Estructuras y Mecanismos Mentales asociados a la suma de fracciones

John Edison López Patiño
Autor

Universidad de Medellín
Maestría en Educación
Facultad de Ciencias Sociales y Humanas
Énfasis en Didáctica de las Matemáticas
Medellín
2019

Estructuras y Mecanismos Mentales asociados a la suma de fracciones

Trabajo de Maestría para Optar al grado de Magister en Educación Matemática con énfasiss en Didáctica de la Matemática

John Edison López Patiño
Autor

Dra. Solange Roa Fuentes
Directora

Universidad de Medellín
Maestría en Educación
Facultad de Ciencias Sociales y Humanas
Énfasis en Didáctica de las Matemáticas
Medellín, 2019

DEDICATORIA

A mi esposa e hijos porque son mi inspiración para seguir alcanzando mis metas, porque son el pilar donde me sostengo. Gracias a su amor y apoyo mis esfuerzos no serán en vano, son lo mejor que tengo en la vida y las metas que alcance serán dedicadas a ustedes, los amo con todo el corazón.

A mi padres Gloria y Oswaldo porque desde pequeño me inculcaron la importancia de la educación, buscando siempre lo mejor para mi formación y enfatizando que ésta sería la mejor herencia que me podrían dejar. Porque son mi orgullo, les dedico todos mis logros.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación me permitió alcanzar otra meta más en la consecución de mis objetivos, con un profundo respeto quiero agradecer a:

La doctora Solange Roa Fuentes, ya que sin su acompañamiento no habría sido factible la culminación de esta investigación, su conocimiento que sin duda es meritorio la hacen una gran profesional y una excelente asesora, la calidez, sencillez y humildad de sus palabras son una clara expresión de su admirable personalidad. Deseo que siga iluminando el camino académico de muchas más personas y las acompañé a cumplir sus metas como lo hizo conmigo.

A todos los actores que permitieron este gran logro, al MEN por brindarme la posibilidad de cualificar mi proceso educativo y a la Universidad de Medellín por abrirme sus puertas y concretar allí tan anhelado objetivo.

RESUMEN

En este trabajo se estudian las estructuras y mecanismos mentales que construyen estudiantes de cuarto grado de básica primaria (9 - 10 años), al abordar situaciones relacionadas con la noción de adición de fracciones, analizadas desde la perspectiva de la Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema); esta teoría fue creada por Ed Dubisnky y desarrollada junto con investigadores de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés). Con base en los elementos presentados por la teoría se describe el desarrollo del pensamiento lógico de la población participante, asociado a la noción de número racional, en particular a su interpretación en la adición de fracciones.

Con base en el estudio de aspectos didácticos, epistemológicos y curriculares sobre la fracción, su operaciones y relaciones, se propone una Descomposición Genética Hipotética (DGH), con el objetivo de identificar la ruta cognitiva que construyen los estudiantes para construir dicha noción como un Objeto. La validación de la DGH se desarrolla a través del diseño de un cuestionaro que está centrado en la manipulación de Objetos Concretos, que permiten observar el proceso de aprendizaje y algunos de los errores que los niños cometen al momento de interactuar con la fracción y su adición.

La validación de la DGH incluye además el diseño y desarrollo de una entrevista teniendo como fundamento el ciclo de investigación que propone la Teoría APOE. Basado en lo anterior se realizó el análisis de la entrevista mediante un estudio de caso, la cual arrojó la evidencia necesaria para establecer que mediante las Acciones aplicadas sobre objetos concretos es posible construir la estructura Objeto de la noción de adición de fracciones.

Abstract.

In this work the it is addressed the constructions and the mechanics that build the primary fourth grade students, to focus to the notion of addition of fractions, are base on the cognitive theory APOE (Actions, Processes, Objects and Schemes) created by Dubinsky and developed along with the (the (Mathematics Education Community Research) (RUMEC for its acronym in English). Based on this Theory and the reflexive abstraction proposed by Piaget "to describe the development of logical thinking in children and extends the idea to more advanced mathematical notions" " (Dubinsky, 1991 cited by Roa-Fuentes, S and Oktaç, A, 2010).
A hypothetical genetic decomposition (DGH) was proposed on the notion of rationales addition, with the aim of identifying the cognitive path that students construct for acquiring an object. The application of the DGH is focused on the manipulation of concrete objects, which allowed to observe the learning process and some of the mistakes that children make when interacting with the fraction and its addition.
In order to validate the DGH an interview was formulated taking into account the research cycle proposed by the APOE theory. Based on the above, the analysis of the interview was done through a case study, which provided the necessary evidence to establish that through the Actions applied on specific concrete objects it is possible to acquire the object of notion of addition of fractions.

Traducido por Dalia Díaz Docente I. E. Progresar

INTRODUCCIÓN

Esta investigación aborda la construcción de la noción de adición de números racionales, al identificar dentro del aula de matemáticas, una dificultad sentida en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en estudiantes de básica primaria. Las diferentes dificultades reportadas en la literatura, muestran la complejidad de construir la adición de los numéros racionales en los diferentes niveles escolares.

Por tanto, se propone su estudio para fundamentar la construcción de un modelo cognitivo que señala cómo los estudiantes de primaria pueden construir la adición de fracciones, a partir del trabajo sobre material concreto. Dicho modelo denominado por la teoría APOE como descomposición genética, es un insumo importante para el profesor de matemáticas, dado que guía el desarrollo de la instrucción en el aula, así como el diseño y desarrollo de la evaluación.

A continuación se describen las partes que componen este documento organizado por capítulos. En el capítulo 1 se encuentra la problemática que se presenta específicamente en los niños del grado cuarto de primaria, cuando intentan construir nociones de fracción, como un acercamiento a la noción de número racional y su operación la adición. Por otro lado se devela un recorrido sobre algunos antecedentes que vinculan a la fracción en básica primaria, sus relaciones y propiedades, así como también la diferentes dificultades en concepciones y procedimientos dirigidos a las suma de racionales dentro de la educación básica. Situaciones que a través de pruebas estandarizadas como las Pruebas SABER en el caso de Colombia, evidencian no solo la medición de competencias, sino también en qué aspectos procedimentales están fallando los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que requieren del uso del número racional y su adición. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos de la Teoría APOE en mira de entender las construcciones y mecanismos que construyen un sujeto cuando busca consruir un concepto matemático, y el sustento metodológico para la aplicación de una Unidad Didáctica, fundamentada en una descomposición genética hipotética (DGH).

El propósito fundamental de esta investigación es estudiar la comprensión que pueden desarrollar estudiantes de grado 4° (9 - 11 años), determinando cómo pueden lograr la construcción cognitiva del concepto de suma de racionales como una estructura Objeto. Para lograrlo en el capítulo 3 se presenta el marco metodológico ahondado en la Teoría APOE de manera más detallada, al igual que la DGH; esta se consibe como una ruta que permite evidenciar las construcciones y mecanismos mentales a los cuales acceden los estudiantes durante su aprendizaje.

El capítulo 4 corresponde al análisis de datos que arroja la aplicación de la entrevista, que estuvo fundamentada en la DGH, al final se encuentran las conclusiones donde se reflexiona sobre el proceso de investigación implementado, con base en el trabajo realizado por los estudiantes y el profesor investigador.

Este investigación presenta un trabajo innovador para el aula a través del diseño de tareas con las regletas de Cuisenaire y los sectores circulares, que se sustentan en el diseño de una descomposición genética. Proporciona herramientas para proponer actividades que generen nuevas Acciones o fortalecer otras ya interiorizadas en los estudiantes sobre la noción de número racional; de igual forma se conocen las similitudes y diferencias entre los procesos mentales de los estudiantes reflejados en la manipulación de los objetos concretos y como éstos crean una relación entre lo concreto y lo abstracto. Por otro lado el docente puede evidenciar la causa de los errores que podrían cometer los estudiantes, posibilitando así crear de manera secuenciada mediante la ruta establecida por la Descomposición genética que promueva la construcción de la noción de suma de fracciones.

Índice

Contenido

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los elementos que sustentan el problema de investigación que se aborda en este documento. Iniciando por los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas del estado colombiano Pruebas SABER en lo relacionado con el Pensamiento Numérico, investigaciones hechas en torno a la suma de fracciones y la revisión de los planes de área implementados en Colombia. Desde aquí se expone la problemática, así como la hipótesis y objetivos de la investigación.

1.1 Problemática

Las pruebas estandarizadas llamadas Pruebas SABER para los grados 3, 5 y 9 de la Educación Básica son diseñadas y aplicadas por el Ministerio de Educación de Colombia (MEN). La aplicación de estas pruebas inició en 1991 y actualmente incluye las áreas de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Naturales y Competencias Ciudadanas; a partir de 2005 se incluyó Ciencias Sociales. Las pruebas buscan evidenciar el desarrollo de competencias de los estudiantes dentro de todo el sistema educativo colombiano. La aplicación periódica de esas pruebas permite monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica, como seguimiento de calidad, Índice Sintético de Calidad (ICSE). Dicho índice se considera una herramienta que permite medir el rendimiento institucional en cada uno de los ciclos educativos; en Colombia se desarrolla la formación básica en cinco ciclos organizados por grados como aparece a continuación: Ciclo 1 (de 1° a 3°), Ciclo 2 (4° y 5°), Ciclo 3 (6° y 7°), Ciclo 4 (8° y 9°) y Ciclo 5 (10° y 11°).

En el área de matemáticas y en particular en lo referente con los Sistemas Numéricos sus operaciones y relaciones, se muestra un desempeño por debajo de la media sobre los números racionales, como se muestra con detalle más adelante. Por tanto, se considera de interés fundamental desde la perspectiva institucional, generar propuestas didácticas y metodológicas que promuevan el desarrollo de la comprensión de los estudiantes desde la construcción de la noción básica de fracción.

En matemáticas han sido estudiados los diferentes errores que acompañan los procesos de enseñanza y aprendizaje desde perspectivas epistemológicas, cognitivas, conceptuales, sicológicas, entre otras. Cuando se evidencian en los estudiantes respuestas erróneas a determinadas actividades, se prevée la necesidad de redireccionar la mirada y la práctica educativa, donde se contemplen esos errores como oportunidades. Son diferentes las causas que propician los errores, sin embargo, como menciona Rico (1995) “cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea, se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error de relación con la cuestión propuesta” (p. 2). Por tanto debe ser de interés para la comunidad analizar cuáles son los saberes previos que un estudiante debería construir y cuáles las formas adecuadas de establecer relaciones entre un problema, un saber en juego y el conocimiento del estudiante.

Referente al origen de los errores Linares y Sánchez (1988) identificaron cuatro causas que pueden provocarlos: los que aparecen de forma aleatoria, por descuido distracción, etc.; debido a que el alumno ignora la respuesta y presenta una respuesta al azar; los causados por defectos en la comprensión de un concepto y los debidos a la aplicación sistemática de procedimientos erróneos. Desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas, los errores que han sido identificados no están asociados con la ubicación geográfica. Fandiño (2005) por ejemplo, advierte algunos errores que se presentan con regularidad en estudiantes de todo el mundo y que tienen relación con:

- Ordenar fracciones y escribir números decimales.
- Las operaciones entre fracciones y números naturales y entre números racionales.
- Reconocer los diagramas más comunes.
- Utilizar el adjetivo “igual”.
- Manejar la equivalencia.
- Simplificar fracciones.
- Utilizar figuras no estándares.
- Pasar de una fracción a la unidad que la ha generado.
- Manipular de manera autónoma diagramas, figuras o modelos.

En el listado anterior se evidencia que las operaciones entre fracciones, su relaciones y representaciones es un problema que no solo afecta a estudiantes en Colombia, sino que los comunes desaciertos también se evidencian en estudiantes de otros países. La lista de relaciones y/o de transformaciones que presenta Fandiño (2005), muestran problemas de orden conceptual profundo que se justifican desde el tratamiento que en los primeros años escolares se da a la fracción en diferentes contextos.

Una perspectiva que contribuye sobre el problema que se está tratando es el planteamiento de Piaget (1964) respecto al desarrollo de ideas lógico matemáticas que se abstraen de la interacción de los individuos con objetos físicos o mentales. De tal manera que el individuo aplica estructuras mentales para darle sentido a la construcción de objetos matemáticos abstractos. Otra dificultad que se presenta en el aula se asocia a la estructuración de un concepto matemático, en este caso la adición de racionales. "Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje" (Llinares y Sánchez, 1997, p.189.)

La suma de racionales requiere conceptos matemáticos establecidos anteriormente por los estudiantes, de tal manera que puedan realizar algunas acciones en torno al concepto a desarrollar. Cuando han sido creados de manera equivoca o estructurados en fundamentos no adecuados serán una barrera para que los estudiantes logren estructurar construcciones y mecanismos mentales. Tradicionalmente se hace énfasis en la memorización de técnicas o algoritmos que rápidamente son memorizados por los estudiantes. Como mencionan algunos investigadores en didáctica de las matemáticas, el interés se centra más en la mecánica asociada a los conceptos, que en la construcción de los conceptos mismos. Así la suma de racionales puede centrarse más en la mecanización de reglas para sumar, que en la construcción conceptual que permita a futuro a los estudiantes, entender la suma de racionales como una operación binaria.

Por tanto, es de interés en esta investigación analizar las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar cuando abordan la construcción de la suma de racionales, desde la aplicación de Acciones sobre objetos concretos, esto desde la perspectiva teórica y metodológica que ofrece la Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema).

En el contexto escolar la suma de fracciones siempre ha sido un tema de dificultad para los estudiantes. Para construirlos de manera adecuada en básica primaria es necesario que los estudiantes realicen acciones apropiadas. Esto puede ser utilizando los conceptos construidos previamente como: la adición, la resta y la multiplicación de números naturales.

1.2 Antecedentes

Referente al trabajo sobre fracciones, desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas Valdemoros (2001) estudia en los grados tercero y cuarto de primaria las concepciones de los estudiantes sobre la adición de fracciones. En este estudio se confrontó a los estudiantes con problemas verbales centrados en la suma de fracciones, el diseño y desarrollo de la investigación indaga sobre aspectos asociados a la construcción de lenguaje que los estudiantes logran sobre las fracciones. La Autora concluye que los estudiantes no diferencian dentro de los contextos planteados una unidad de medida que les permita llegar a una solución satisfactoria de los problemas planteados. Un ejemplo de esto es la siguiente pregunta (figura 1.1) realizada en su trabajo de su investigación.

Problema del cuestionario	Texto producido por Elizabeth
Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$	José llevó $\frac{1}{5}$ de pastel de chocolate a una fiesta, pero Julia llevó $\frac{1}{10}$ de pastel de vainilla. ¿Cuánto pastel tienen entre los 2? $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5+1}{50} = \frac{15}{50}$

Figura 1.1 ejemplo de actividad propuesta por Valdemoros (2001, p.55)

En este planteamiento se identifica por parte de la investigadora que la estudiante refiere en su creación del problema que a cada pastel se le puede asignar un sumando específico, sin hacer alusión a una unidad de referencia como: el tamaño, enfocando su atención en los sabores, omitiendo la referencia de que ambos tamaños fueran constantes (Valdemoros, 2011, p. 6).

Más recientemente Baltazar y Valdemoros (2017) reportan una investigación que incluye el diseño de un modelo de instrucción diferenciada de la aplicada en las escuelas elementales de la ciudad de México, enfatizando en la actividad mental y el pensamiento aplicados por los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las fracciones. De esta forma los autores intentaron dar respuesta a preguntas planteadas desde la teoría de Piaget (2001), estas son: ¿De qué manera la abstracción reflexiva contribuye a que los alumnos den sentido a las fracciones, en situaciones de reparto? ¿Cómo evolucionan las ideas de los niños acerca de las fracciones a partir de la reflexión realizada sobre sus acciones, en situaciones de reparto? Dentro de los resultados obtenidos los autores logran implementar situaciones problema que buscan promover la reflexión en los estudiantes. Además, seguir más detalladamente las respuestas arrojadas por los alumnos incentivándolos a formular y expresar diferentes argumentos estructurados de las acciones implementadas.

En dicho trabajo los investigadores aplicaron entre sus actividades (figura 1.2), una donde el estudiante debía realizar el reparto de tres objetos entre dos destinatarios; con esto se esperaba que desarrollaran así una equivalencia entre las partes y el total de la suma de estás. Además, Baltazar y Valdemoros (2017) muestran que los niños participes lograron desplazar la concepción de que $\frac{a}{b}$ son dos números naturales y que ésta es de una naturaleza diferente; así mismo pudieron identificar que un reparto puede ser representado por una fracción. Otra de las conclusiones reportada por los autores, se refiere a uno de los estudiantes participantes quien te muestra un profundo arraigamiento de los números naturales, negándose a reconocer que hay números diferentes a los que ya conoce (Baltazar y Valdemoros 2017).

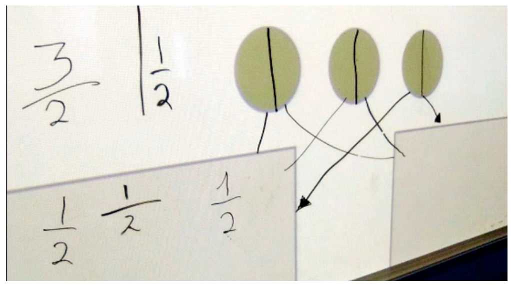


Figura 1.2 ejemplo de actividad propuesto por Baltazar y Valdemoros (2017, p. 409)

Por otra parte, en su trabajo de investigación "La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo" Obando (2003), presenta desde su planteamiento del problema que en el estudio de la relación parte-todo se da la posibilidad de aproximarse a las fracciones. Ya que esta se convierte en un eje para acceder a los números racionales y es un puente de entrada a conceptualizar la unidad como un todo que se puede dividir en varias partes más pequeñas. Según el autor esto permite estructurar una relación entre unidad aritmética y la unidad geométrica. De igual forma, toma esa relación como base para conceptualizar propiedades diferentes de la fracción, como lo es la denominación de fracción propia e impropia, relaciones como la equivalencia y las operaciones como la suma y la resta.

Por otra parte, Obando (2003) muestra que cuando se centra la atención sobre el número de partes que representa el numerador y el número de partes que representa el denominador en una fracción, se llega a la construcción de un concepto erróneo: "La fracción como dos números separados por una raya". Esta experiencia con el tratamiento de las fracciones según Obando (2003) lleva a los estudiantes a realizar la suma de dos fracciones, sumando los numerados y los denominadores.

Sobre la temática, Perera y Valdemoros (2007) diseñan actividades dirigidas a la construcción del concepto de fracción como medida de cociente intuitivo y los intuitivos del operador multiplicativo. En su problemática de investigación las autoras exponen que uno de los contenidos que presentan mayor dificultad para los estudiantes de básica primaria son las fracciones y las operaciones con éstas; además proponen que posiblemente unos de los factores más influyentes es la didáctica tradicional aplicada a la enseñanza.

El tema de las fracciones ha sido estudiado desde diferentes perspectivas y durante más de 30 años por diferentes especialistas de la sicología, la pedagogía, la sociología y la didáctica de las matemáticas. Freudenthal desde 1983 muestra el tipo de dificultades que enfrentan los estudiantes desde edades muy tempranas: "los niños tuvieron conflictos para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo continuo en dos partes iguales. Así mismo no pudieron determinar qué parte de un todo continuo representan las fracciones." (Perera et al, 2007, p. 214). Esta relación entre la parte y el todo y su representación ha sido muy cuestionada, sin embargo, hoy día el problema persiste en el aula. Parece que los trabajos de investigación siguen una vía y el desarrollo metodológico, curricular y de contenido del aula de matemáticas otro.

Se puede asumir que dentro de las falencias que se evidencian en los estudiantes en cuanto al desarrollo de las competencias matemáticas, está en la formación de los docentes de básica primaria y las competencias que éstos poseen en matemáticas: "los formadores de docentes de Educación Primaria comúnmente identificamos una serie de errores y dificultades en los procesos de razonamiento necesarios para la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, 1990; Simon, 1993; Tirosh, Graeber y Wilson, 1998; Valverde, 2008, 2012). Estos errores no son puntuales y se presentan en diversas áreas de la matemática, no obstante, los subconstructos de los números racionales constituyen un campo fértil para el enraizamiento de dificultades cognitivas.

