meta de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente y esto evidentemente no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones.
- ✓ No se observa interés de parte de los estudiantes, en hacer corresponder las *unidades*
- ✓ Los estudiantes no demuestran habilidad para leer e interpretar los gráficos movilizando conceptos pertinentes que aprendieron en lenguaje formal o natural.

Las investigaciones antes descritas coinciden en que hay ausencia de articulación entre los diferentes registros de representación semiótica del concepto de función, también mencionan que los estudiantes no reconocen el comportamiento global de las gráficas y que no establecen relaciones entre las representaciones gráfica y algebraica de una función.

En estos estudios también se evidencia la importancia del uso de múltiples representaciones en la conceptualización del objeto matemático función y el uso de la tecnología como herramienta que promueve una interacción simultánea entre varios registros de representación semióticos, lo cual favorece a una mejor comprensión.

Las investigaciones en Educación Matemática que estudian las funciones y sus múltiples representaciones, coinciden indirectamente en que la conversión entre registros de representación es una de las causas de las dificultades que presentan los estudiantes en la conceptualización de las funciones. Esto se debe a la falta de discriminación de las unidades significantes propias de cada registro semiótico, la falta de una interpretación global de las gráficas cartesianas, la tendencia de los estudiantes a mecanizar los procedimientos en un solo registro, sin articular los diferentes registros, también la idea de que los registros gráficos y tabular son sólo registros intermedios, y el predominio de la utilización del registro algebraico sobre los otros registros de representación.

3. Marco conceptual

"Todas las ideas esenciales en la ciencia nacieron de un conflicto
Dramático entre la realidad y nuestros intentos de comprenderla"
A. Einstein-L. Infield

En la enseñanza de las matemáticas, es común que los estudiantes crean que hacer matemáticas significa hacer operaciones puntuales, manipular signos y memorizar. El caso de las funciones, posee una predominantemente carga operativa direccionada hacia el álgebra con su fuerte herencia de la matemática formal.

Desde este trabajo se precisa sobre procesos de *visualización* y generalización que pueden ser evidenciados en las diferentes representaciones, en particular, aquella concebida por representaciones dinámicas generadas por *tecnologías digitales*. Además, para el estudio de función desde situaciones problema necesariamente se forjan relaciones entre el pensamiento variacional y algebraico. Estos aspectos serán ampliados a continuación.

3.1 La visualización.

Para que ocurra una producción de conocimiento, es importante tener en cuenta el papel que juega la visualización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Hitt (1998) y De Guzmán (1996), hacen mención de la importancia de la visualización en el que hacer matemático, ya que contribuye a la creación de imágenes mentales en los estudiantes para la formación de conceptos matemáticos.

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas (De Guzmán, 1996, p.15).

Para De Guzmán (Citado por Hitt, 2003), la visualización matemática de un problema juega un papel importante para su solución y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir a lograr su solución. Para Hitt (2003) existe diferencia entre percibir y visualizar, dice que: "la percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo".

La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir ni mental ni física (Duval, 1999). La visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende, la visualización requiere de la utilización de nociones de matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráfico, escrito o verbal, pero exige también el uso de un lenguaje que explique ciertos fenómenos.

Así mismo Hitt, (2003), afirma que el desarrollo de la tecnología y en particular los dispositivos móviles influyen notablemente en la adquisición de las nociones teóricas que antes se tomaban como condición suficiente, pero no necesaria para adquirir el concepto matemático. Estos aspectos teóricos son el fundamento para entender el comportamiento de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos.

3.2 Pensamiento variacional

Se podría caracterizar el pensamiento variacional como la capacidad que tiene el estudiante para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas (MEN, 2004).

Según Parada, Conde y Fiallo (2016) en los niveles de educación básica pueden analizarse con los estudiantes situaciones problema relacionados con los cambios en la temperatura, peso, posición, población, velocidad, entre otros. El estudio de dichas magnitudes mediada por representaciones dinámicas puede ayudar a los estudiantes a comprender la variación que implica explicar cómo se relacionan las magnitudes variables en un problema particular, así como medir y analizar cómo cambian estas magnitudes.

En los principios y estándares del NCTM (2003), se señala que uno de los caminos para lograr la construcción de dichos conceptos de manera clara y significativa es mediante la resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. El proceso de resolución de problemas, según Puig (1996), se entiende como la actividad mental y expresa que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene es un problema y que quiere resolverlo. El cual concluye cuando se termina la tarea.

3.3 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico va más allá de dar significado a los símbolos, es decir, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento esenciales algebraicos, mismos que involucran manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es lo que significa pensar algebraicamente (Love, 1986, p.49).

Mason (1996) concibe el pensamiento algebraico como una actividad. Ve las raíces del pensamiento algebraico en la detección de igualdad y diferencia, al hacer distinciones, en la clasificación y el etiquetado, o simplemente en "algoritmo de búsqueda". La propia construcción de este algoritmo en la mente del estudiante, en cualquier forma que se prevé, es el pensamiento algebraico. En consecuencia, el pensamiento algebraico surgió a través de formas alternativas de comunicar sus resultados, similar a la conclusión de Radford (2000) que los "estudiantes ya estaban pensando algebraicamente cuando se trataba de la producción de un mensaje escrito, a pesar del hecho de que no estaban usando el estándar algebraico simbólico" (p. 258).

En enfoques tradicionales empiezan por enseñar la sintaxis algebraica y al final se espera que los estudiantes solucionen situaciones problema aplicando dicho contenido sintáctico-algebraico. En este enfoque tradicional se evidencia que los estudiantes vienen de un trabajo netamente aritmético y luego se introduce en un simbolismo sin conexiones con lo aritmético y desprovisto de significado. Esta transición de la aritmética al álgebra evidencia también problemas de traducción del lenguaje natural al álgebra y viceversa (Filloy y Rojano, 1991).

El Álgebra se propone como uno de los cinco bloques de contenido en los National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003). El propósito fundamental de estos estándares es desarrollar el pensamiento algebraico mediante el estudio de patrones, funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

Mason et al. (1985), señalan que los estudiantes suelen usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que, a la larga, pueden quedar como operaciones suspendidas.

3.4 La interpretación gráfica

La interpretación consiste en pasar de la gráfica de una situación a su descripción verbal. Como menciona Leinhardt (1990), por interpretación nos referimos a la acción por la cual el estudiante obtiene el sentido o el significado de una gráfica, o de una porción de ella, de una ecuación funcional o de una situación, la interpretación puede ser global y general o local y específica, de allí que se pueda dar como resultado un patrón.

La construcción consiste en pasar de la descripción verbal de una situación a la gráfica o tabla. Leinhardt (1990), dice que construcción se refiere a construir una gráfica o graficar puntos a partir de datos o a partir de una función dada por su regla de correspondencia o construir una función algebraica para una gráfica. Podrimos sugerir que la interpretación construcción de una función se puede considerar como un punto en común entre la variación y el álgebra. Como señalaron Dreyfus y Eisenberg (1982), las dificultades en el aprendizaje del concepto de función son causadas por:

- ✓ Su relación con otros conceptos matemáticos como dominio, imagen, crecimiento, decrecimiento, extremos; todos ellos necesarios para determinar el concepto de función.
- ✓ La relación que posee el concepto de función con otros campos de la matemática como el álgebra y la geometría.
- ✓ la existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto de función: descripción verbal, tabla de valores, graficas, expresiones y diagramas.

3.5 Representaciones

La naturaleza de los objetos matemáticos es abstracta, por lo tanto, la única forma de aproximarse a ellos es por medio de representaciones. Según Duval (1999) la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación sin confundir jamás los objetos matemáticos con ellas.

La representación puede referirse tanto a un proceso y también al resultado de este proceso, donde lo primero es una actividad de generación de objetos o entidades, y lo segundo se refiere a las entidades en sí mismas en lugar de la actividad que los ha producido. Por ejemplo, un dibujo de un objeto físico es un nuevo objeto que también existe como una entidad física, pero es diferente de una imagen mental de la misma cosa. Del resultado del proceso se distinguen dos tipos de representación: los mentales, referente a entidades cognitivas y las representaciones externas, referente a objetos físicos.

Para Dreyfus (1993) las representaciones desempeñan una función importante en las matemáticas, además define "las representaciones externas como las que usamos en fórmulas, gráficos, etc. Así mismo, las representaciones mentales es lo que imaginamos cuando se tiene una idea sobre un objeto matemático o su proceso" (p.123). Tall y Vinner (1981) emplean el concepto de imagen para ayudar a elaborar lo que significa tener una idea de un concepto y lo definen como "la estructura total cognitiva que está asociado con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados" (p.152), entonces se podría considerar que la representación exterior sirve para comunicar la idea del concepto de una manera formal.

Algunas representaciones son de forma visual, como la gráfica de una función; otros son puramente simbólica o algebraico y carecen de un aspecto gráfico. Los términos "visual" y "simbólico" se utilizan comúnmente para referirse a dos tipos de representaciones, a pesar de que representaciones visuales son también una forma de simbolizar. Algunos investigadores prefieren utilizar la terminología "gráfica" en lugar de visual, y "analítica o algebraica" en lugar de simbólica, por ejemplo, Artigue (1990) utiliza los términos algebraica y gráfica.