Referente al problema de la representación de las formas matemáticas abstractas, Salas (2012) destaca que en la clase de matemáticas cuando se trabaja con material concreto los procedimientos tienen justificación y por tanto no se genera la mecanización del algoritmo y sus problemas asociados. En particular en lo referente a la construcción de la noción de fracción, es de suma importancia analizar los procesos efectuados para reconocer partes de la unidad, establecer subdivisiones equivalentes, conservar la unidad, representar la fracción indicada gráficamente, reconstruir la unidad y en los atributos de la fracción en contexto de medida y contexto de reparto, aspectos que son necesarios a la hora de abordar la suma de fracciones (Salas, 2012).

Londoño, Kakes y Castro (2015) por ejemplo, plantean que para la relación parte-todo se requiere la identificación de la Unidad, desarrollar la habilidad para realizar divisiones y finalmente, tener la idea de área y equivalencias de áreas. De ahí la importancia de promover la partición de diferentes tipos de unidades y la identificación de fracciones en unidades que han sido fraccionadas en partes no congruentes. Esto considerando formas apropiadas de representar la fracción y formas no apropiadas, de donde emerge de manera natural por ejemplo la noción de congruencia.

Con base en el panorama expuesto se da paso al planteamiento de la hipótesis de este trabajo de intervención.

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde la teoría APOE las concepciones que estudiantes de primaria desarrollan sobre la suma de fracciones, cuando parten de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para construir estructuras abstractas sobre las cuales tienen control en su mente.

1.4 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Diseñar una descomposición genética de la noción de suma de fracciones para estudiantes de cuarto primaria, que parta de la aplicación de Acciones sobre objetos concretos para la construcción de Procesos abstractos.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que debe desarrollar un estudiante de cuarto primaria sobre la noción de suma de fracciones?

¿Qué implicaciones tiene el diseño de un modelo cognitivo sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de suma de fracciones para estudiantes de cuarto primaria?

1.6 OBJETIVO GENERAL

Analizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de cuarto primaria sobre la suma de fracciones cuando realizan la manipulación de material concreto para interiorizar Acciones (comparar, medir, entre otras) en Procesos mentales abstractos.

1.7 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Diseñar una descomposición genética hipotética de la suma de fracciones fundamentada en la aplicación de Acciones sobre Objetos Concretos.

Describir las estructuras y mecanismos mentales que evidencian los estudiantes, a partir de la manipulación de material concreto.

Diseñar instrumentos que permitan validar la descomposición genética hipotética sobre la noción de suma de fracciones.

CAPÍTULO 2

TEORIA APOE

En este capítulo se presenta la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) que direcciona la investigación y la mirada sobre el objeto de estudio en cuanto a los aspectos teóricos y metodológicos.

TEORÍA APOE

La teoría APOE creada por Dubinsky y desarrollada junto con *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés) se fundamenta en planteamientos piagetianos. Esta teoría estudia la construcción que un estudiante puede lograr de conceptos y/o nociones matemáticas. Mediante la descripción de un modelo cognitivo definido por la teoría como Descomposición Genética (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996).

La aplicación de esta teoría en Didáctica de la Matemática favorece la comprensión y construcción de conceptos matemáticos. La Teoría APOE parte de la manipulación bien sea física o mental sobre Objetos cognitivos que generan Acciones, de tal manera que la repetición de las manipulaciones facilita la interiorización y el desarrollo de una inteligencia operativa. Según Piaget (Saunders y Binsham, 1984) esta inteligencia es entendida como la adaptación eficaz, al pensamiento racional y vinculada al progresivo desarrollo de las operaciones mentales, permitiendo de la formación de procesos, los cuales a su vez son encapsulados para establecer objetos y finalmente todo esto instaurado en esquemas.

La importancia que tiene este enfoque teórico dentro de las prácticas de aula radica en que se convierte en una herramienta descriptiva y predictiva en la medida que le permite al docente y al investigador identificar las diferentes estructuras asociadas a la comprensión de una porción de conocimiento matemático. Estas estructuras y mecanismos dotan de significado las relaciones que se dan en el aula entre el profesor y el estudiante mediante un interés común al determinado por el objeto de estudio.

A continuación, se describe de manera puntual las estructuras mentales que se estudian en la descomposición genética. Así como las relaciones que se establecen a través de mecanismos mentales.

2.1 Acerca de la Teoría APOE

La Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) permite centrar la mirada en aspectos cognitivos de la construcción de conocimiento matemático. “La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas" (Dubinsky, 1991 citado por Roa-Fuentes y Oktac, 2010).

Los elementos que describen la teoría APOE se sustentan en diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas; las cuales son consideradas como etapas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Estos a su vez son relacionados con diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, encapsulación y reversión (de encapsulación), que permiten mediar entre cada una de las construcciones y generar así una nueva etapa del saber matemático.

Esta teoría es el resultado del estudio del mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. (Kú, Trigueros y Oktaç 2008), en la presentación del desarrollo teórico retoman la siguiente afirmación:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996).

En esta afirmación presenta los aspectos fundamentales para identificar cuál es la forma en que los estudiantes conciben un concepto y que son el centro de la teoría APOE: las Estructuras Mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema (Kú, Trigueros y Oktaç 2008).

A continuación se describen las estructuras de manera general y los mecanismos a través de los cuales una estructura puede ser lograda.

Acciones: son entendidas como las transformaciones de un objeto, como aquellas primeras ideas matemáticas que se perciben por el estudiante como externas y se realizan como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir (Gamboa, 2013).

Interiorización: este mecanismo se presenta cuando se repiten las acciones, y éstas dejan de depender de factores externos y el estudiante ejercerse un dominio interno sobre éstas. Se interioriza la acción cuando se es capaz de imaginar todos los pasos sin ser aplicados necesariamente en su totalidad o en un orden, además cunado un individuo puede saltarse los pasos (Arnon et al., 2014, p. 21).

Procesos: son producto de una reflexión interna del estudiante, es decir, hay una repetición de una Acción y una reflexión que permite llegar a una interiorización, o bien la coordinación de un Proceso con otro. Cuando el estudiante logra establecer una relación entre las acciones y reflexionar sobre ellas, lo lleva a pensar una determinada situación matemática a la inversa.

Coordinación: este mecanismo se describe como la coordinación general de acciones, para referirse a la creación de más objetos y acciones a través del uso de una o más acciones. Este mecanismo permite coordinar dos o más procesos para generar otro nuevo, que puede ser encapsulado (Gamboa, 2013).

Encapsulación: Este mecanismo permite que el individuo pase de una estructura dinámica (Proceso) a una estructura estática (Objeto). Principalmente todas las características del Proceso se estructuran como un todo sobre el cual es posible aplicar nuevas transformaciones.

Objetos: se especifican en el espacio donde el estudiante reflexiona sobre las operaciones utilizadas en un proceso, cuando él es capaz de ver el concepto matemático en conjunto como un todo y las transformaciones que realiza son dinámicas, en este momento se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. (Asiala, et al. 1996)

Esquemas: es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que se asumen como la interacción de los mecanismos, caracterizados por ser dinámicos y por permitir una reconstrucción continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las prácticas de aula con relación a la matemática escolar.

> La coherencia de un Esquema está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular. Una vez que el Esquema se construye como una colección coherente de estructuras (Acciones, Procesos, Objetos, y otros Esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o se utilizan como una estructura dinámica que asimila otros Objetos relacionados o Esquemas. (Asiala et al. 1996. Pág. 25)

Descritas las construcciones mentales, los mecanismos y sus relaciones según el enfoque APOE, estas se pueden representar en un modelo denominado Descomposición Genética. La Descomposición genética es un modelo cognitivo que describe cómo se produce la comprensión de saber matemático a través de diferentes estructuras complejas de pensamiento y descripciones explícitas de las posibles relaciones entre las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Arnon et al, 2014).

2.2 Ciclo de Investigación: Análisis Teórico, Diseño e implementación y Observación, Análisis y Verificación de datos.

La teoría APOE trae consigo un ciclo de investigación que se basa en el desarrollo de tres componentes:

1- Análisis teórico del concepto del cual surge una Descomposición Genética.

2- Diseño e implementación de la enseñanza, que incluye el diseño de diferentes instrumentos con base en el análisis teórico.
3- Análisis y verificación de datos, que permite a la luz de la descomposición genética analizar la pertinencia de las estructuras y mecanismos planteados de manera hipotética.

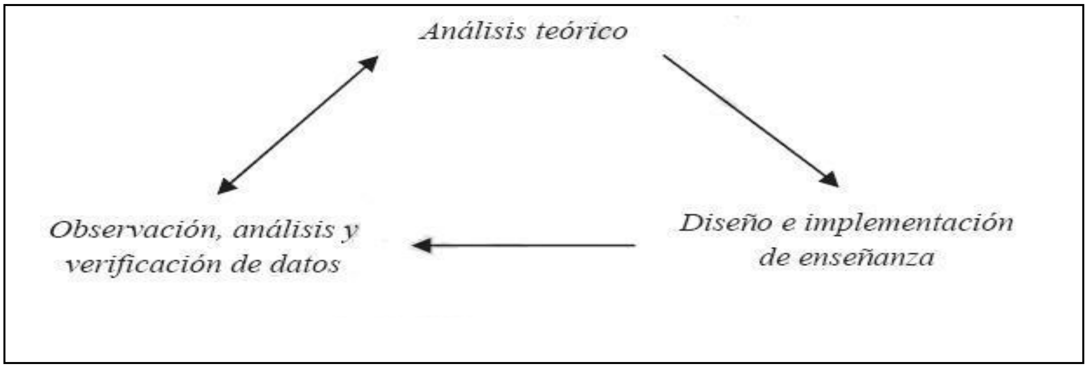


Fig. 2.2 ciclo de investigación (Asiala et al. 1996)

El análisis teórico se describen las construcciones y lo mecanismos mentales, que se pueden evidenciar dentro del proceso educativo diseñado a través de las Descomposición Genética hipotética qué es el principal objetivo de esta fase. El diseño e implementación están fundamentados en lo propuesto dentro del análisis teórico que apunta a que se creen las construcciones mentales. Ya en la última fase de este ciclo de investigación se observa de manera ardua los datos recogidos durante la implementación para realizar un análisis de toda la información y por último una verificación de todos los datos, todo con la firme intención de analizar cada aspecto propuesto dentro de la DG.

Para Complementar estás fases la teoría APOE propone un ciclo llamado ACE que es una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) las actividades, (C) la Discusión en clase y (E) los ejercicios.

En la realización de las actividades (A), los estudiantes hacen un trabajo en equipo para realizar las tareas destinadas a crear nuevos retos y que sea mediante la interacción que estos lleguen a una solución, seguidamente entre ellos se realiza una discusión (C) dónde siempre esta mediado el trabajo colaborativo para mejorar el proceso de aprendizaje y finalmente se emplearán otros ejercicios (E) que tendrán como intención reforzar los saberes.

2.3 Adaptación del Ciclo para esta investigación.

Esta investigación se basó en el diseño y desarrollo de dos de los tres componentes que presenta el ciclo de investigación de la teoría APOE. En el primero Análisis Teórico donde se realiza un estudio profundo del concepto que se aborda y que sirve como fundamentación para la estructuración de la descomposición genética hipotética. En este componente la atención se centra en la comprensión del concepto matemático y en cómo el estudiante puede llegar a ésta (Asiala et al.,1996, p.5)

La tercera componente Observación, análisis y verificación de datos, permite en esta investigación validar la DG hipotética a través del análisis de la información obtenida en la consecución de la entrevista, enfatizando en las construcciones mentales que fueron elaboradas por los estudiantes y cómo éstas permitieron una apropiación o no del objeto matemática estudiado (Arnon et al., 2014, p. 94).

Como resultado de la relación entre dichas componentes se obtiene una descomposición genética validada y refinada, a partir de la experiencia evidenciada por los estudiantes en la construcción de la noción de suma de números racionales; gracias a la aplicación de Acciones sobre Objetos Concretos.

CAPÍTULO 3

Método de la Investigación: Análisis Teórico y Observación Análisis y Verificación de Datos

En el presente capítulo se describe el diseño metodológico que gira en torno a las estructuras que estudiantes de cuarto grado de básica primaria logran desarrollar, esto fundamentado de la teoría APOE. La investigación por tanto se propone con un corte empírico experimental, basado en el estudio de caso, desde el empleo de un enfoque cualitativo.

3.1 Características metodológicas generales

Esta investigación es de corte empírico experimental, dado que se hace alusión a toda la información y datos arrojados por la experiencia desde la observación cuidadosa de las actividades desarrolladas por la población de estudio. Además del análisis de la actividad desarrollada por la población en el cuestionario, que permitieron determinar cuáles son los factores o errores y los aciertos que se evidencian y cómo esto constribuye en la estructuración de la descomposición genética.

Cada observación tiene como objetivo identificar los datos empíricos que arroje la consecución de la aplicación de los instrumentos diseñados con base en la Descomposición Genética.Como la misma palabra lo advierte se trata de describir las cualidades de un fenómeno, que es este caso es una interacción entre unos sujetos y unos conocimientos establecidos (Objeto Matemático), buscando desde aquí abarcar una parte de la realidad de los estudiantes.

Con este enfoque se tratará de dar validez a esta investigación a través de la proximidad a la realidad empírica que brinda esta metodología, ya que mediante este se posibilita la interacción con los sujetos estudiados analizando y comprendiendo los fenómenos.

Se elige el estudio de caso como método para esta investigación, dado que es una herramienta con mucho valor para este tipo de investigaciones. Una característica del estudio de caso es que a través de este se puede medir y registrar la conducta de las personas que se encuentran dentro del fenómeno estudiado (Yin, 1989). Por otro lado, dicho método permite recoger una variedad de datos desde diferentes fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas. Stake (2010) considera que el caso como un sistema integrado que se centra en lo específico, no en lo general.

De este modo el estudio de caso permite que se identifiquen características individuales y no grupales, mediante este método se puede visualizar esos aspectos particulares que se dan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este caso en particular en el desarrollo de una Descomposición Genética de la noción de suma de fracciones.

En esta investigación participan los estudiantes del grado 4° de la Institución Educativa Progresar, ubicada en la comuna 6 del municipio de Medellín, específicamente en el barrio El Progreso. Este grupo cuenta con 49 estudiantes con diversas capacidades, en su mayoría desde la experiencia que he tenido como docente, se encuentra en un bajo nivel en los aspectos geométrico como el numérico, en comparación con otros estudiantes del mismo grado donde he ejercido mi labor docente.

Como en la institución solo se cuenta con un grupo de 4° se toman como casos de estudio cinco estudiantes escogidos por su desempeño académico en el área de matemáticas; a este grupo se desarrolla una serie de actividades teniendo como base la Descomposición Genética Hipotética.

3.2.1 Análisis teórico: Descomposición Genética de la Noción de número racional y su adición.

Con el fin de construir la descomposición genética del concepto (Suma de racionales) es necesario originar en ésta, las construcciones mentales apropiadas para adquirir un concepto partiendo de la abstracción reflexiva obtenida del trabajo de Piaget y García (1982) dónde la definen como *"*el mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro". Dubinsky por su parte la toma como una herramienta mental, que utilizan los estudiantes en la aplicación de algunas acciones sobre algunos objetos determinados, permitiéndole así *"*inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos de un mismo nivel de pensamiento" (Gamboa, 2013. Pag. 25).

La DG es "un conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo" (Asiala et al, 1996, p.7) mediante esta se describe un modelo cognitivo en el cual se analiza y comprende como un estudiante aprende o estructura un Objeto matemático.

En Parraguez (2009, citado en Gamboa 2013, p. 35) "expone que la DG está basada en un marco teórico de aprendizaje general, la totalidad de nuestras observaciones y experiencias, y nuestra propia comprensión de las matemáticas implicadas." Es una hipótesis sobre cuáles son las posibles construcciones que un estudiante puede establecer para aprender un concepto (Ku, D. Trigueros y Oktaç, 2008).

Para el desarrollo del Análisis Teórico que sustenta el diseño de la descomposición genética hipotética, se toman en cuenta aspectos del análisis cognitivo desarrollado por Arnon (1998), expuesto recientemente en Arnon et al., (2014); además de un análisis de libros de texto que permiten dar una mirada sobre a realidad que actualmente se logra en las aulas regulares.

3.2.2 Análisis de la noción de Fracción desde la Teoría APOE

A continuación, se presenta la primera descomposición genética diseñada sobre la noción de número racional como fracción y algunos elementos que la sustentan. Arnon et al., (2001, 1999, 1998) estudiaron la visión de Piaget sobre lo concreto y abstracto como se mostró en la sesión anterior. Con base en dichas ideas en Arnon et al., (2014) propone una descomposición genética que inicia en la definición de fracción como parte-todo. Esto es una fracción $\frac{k}{n}$ donde k y $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, esto representa un todo $k,$ que es dividido en n partes congruentes.

En este trabajo se describen las Acciones sobre Objetos concretos cuando los estudiantes transforman materiales manipulables como: sectores circulares, regletas entre otros. Al respecto Arnon et al., (2014) mencionan tres tipos de experiencia que los individuos adquieren cuando tienen contacto con objetos del mundo externo, estos son:

1. Experiencias Simples: cuando no necesariamente implica la que un conocimiento puede ser extraído.
2. Experiencias Físicas: cuando un niño manipula objetos físicos y mediante un "proceso simple de abstracción" abstrae las propiedades de los objetos.
3. Experiencias Lógico-Matemáticas: en la cual los niños manipulan objetos, construyen propiedades de la Acción en sí y de las transformaciones que los niños aplican sobre los objetos. En este tipo de experiencia el conocimiento es construido por los mecanismos de abstracción reflexiva.

Con base en estas ideas y los resultados de la investigación publicados en Arnon et al., (2014) a continuación se describen los niveles de desarrollo de la noción de suma de fracciones que busca mostrar la transición desde la Acción hasta el Proceso.

Estos niveles parten de una aplicación inconsciente de la Acción sobre objetos concretos a ser totalmente consciente. Este nivel de conciencia se desarrolla de manera gradual y gracias a la experiencia de los individuos.

Para la transición de la Acción al Proceso se presentan niveles de construcción para la interiorización de una fracción unitaria. Estas Acciones están definidas por la comparación de dos fracciones no unitarias. A continuación, se plantean de manera específica dichas Acciones definidas en Arnon et al., (2014, p.162):

Mayor numerador $\Rightarrow$ Fracción mayor (conteo de círculos).

Mayor denominador ⇒ Fracción mayor (conteo de partes iguales).

Enteros más pequeños (numerador y denominador) significa partes más grandes, y por lo tanto fracciones más grandes.

Área no sombreada más grande ⇒ Fracción más grande.

Mayor número de partes no sombreadas ⇒ Fracción más pequeña.

Como propone Arnon et al., (2014) el paso por estos niveles no es consecutivo, dependen de la experiencia de los estudiantes.

La descripción de estos niveles lleva a la formulación de una descomposición genética que potencia la transición de las Acciones a el Proceso, a partir del mecanismo de interiorización. Como se aprecia en la Figura 3.1, el análisis realizado por Arnon et al., (2014) incluye las transformaciones incorrectas que un individuo puede realizar en el camino de construcción del Proceso.

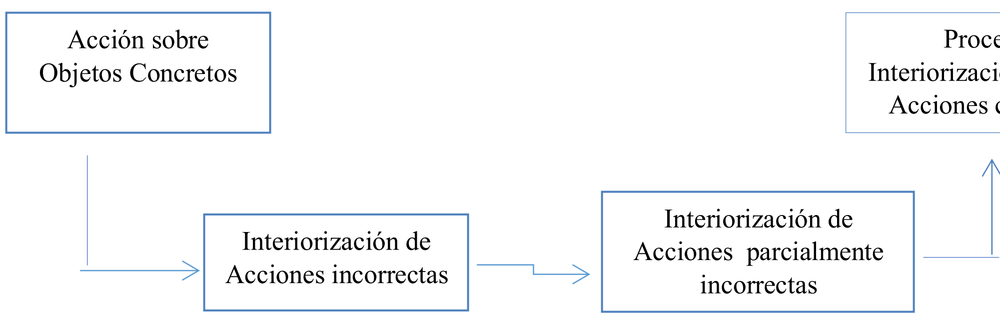


Figura 3.1 Acciones sobre objetos concretos para la interiorización de Acciones correctas (Arnon et al., 2014, p. 163)

El mecanismo de interiorización, como puede verse en la Figura 3.1, está determinado por Acciones incorrectas que se transforman en Acciones Correctas gracias a la experiencia de los estudiantes con material concreto. Como muestra Arnon et al., (2014) el paso de la Acción al Proceso está determinada por la habilidad de un individuo para tener un control interno de la Acción. Como muestra la Teoría APOE dicho control diferencia la estructura Acción y Proceso que un estudiante puede construir respecto a una noción o concepto matemático. En la investigación reportada por Arnon (1998) se evidencia la manipulación de objetos concretos en la imaginación de los estudiantes. Con base en el análisis de datos Arnon identifica seis criterios para indicar ejemplos de cómo los individuos usan su imaginación para realizar acciones sobre Objetos concretos imaginarios; a continuación, se describe cada criterio tomando en cuenta la información presentada en Arnon et al., (2014).

Criterio 1. El estudiante declara explícitamente que sus respuestas son el resultado de Acciones que realiza sobre Objetos Concretos.

Criterio 2. Activar recortes de círculos imaginarios que no existen en el conjunto original de objetos manipulables.

Criterio 3. Uso de dibujos.

Criterio 4. Indicaciones verbales que involucran el uso de lenguaje que se refiere a las manipulaciones concretas.

Criterio 5. Indicaciones gestuales.

Criterio 6. Evidencia de realizar Acciones imaginarias sobre Objetos imaginarios.

3.2.2 Análisis de libros de texto

En esta sesión se presenta el análisis hipotético sobre el tipo de estructuras y mecanismos mentales que un estudiante puede desarrollar para construir la noción de adición de números racionales. El análisis de estos textos se fundamenta en la estructura propuesta por Campos (2017) que contempla: 1. Estructura general del texto, 2. Presentación y definición de los conceptos y 3. Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto.

3.2.2.1 Estructura general del texto

La estructura del texto "Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé" está presentada en una división enfocada en los diferentes pensamientos contemplados en el área de matemáticas (ver figura 3.2). El texto inicia con el pensamiento numérico, dividido en dos capítulos: en el primero se desarrollan las operaciones matemáticas básicas con números naturales (Adición, sustracción, multiplicación y división) de manera general y la teoría de números. En el segundo capítulo se presentan las fracciones y números decimales, es en este capítulo donde se centra la atención, porque es aquí donde se trabaja el objeto matemático analizado en esta investigación.


Contenido

Figura 3.2 Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé (MEN, p. 6-7)

Cada capítulo inicia con la exposición de una situación cotidiana en la cual pueden ser aplicados los conocimientos que con el desarrollo de la unidad o capítulo que propone construir. De igual manera establece cuáles son los conocimientos previos que debe tener el estudiante, los que va a aprender y cuál sería la posible aplicación que darían a éstos. Para adentrarse al contenido a trabajar se inicia con un cuadro exploratorio, donde de manera sucinta se ofrece una pequeña definición de los conceptos a desarrollar en la unidad, seguido de una situación problema que sirve como ejemplo para dar solución mediante un procedimiento; que se espera sea abordado por los estudiantes para resolver las actividades de práctica.

A continuación, se encuentra un cuadro llamado "comprende" que complementa la información dada anteriormente en el cuadro exploratorio. Esto con el fin de afianzar la definición del concepto matemático que se está trabajando. Para aplicar los conocimientos abordados en el capítulo ofrece de manera secuenciada cuatro tipos de ejercicios para promover el desarrollo de competencias, estos son:

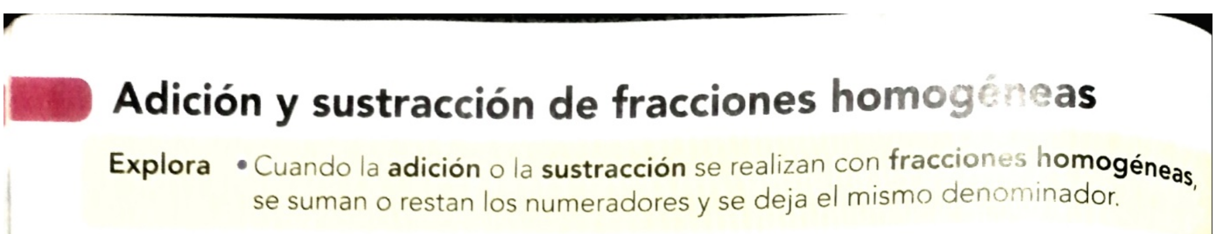
- Ejercitación
- Modelación
- Comunicación
- Solución de problemas

Con esta estructura se estudia cada concepto Matemático presentado a lo largo del texto, para luego pasar a un apartado de resolución de problemas, seguido de otro llamado Ciencia, Tecnología y Sociedad. Allí se presentan datos históricos, aplicaciones del concepto a la tecnología y ejercicios de aplicación. Finalmente se encuentra una explicación del cómo se puede dar solución a algunos ejercicios usando la calculadora.

3.2.2.2 Presentación y definición del concepto Adición de fracciones

Para abordar el concepto de adición de fracciones el texto presenta como saberes previos una representación de fracciones que es abordada desde la relación parte-todo. Esto lo propone el texto como un todo continuo o discreto que es dividido en partes iguales. De manera secuenciada se presentan fracciones equivalentes, para así llegar a la adición y sustracción de fracciones homogéneas, seguidas de la adición y sustracción de fracciones heterogéneas.

En el texto se menciona que "una fracción indica la relación que existe entre la cantidad de partes iguales de la unidad y el total de partes iguales que constituye la unidad". Además, presenta el proceso de adición de la siguiente forma "para resolver adiciones … que tengan igual denominador, se suman … los numeradores y se mantiene el mismo denominador" ; en cuanto a la adición de fracciones heterogéneas el texto propone buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego se suman las fracciones homogéneas obtenidas (ver figura 3.3)



Adición y sustracción de fracciones homogéneas

Explora • Cuando la **adición** o la **sustracción** se realizan con **fracciones homogéneas**, se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Figura 3.3 Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé (MEN, 2012, p. 44)

De esta definición se puede extraer que el proceso de adición se realiza desde dos o más fracciones homogéneas estrictamente. Por otro lado, desde el Ministerio de Educación de Colombia (MEN) se ha implementado una estrategia llamada Proyecto Todos Aprenden PTA, para que las Instituciones Educativas del país mejoren su desempeño en las pruebas SABER. Este documento guía la formación de docentes y la utilización del libro Proyecto Sé (MEN, 2012) propone que "la adición y sustracción de fracciones homogéneas permiten soluciones a situaciones de la vida cotidiana" (p. 45) y que "para sumar o restar fracciones homogéneas se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador". Así mismo la adición de fracciones heterogéneas, pero no se da una definición de ésta, solo se muestra el proceso para resolverla que es mediante "el mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común, diferente de 0 de los números" y en la solución a los ejercicios presentados la proponen desde el método de amplificación, para convertir dos o más fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas y así proceder con su suma.

3.2.2.3 Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto

El ejemplo que presenta el apartado de adición y sustracción de fracciones homogéneas presenta la fracción como relación parte-todo al presentar una caja de galletas surtidas como el todo y el número de galletas de chocolate y de mantequilla como las partes. Se plantea la pregunta: ¿Qué fracción de la caja ocupan las galletas de chocolate y de mantequilla? como muestra la figura la pregunta se responde al sumar las fracciones homogéneas que representan cada tipo de galletas (Ver figura 3.4). Los ejercicios que proponen están centrados en realizar la adición de fracciones homogéneas, en este caso sin apoyo visual de la representación de dichas fracciones. (Ver figura 3.5)

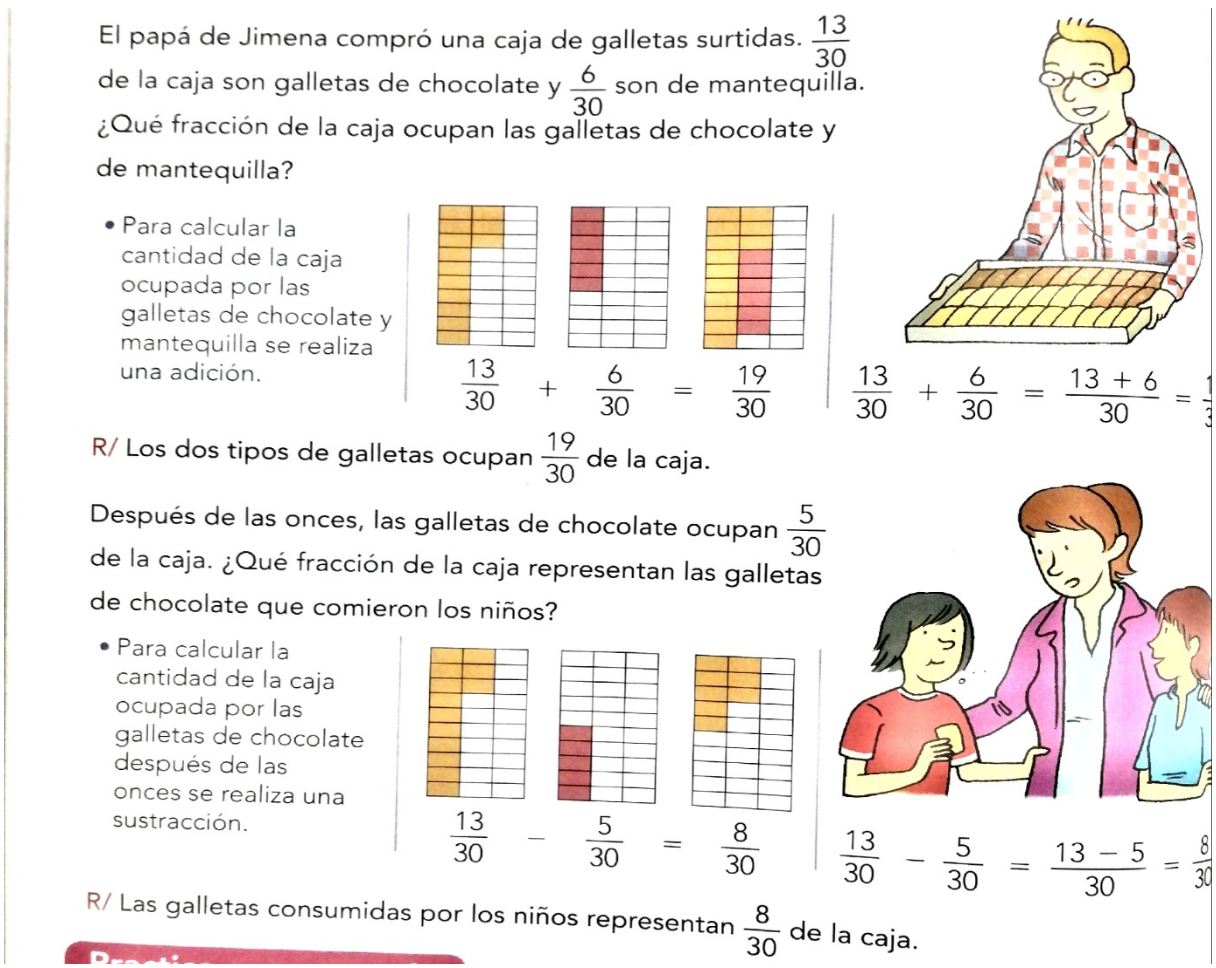


Figura 3.4 Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé (MEN, 2012, p. 44)

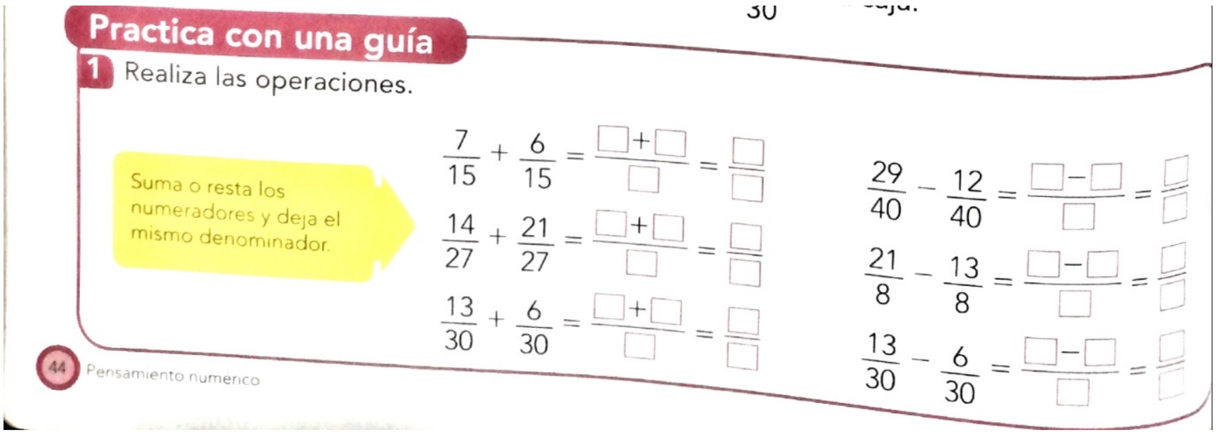
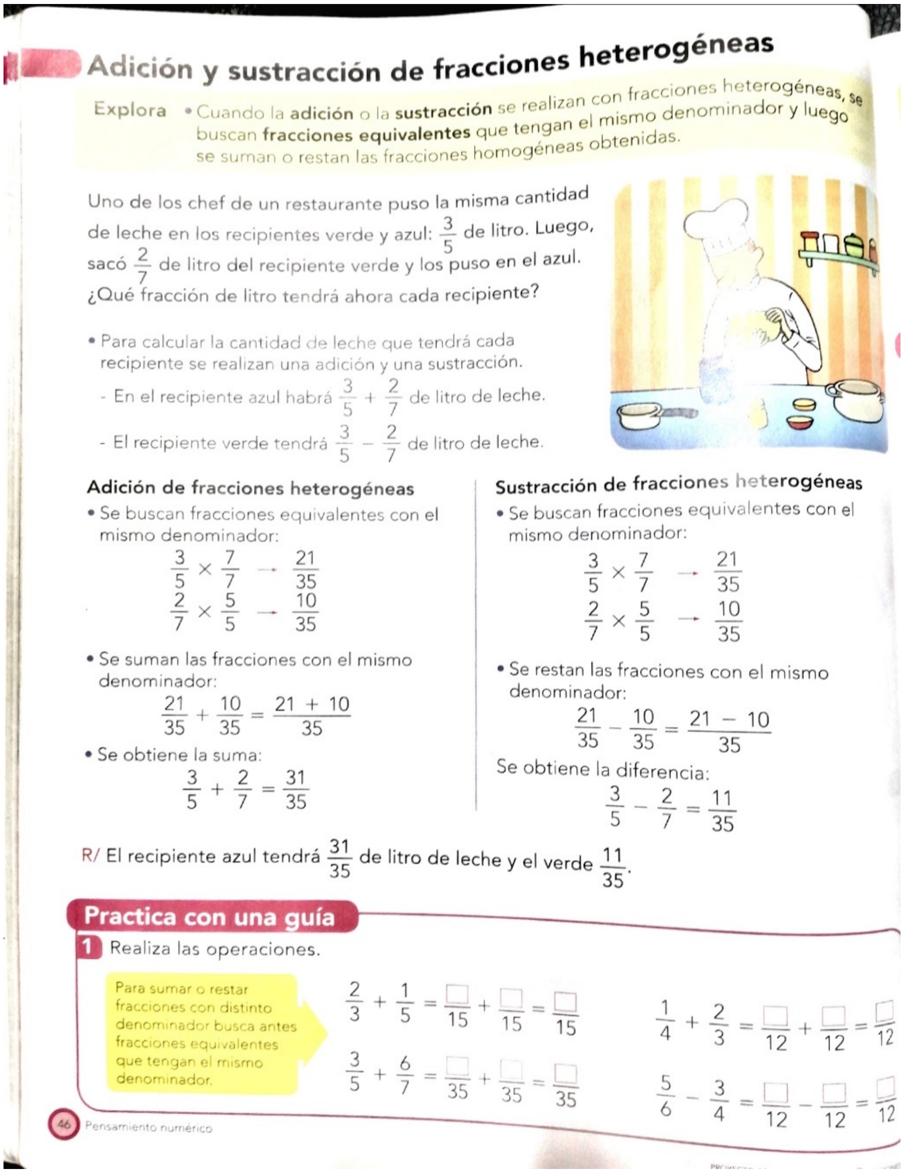


Figura 3.5 Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé (MEN, 2012, p. 44)

Por el lado de la adición y sustracción de fracciones heterogéneas se encuentra un ejemplo donde se presentan la adición y sustracción de manera simultánea. Para resolver cada operación, se reducen las fracciones al común denominador y se suman o restan las fracciones equivalentes obtenidas (ver figura 3.6). En este ejemplo el texto no describe de dónde salen los nuevos numeradores, dejando a interpretación del estudiante el procedimiento que se llevó a cabo. En cuanto a los ejercicios que se proponen en este apartado, se inicia con la adición y de fracciones heterogéneas, se específica el denominador común, allí los estudiantes deben encontrar el numerador y proceder a realizar la operación. Los ejercicios que se encuentran a continuación requieren de realizar todo el procedimiento de buscar el común denominador y resolver el algoritmo.



Adición y sustracción de fracciones heterogéneas

Explora • Cuando la **adición** o la **sustracción** se realizan con fracciones heterogéneas, se buscan **fracciones equivalentes** que tengan el mismo denominador y luego se suman o restan las fracciones homogéneas obtenidas.

Uno de los chef de un restaurante puso la misma cantidad de leche en los recipientes verde y azul: $\frac{3}{5}$ de litro. Luego, sacó $\frac{2}{7}$ de litro del recipiente verde y los puso en el azul. ¿Qué fracción de litro tendrá ahora cada recipiente?

- Para calcular la cantidad de leche que tendrá cada recipiente se realizan una adición y una sustracción.
  - En el recipiente azul habrá $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ de litro de leche.
  - El recipiente verde tendrá $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$ de litro de leche.

Adición de fracciones heterogéneas

- Se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{7} \rightarrow \frac{21}{35} \qquad \frac{2}{7} \times \frac{5}{5} \rightarrow \frac{10}{35}$$

- Se suman las fracciones con el mismo denominador:

$$\frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{21 + 10}{35}$$

- Se obtiene la suma:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{31}{35}$$

Sustracción de fracciones heterogéneas

- Se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{7} \rightarrow \frac{21}{35} \qquad \frac{2}{7} \times \frac{5}{5} \rightarrow \frac{10}{35}$$

- Se restan las fracciones con el mismo denominador:

$$\frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{21 - 10}{35}$$

Se obtiene la diferencia:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{11}{35}$$

R/ El recipiente azul tendrá $\frac{31}{35}$ de litro de leche y el verde $\frac{11}{35}$.

Practica con una guía

1 Realiza las operaciones.

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador busca antes fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{\square}{15} + \frac{\square}{15} = \frac{\square}{15} \qquad \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{\square}{12} + \frac{\square}{12} = \frac{\square}{12}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{\square}{35} + \frac{\square}{35} = \frac{\square}{35} \qquad \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{\square}{12} - \frac{\square}{12} = \frac{\square}{12}$$

46 Pensamiento numérico

Figura 3.6 Matemáticas edición especial 5 Proyecto Sé (MEN, 2012, p. 46)

Es claro que, al presentar estas formas de realizar las adiciones de fracciones, se asume que la adición de estás solo se puede realizar entre fracciones homogéneas.

El texto que se analiza a continuación desde la estructura propuesta por Campos (2017), se titula Estrategias en Matemáticas del grado 4°, este es uno de los libros que se toma como texto guía en algunas instituciones educativas de Colombia.