Según Larkin y Simón (1987) la representación visual-gráfica de una situación matemática, da una vista general, mientras que la representación simbólica implica un análisis más local. Un gráfico puede ser analizado específicamente en una zona; sin embargo, es una representación visual de la totalidad de la situación. Por otro lado, Chevallard (1985) sugiere que una representación algebraica tiene que ser recorrida de manera lineal, un aspecto a la vez. Cualquiera que sea la forma de representación, es necesario decodificar (analizarlo), en consecuencia, la representación visual y la representación simbólica son complementarios, cada uno sostiene una representación de diferente forma de interpretar la información. Una integración de ambos tipos de representaciones parece ser esencial para la construcción de un significado más rico del objeto matemático en estudio.

Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación (Duval, 1998, p. 177). Una figura geométrica, una fórmula algebraica, un enunciado en lengua natural, una gráfica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes y cada una de estas actividades son construidas de representaciones realizadas por medio de signos.

Por tanto, las representaciones semióticas, producto de la construcción de signos, son los medios por el cual las personas pueden exteriorizar sus representaciones mentales para hacerlas visibles y accesibles a otros. Aquí se entiende por representación mental al conjunto de concepciones o imágenes mentales que una persona tiene acerca de un objeto, éstas, además de cumplir una función de comunicación, conllevan a actividades cognitivas necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

4. Descripción del estudio: Metodología

"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo"

A. Einstein-L. Infield

Esta investigación se enmarca en una metodología de tipo cualitativa. Desde una perspectiva holística donde buscamos una interpretación detallada sobre la realidad de los estudiantes frente al estudio del concepto de función. Se realiza por medio de un estudio descriptivo y exploratorio con el propósito de establecer elemento de valoración sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes. El instrumento a utilizar fue diseñado por los investigadores de acuerdo a su experiencia en el aula y los aspectos de interés a observar en su investigación.

El proceso metodológico se desarrolló en las siguientes etapas.

4.1 Identificación del fenómeno de estudio y problematización

Emerge de nuestras prácticas como profesores de matemáticas y física en educación básica. En el proceso cotidiano de la enseñanza de las matemáticas identificamos dificultades en nuestros estudiantes, relacionados al estudio de la función. Por lo tanto, surge el interés por ahondar en dicha problemática para comprenderla y proponer alternativas que ayuden a los estudiantes a superar las dificultades identificadas.

Debido a los contextos del estudio, se considera el análisis en dos partes. La primera en estudio de casos de cada institución. Se pretende hacer una interpretación sobre el desarrollo del caso, recopilar la información con objetividad y que se pueda examinar su realidad, reorientando la observación para precisar en los aspectos de interés. La segunda un estudio comparativo entre las instituciones.

4.2 Selección de población

Este estudio fue realizado con estudiantes de la básica secundaria del grado noveno de dos instituciones educativas de diferentes naturalezas que se describen a continuación:

4.2.1 Colegio Colombo Británico

Institución de carácter privado, está ubicado en el municipio de Envigado y su propósito está relacionado con la formación académica de estudiantes desde el nivel de preescolar hasta la media académica, con una jornada única en calendario A.

Con motivo de enriquecer las dinámicas de aula y aportar nuevos elementos para la formación integral, entre 2014 y 2015 se dotan los salones de torres multimedia como recurso tecnológico, las cuales se componen de un computador con conexión a internet, y reproducción en video Bean y tablero digital, con el objetivo de "ofrecer herramientas diversas para la formación en alineación con el desarrollo de la infraestructura con los objetivos pedagógicos y formativos institucionales" (PEI, 2015, p. 40).

El colegio es considerado como una buena opción para los sectores socioeconómicos medios y altos, teniendo en cuenta que se considera como una institución de alto rendimiento académico a un costo accesible, en comparación con otros colegios de su mismo nivel.

Para la elección de los estudiantes cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años, es importante resaltar que, aunque se trabajó de manera general con todos los 120 jóvenes del grado noveno se determinó conveniente realizar un filtro y elegir 5 estudiantes que realizaron todo el proceso y mostraron mayor dificultad en cuanto al tratamiento que se le debe dar al concepto de función lineal.

4.2.2 Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo (M.A.U.J.)

Se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de la Ceja Antioquia, barrio San Cayetano. Allí se ofrece una educación formal a niños, niñas y jóvenes, distribuidos en dos jornadas diurnas de tal manera que en la jornada de la mañana se atiende la básica primaria y en la jornada de la tarde la básica secundaria y la media.

La institución se caracteriza por su formación humanista ya que cuenta con una población estudiantil que en su gran mayoría pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, y cuyos padres de familia por lo general dependen económicamente de los cultivos de flores asentados en la municipalidad en donde se desempeñan laboralmente.

Su población estudiantil de 1643 estudiantes y una planta docente de 52 educadores, dos coordinadoras y la señora rectora, además, se cuenta también con 3 secretarias y dos bibliotecarias. La M.A.U.J. está dotada con 25 aulas de clases, 520 Tablet cada una con conexión a internet, 8 aulas con proyectores y 2 tableros digitales cada uno con su respectivo equipamiento en bocinas de sonidos.

Para la elección de los estudiantes cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años, es importante resaltar que, aunque se trabajó de manera general con todos los 126 jóvenes del grado noveno se determinó conveniente realizar un filtro y elegir 5 estudiantes que realizaron todo el proceso y mostraron mayor dificultad en cuanto al tratamiento que se le debe dar al concepto de función lineal.

4.3 Diseño de intervención (prueba diagnóstica)

Con el propósito de observar procesos de aprendizaje e identificar indicios sobre las dificultades en el estudio de la función, debido a que tradicionalmente las representaciones semióticas de este concepto se han desarrollado en las aulas de clase de forma desarticulada, lo cual puede generar conflictos en la comprensión de los estudiantes ya que posteriormente se les hace difícil comprender estas representaciones para darles un significado al objeto en estudio.

El diseñó de una prueba clásica se hace de acuerdo a la metodología de enseñanza del tema de funciones ya visto por los estudiantes de noveno grado de las instituciones participantes. Con ella se pretende examinar aspectos como la noción de función, la identificación de función en diferentes representaciones como lo son la forma verbal, ecuación, tablas y graficas (diagramas sagitales, y cartesianos) y el uso del concepto de función en la interpretación y solución de situaciones problema (ver anexo 1). La prueba está basada en Chavéz, Castañeda, Joya, & Gómez (2010) y TAN (2012) y está diseñada para desarrollarse a lápiz y papel.

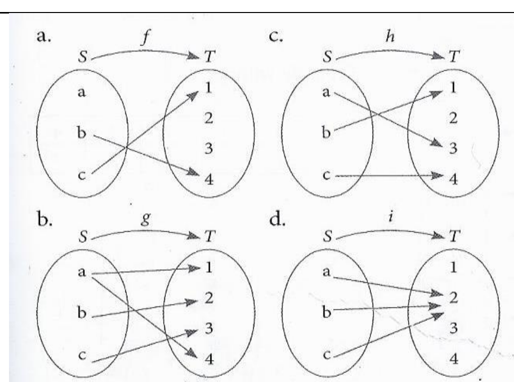
Como lo hemos mencionado anteriormente la noción de función puede ser representada en diferentes formas o registros. En el registro verbal la función lineal se presenta como una descripción basada en el lenguaje natural, en donde se describe con detalle el fenómeno de estudio como una situación problema para luego ser modelada si es el caso; en el registro algebraico la función lineal se representa por medio de una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x correspondiente al dominio de la función; en el caso del registro tabular la función lineal es representada por medio de una tabla de valores, en la cual se ponen en correspondencia las variables; sin embargo, tiene las limitaciones de la continuidad ya que se pueden incluir un número finito de valores; en el registro gráfico una función lineal se puede representar por medio de diagramas sagitales o mejor por medio de una línea recta (continua o no) en el plano cartesiano. La estructura de la prueba consiste en cinco incisos organizados como se presenta a continuación.

4.3.1 Estructura de la prueba

4.3.1.1 Representación de función en diagrama sagital

Se explora el concepto de función por medio de la correspondencia entre dos conjuntos, para “Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos” (MEN, 1998, pág. 51).

Se les presenta a los estudiantes cuatro diagramas sagitales para que los clasificaran en función o relación. Con este tipo de ejercicios se pretende identificar si los estudiantes logran identificar las relaciones que se pueden generar entre conjuntos, aquellas que son relaciones funcionales. La pregunta apunta a determinar si los estudiantes tienen claridad del concepto de función, en donde a cada uno de los elementos del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (Ilustración 1).



1. Determine cuál de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}\ y\ T = \{1,2,3,4\}$

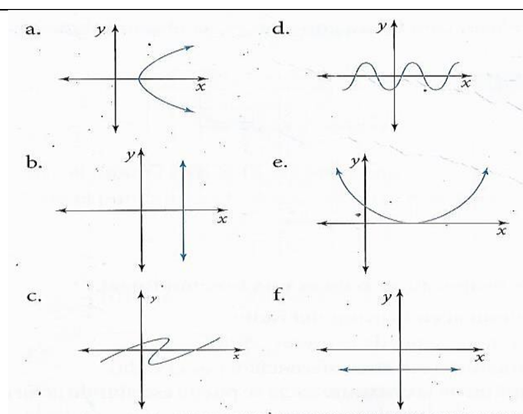
Ilustración 1 - Prueba diagnóstica, diagrama sagital.