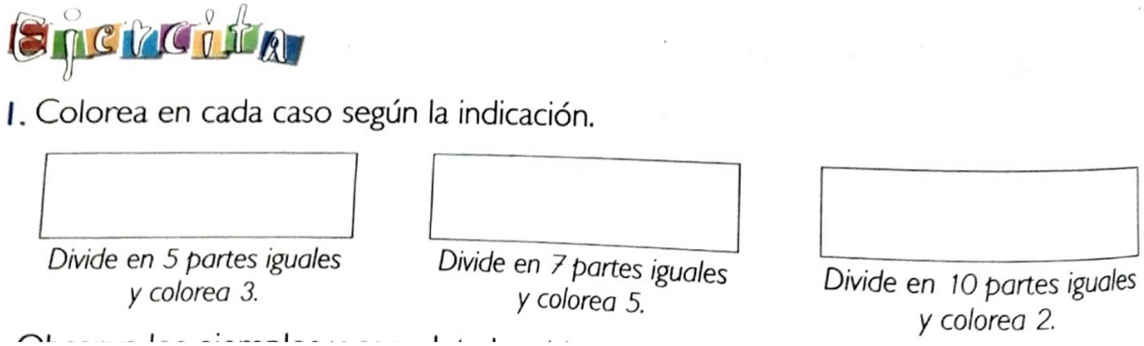
3.2.2.3 Estructura general del texto

El texto producido por el editorial Libros y Libros S.A. se encuentra segmentado en 4 unidades, numeradas secuencialmente, en cada una de ellas se encuentran apartados destinados a desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional (ver figura 3.7). Al inicio de cada unidad se exponen los estándares propuestos por el MEN en los lineamientos curriculares, que direccionan los contenidos a desarrollar. Cada contenido que se trabaja dentro de una unidad inicia con una situación problema resuelta a manera de ejemplo, para luego pasar a resolver una serie de ejercicios con lo aprendido anteriormente. Al terminar con el desarrollo de temáticas con un contenido común se encuentra un apartado destinado a resolver cierta cantidad de problemas, promoviendo el uso de los procesos contemplados anteriormente.

Figura 3.7 Estrategias en matemáticas 4 (p. 2-3)

3.2.2.4 Presentación y definición del concepto Adición de fracciones

Para desarrollar el concepto de adición de fracciones el texto presenta como saberes previos la representación de fracciones, enfocada desde una concepción de fracción como parte-todo. En este apartado proponen un ejercicio dónde los estudiantes deben dividir un rectángulo en un número de partes iguales, desde una visión de lo continuo (ver figura 3.8), dónde no se específica que el estudiante debe tomar una unidad de medida como referencia y como consecuencia se corra el riesgo que los estudiantes no identifiquen la no congruencia de las partes Londoño, Kakes y Castro (2015).


1. Colorea en cada caso según la indicación.

Divide en 5 partes iguales y colorea 3.

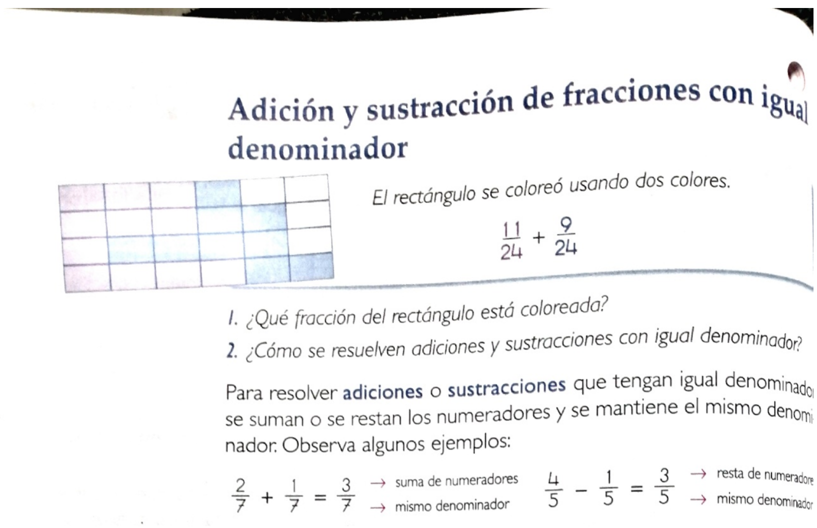
Divide en 7 partes iguales y colorea 5.

Divide en 10 partes iguales y colorea 2.

Figura 3.8 Estrategias en matemáticas 4 (p. 114)

Así mismo presentan la fracción como parte de un conjunto haciendo alusión a la concepción de la parte-todo desde una perspectiva discreta, luego se proponen las fracciones propias e impropias, la fracción como división inexacta, la fracción como división exacta, la fracción de una cantidad, las fracciones equivalentes en la cual se exponen los procesos de amplificación y simplificación para obtenerlas y que se tendrán como principal recurso para resolver las adiciones de fracciones heterogéneas.

Al observar el apartado sobre la adición de fracciones con igual denominador se observa la siguiente: primero se presentan de manera simultánea la adición y sustracción de fracciones, llamadas como "Adición y sustracción de fracciones con igual denominador", sin relacionarlo con el termino de fracciones homogéneas; Segundo, no hay una definición del concepto y tercero, solo proponen un ejemplo desde lo continuo al dividir un rectángulo en partes iguales, identificadas con dos colores diferentes, dejando de lado lo presentado anteriormente, que es la visualización de la parte-todo desde la naturaleza continua (ver figura 3.9). La adición de fracciones heterogéneas encontradas en el texto como "adición de fracciones de distinto denominador" no está definida como tal, solo presentan un paso por paso de cómo resolver el algoritmo.


Adición y sustracción de fracciones con igual denominador

El rectángulo se coloreó usando dos colores.

$\frac{11}{24} + \frac{9}{24}$

1. ¿Qué fracción del rectángulo está coloreada?
2. ¿Cómo se resuelven adiciones y sustracciones con igual denominador?

Para resolver **adiciones** o **sustracciones** que tengan igual denominador, se suman o se restan los numeradores y se mantiene el mismo denominador. Observa algunos ejemplos:

$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ → suma de numeradores → mismo denominador

$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ → resta de numeradores → mismo denominador

Figura 3.9 Estrategias en matemáticas 4 (p. 128)

3.2.2.6 Ejemplos y ejercicios proporcionados por el texto.

Se encuentra solo un ejemplo para que los estudiantes logren identificar el proceso que se debe realizar para desarrollar una adición de fracciones con igual denominador, en él se observa un rectángulo dividido en 24 partes iguales, 11 de ella de color purpura, 9 de color azul y 4 sin colorear, no se observa una unidad de medida utilizada para la división del rectángulo (ver figura 3.9). El texto continúa proponiendo las siguientes preguntas: ¿Qué fracción del rectángulo está coloreada? Y ¿Cómo se resuelven las adiciones y sustracciones con igual denominador?, el primer cuestionamiento queda a interpretación del estudiante y para el segundo proporciona una explicación seguido de un ejemplo de solución del algoritmo.

Luego se presentan 4 ejercicios (ver figura 3.10), con la particularidad de que están mal numerados, ya que están como 1, 2, 2 y 3. En el primero deben resolver 10 operaciones donde 5 de ellas están combinadas entre adición y sustracción, proceso que anteriormente no fue expuesto y que posiblemente puede generar confusión para alguno de los estudiantes. El segundo son dos tablas de doble entrada una de adición la otra de sustracción, en el tercer ejercicio los estudiantes deben encontrar la segunda fracción que afirme la igualdad. El cuarto ejercicio muestra 6 rectángulos del mismo tamaño, todos divididos de forma diferente, sin especificar unidades de medida para su división, allí los estudiantes deben expresar las regiones coloreadas en cada rectángulo como una adición.

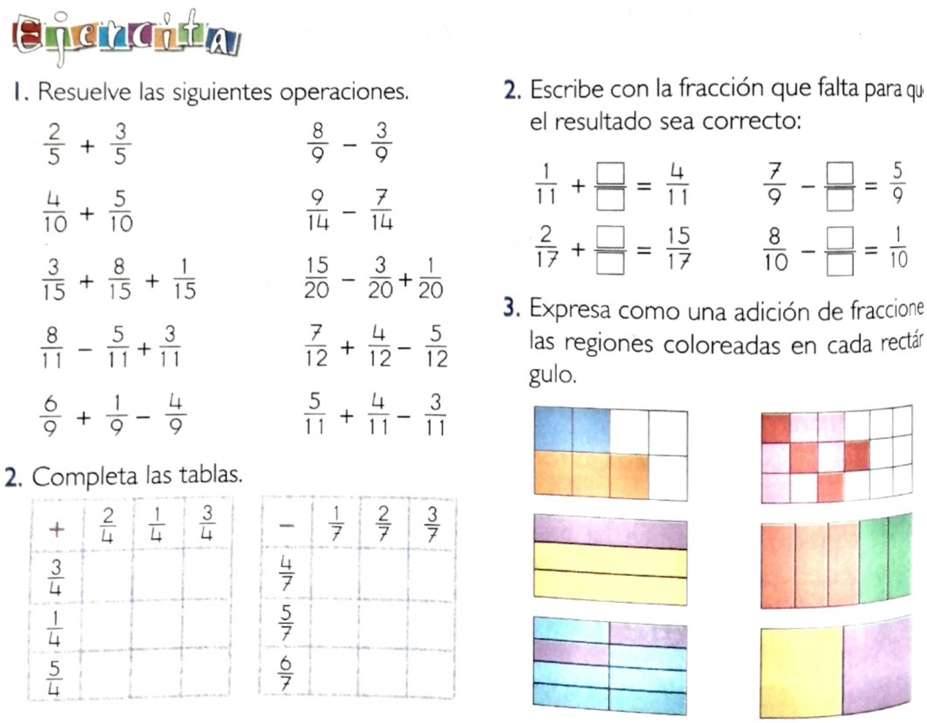
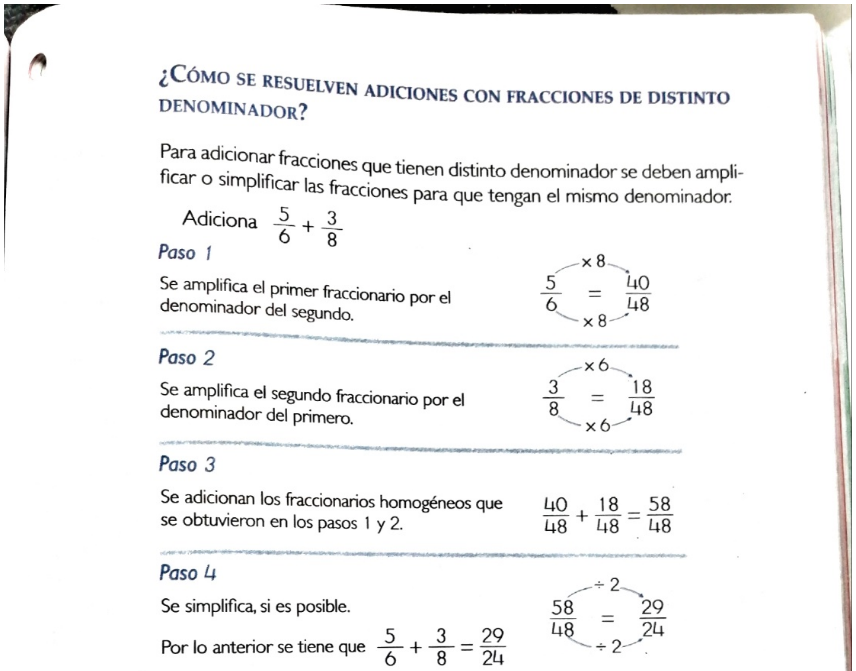


Figura 3.10 Estrategias en matemáticas 4 (p. 128)

Por el lado de la adición de con fracciones de distinto denominador (ver figura 3.11), no se observa ningún tipo de apoyo visual, basado en la representación de las fracciones expuestas en el ejemplo, en el que se muestra la forma de resolver paso por paso los algoritmos desde la amplificación y simplificación de fracciones. Finaliza el apartado con 4 ejercicios (Ver figura 3.12), en el ejercicio 1 deben resolver 8 adiciones, en el 2 los estudiantes deben completar una tabla de doble entrada, para el ejercicio 3 los estudiantes seis operaciones con números mixto (trabajados en la fracción como división inexacta) y finaliza con el ejercicio 4 donde deben hallar el mínimo común múltiplo de 4 fracciones heterogéneas.



¿Cómo se resuelven adiciones con fracciones de distinto denominador?

Para adicionar fracciones que tienen distinto denominador se deben amplificar o simplificar las fracciones para que tengan el mismo denominador.

Adiciona $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$

Paso 1

Se amplifica el primer fraccionario por el denominador del segundo.

$$\frac{5}{6} \xrightarrow{\times 8} \frac{40}{48}$$

Paso 2

Se amplifica el segundo fraccionario por el denominador del primero.

$$\frac{3}{8} \xrightarrow{\times 6} \frac{18}{48}$$

Paso 3

Se adicionan los fraccionarios homogéneos que se obtuvieron en los pasos 1 y 2.

$$\frac{40}{48} + \frac{18}{48} = \frac{58}{48}$$

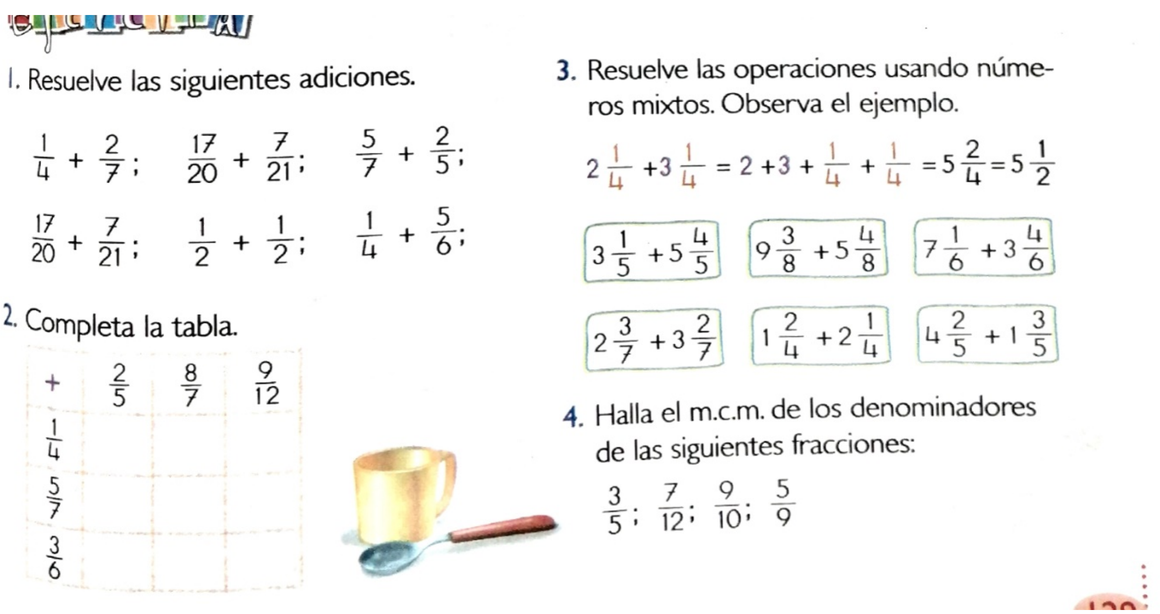
Paso 4

Se simplifica, si es posible.

$$\frac{58}{48} \xrightarrow{\div 2} \frac{29}{24}$$

Por lo anterior se tiene que $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{29}{24}$

Figura 3.11 Estrategias en matemáticas 4 (p. 128)



1. Resuelve las siguientes adiciones.

$\frac{1}{4} + \frac{2}{7}$; $\frac{17}{20} + \frac{7}{21}$; $\frac{5}{7} + \frac{2}{5}$;

$\frac{17}{20} + \frac{7}{21}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$;

2. Completa la tabla.

+	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{1}{4}$			
$\frac{5}{7}$			
$\frac{3}{6}$			

3. Resuelve las operaciones usando números mixtos. Observa el ejemplo.

$$2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} = 2 + 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 5\frac{2}{4} = 5\frac{1}{2}$$

$\boxed{3\frac{1}{5} + 5\frac{4}{5}}$ $\boxed{9\frac{3}{8} + 5\frac{4}{8}}$ $\boxed{7\frac{1}{6} + 3\frac{4}{6}}$

$\boxed{2\frac{3}{7} + 3\frac{2}{7}}$ $\boxed{1\frac{2}{4} + 2\frac{1}{4}}$ $\boxed{4\frac{2}{5} + 1\frac{3}{5}}$

4. Halla el m.c.m. de los denominadores de las siguientes fracciones:

$\frac{3}{5}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{5}{9}$

Figura 3.12 Estrategias en matemáticas 4 (p. 128)

3.2.3 Conclusiones sobre el análisis de los textos.

Se pudo observar que ambos textos realizan una propuesta de la fracción como parte-todo, dejando de lado las demás concepciones de la fracción, reduciendo así la posibilidad de que los estudiantes conciban la fracción desde otros procesos. Otra de las similitudes es que ambos textos en su presentación de las fracciones utilizan el rectángulo como un todo dividido en varias partes iguales, detalle que el estudiante debe asimilar de acuerdo a su nivel de observación, ya que no se demuestra mediante alguna unidad de medida que esas partes ciertamente son homogéneas.

Uno de los aspectos más relevantes observado en ambos textos, tiene que ver con la adición de fracciones heterogéneas, éstas son presentadas solamente desde la parte algorítmica, no se contempla que los estudiantes puedan mediante la comparación y relación entre partes de diferentes dimensiones, la posibilidad de reducir o amplificar una fracción desde la representación gráfica o concreta. De acá que se en esta investigación se plantee una DG hipotética centrada en la manipulación de objetos concretos, donde el estudiante a través del unas Acciones , pueda interiorizar desde su experiencia un Proceso sobre el cual, puedan resolver una Adición de fracciones con más sentido.

3.2.4 Descomposición genética hipotética.

Tomando en cuenta los aspectos señalados hasta el momento en este capítulo, se busca estructurar un modelo cognitivo de la noción de adición de racionales tomando como base las fracciones homogéneas. En esta DG se retoman las estructuras propuestas por la teoría APOE, Acción, Proceso y Objeto; mediante éstas se pretende visualizar la forma en que los estudiantes construyen y hacen uso de los mecanismos mentales para la construcción del objeto o su eventual transformación.

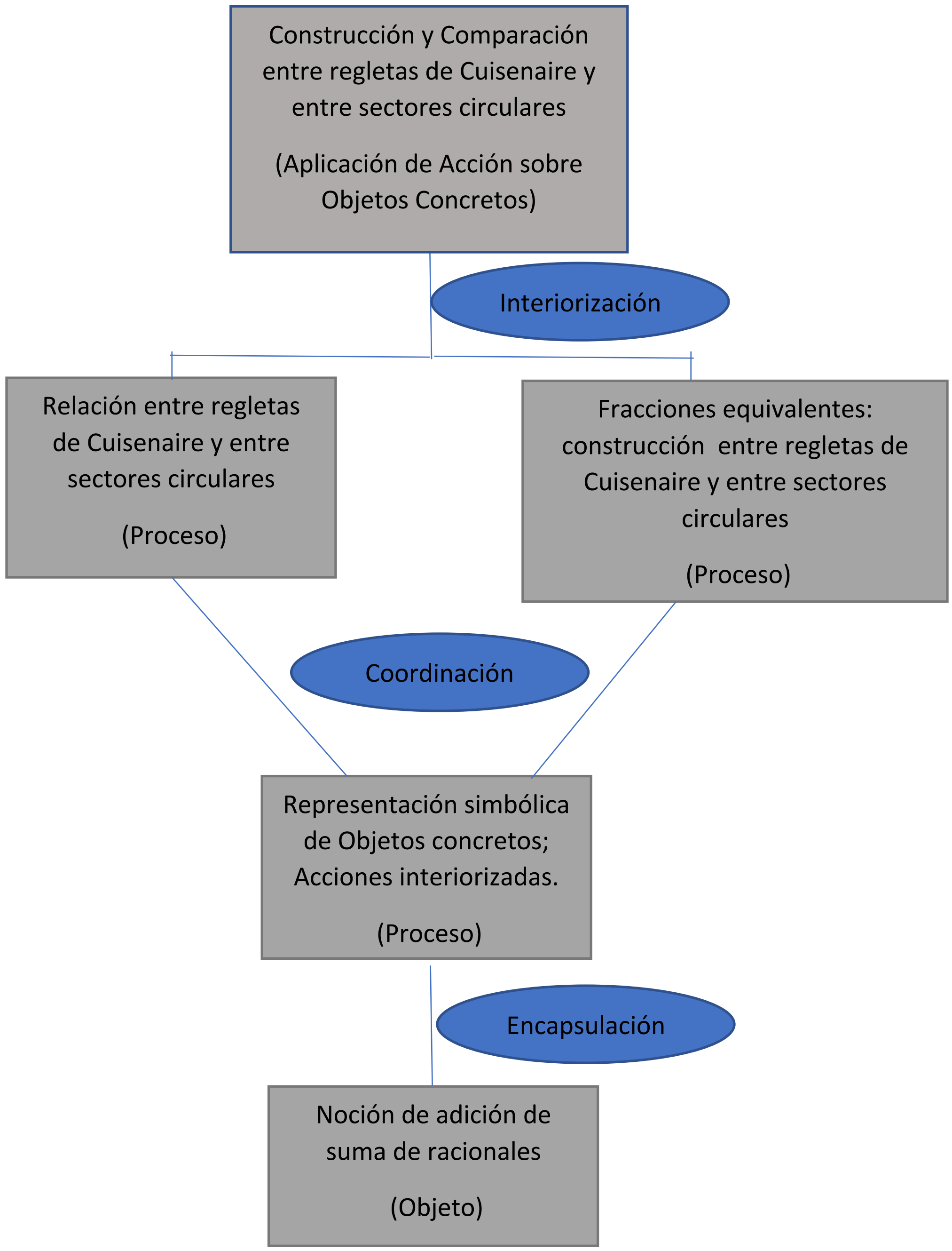


Figura 3.3 Descomposición Genética Hipotética. (DGH)

Como muestra la figura 3.3 el modelo cognitivo hipotético parte de la aplicación de Acciones sobre Objetos Concretos. En este caso sobre sectores circulares y regletas de Cuisenaire que representan diferentes fracciones.

Acciones: esta estructura se logra a partir de la manipulación que los estudiantes realizan de las regletas de Cuisenaire y los sectores circulares. Como muestra la figura 3.3 dadas las características de los Objetos Concretos, las Acciones sobre estas desde el campo geométrico se relacionan con la comparación entre tamaño, color y forma; estas características permiten asignar un determinado valor (número natural) a cada color. En el caso de los sectores circulares, la principal Acción se concentra en la comparación entre las superficies de los sectores; esto es, a partir del recubrimiento o superposición. Estas Acciones sobre las regletas de Cuisenaire, así como sobre los sectores circulares motivan el mecanismo de interiorización; éste permite realizar una concatenación entre conceptos geométricos trabajados con anterioridad como el tamaño, color y forma generando los Procesos de relación y equivalencia entre los Objetos Concretos; así los estudiantes pueden llevar las Acciones sobre el mundo concreto a su mente, de manera tal que pueden pensar sobre los Objetos Concretos.

Proceso: en esta estructura el estudiante después de realizar Acciones de manipulación de las formas concretas (comparar, superponer, reconstruir) puede en el caso de las regletas asignar un valor numérico a cada regleta, que le permite realizar Acciones mentales como determinar formas de contenencia y relaciones entre la parte y el todo. Ahora en el caso de los sectores circulares, la interiorización de las Acciones permite que los estudiantes reflexionen sobre las características de recubrimiento, asociadas a la equivalencia de una determinada partición del círculo. Al establecer una relación ya no solo de los aspectos geométricos sino también aritméticos, el estudiante puede realizar transformaciones sobre estos objetos concretos desde su imaginación; esto evidencia la construcción de un Proceso de equivalencia no solo desde la manipulación física, sino también mental lograda gracias a la construcción de del Proceso.

Es en esta estructura donde las formas numéricas y las Acciones interiorizadas permiten que el estudiante bajo una experiencia adecuada determine cuáles fracciones pueden operarse bajo la adición y cuáles no. En este modelo hipotético, se considera que la adición está definida solo entre fracciones homogéneas; en este caso dadas por las formas de equivalencia estructuradas.

El estudiante que logra construir una estructura Proceso está en la capacidad no solo de llegar a lo simbólico mediante la manipulación de Objetos Concretos, sino que puede aplicar el Mecanismo de reversión al realizar manipulaciones sobre dichos Objetos desde una tarea asignada de forma numérica o en lenguaje natural.

La encapsulación del Proceso puede lograrse cuando el estudiante deja de pensar en la dinámica de transformar Objetos concretos (regletas y sectores circulares) para manipular números fraccionarios.

Objeto: esta estructura está determinada por la transformación que el estudiante puede realizar a partir de un conjunto de fracciones dadas. En particular cuando determina en qué casos puede realizar la adición. En esta estructura los estudiantes pueden realizar acciones mentales sobre sectores circulares que representan un par de números fraccionarios y determinar si ellos son o no homogéneos. En el caso de las regletas de Cuisenaire, esta estructura permite que los estudiantes transformen una regleta dada en formas equivalentes (criterio de cambio de forma o color), para ser finalmente operadas y generar un nuevo número fraccionario.

3.3. Análisis a priori de los instrumentos

Con base en los elementos en la descomposición genética hipotética, se diseña y analiza instrumento: la entrevista. Estos permiten conocer con mayor detalle en realidad, cómo puede estructurarse la noción de número racional y su adición a partir de la manipulación de material concreto. Perspectiva que desde la teoría se interpreta como la aplicación de transformaciones sobre Objetos Concretos para posibilitar la construcción de Objetos Abstractos.

3.3.1 Entrevista: Análisis a priori a la luz de la descomposición genética.
La entrevista se realizó de manera individual, fue videograbada para determinar una transcripción que permitiera realizar un análisis más profundo de las estructuras y mecanismos evidenciados por los estudiantes. Tuvo una duración aproximada de 120 minutos que se dividían entre 4 y 5 sesiones.

A continuación, se presenta el análisis a priori, organizado teniendo en cuenta el material concreto implementado: Regletas de Cuisenaire y Sectores circulares.

3.3.2 Actividades relacionadas con las regletas de Cuisenaire.

Este material fue construido por los estudiantes en tiras de papel; esta actividad fue realizada en tiempo extraclase de manera previa a la realización de la entrevista.

Las actividades consisten principalmente en comparar las diferentes regletas de Cuisenaire para establecer finalmente si las fracciones que representan pueden o no ser operadas. A partir de determinar qué relación puede establecerse entre dos regletas específicas. El análisis a priori se presenta para cada pregunta, inicialmente el análisis se centra en describir las Acciones específicas que el estudiante debe realizar para iniciar con el mecanismo de interiorización. Cada pregunta va acompañada de un conjunto de opciones que describen lo que el estudiante puede determinar a partir de la manipulación del material.

Pregunta 1: A partir de la siguiente imagen construye las regletas (10 de cada una) utilizando las cuadriculas de las hojas de tu cuaderno y tomando como unidad 1 cm^2 .

Regletas	Valor	Color
	1	Blanco
	2	Rojo
	3	Verde claro
	4	Rosa
	5	Amarillo
	6	Verde oscuro
	7	Negro
	8	Marrón
	9	Azul
	10	Naranja

Figura 3.4 construcción de regletas (actividades para el aula-taller de matemáticas 4°)

1.

A) De lo anterior:

A1. Compara las regletas de color blanco con las regletas de color naranja ¿Qué observas?

A2. ¿Cuántas regletas blancas necesitas para construir una regleta verde?

- Opción 1: responde que se necesitan 10 regletas blancas para igualar a la regleta naranja.
- Opción 2: responde que la regleta blanca es más pequeña que la naranja.

A3. ¿Cuántas rosadas para formar dos naranjas?

- Opción 1: responde que se necesitan dos rosadas para igualar la regleta naranja.
- Opción 2: responde que la regleta rosada es la mitad de la naranja.

Esta pregunta permite que los estudiantes empiecen a realizar Acciones sobre las regletas (Objetos Concretos) en este caso a partir de la comparación entre ellas. Como resultado de esta actividad pueden familiarizarse con el material y empezar a considerar asignarle a cada regleta un valor numérico.

B) Basado en las regletas que construiste.

B1. Toma la regleta roja y compárala con la regleta naranja. ¿qué puedes decir?

B2. ¿Cuántas regletas amarillas necesitas para formar una naranja?

B3. ¿Cuántas naranja para formar una amarilla?

- Opción 1: Afirma que 5 regletas rojas cubren exactamente la longitud de la regleta Naranja.
- Opción 2: la regleta roja es 5 veces más pequeña que la naranja.

C) Con los ejercicios anteriores
   C1. ¿Qué relación estableces entre la regleta blanca y la regleta roja?

   - Opción 1: Compara las dos regletas y dice que la blanca es la mitad de la roja.
   - Opción 2: Responde que la regleta roja es igual a dos blancas.

Pregunta 2:

Figura 3.5 (actividades para el aula-taller de matemáticas 4°)

A) Observa la relación entre la regleta azul y la blanca
   A1. ¿Cuántas regletas blancas se necesitan para completar una azul?
   Opción 1: El estudiante al colocar las regletas blancas sobre la azul responde que se necesitan 9 blancas.

B) Con base al ejercicio anterior:
   B1. ¿Cuántas veces es mayor la regleta azul que una regleta blanca? Exprésalo matemáticamente.
   Opción 1: responde que 9 veces mayor y lo expresa como 9/9.
   Opción 2: responde que 9 veces y lo expresa como 1/9.
   B2. ¿Cuántas veces es menor la regleta blanca que la regleta azul?
   Opción 1: responde que 9 veces menor y lo expresa como 1/9.
   Opción 2: responde que 9 veces menor y lo expresa como 1/1.

Pregunta 3:

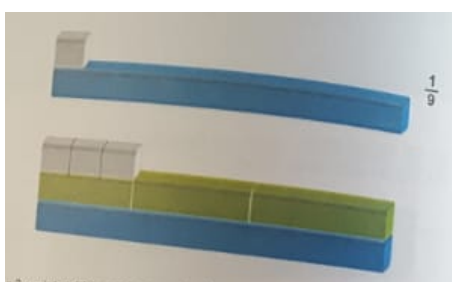


Figura 3.6 tomada construcción de regletas (actividades para el aula-taller de matemáticas 4°)

A) Se necesitan 3 regletas blancas para cubrir una regleta verde clara, lo anterior indica que la regleta blanca equivale a 1/3 de la verde clara. Se necesitan 3 paquetes de blancas de 3 regletas cada uno para cubrir la azul.

A1. ¿Cómo expresarías matemáticamente cada paquete de regleta blanca con relación a la azul?
Opción 1: El estudiante lo expresa como 3/9.
Opción 2: el estudiante lo expresa como 1/3.
A2. Matemáticamente expresa la relación que hay entre un paquete de 3 regletas blancas y una verde clara.
Opción 1: responde que son iguales y los expresa como 3/9 = 1/3.
Opción 2: responde que 1 blanca es 1/9 y la verde clara 1/3 y lo expresa de forma aislada 1/3 y 1/9 .

B) Al igualar la regleta azul con 3 paquetes de regletas blancas cada uno.
B1. ¿es posible sumar estos paquetes entre sí? ¿Cómo lo harías?
Opción 1: responde que si y que lo haría sumando así 3/9 + 3/9 + 3/9 = 9/9 =1.
Opción 2: responde que si y los suma de la siguiente forma 3/9 + 3/9 + 3/9 = 9/27.
B2 Se puede sumar un paquete de 3 regletas blancas con una regleta verde clara? ¿Cómo lo expresarías?
Opción 1: responde que si y lo expresa así: 3/9 + 1/3 = 6/9.
Opción 2: responde que si y lo expresa así: 3/9 + 1/3 = 2/3.
Opción 3: responde que si y lo expresa así: 3/9 + 1/3 = 4/12.
Opción 4: responde que no y no hay como expresarlo.

En este caso a partir de comparar dos sectores un estudiante puede determinar si éstos pueden o no sumarse.

Pregunta 4:

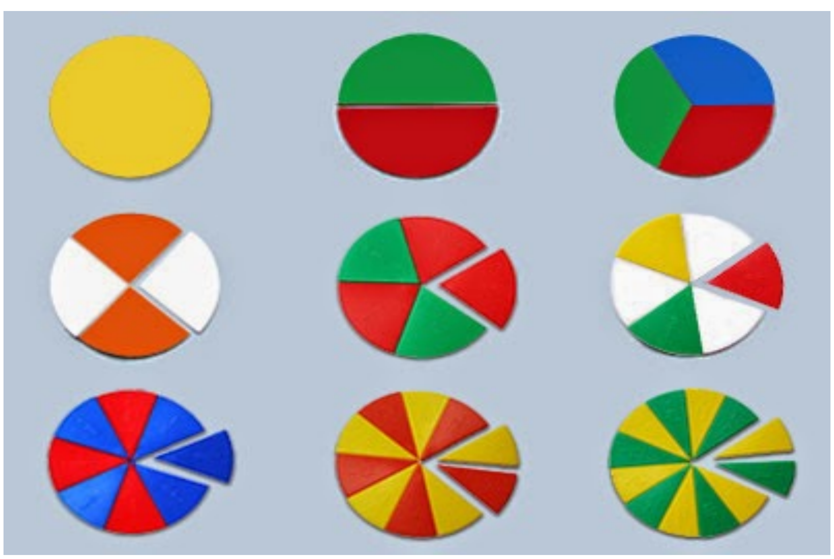


Figura 3.7 recuperada de https://www.emaze.com/@ACCWQIRL/Clase-mat-4%C2%B0---7,8,9--BIM2-4%7C%C2%B0--copy1

Con base en los estos sectores circulares realiza las siguientes actividades:

A) Identifica cada sector a qué parte de la unidad corresponde.
   A1. Compara cada sector circular con el circulo completo (Unidad)
   - Opción 1: Pone todas las partes sobre la unidad hasta cubrirla, las cuenta y responde que la unidad es igual ***n*** partes. (depende del sector que escoja)
   - Opción 2: Toma sectores diferentes y los pone sobre la unidad y no la cubren en su totalidad y responde que no le da lo mismo.

B) Toma un sector de los mas grandes y trata de cubrirlo con una cantidad de sectores de igual tamaño de manera que lo cubra totalmente; escribe en forma de fracción cuántos sectores menores iguales al sector mayor.
   - Opción 1: a modo de ensayo error, toma uno de los sectores más grandes y trata de cubrirlo en su totalidad con sectores menores y responde solo cuando los sectores menores y mayores quedan iguales y escribe las fracciones representadas mediante una igualdad (fracciones equivalentes).
   - Opción 2: Iguala el sector mayor con determinados sectores menores y escribe las fracciones de maneras aislada.

C) ¿Sería posible sumar el sector mayor con los sectores menores? ¿Cómo lo harías?
   - Opción 1: Toma el sector ½ y lo suma con 2/4 y como resultado le da 4/4 o 2/2 y responde que lo hizo porque son fracciones que le dieron igual en el ejercicio anterior.
   - Opción 2: Toma el sector ½ y lo suma con 2/4 y como resultado le da 3/6 porque los hace desde la parte algorítmica sin hacer el ejercicio desde lo concreto (sectores circulares).

Pregunta 5: Representa de dos formas posibles la mitad del sector circular, completando la tabla.

			
	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$		

$\frac{1}{2}$			

A) ¿Es posible sumar sectores de diferentes tamaños para que te den igual a $\frac{1}{2}$? ¿Cómo lo harías?

- Opción 1: Toma $\frac{2}{5}$ y los junta con $\frac{1}{10}$ y los expresa como $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$.
- Opción 2: Toma $\frac{1}{6}$ y lo junta con $\frac{3}{9}$ y los expresa como $\frac{1}{6}+\frac{3}{9}$.
- Opción 3: Toma $\frac{1}{4}$ y lo junta con $\frac{2}{8}$ y lo expresa como $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$.

Pregunta 6

A). María se gastó $\frac{1}{8}$ del dinero que le dio su abuelo de cumpleaños en comprar un libro de aventuras, y también se gastó $\frac{4}{8}$ de ese dinero en comprar una bolsa de dulces ¿Qué Fracción del dinero se gastó María?

- Opción 1: Evoca las preguntas anteriores y suma $\frac{1}{8}+\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$ su respuesta es $\frac{5}{8}$.
- Opción 2: Realiza una suma entre $\frac{1}{8}+\frac{4}{8}$ y la respuesta es $\frac{5}{16}$.
- Opción 3: Responde que se gastó $\frac{5}{8}$.

B) Martha tiene un pastel y lo parte en ocho rebanadas, *Juan se comió 5 rebanadas y José se comió 2 rebanadas, ¿qué parte del pastel se comieron entre Juan y José? Exprésalo en fracciones.*

- Opción 1: visualiza las partes del pastel como una fracción y las suma como: $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}$ y su respuesta es $\frac{7}{8}$ de pastel.
- Opción 2: no expresa las partes como fracciones y las expresa como números enteros, luego las suma así: 5+2= 7 partes del pastel.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación, se presenta lo que desde la teoría APOE se propone dentro de su ciclo de investigación como análisis y verificación, centrando la entrevista contemplada dentro de la DG hipotética y el análisis a priori.

4.1 Análisis a posteriori de la Entrevista: Construcción de la noción de suma de números racionales a partir de la manipulación de material concreto

Con base a la DG hipotética expuesta en el capitulo anterior, se realiza un análisis a posteriori de cada una de las preguntas y sus numerales. En el análisis E1 corresponde al trabajo realizado por el estudiante 1, E2 al estudiante 2 y así sucesivamente para los cinco estudiantes.

Al observar los resultados de la entrevista, se realiza un estudio basado en el análisis a priori contemplado en el capítulo 3, donde se encuentran las posibles respuestas de los estudiantes. Esto permite realizar un contraste y que va dirigido a visualizar las Acciones y Procesos presentados en la DG hipotética.

Pregunta 1 A1.

En esta actividad los estudiantes tenían que construir regletas con unas indicaciones claras y luego aplicar unas Acciones sobre éstas, comparando la regleta naranja con las regletas blancas.

El estudiante E1 realiza una comparación sobreponiendo las regletas blancas sobre la naranja; luego realizó un conteo, también tuvo en cuenta la unidad de medida (cm^2) se le proporcionó para la construcción de todas las regletas.

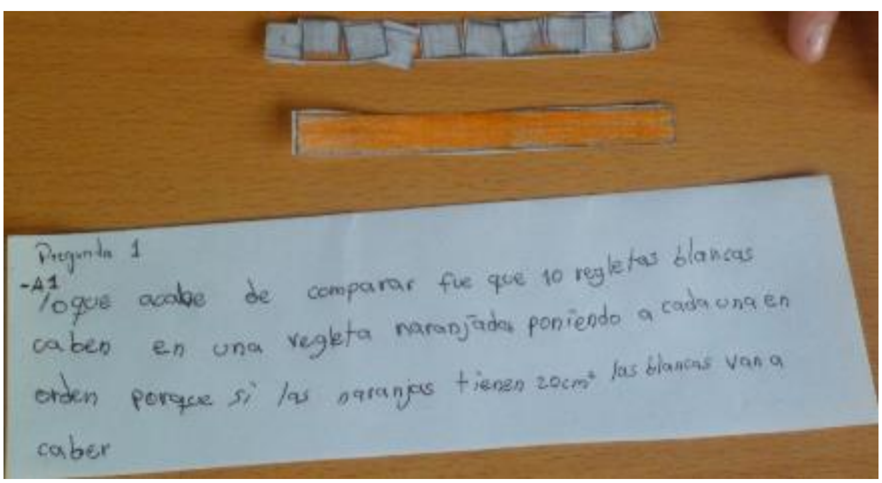


Figura 4.1 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1. A1

El Estudiante E2 al momento de realizar la comparación, solo tuvo en cuenta el tamaño de las regletas (longitud).

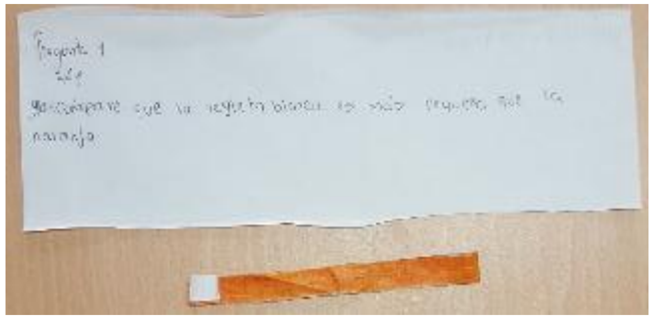


Figura 4.2 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. A1

El estudiante E3 inicialmente las compara observándolas ambas regletas, y cuenta en vos baja los cuadritos que tiene cada regleta y manifiesta que de las 10 regletas blancas que tiene le sobraban para cubrir la naranja, seguidamente las coloca encima y dice que le dio 9 blancas porque no las puso adecuadamente y al momento de escribir el proceso que realizó solo tuvo en cuenta el tamaño.