4.3.1.2 Representación de función en representaciones cartesianas

De igual forma, y siendo coherentes con el tema, el inciso dos consiste en explorar el concepto de función en representaciones cartesianas y aunque este es un ente abstracto posee diversas representaciones semióticas para facilitar su aprehensión, sin embargo “el objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: en el caso de un diagrama cartesiano puede representar una función” (Godino, 2003, pag.53).

La intencionalidad con este tipo de ejercicios es determinar si el estudiante independientemente de la forma en que se le presente el objeto matemático, puede articular la información que tiene sobre el tema y establecer con claridad cuando una relación representada de manera gráfica en un sistema cartesiano es una función (Ilustración 2). En términos de Hitt (2005) “Un determinado concepto es estable en un individuo si puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones” (pág.4).

Se espera que en los ejercicios el estudiante utilice la técnica de la línea vertical, esto para verificar que al realizar un barrido horizontal con esta línea se intercepte la gráfica a la vez solo en un punto, lo cual indica que cada elemento del eje x tiene una sola imagen. Es decir, que cada elemento del dominio está relacionado una sola vez con algún elemento del codominio. Con esto podemos determinar si los estudiantes efectivamente están articulando adecuadamente la información sobre el concepto. También se pretende que los estudiantes deduzcan que el objeto función tiene varias representaciones.



2. Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

Ilustración 2 - Prueba diagnóstica, plano cartesiano.

4.3.1.3 Lenguaje cotidiano, expresión algebraica y representación gráfica

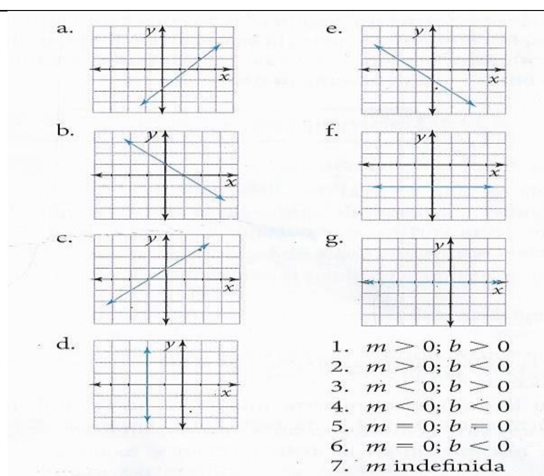
Aquí pretendemos que los estudiantes realicen una interpretación del lenguaje cotidiano a una expresión algebraica y realice su representación gráfica. Dada una situación problema acorde al tipo de alumnos que tenemos del grado 9. Esperamos que los estudiantes puedan usar el conocimiento adquirido, para dar solución de la situación problema (Ilustración 3).

> 3. Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.

Ilustración 3 - Prueba diagnóstica, situación problema.

4.3.1.4 Representación gráfica de las relaciones entre parámetros de la expresión algebraica

Aquí buscamos que los estudiantes realicen una interpretación gráfica y establezcan relaciones entre los términos de una ecuación de la recta. Para el desarrollo del pensamiento matemático, en los estudiantes del grado 9, vemos que es fundamental la visualización, ya que de esta manera el estudiante puede expresar de forma analítica la complejidad de la actividad propuesta. Consideramos que las interacciones con la variación de los parámetros pueden propiciar en los estudiantes ideas de representaciones dinámicas. La imagen mental del espacio cartesiano que los alumnos desarrollan, se determina o se forma a partir de reconstrucción de objetos a nivel simbólico algunas de ellas evocadas por la memoria otras por el conocimiento ya interiorizado (ver Ilustración 4).



4. Relaciona las gráficas con los valores de m y b señalados para la ecuación $y = mx + b$

Iustración 4 - Prueba diagnóstica, parámetros

4.3.1.5 Interpretación de la situación problema.

Pretendemos que los estudiantes efectúen una interpretación de la situación propuesta, construyan la gráfica y realicen estimaciones. Según Guzmán (1998) señala "que el contenido de una representación depende del registro utilizado, que es el que presenta explícitamente al objeto representado y muestra particularidades del objeto que en otro registro pueden no ser evidentes."

Así mismo, pretendemos que el estudiante realice la conversión de la información presentada inicialmente en forma tabular a otro tipo de representación como lo son el grafico y el algebraico los cuales seguirán describiendo el mismo fenómeno de estudio.

5. La tabla siguiente da el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos (en millones) de 1998 a 2005 (x =0 corresponde a 1998):

***x*, año**	0	1	2	3	4	5	6	7
***y*, número**	8.5	11.1	15.0	17.0	18.9	21.5	24.8	27.4

a) Trace el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos (y) contra el año (x).
b) Trace la línea L que pasa por los puntos (0, 8.5) y (7, 27.4).
c) Encuentre la ecuación de la línea L.
d) Suponga que esta tendencia continúa, estime el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos en 2006.

Ilustración 5 - Prueba diagnóstica, situación problema.

4.4 Aplicación

La prueba se realizó de manera independiente en ambas instituciones, esta se aplicó de forma general a todos los estudiantes del grado noveno, pero finalmente nuestra intención fue realizar un análisis comparativo entre las dos instituciones que nos ayudaran a resolver nuestros interrogantes. El horario de trabajo dependió de la disponibilidad de tiempo de cada grupo e institución educativa.

El desarrollo de las dos actividades fue en un orden secuencial. La metodología de trabajo durante la aplicación del instrumento consistió en: Actividades guiadas por el profesor, trabajo individual de los estudiantes, equipos de trabajo, socialización grupal, entre otras. En los párrafos siguientes describimos en detalle cada una de las sesiones trabajadas referentes a las dos guías.

El día 23 de octubre de 2017, se realizó la primera sesión y trabajamos con 10 estudiantes de ambas instituciones el primer módulo de la propuesta. Para ubicarnos en el contexto y para motivar a los estudiantes hicimos una breve introducción general sobre las actividades que realizaríamos y la forma de trabajo de la actividad uno. La aplicación tuvo una duración de dos horas. Este taller se fundamenta en el concepto de función lineal con el uso del dispositivo móvil.

La implementación de las dos actividades, dependiendo de la institución, esto con el fin de que podamos determinar un comparativo, no solo en los procesos académicos sino en el desarrollo tecnológico más práctico para los estudiantes.

4.5 Análisis y resultados

Se recoge la información, se digitaliza y se organiza para el posterior análisis de la información a la luz de los aspectos a observar. Luego se realiza una interpretación general sobre el desarrollo de las actividades.

5. Resultados del análisis

"Mide lo que sea medible y has medible lo que no lo sea"

Galileo Galilei

En este capítulo se mostrará el análisis detallado de las respuestas obtenidas en la prueba aplicada cuya finalidad era establecer cuales nociones conceptuales poseen los estudiantes del grado noveno tanto del Colegio Colombo Británico, así como, de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo. Particularmente hacemos énfasis en la exploración del concepto de la función lineal. La experiencia se analizó con 10 estudiantes, cinco por cada institución educativa. Los aspectos a observar son representaciones, parámetros e interpretación y solución de situaciones problema clásicas.

Los datos analizados se tomarán de los anexos, donde se ha sintetizado el desarrollo de cada una de las actividades de los estudiantes. Como evidencias de este análisis recurriremos a imágenes originales tomadas de las hojas de trabajo de los estudiantes de las dos instituciones.

5.1 La prueba diagnóstica

Teniendo como punto de partida el trabajo realizado con antelación por parte de los docentes sobre el estudio de funciones del currículo escolar. La propuesta de intervención pedagógica que se presenta a continuación nos permite determinar de cierto modo la claridad en el concepto de función que presentan los estudiantes del grado noveno de las instituciones educativas participantes. Dicha claridad la podemos evidenciar por las diferentes formas de expresiones orales, representaciones y conversiones entre los registros que los estudiantes realizan con cada inciso de la prueba diagnóstica (Duval, 1993).

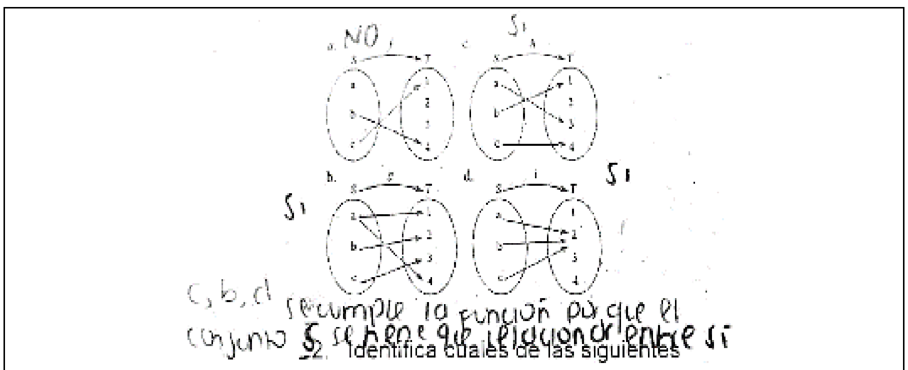
De acuerdo a la información sobre las dos instituciones involucradas, en los párrafos siguientes ahondamos en los aspectos a observar antes mencionados.