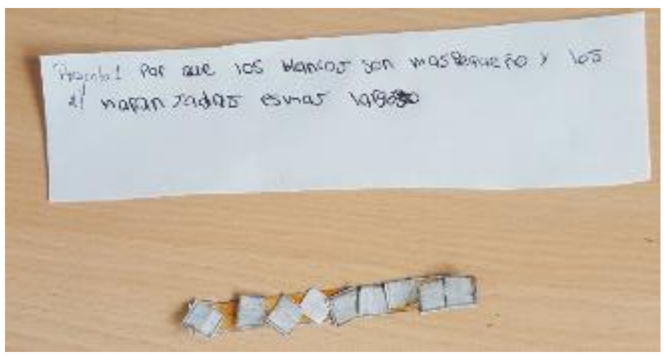


Figura 4.3 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 1. A1

Los estudiantes E4 y E5 en su observación solo enfococaron su atención en el tamaño de las regletas diciendo que una es más corta o más larga.

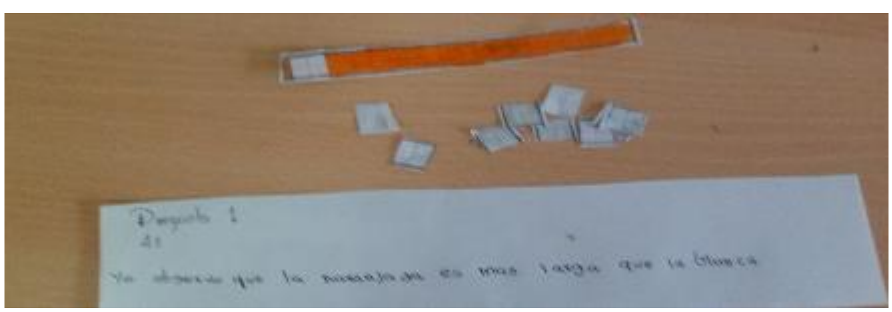


Figura 4.4 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 1. A1

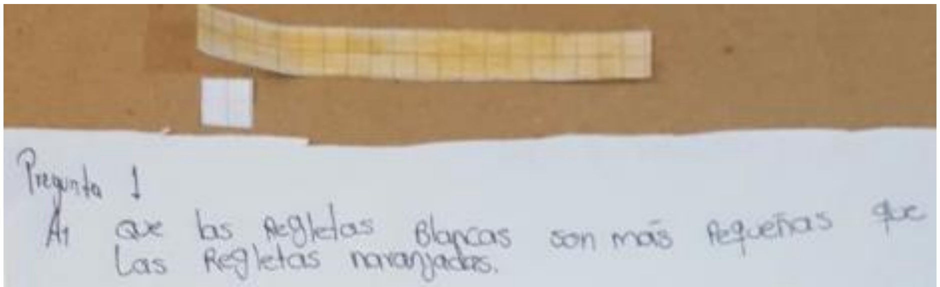


Figura 4.5 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 1. A1

Pregunta 1. A2

En esta pregunta los estudiantes tenían que necesariamente comparar las regletas blancas de modo que igualaran a la regleta verde oscuro sobreponiendo las regletas blancas sobre la verde oscuro o contando los centímetros cuadrados que tenía cada uno y así realizar el cálculo, yendo de las partes al todo. Los estudiantes E2, E3, E4 y E5 concluyeron después de manipular las regletas que necesitan 6 regletas blancas para cubrir o igualar la regleta verde claro.

El estudiante E1 coloca una por una las regletas blancas sobre la regleta verde oscura hasta cubrirla totalmente, y responde verbalmente que necesita 6, y al momento de escribir que fue lo que observo tiene en cuenta la relación que hay entre el color y la unidad de medida que se le proporcionó inicialmente para su construcción.

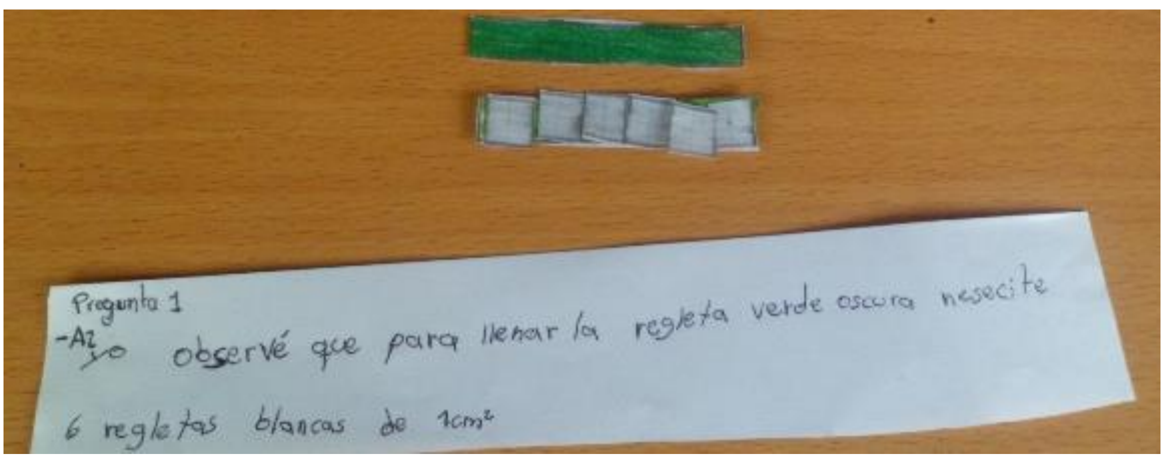


Figura 4.6 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1. A2

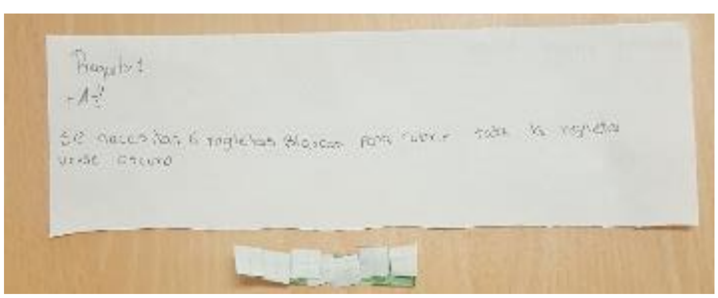


Figura 4.7 respuesta del estudiante E2 a la respuesta de la pregunta 1. A2

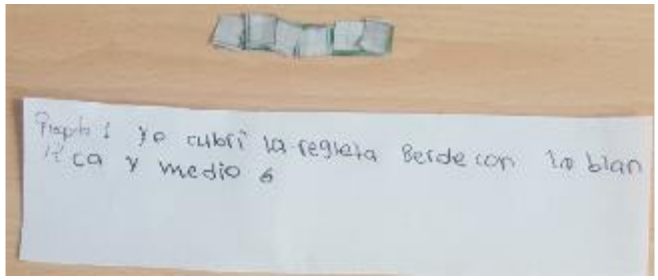


Figura 4.8 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 1. A2

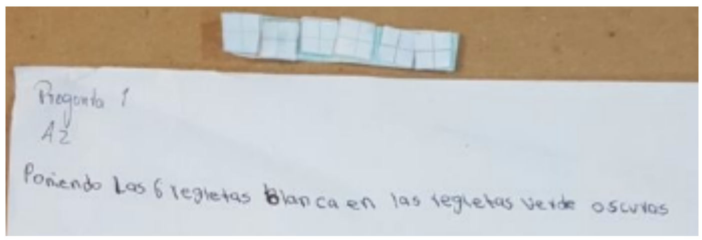


Figura 4.9 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 1. A2

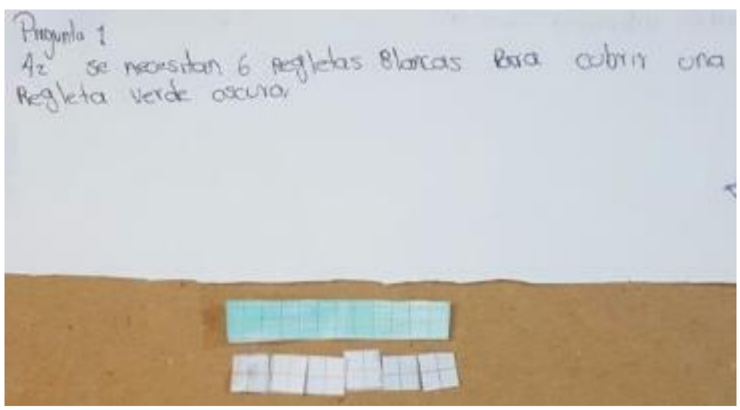


Figura 4.10 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 1. A2

Pregunta 1. A3

En esta pregunta los estudiantes debían unir las dos regletas naranjas para ser comparadas con las regletas rosadas y ser igualadas por 5 de éstas, dónde deban pasar de lo discreto a lo continúo realizando una imagen mental del resultado. En esta pregunta los estudiantes 3 y 5 logran crear una Acción pasando de lo discreto a lo continuo con ayuda del material concreto.

El estudiante E1 toma las dos regletas naranjas por separado y encima las cubre parcialmente por dos rosadas cada una, dice que sobra un espacio y que no le da para colocar más rosadas, de ahí basa a que su respuesta es que necesita de 4 rosadas y le sobre cuadritos.

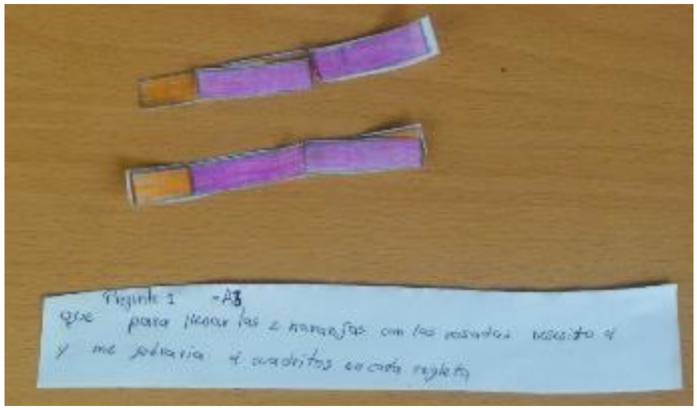


Figura 4.11 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1. A3

El estudiante E2 toma primero la una regleta naranja y le pone encima 2 rosadas, intenta ponerle una tercera, pero como le sobra una parte la retira y la pone sobre la otra regleta rosada, a la cual le agrega otra rosada y responde que se necesita 4 rosadas para cubrir las dos regletas naranjas, pero le sobra espacio en las dos naranjas.

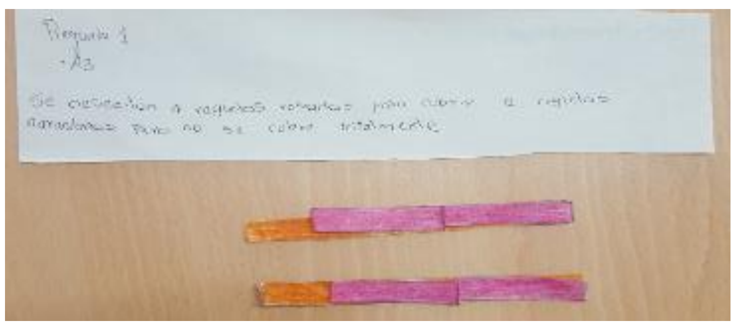


Figura 4.12 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. A3

El estudiante E3 realiza el procedimiento con las dos regletas separadas y le coloca las cuatro rosadas, al notar que le sobra espacio cuanta los cuadritos que le sobraban en cada regleta y decide juntarlas pasando de un proceso discreto a uno continuo y de esta forma crea el espacio para otra regleta rosada, y como respuesta dice que le dan 5 rosadas.

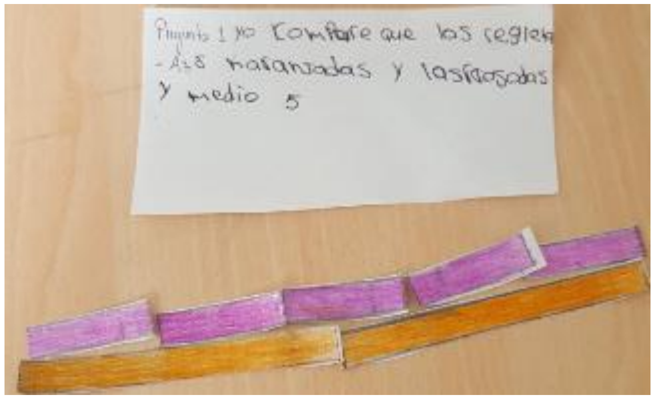


Figura 4.13 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 1.A3

El estudiante E4 toma las regletas por separado y las cubre con 4 rosadas. Argumenta que no puede colocar más en esos espacios tan pequeños.

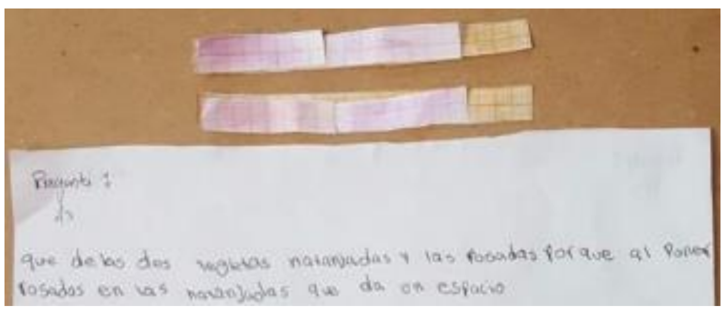


Figura 4.14 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 1.A3

El estudiante E5 toma las dos regletas naranjas y las junta, luego toma las rosadas y las pone encima hasta cubrirlas en su totalidad y responde que se necesitan 5 regletas rosadas para cubrir totalmente a las 2 naranjas.

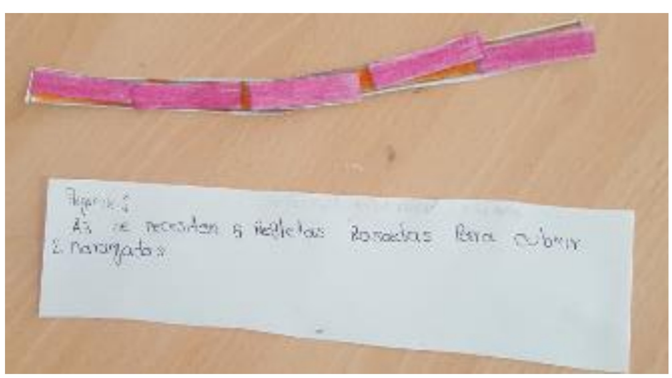


Figura 4.15 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 1. A3

Pregunta 1. B1

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes observen que la regleta naranja puede ser divida en 5 partes iguales del tamaño de la regleta roja. Los estudiantes 1,3, y 5 realizan el mismo proceso y llegan a la misma respuesta, sin visualizar el proceso discreto que se puede aplicar. El estudiante 4 si logra establecer una Acción sobre las regletas comprendiendo que puede ir de lo continuo a lo discreto al dividir mentalmente la regleta naranja.

El estudiante E1 aplica el mismo proceso observado en las preguntas anteriores.

Figura 4.16 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1.B1

El estudiante E2 sigue comparando las regletas solo por su tamaño.

Figura 4.17 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. B1

El estudiante E3 Cubre la regleta naranja con las regletas rojas y concluye lo que se observa en la figura 4.18

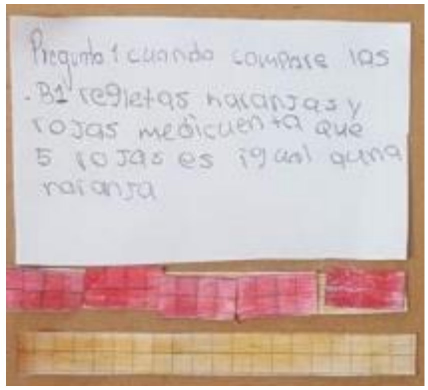


Figura 4.18 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. B1

El estudiante E4 llega a su respuesta al dividir la regleta naranja de forma mental, al igual que estan divididas las regletas rojas.

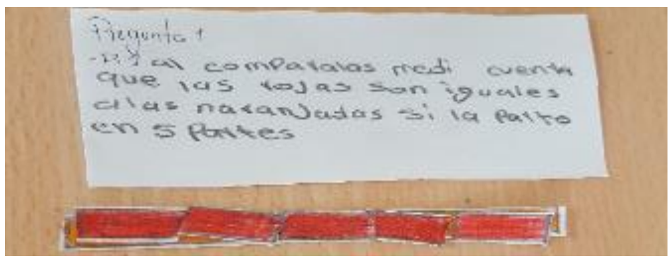


Figura 4.19 respuesta de la estudiante E4 a la pregunta 1. B1

El estudiante E5 comparó y observó solo el tamaño.

Figura 4.20 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 1. B1

Pregunta 1. B2

Está pregunta era una continuación de la pregunta anterior con el objetivo de que los estudiantes Interiorizaran las acciones anteriores. Los estudiantes 1, 2, 3, 4, y 5 realizaron lo esperado en el a priori, solo el estudiante E1 lo relacionó con la unidad de medida.

Al realizar este ejercicio el estudiante E1 no solo relaciona el tamaño sino la relación entre las medidas de ambas regletas.

Figura 4.21 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1.B2

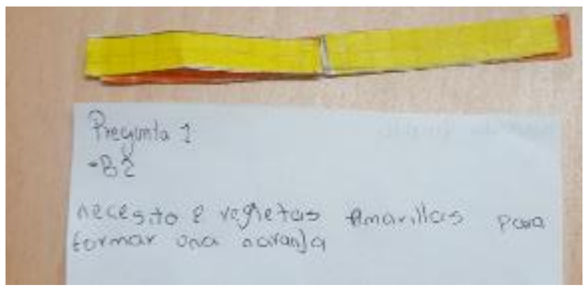


Figura 4.22 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. B2

Figura 4.23 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. B2

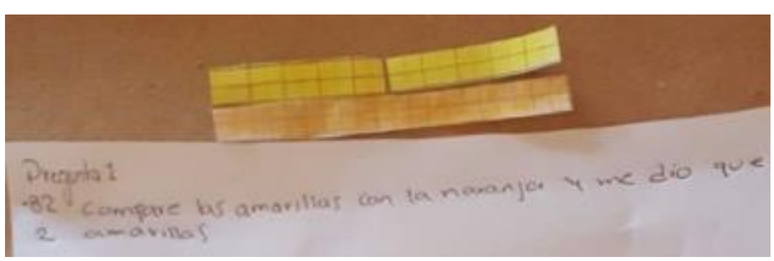


Figura 4.24 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. B

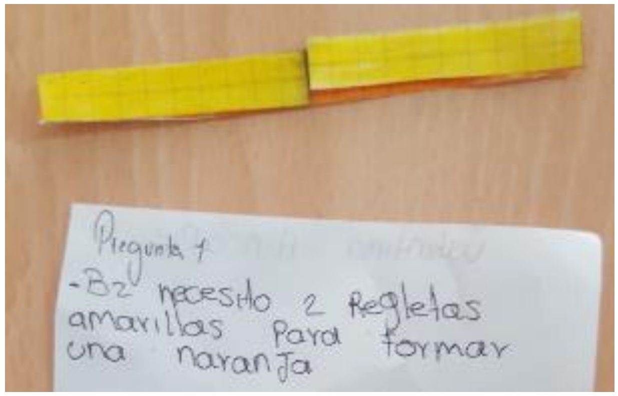


Figura 4.25 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 1. B2

Pregunta 1. B3

Esta pregunta tenía como propósito que los estudiantes visualizaran la regleta naranja como una unidad que puede ser dividida (ir del todo a las partes) para que los estudiantes no solo tengan que manipular las regletas sino también hacer un ejercicio mental de transformar la unidad en partes. sobre cómo podría ser resuelta la pregunta.