5.2 Pictórica

Con respecto a las representaciones pictóricas de la función, ya sea diagrama sagital o plano cartesiano, se evidencia confusión de los estudiantes en la aplicación de las condiciones para que se cumpla que una relación sea función. Observamos una variedad de respuestas con sus respectivas justificaciones que nos sugieren la existencia de poca claridad del concepto de función.

5.2.1 Representación de la función en el diagrama sagital

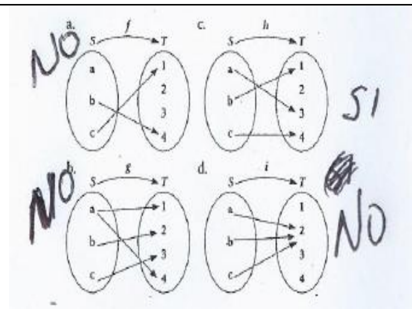
Respecto al diagrama sagital algunos estudiantes identifican una relación indiferente al conjunto tomado de partida (Anexo 1) como se muestra en la Ilustración 6, el Estudiante 2, presenta dificultad en la comprensión del concepto de función en donde no establece con claridad la relación de correspondencia entre dos conjuntos de manera que a cada elemento o valor del primer conjunto le corresponda un único elemento o valor del segundo conjunto y esto es indiferente al tipo de representación bien sea sagital o plano cartesiano.



1. Determine cuál de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}\ y\ T = \{1,2,3,4\}$

Ilustración 6 - Respuesta del Estudiante 2. Colegio Colombo Británico.

En términos de Dreyfus y Eisenberg (1982) ésta dificultada puede ser producto de la relación del concepto de función con otros conceptos matemáticos, en este caso en particular con conceptos de dominio y rango y su correspondencia para que exista una función. En el caso de los estudiantes de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo desarrollaron el primer punto sin dificultad (Ilustración 7).



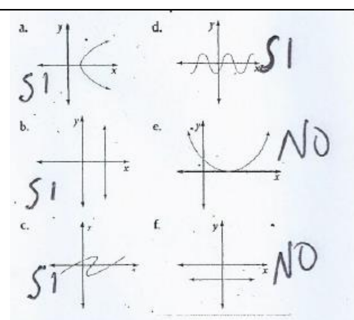
1. Determine cuál de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{1,2,3,4\}$

Ilustración 7 - Respuesta del Estudiante 5. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo

Notamos una creencia generalizada en las respuestas de los estudiantes del Colegio Colombo Británico, según ellos solo basta con que todos los elementos del conjunto de partida deben estar relacionados con los elementos del conjunto de llegada.

5.2.2 Representación de la función en el plano cartesiano

Aquí cambia el comportamiento de las respuestas de los estudiantes Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo. Se nota desconexión conceptual entre la representación sagital y las representaciones en el plano cartesiano como se muestra en la respuesta del Estudiante 5 frente al segundo inciso de la prueba (Ilustración 8).

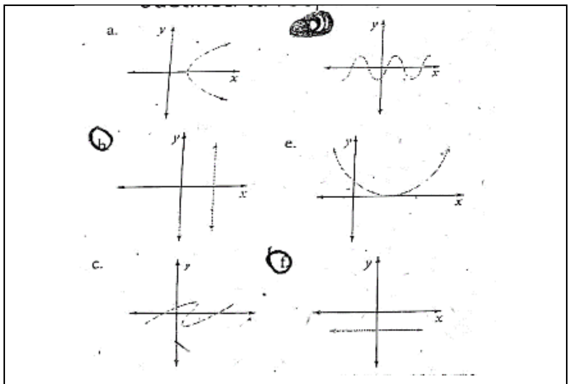


2. Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

Ilustración 8 -Respuesta de Estudiante 5. plano cartesiano

Podríamos concluir que los estudiantes no tienen una idea clara de función, por lo tanto, se les dificulta relacionar las representaciones sagitales con las representaciones en el plano cartesiano.

Tal vez, se podría pensar que el desarrollo acertado del primer punto de la prueba diagnóstica podría tratarse de una coincidencia y no de la comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes. Entre tanto, las respuestas de los estudiantes del Colegio Colombo Británico evidencian una extensión de las dificultades en la identificación de función cuando se representan en el plano cartesiano. Por ejemplo, el Estudiante 3 de dicha institución marca tres opciones de las cuales la opción ***a*** no es función, además no justifica sus respuestas. (Ilustración 9).



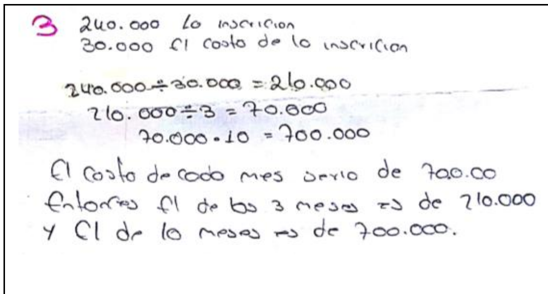
2. Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

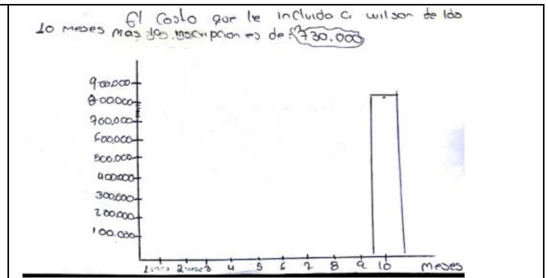
Ilustración 9 -Respuesta de Estudiante 3. Colegio Colombo Británico

5.2.3 Interpretación grafica de una situación problema

En la Ilustración 10, el trabajo realizado por el Estudiante 3, se puede percibir varias dificultades. Para iniciar se nota un obstáculo en el paso del lenguaje común al algebraico. Dicha dificultad puede ser provocada según Filloy y Rojano (1985) por la experiencia del estudiante predomina la aritmética que puede dificultar el aprendizaje del álgebra. En ese sentido, el Estudiante 3 al parecer, aun percibe las operaciones aritméticas y la simbología de la misma forma. Por lo tanto, el Estudiante 3 le da un tratamiento meramente aritmético desconociendo el uso algebraico que se requiere.

Consideramos que, en el enfoque tradicional de enseñanza, se privilegia el estudio de la aritmética sin orientación a la construcción de nociones básicas del álgebra, es decir, que se prepara a los estudiantes para que resuelvan algoritmos sin pasar a la generalización. Aquí vemos las consecuencias de las escasas experiencias de los estudiantes a temprana edad sobre el tratamiento numérico de situaciones problema que puedan orientar a los estudiantes a ideas algebraicas como la generalidad, la expresión de una generalización o la idea de variación y función.



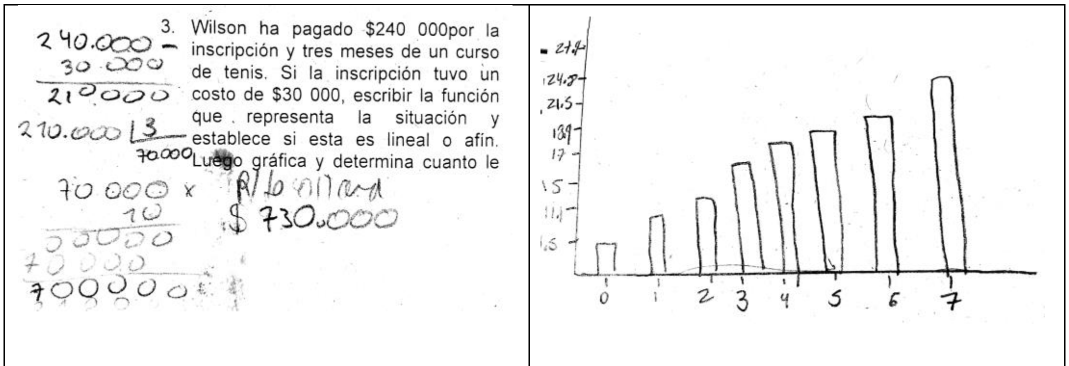


Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.

Ilustración 10 - Respuesta Estudiante 3. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo

Otra dificulta, que consideramos no aislada, es la representación gráfica de la situación problema propuesta. El estudiante optó por un diagrama de barras como la representación más adecuada. Si observamos el tratamiento aritmético del Estudiante 3, es de esperarse que el diagrama de barra se ajustara a la representación gráfica de la situación, según él. Podríamos inferir que la interpretación gráfica del estudiante atañe a una interpretación discreta de los datos. Es decir, que el Estudiante 3 no percibe la variación implícita allí, por lo tanto, no logra visualizar, generalizar ni representar un proceso continuo expreso en una función.

En la Ilustración 11, se muestra una situación similar a la anterior. Consideramos que el estudio del simbolismo sin significado y descontextualizado para el estudiante limita al mismo en la consecución de conexiones no visualiza. En este sentido se pone en evidencia las dificultades que tienen los estudiantes en cuanto al pensamiento variacional lo cual va en contravía con lo expresado por el (MEN, 2004) frente a este tema. Por esto se ratifica lo expresado por Hitt (2003) en donde los estudiantes perciben, pero no visualiza la situación planteada. Ellos no logran visualizar por tanto que no muestra la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar la información visual (Duval, 1999).



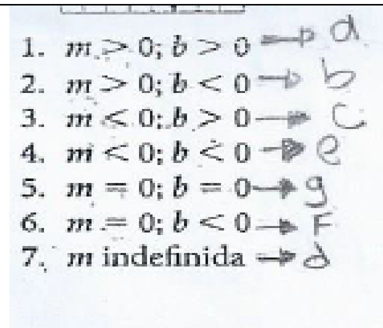
Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.

Ilustración 11 - Respuesta de Estudiante 5. Colegio Colombo Británico

Parece ser que estamos frente a una problemática generalizada, ya que estudiantes en diferentes espacios sociales y económicos diferentes, coinciden en la misma representación errónea de la misma situación problema.

5.2.4 Parámetros y gráficas con valores de *m* y *b*

La intencionalidad de este ejercicio es que los estudiantes interpretar geométricamente la gráfica en correspondencia con la variación de sus parámetros. En la Ilustración 12, el Estudiante 1, manifiesta dificultades para identificar la ecuación con la gráfica determinada por sus elementos m y b como pendiente y ordenada al origen respectivamente. Consideramos que dichas dificultades en la determinación de pendientes e intercepto están relacionadas al concepto de pensamiento variacional y algebraico, cuando se afirma que lo variacional posibilita que el estudiante pueda dar sentido a las familias de funciones.



4. Relaciona las gráficas con los valores de m y b señalados para la ecuación y = mx + b

Ilustración 12 -Respuesta de Estudiante 1. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo

Por su parte, el Estudiante 2, del Colegio Colombo Británico Identifica correctamente las opciones ***b***, ***e***, ***d***. Identifica pendientes de cero, pero no el valor del intercepto; al igual que las pendientes positivas, pero no de los intercepto. De aquí podemos concluir que el estudiante tiene dificultades para determinar el intercepto en la función lineal de acuerdo con los signos estipulados, cuál puede ser la inclinación de la recta y en dónde puede encontrarse la intersección con el eje y.

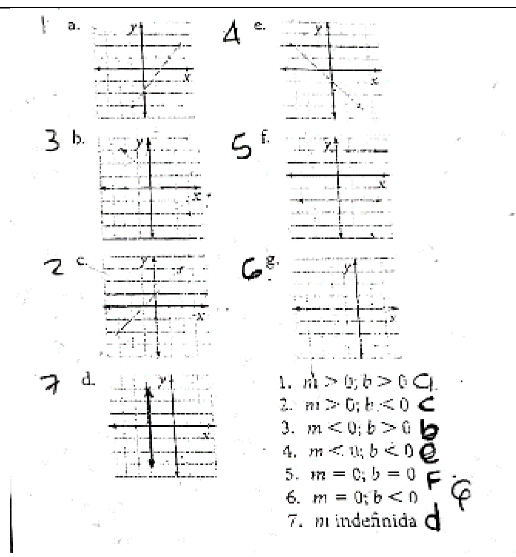


Ilustración 13 - Respuesta del Estudiante 2. Colegio Colombo Británico.

En las anteriores Ilustraciones se obstaculizaron los procesos de generalización ya que los estudiantes no relacionan los efectos de b y m en y=mx+b. Es decir, que no existe un reconocimiento de la generalidad que conduce en la deducción de un patrón que influye en el comportamiento de la gráfica.

5.2.5 Solución de la situación problema

Dos de los alumnos no presentan dificultad para encontrar la solución a la situación problema, uno de ellos no la realiza y los restantes la hacen incompleta, según Leinhardt, Zaslavsky & Stein (1990) por interpretación nos referimos a la acción por la cual el estudiante obtiene el sentido o el significado de una gráfica, de una ecuación funcional o de una situación. Por tal motivo podemos afirmar que aquellos que no la hacen o la hacen incompleta tienen problemas para resolver dicha situación y especialmente les cuesta construir una gráfica a partir de una tabla de datos suministrada, siendo allí una deficiencia entre la variación y la ilustración.

Finalmente, todas estas dificultades visualizadas en la prueba diagnóstica ratifican los pensamientos de Dreyfus y Eisenberg (1982) en cuanto a las causas de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función en donde evidenciamos:

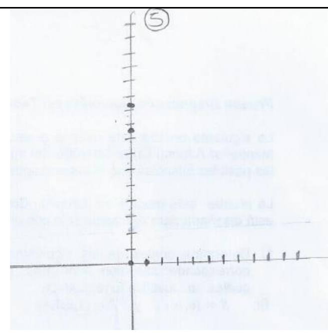
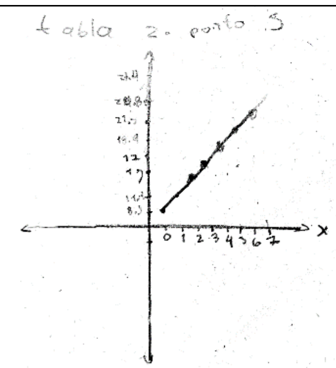
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Situación problema a partir de una tabla de valores, problema de suscriptores de tv</td></tr>
<tr><td>a) Estudiante 1. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo</td><td>b) Estudiante 4. Colegio Colombo Británico</td></tr>
</table>

Ilustración 14 - Respuesta de estudiantes. Prueba diagnóstica, pregunta 4.

- ✓ La relación que posee el concepto de función con otros campos de la matemática como el álgebra y la geometría y la estadística. Aquí se notó como los estudiantes relacionaron el concepto de función con conceptos y técnicas estadísticas llevándolos al fracaso en la solución de la situación planteada.

  Otra dificultad que señalan estos autores y se evidencio fue:
- ✓ La existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto de función: descripción verbal, tabla de valores, graficas, expresiones y diagramas.

Con respecto a esta situación notamos que los estudiantes no comprenden las diferentes representaciones semióticas del concepto de función lineal.

5.3 Comparaciones y puntos de encuentro

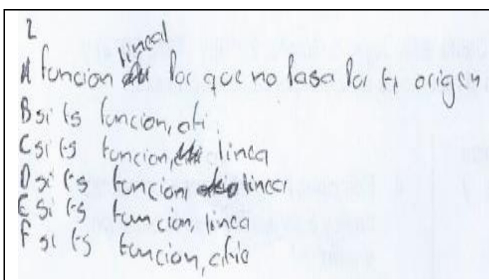
Al inicio de estudio se tenía pocas expectativas sobre realizar un estudio comparativo por las particularidades de los contextos de las instituciones implicadas. El Colegio Colombo Británico de carácter privado del municipio de Medellín, con un entorno socio-económico prominente, sus estudiantes cuentan con conectividad a internet, diversos recursos didácticos y tecnológicos, así como apoyo extra en matemáticas si es requerida. Entre tanto, la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, de carácter público del municipio de la Ceja-Antioquia con un entorno socio-económico promedio del país. Los estudiantes tienen conectividad, recursos didácticos y tecnológicos limitados.

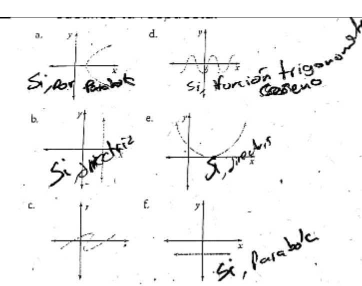
Además, como bien sabemos los procesos de investigación en matemática educativa dependen de los contextos, es decir, que al aplicar el mismo instrumento se esperan resultados diferentes por las especificidades de sus poblaciones en estudio.

Sin perder de vista los argumentos anteriores, de los datos emergen dos aspectos conceptuales que coinciden en las dos instituciones. Esto nos muestra que se gesta una especie de generalización de las dificultades de los estudiantes frente a un concepto de la matemática escolar.

5.3.1 Concepto vs tipificación

Se notan coincidencias en las respuestas de los estudiantes de las dos instituciones. Se observa en las respuestas de los estudiantes la necesidad de tipificar las funciones, por encina de justificar si se tratase de una función. Parece ser que las dificultades referentes a los conceptos de dominio y rango se trasladan a otros tipos de representación como muestra en la Figura 3.





2. Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

a) Estudiante 2. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo	b) Estudiante 1. Colegio Colombo Británico

Ilustración 16 - Respuesta de Estudiantes 1 y 2.

La existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto de función como descripción verbal, tabla de valores, graficas, expresiones y diagramas, podría dificultar el aprendizaje del concepto de función (Dreyfus y Eisenberg, 1982). Sin embargo, dicha diversidad también nos permite evidenciar el nivel de compresión y usos del concepto de función.