En esta pregunta el estudiante E1 compara ambas regletas y teniendo claro la medida de cada una responde que la mitad de la naranja porque ésta mide 20 cm^2 y la amarilla 10 cm^2

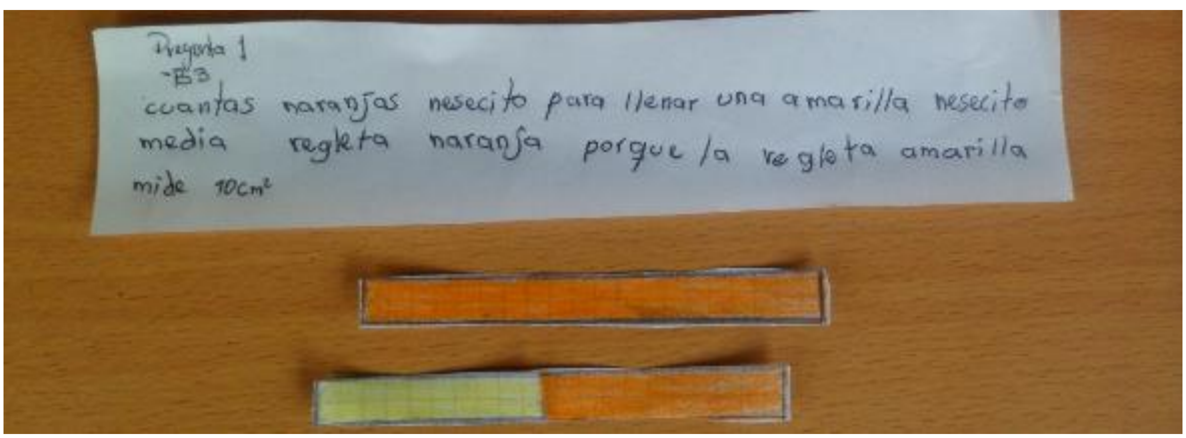


Figura 4.26 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 1. B3

El estudiante E2 toma una regleta amarilla y la pone al lado de la naranja, gestualizando sobre no saber que hacer, cuenta los cuadros pero se nota confundida, decide tomar otra amarilla para igualar la naranja.

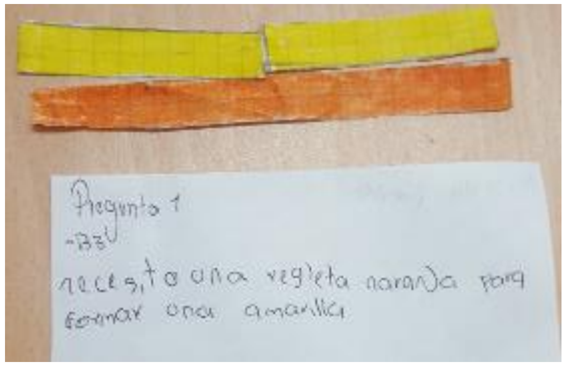


Figura 4.27 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 1. B3

El estudiante E3 en esta pregunta no pasa de lo continuo a lo discreto como se puede observar en la figura 4.28

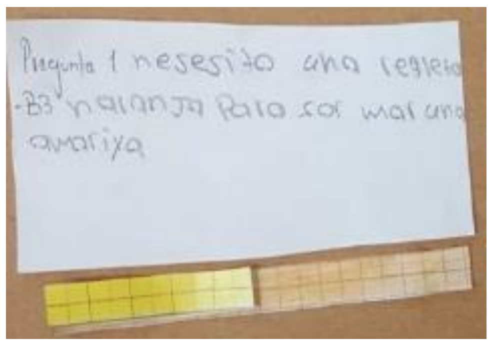


Figura 4.28 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 1. B3

El estudiante E4 toma la regleta amarilla sobre la naranja y sin dudarlo da la respuesta esperada en el *A priori.*

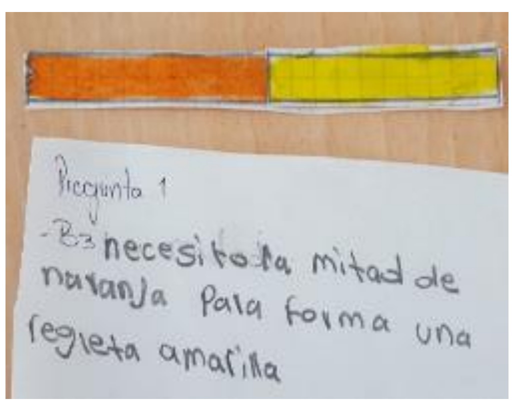


Figura 4.29 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 1. B3

Este estudiante E5 al tomar las regletas y poner una sobre la otra gesticuliza sobre no saber que hacer o decir, mira las demas regletas y concluye que no se puede.

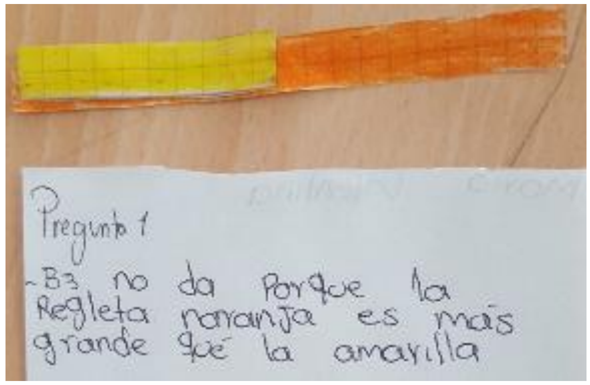


Figura 4.30 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 1.B3

Pregunta 1. C

Con base en los ejercicios anteriores se pretendía que los estudiantes observaran la relación que hay entre la regleta blanca y la roja, y establecieran su diferencia de parte a un todo. En esta pregunta los estudiantes 2, 3, 4 y 5 al comparar ambas regletas ya construyen una nueva Acción donde identifican una fracción desde objetos concretos, basados en la repetición de los ejercicios anteriores.

El estudiante E1 concibe la diferencia entre las regletas en terminos de la unidad de medida.

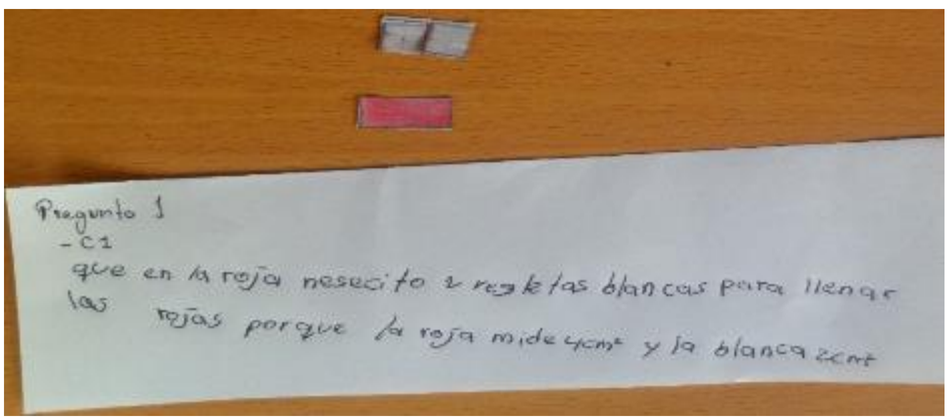


Figura 4.31 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 1. C1

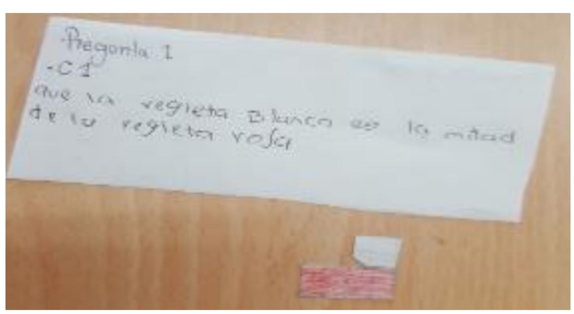


Figura 4.32 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 1. C1

Figura 4.33 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 1. C1

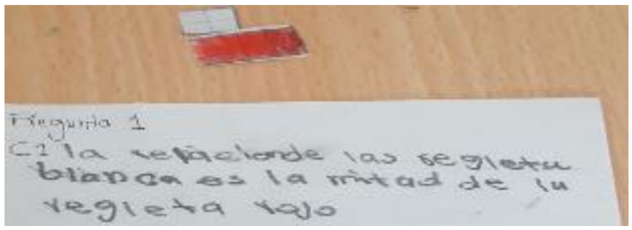


Figura 4.34 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 1. C1

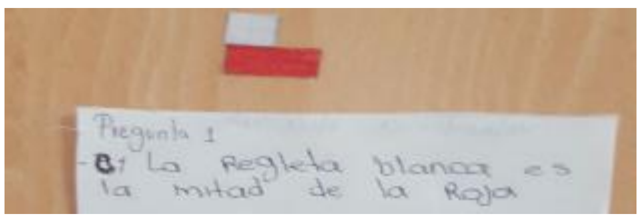


Figura 4.35 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 1. C1

Pregunta 2.A1

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes observaran e identificaran la relación parte todo entre las regletas blancas y azules. Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 llegaron a la misma respuesta despues de rellenar la regleta azul con 9 regletas blancas.

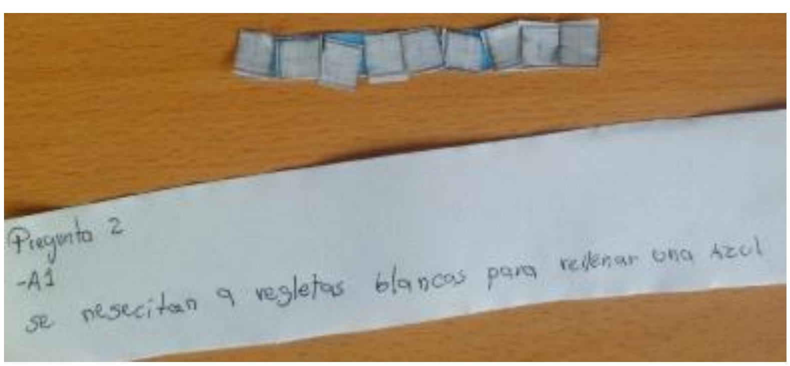


Figura 4.36 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2. A1

Figura 4.37 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 2. A1

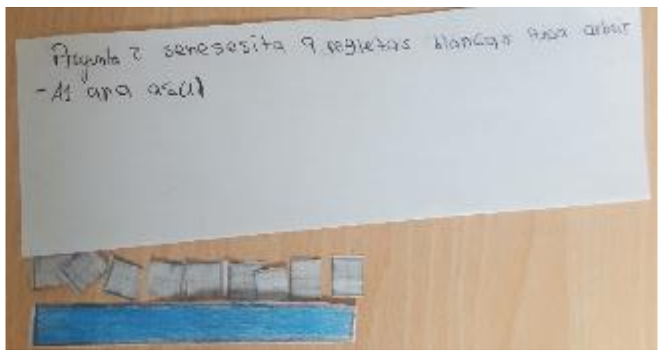


Figura 4.38 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 2. A1

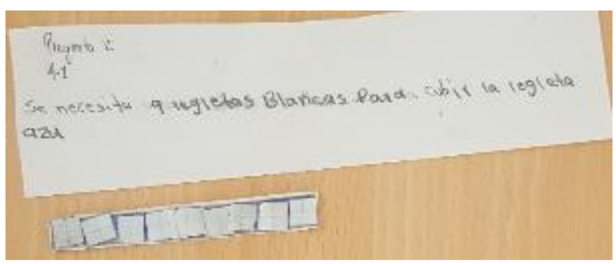


Figura 4.39 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 2. A1

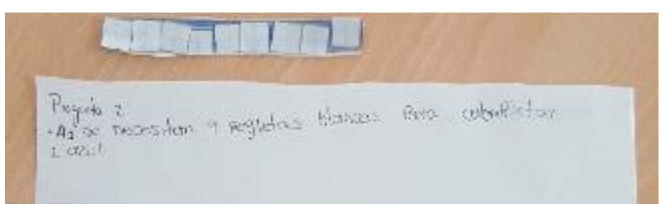


Figura 4.40 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 2. A1

Pregunta 2. B1

Para esta pregunta se esperaba que los estudiantes con las Acciones anteriormente construidas, establecieran una reación entre la parte concreta y la matematica, especificamente expresarse con fracciones.

Los estudiante E1 y E3 expresa verbalmente que la regleta azul es 9 veces mayor que la blanca y lo expresab matemáticamente como neve novenos come se ve en las figuras 4.42

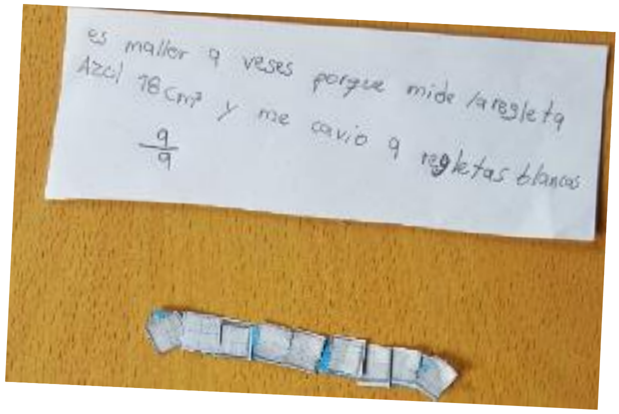


Figura 4.41 respuesta del estudiante E1 a la pregunta 2. B1

El estudiante E2 responde verbalmente que la regleta azul es 9 veces mayor que la regleta blanca y en la figura 4.42 se ve como lo expresó matemáticamente.

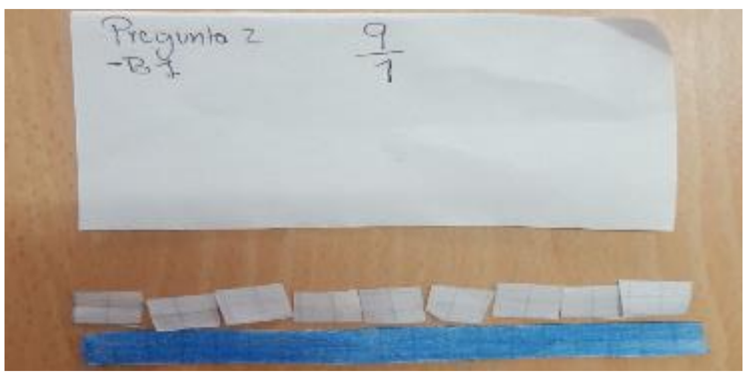


Figura 4.42 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 2. B1

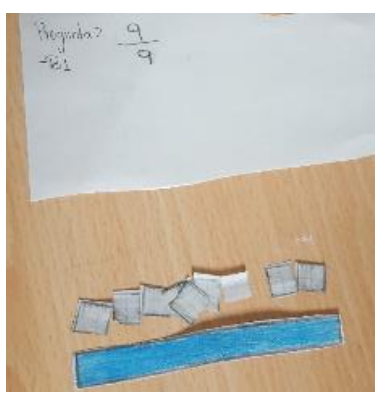


Figura 4.43 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 2. B1

Los estudiante E4 y E5 expresan verbalmente que la regleta azul es 9 veces mayor que la regleta blanca y por es le da un noveno, porque es una azul y 9 blancas.

Figura 4.44 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 2. B1

Figura 4.45 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 2. B1

Pregunta 2. B2

En esta pregunta se esperaba que relacionaran la respuesta al ejercicio anterior y la respuesta fuera opuesta, ya que en la anterior van del todo a las partes y en esta pregunta debieron ir de las partes al todo. Los estudiante E1, E3, E4 y E5 llegaron a concluir que la regleta blanca es $\frac{1}{9}$ de la regleta azul.

El estudiante E1 analiza la pregunta desde la medida de cada regleta y concluye lo que se ve en la figura 4.46

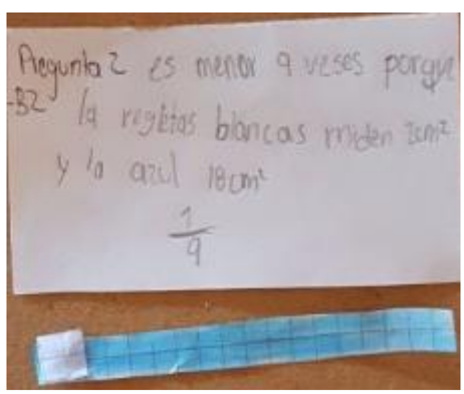


Figura 4.46 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 2. B2

El estudiante E2 dio la misma respuesta que en la pregunta anterior, porque siempre tuvo como referencia de unidad a la regleta azul.

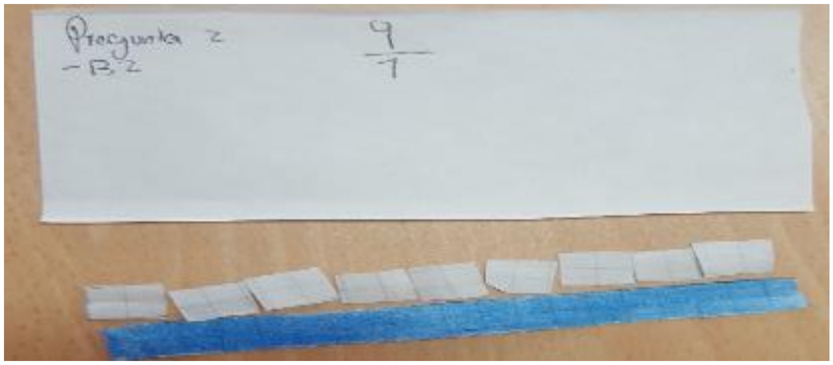


Figura 4.47 respuesta del estudiante E2 a la pregunta 2. B2

La respuesta del estudiante E3 se diferencio de la anterior que solo tuvo en cuenta una regleta blanca, la relacionarlo con la palabra menor y por eso dijo verbalmente que le daba un noveno.

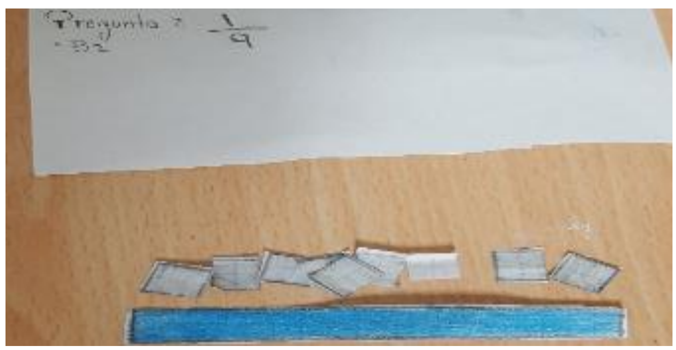


Figura 4.48 respuesta del estudiante E3 a la pregunta 2. B2

El estudiante E4 manifiesta que una regleta blanca solo es una vez menor con respecto a la regleta azul y por la respuesta que se ve en la figura #4.49

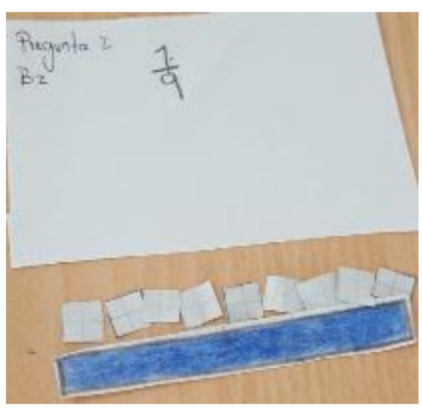


Figura 4.49 respuesta del estudiante E4 a la pregunta 2. B2

El estudiante E5 manifestó que la regleta blanca es nueve veces menor que la regleta azul y por eso se expreso matematicamente como se ve en la figura 4.50

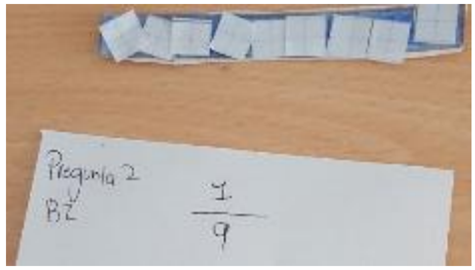


Figura 4.50 respuesta del estudiante E5 a la pregunta 2. B2

Pregunta 3. A1

Para esta esta pregunta los estudiantes tenían que traer a colación Acciones anteiormente aplicadas sobre objetos concretos especificamente las regletas, ya que debían establecer relaciones no solo entre dos regletas diferentes, sino contemplar las propiedades de tres regletas diferentes.