5.3.2 Interpretación gráfica de situación problema

Ya se ha tenido el primer indicio de una problemática generalizada, al observar que los estudiantes de diferentes instituciones explican su respuesta con el mismo argumento, como en el caso de tratar de tipificar las funciones. En la Ilustración 17 se evidencia otro evento referente a la pregunta número tres y de manera aislada tratan de representar la situación problema de la misma manera en la que utilizaron representaciones de diagramas de barras para tratar de ilustrar la información. La función lineal y afín es un concepto matemático que presenta una gran riqueza de contenidos visuales, representables geométricamente en donde dicha representación gráfica resulta ser muy provechosa para la comprensión del concepto. (De Guzmán, 1996, p.15).

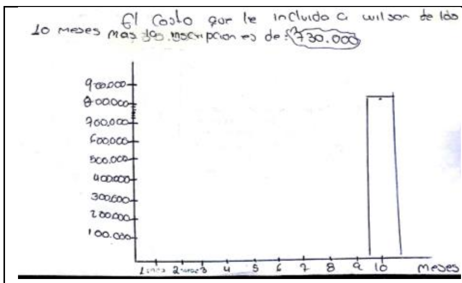
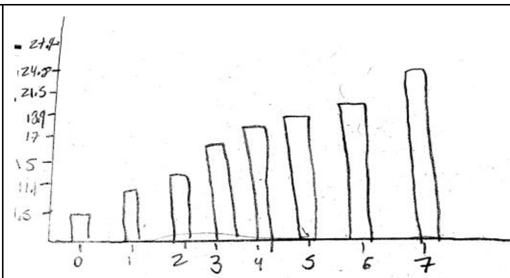
<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.</td></tr>
<tr><td>a) Estudiante 3. Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo</td><td>b) Estudiante 5. Colegio Colombo Británico</td></tr>
</table>

Ilustración 16 - Respuesta de Estudiantes 3 y 5.

Si bien resaltamos la importancia de crear imágenes mentales apropiadas para la formación de conceptos matemáticos, no podemos desconocer que esto dependerá de la capacidad intelectual de cada estudiante, por tal razón, retomamos lo expuesto por Hitt (1998) que destaca la importancia de la visualización en el quehacer matemático para la creación de conceptos.

Consideramos que el trabajo de las relaciones entre las variables al cambiar los parámetros de una expresión algebraica puede generar en los estudiantes ideas de representaciones dinámicas y en su defecto ideas de variación. Aclaramos que estos procesos dinámicos son limitados en la clase. Por ejemplo, para estudiar funciones, tanto profesores como estudiantes usan regularmente tablas y fórmulas, lo que conlleva a dificultades de interpretación de situaciones que no permiten ver los aspectos que desean verse con relación a la “variación”. Al respecto, Carabús (2002) menciona que, si el estudiante concibe a la función solamente como una correspondencia, no pone en juego su pensamiento y lenguaje variacional.

6. Conclusiones

"El mundo tal como lo hemos creado es un proceso de nuestro pensamiento. No se puede cambiar sin cambiar nuestra forma de pensar"

A. Einstein-L. Infield

El trabajo de investigación a nivel de la Maestría en Educación Matemática, cobra relevancia si es realizado de manera estructurada y permiten plasmar estrategias de aplicación en proyectos de aula. Buscando mejorar las prácticas en el aula respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Particularmente, con este proyecto se pretende contribuir con un punto de partida para entender y explicar las realidades de los estudiantes frente al estudio de un objeto matemático, en este caso la función. En este sentido, referente a la pregunta de investigación *¿Qué nociones conceptuales de función poseen los estudiantes del noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico?* Una respuesta inferida del análisis apunta a la poca claridad que los estudiantes tienen frente al concepto de función, así como limitaciones de los usos de dicho concepto para identificar relaciones funciones. De tal forma que dichas dificultades se extienden a la confusa asociación de representaciones con el objeto, desencadenando así, una ausencia de articulación entre distintos registros de representación del mismo objeto.

Las nociones conceptuales de función que expresan los estudiantes del noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico, atañen a una noción reducida de función, a la ausencia de asociación en las diferentes representaciones del objeto, a la desconexión entre lenguaje natural y algebraico y a un tratamiento de las funciones predominantemente aritmético.

De esta última, podríamos inferir que se ha gestado una dificultad generalizada, evidenciada en la comparación de las respuestas de los estudiantes de dos instituciones diferentes. Desde nuestro punto de vista consideramos que dicha dificultad generalizada puede atribuirse al tratamiento de la situación problema con reglas algorítmicas dejando de lado sus significados alrededor de las expresiones algebraicas y su correspondencia con el plano cartesiano (Duval, 1992).

6.1 Perspectivas futuras de investigación

Desde este trabajo se puede potencializar trabajos futuros sobre el estudio de las funciones en Básica y Media. Consideramos que se podría abordar desde la incorporación de las tecnologías digitales y en particular dispositivos móviles que podrían generan grandes retos para los profesores sobre el uso de estas herramientas en clases de matemáticas para el tratamiento de ideas de función.

Con la mediación de dispositivos móviles, llámese tableta o Smartphone, se les ofrece a los estudiantes una aproximación visualmente por medio de representaciones dinámicas a dichos objetos abstractos. Además, él puede interactuar y establecer relaciones entre las representaciones dinámicas para inferir la solución de una situación problema o para afinar la comprensión de un concepto.

7. Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *Scielo* .

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoaméricana.

Blumer, H. (1996). *Symbolic interactionism: Contemporary Sociological Theory.* Barcelona: Prentice-Hall.

Bruyn, S. (2009). *Human Perspective in Sociology.* México: Prentice Hall.

Carabús, O. (2002). *El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión.* Recuperado el 17 de Febrero de 2018, de http://www.editorial.unca.edu.ar/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf, pp.1-11.

Carpenter, T., & Helbert, j. (1996). *Learning and Teaching with Understanding. International Handbook of Mathematics Education.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chavéz, L. H., Castañeda, M. N., Joya, V. A., & Gómez, B. M. (2010). *HIPERTEXTO MATEMÁTICAS.* Bogotá: Santillana.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualizacion en Analisis matematico.Elementos Básicos del Análisis .* España: Ediciones piramide S.A.

Dreyfus, T. (1991). *"Advanced mathematical thinking processes", en D. Tall (ed.).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). *"Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions"* (Vol. Vol. 13). Dordrecht: Journal for Research in Mathematics Education.

Duval, R. (1992). *Graficas y Ecuaciones. La Articulacion de dos Registros.* México: Cinvestav.

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L`Articulation de deus registres. *AnnalesDidactique et de Sciencies cognitives* , 235, 253.

Duval, R. (1999). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educacion y Pedagogia.

Duval, R. (1993). *Resgistros de Representacion Semiotica y Funcionamiento Cognitivo del pensamiento.* México: Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives.

Duval, R. (1995). semiosis y Pensamiento Humano. Registro de Representacion. En R. Duval, *semiosis y Pensamiento Humano. Registro de Representacion* (pág. 123).

Filloy, E., & Rojano, T. (1991). *Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa: a clinic study with children in the prealgebraic stage. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education.* Virginia Tech USA.

Godino, J. (2003). *Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matemática. La Matematica e la sua Didattica.*

GUZMÁN, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME)* , 5-21.

Hitt, F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática.* México.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construccion de Conceptos Matematicos en Ambientes con Tecnología. *Scielo* .

Hitt, F., & Planchart. (1998). *Graphing of discrete function versus continuos: Case study.* (Vol. Vol 1). North Carolina, USA: PME-NA.

Larkin, J., & Simon, H. (1987). *"Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words".* cognitive Science 11.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). *Funciones, Graficas y Graficaciones: Tareas, Aprendizaje Y enseñanza.* (R. o. Research, Ed.) E. Sánchez.

Love, E. (1986). *What is algebra? Mathematics Teaching.*

Mason, J. (1996). *El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de.* London.

Mason, J., Graban, A., Pimm, D., & Goward, N. (1985). *Rutas/ Raíces Hacia el Álgebra.* Tunja.

MEN. (2006). *estandares Básicos de Competencias.* Bogota: Magisterio.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Magisterio.

NCTM. (2003). *National Council of Teachers of MathematicS . The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics.* Reston.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.*

OECD. (2003). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003 .* Paris.

Parada, S., Conde, L., & Fiallo, J. (2016). Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación. *Scielo* , 3.

PLANCHART, O. (2000). La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función. Cuernavaca, México.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas.* Granada: Comares.

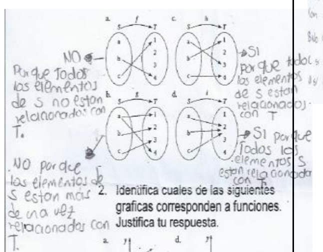
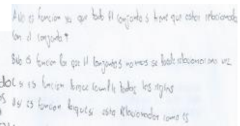
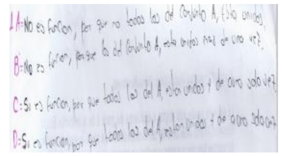
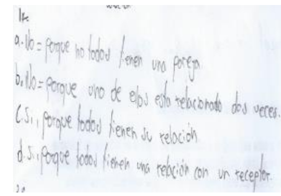
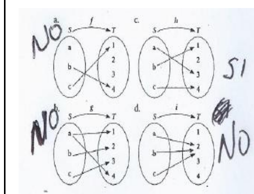
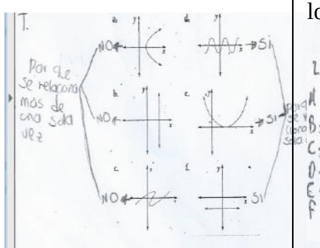
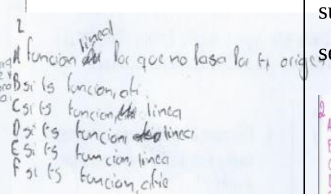
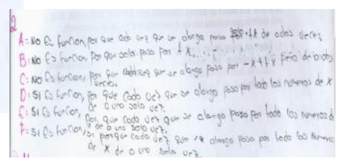
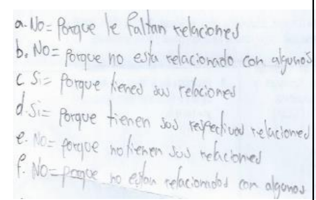
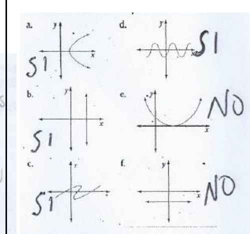
Radford, L. (2000). *Some Flections on Teacheing AlgebraThrough Generalization.* Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. (1982). *"Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity".* Educational Studies in Mathematics.

Tang, T. S. (2012). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida* (Quinta ed.). Santa Fe: Cengage Learning.

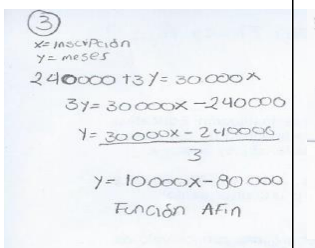
Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.: A. Kozulin (Ed.).

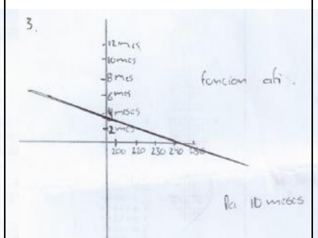
ANEXO 1

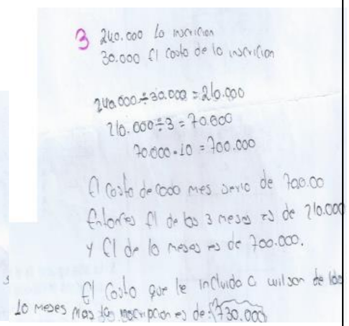
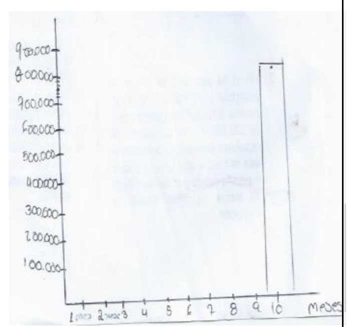
	PRUEBA DIAGNOSTICA INSTITUCION EDUCATIVA MONSEÑOR ALFONSO URIBE JARAMILLO					
	pregunta	Estudiante 1.	Estudiante 2.	Estudiante 3.	Estudiante 4.	Estudiante 5.
1	Determine cuál de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}$ $T = \{1,2,3,4\}$.	Responde correcta mente esta pregunta y justifica cada una de las relaciones 	Responde correctamente y argumenta sus respuestas 	Responde correctamente y usa sus propios argumentos para justificar la respuesta 	Responde acertadamente y trata de argumentar sus respuestas, aunque se queda corto en dichos argumentos 	Responde correctamente tres incisos, pero no justifica sus respuestas 
2	Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.	Responde acertadamente 	No responde correctamente a lo que se le está preguntando 	Aunque sus respuestas son correctas sus argumentos no son suficientes para justificar lo que se le pregunta 	Los incisos a, b, d, los responde correctamente, pero los demás son erróneos 	Su respuesta es errónea en casi todos los incisos 

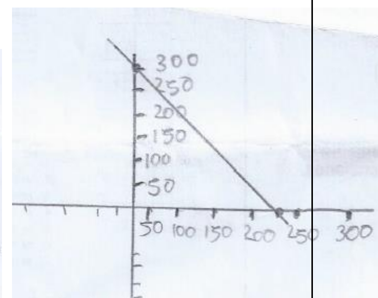
<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>Situación problema (función lineal).

Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.</td>
<td>Establece de manera errónea la expresión algebraica que representa la situación planteada, pero si da una idea correcta de que esta es una función afín y finalmente no realiza la grafica


</td>
<td>Intenta graficar la situación planteada pero no logra establecer el papel que cumplen las variables dependientes e independientes por lo tanto el grafico y su respuesta son erróneos


</td>
<td>Realiza algoritmos lógicos que le permiten llegar a la respuesta, pero no asocia la situación con el concepto de función lineal y afín y trata de graficar la situación utilizando un diagrama de barras


</td>
<td>No logra ilustrar correctamente mediante la gráfica la situación y tampoco se aprecia respuesta a la pregunta planteada}


</td>
<td>No se registra respuesta</td>
</tr>
</table>

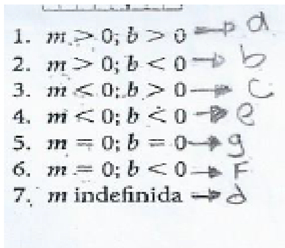
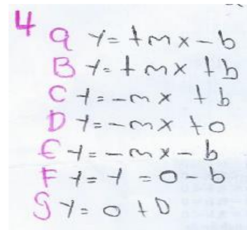
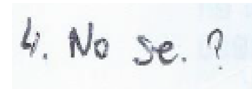
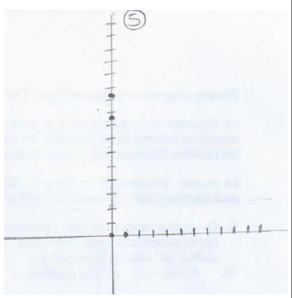
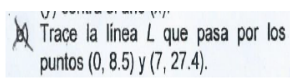
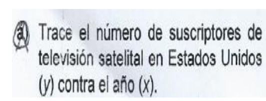
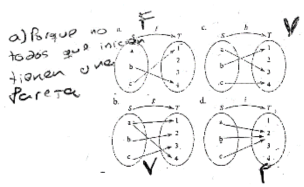
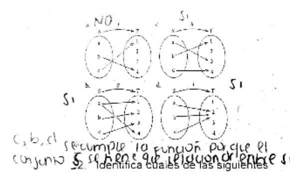
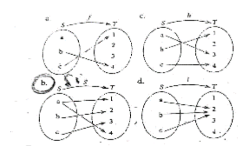
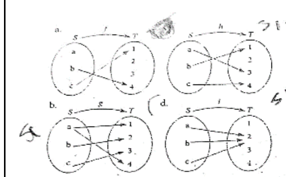
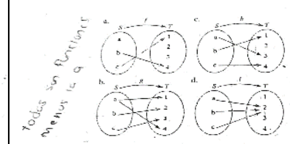
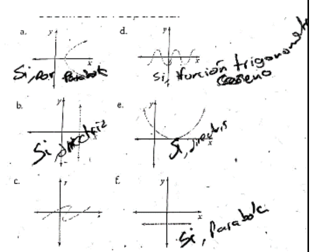
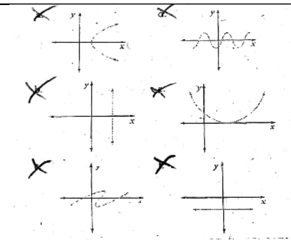
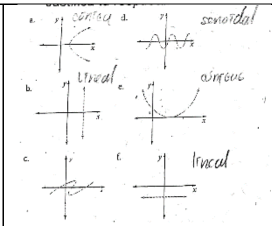
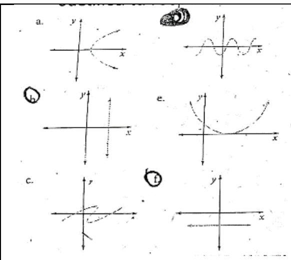
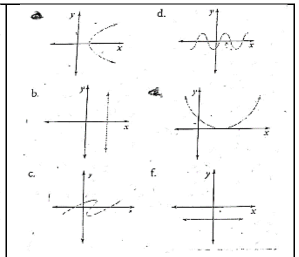
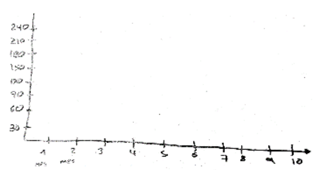
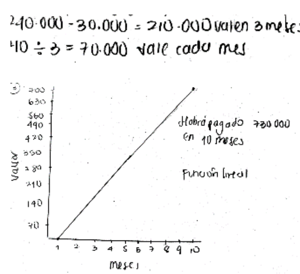
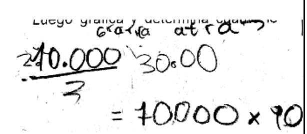
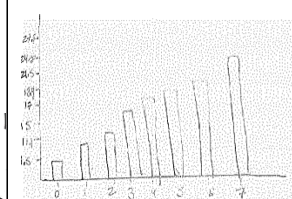
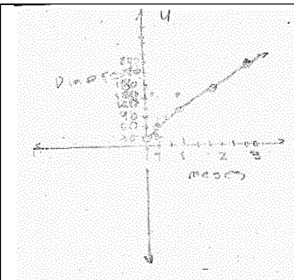
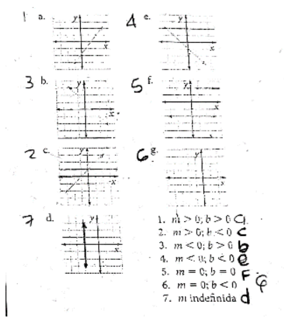
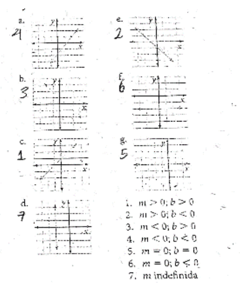
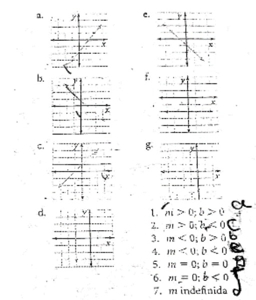
4	Relaciona las gráficas con los valores de ***m*** y ***b*** señalados para la ecuación ***y* = *mx* + *b***	Tiene dificultades para determinar la forma de la gráfica de una función lineal dados sus parámetros 	No responde 	Responde adecuadamente los incisos: a, e, f y todos los demás de manera incorrecta. 	No responde 	En ningún lugar de la hoja se observa la respuesta a este interrogante
5	Situación problema a partir de una tabla de valores, problema de suscriptores de tv	No responde de manera analítica, ni gráfica, solo trata de hacer un sistema de ejes con una escala poco acorde a lo planteado. Esto ratifica una gran dificultad en el proceso de solución de situaciones problemas que implican un modelo de función. 	Cree que la pregunta es de respuestas con opción múltiple y marca (b) sin darse cuenta que esta pregunta se divide en incisos 	No se aprecia respuesta en ningún espacio de la prueba	Cree que la pregunta es de respuestas con opción múltiple y marca (a) sin darse cuenta que esta pregunta se divide en incisos 	No se registra respuesta para esta pregunta

Tabla 1 - Prueba Diagnóstica I.E. M.A.U.J.

	PRUEBA DIAGNOSTICA COLEGIO COLOMBO BRITANICO					
	pregunta	Estudiante 1. 5.	Estudiante 2.	Estudiante 3.	Estudiante 4.	Estudiante
1	Determine cuál de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}$ $T = \{1,2,3,4\}$.	El estudiante afirma que el primer diagrama sagital es el incorrecto, respuesta equivocada, pero su justificación dice que: “porque no todos que inician tienen una pareja” para él no es importante el hecho de que un valor del conjunto de partida tenga dos imágenes, para él lo importante es que todos los elementos deben de tener una pareja y que no deben sobrar elementos en el conjunto de partida. 	El estudiante responde de manera incorrecta la respuesta ***b***, y dice que la opción ***a*** es función, mostrando una pequeña deficiencia en el concepto de función. Justifica por qué hablando de una relación. 	El estudiante responde de manera equivocada dado que afirma que la única que es función es la opción ***b***, siendo la única que no es función. No justifica un porqué. 	Afirma que todas son funciones menos la opción a, nuevamente una falencia frente a la definición de función. No justifica un porqué. 	Afirma que todas son funciones menos la opción a, nuevamente una falencia frente a la definición de función. No justifica un porqué. 
2	Identifica cuál de las siguiente graficas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.	Marca todas las gráficas como funciones y de manera muy particular le da nombre a cada gráfica, justificando de esta manera por qué son funciones, además marca una línea recta paralela al eje de la x como una parábola. Muestra deficiencias en el concepto de función, tanto	Para este estudiante todas son funciones y no justifica el porqué, mostrando un gran error en la interpretación grafica de una función.	En este caso, todas son funciones menos una, la opción ***c***. No justifica por qué son funciones, sino que le da un nombre a cada una de ellas.	Solo dos son funciones, las demás no lo son. No justifica el porqué; así mismo una de las que el alumno marca, la opción ***a*** no es función. Se concluye que para él existe una gran dificultad en el concepto de función por medio de una gráfica.	Es el más acertado de todos los estudiantes evaluados, marca tres de las cuatro opciones en las cuales se representaba una función de manera gráfica. Pero no justifica el porqué de su elección, a lo que se puede decir que, así como es un acierto puede ser casualidad.

		teórica como de manera analítica 				
3	Situación problema (función lineal). Wilson ha pagado $240 000 por la inscripción y tres meses de un curso de tenis. Si la inscripción tuvo un costo de $30 000, escribir la función que representa la situación y establece si esta es lineal o afín. Luego gráfica y determina cuanto le costaría a Wilson 10 meses de curso incluida la inscripción.	No responde de manera analítica, ni gráfica, solo trata de hacer un sistema de ejes con una escala poco acorde a lo planteado. Esto ratifica una gran dificultad en el proceso de solución de situaciones problemas que implican un modelo de función. 	Interpreta la información del problema, saca valores representativos tanto de la mensualidad como de la inscripción, al momento de graficar comete el error de no realizar un modelo matemático que se acomode a la situación problema, tiene un valor inicial en el mes y no en los costos, además no concuerda con lo que vale el primer mes. Encuentra un valor para la pregunta de los 10 meses, pero no es representado correctamente en la gráfica. 	No realiza el punto 3.	No plantea ningún tipo de solución analítica, no se sabe si el modelo de la función es lineal o no, no determina ni el intercepto, ni la pendiente. Gráficamente tiene una idea más clara de lo que pasa, puesto que sabe determinar el valor inicial, es decir el intercepto con el eje Y, pero no resuelve la pregunta del costo de los 10 meses del curso. 	Es aún más crítica la solución a la situación problema planteado por el estudiante 2, no se sabe qué modelo de función es, solo da un valor aleatorio para la pregunta de los 10 meses, pero no se sabe de dónde sale dicho valor. En la interpretación grafica el alumno realiza un histograma de frecuencias o grafico de barras, realmente no se sabe el por qué o el cómo lo hace. 

							
4	Relaciona las gráficas con los valores de ***m*** y ***b*** señalados para la ecuación ***y = mx + b***	No realiza el punto 4	Identifica correctamente las opciones ***b***, ***e***, ***d***. Identifica pendientes de cero, pero no el valor del intercepto; al igual que las pendientes positivas, pero no de los interceptos. Se puede concluir que el estudiante tiene dificultades para determinar el intercepto en la función lineal. 	Responde de manera correcta las opciones ***b***, ***c***, ***d***, ***f*** y ***g***. Confunde o troca las opciones ***a*** y ***e***, dicho error se puede basar tanto en el valor de la pendiente y el intercepto dado que discrepa uno del otro. 	Igual al alumno anterior, es afirmativa su respuesta en las opciones ***b***, ***c***, ***d***, ***f*** y ***g***. Confunde o troca las opciones ***a*** y ***e***, dicho error se puede basar tanto en el valor de la pendiente y el intercepto dado que discrepa uno del otro. 	No realiza el punto 4
5	Situación problema a partir de una tabla de valores, problema de	No realiza el punto 5	Identifica correctamente los ejes y los traza, realiza la ecuación de la recta, encontrando la pendiente y la formula de punto pendiente, realiza	Identifica correctamente los ejes y los traza, realiza la ecuación de la recta, encontrando la pendiente y la formula de punto pendiente, realiza	Realiza un gráfico a partir de la tabla de valores dada, pero no realiza un proceso analítico, ni resuelve la situación problema planteada.	Identifica correctamente el cómo encontrar el valor de la pendiente, igualmente aplica la ecuación lineal de punto pendiente y encuentra la ecuación para dicho problema. No realiza la gráfica de dicha recta. Se

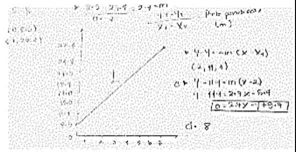
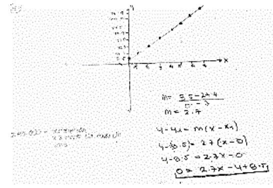
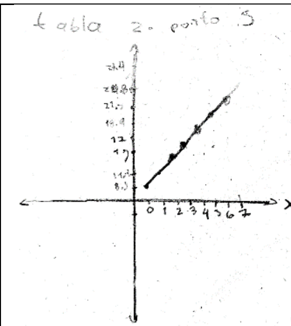
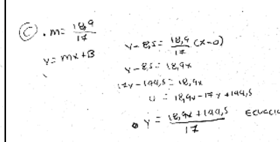
	suscriptores de tv		correctamente la predicción solicitada. 	correctamente la predicción solicitada. Hasta el momento se puede afirmar que los estudiantes trabajaron este método de solución, mas no de interpretación. 		muestra como el alumno es capaz de desarrollar un modelo si le dan una tabla de datos. 

Tabla 2 - Prueba Diagnóstica I.E. C.B