Al observar las regletas el estudiante E1, E2 y E3 expresan verbalmente que necesita tres paquetes de e regletas blancas para cubrir la regleta azul, y matemáticamente lo expresa como se ve en la figura 4.51

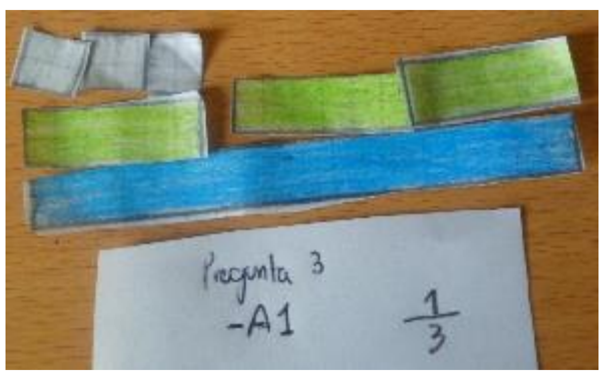


Figura 4.51 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 3. A1

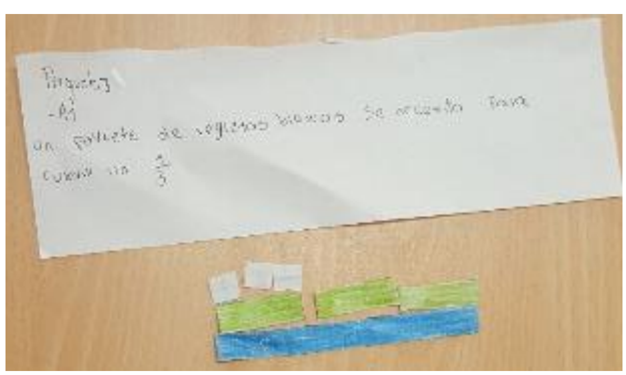


Figura 4.52 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 3. A1

El estudiante E3 expresa verbalmente que se necesitan tres tercios de paquetes de 3 regletas blancas para cubrir regleta azul, lo expresa matemáticamente como se ve en la figura 4.53

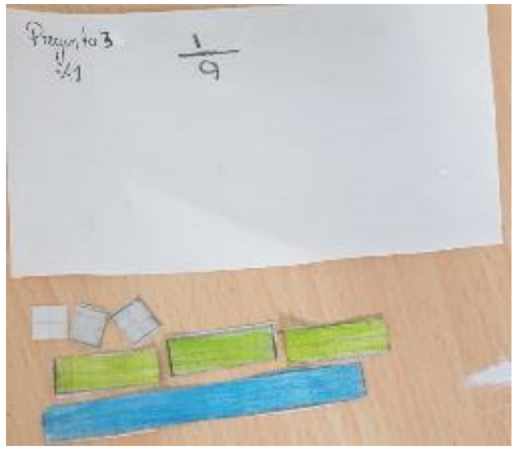


Figura 4.53 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 3. A1

El estudiante E4 expresa verbalmente que se necesitan 3 paquetes de 3 regletas blancas para cubir la regleta azul y expresa que un paquete de regletas blancas equivale a un noveno de la azul y lo expresa como se oberva en la figura 4.54

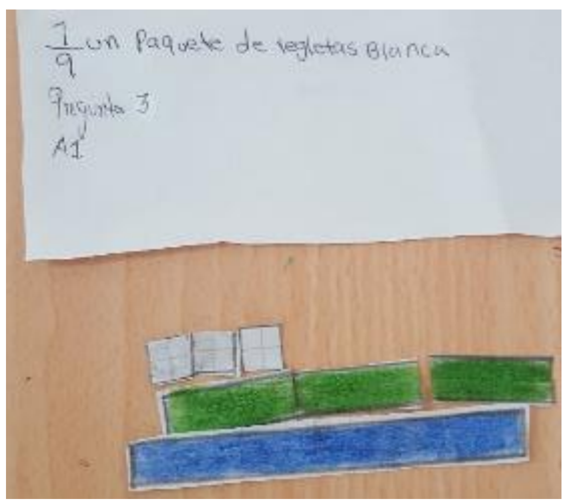


Figura 4.54 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 3. A1

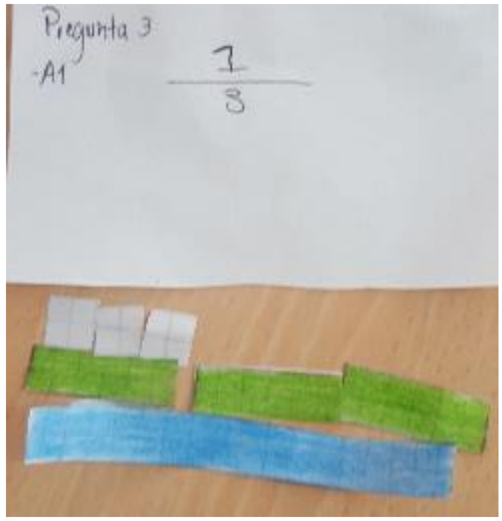


Figura 4.55 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 3. A1

Pregunta 3. A2

El objetivo de esta pregunta era que los estudiantes identificaran la relación proporcionalidad (equivalencia de fracciones) que hay entre un paquete de 3 regletas blancas y la verde clara.

El estudiante E1 expresa de forma verbal que si se pone el paquete de regletas blancas encima del verde claro la cubre totalmente, en el momento de expresarlo matemáticamente se toma su tiempo, hace conteo con el dedo y responde como se observa en la figura 4.56

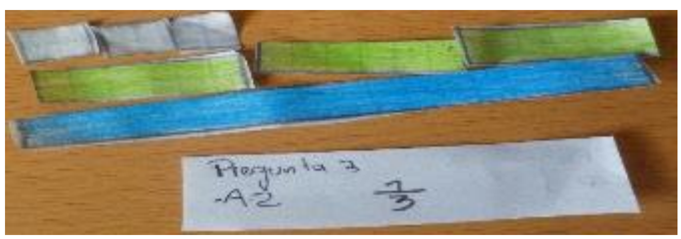


Figura 4.56 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 3. A2

El estudiante E2 dice que el paquete de regletas blancas es igual de igual tamaño a la regleta blanca y que el paquete blanco es un tercio y la verde es tres tercios y lo expresa como se ve en la figura 4.57

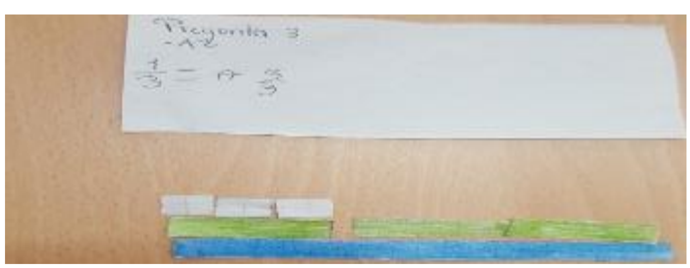


Figura 4.57 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 3. A2

El estudiante E3 dice que la relación que hay entre el paquete de regletas blancas y la verde es que son lo mismo, porque la verde tiene tres y el paquete de blancas también, y serían un tercio y otro tercio de la regleta azul. Aunque la pregunta solo involucra las regletas blancas y verdes, el E3 hace uso de la actividad anterior para resolver esta pregunta.

Figura 4.58 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 3. A2

El estudiante E5 estableció de forma verbal que cada regleta blanca era un tercio de la verde, al momento de expresarlo de manera matemática escribe que nueve tercios porque cabían 9 veces en las regletas verdes claras. Esto lo argumentó si realizar algún movimiento con las regletas, solo lo realizó a traves de imágenes mentales.

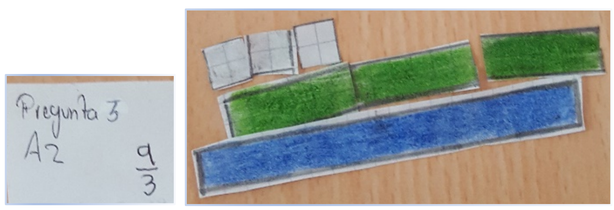


Figura 4.59 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 3. A2

El E5 manifiesta que el paquete de reglestas blancas y la verde clara son equivalentes, al expresarlo matemática no lo refleja como se ve en la figura 4.60

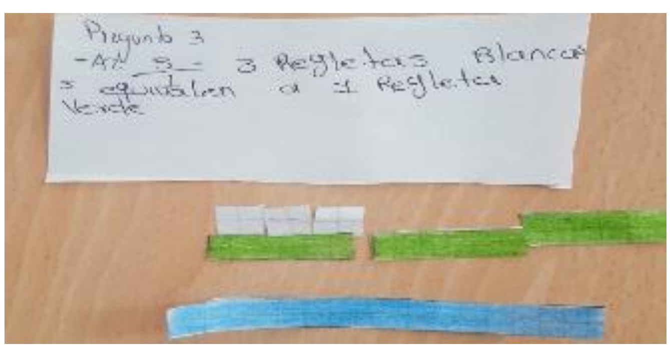


Figura 4.60 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 3. A2

Pregunta 3. B1

Los estudiantes en esta pregunta tenían que manipular los paquetes de 3 regletas blancas y sumarlos entre si (suma de fracciones homogéneas) para luego expresarlo matemáticamente. Los estudiante E1 y E2 resuleven la pregunta de la forma esperada en el *A priori* planteado.

El estudiante E3 responde: que si se pueden sumar los 3 paquetes de regletas blancas, porque cada regleta blanca es un noveno, entonces el paquete será tres novenos, entonces se sumarían y darían novenos, todo esto lo expreso sin realizar ningún trabajo con las regletas y sin escribirlo de manera matemática, demostrando que fue un proceso mental, dando cuenta de una Interiorización de las Acciones anteriormente construidas.

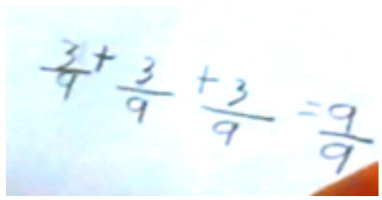


Figura 4.61 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 3. B1

El estudiante E2 toma los tres paquetes de regletas blancas y las ubica al lado de las tres verdes claras y responde que si se pueden sumar, que cada paquete respresenta tres tercios y al realizar la suma, lo hace como se observa en la figura 4.62

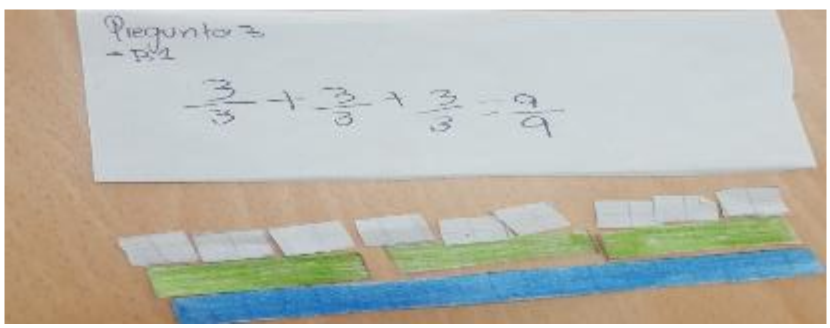


Figura 4.62 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 3. B1

EL estudiante E3 iguala la regleta azul con tres paquetes de tres regletas blancas y responde que si se puede sumar y que lo haría escribiendo tres raya nueve, más tres raya nueve y así, lo expreso matemáticamente como se ve en la figura 4.63

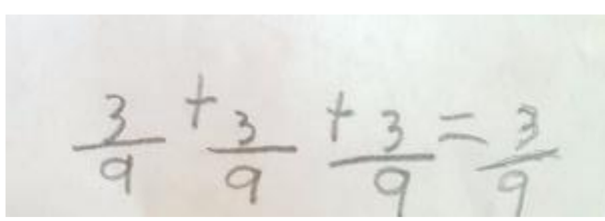


Figura 4.63 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 3. B1

El Estudiante E4 separa los tres paquetes de regletas y los suma verbalmente diciendo “tres más tres es tres novenos más otros tres da 3 novenos”, al momento de la expresarlo matemáticamente cambia la respuesta como se observa en la figura 4.64

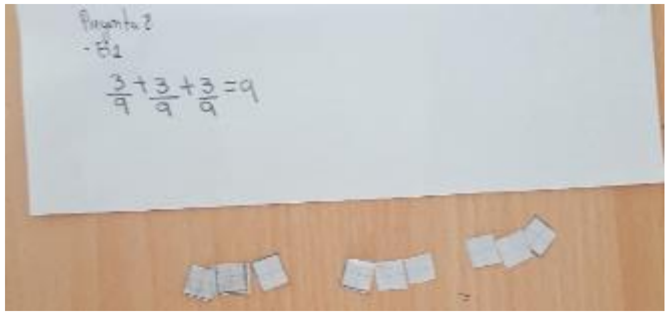


Figura 4.64 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 3. B1

El estudiante E5 iguala los tres paquetes con la regleta azul, expresa de manera verbal que si se pueden sumar tomando las regletas blancas como una unidad cada una y lo expresa matemáticamente como se ve en la figura 4.65

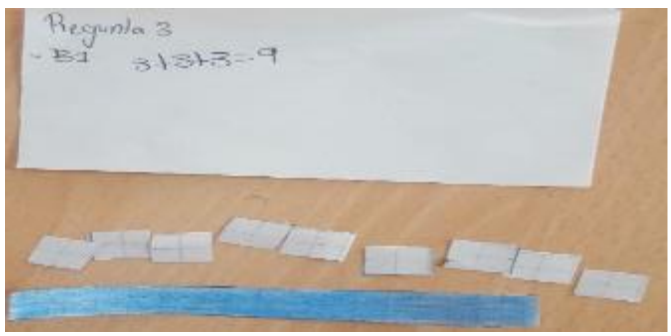


Figura 4.65 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 3. B1

Pregunta 3. B2

Para está actividad los estudiantes debían realizar una suma entre un paquete de regletas blancas y una regleta verde, expresadas como fracciones serían heterogéneas, pero son equivalentes y podían realizar una conversión con las regletas.

El estudiante responde verbalmente que si puede sumarlas, pero al momento de escribirlo en el papel se nota confundido, escribe un noveno y para, sigue pensando en como sumar la regleta verde, pero al final termina sumando las tres regletas blancas, se puede observar el procedimiento en la figura 4.66

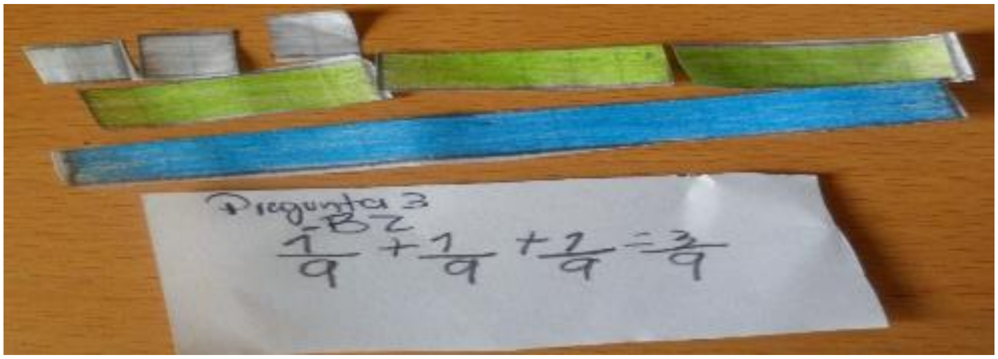


Figura 4.66 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 3. B2

El estudiante E2 observa un paquete de regletas blancas y la regleta verde clara y responde que no se pueden sumar, cuándo se le pide que argumente por qué o se puede sumar, se queda pensando un tiempo y largo y dice que no sabe.

Figura 4.67 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 3. B2

El estudiante E1 toma el paquete de tres regletas blancas y dice "acá hay tres regletas blancas y como una regleta verde puede dar 3 porque vea" y las coloca una al lado de la otra "entonces serían tres novenos" y los suma como se nota en la figura . Esta respuesta muestra la construcción de una Acción en dónde el niño es capaz de transformar mentalmente la regleta Verde clara que representa $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{9}$ que es lo que representa el paquete de 3 regletas blancas respecto de la regleta azul y asi poder sumarlas.

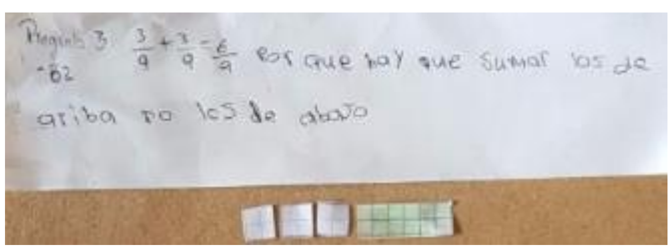


Figura 4.68 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 3. B2

El estdiante E4 responde que si se pueden sumar y coloca el paquete blancas al lado de la verde clara y expresa que sumaría un noveno y un tercio, así como lo muestra la figura 4.69 Pero en el momento de expresarlo matemáticamente lo hace totalmente diferente, como se observa en la figura 4.69

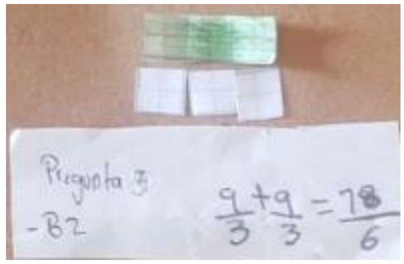


Figura 4.69 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 3. B2

El estudiante E5 toma la regleta verde claro y la pone al lado del paquete de 3 regletas blancas y las suma con numeros enteros como se observa en la figura 4.70 . Luego se le pregunta si podría hacerlos con números fraccionarios y responde que no, porque son diferentes (fracciones heterogéneas).

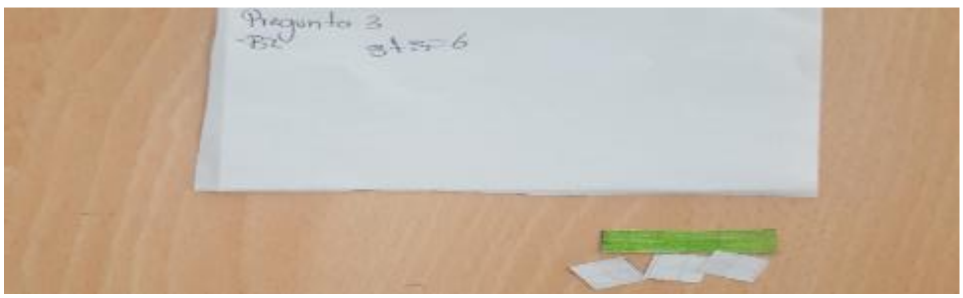


Figura 4.70 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 3. B2

Pregunta 4

En esta pregunta se continúa el trabajo con Acciones sobre objetos concretos especificamente con sectores circulares, como se expresó en el análisis *A priori* dónde se retoman la experiecias que los sujetos adqeires cuando manipulan los objetos concretos Arnon et al., (2014).

Pregunta 4. A

Los estudiantes debían identificar en esta pregunta cada sector a que parte de la unidad correspondía. En esta pregunta los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 respondieron de la misma forma que era lo que se esperaba en el *A priori* que cada uno tomara el circulo completo, contara sus partes e identificara cada sector a que parte de la unidad correspondía, así lo hicieron identificando $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$

Pregunta 4. B

En esta pregunta los estudiante tenían que tomar un sector de los más grandes y con sectores más pequeños pero de igual tamaño, lo cubriera totalmente (fracciones equivalentes). Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 cumplieron con el objetivo de la pregunta y responden como se tenía estimado en el a priori, dando cuenta del trabajo realizado anteriormente con las regletas y establece ciendo esas experiencias fisicas y lógico matemáticas expresadas en Arnon et al., (2014).

El estudiante E1 toma el sector correspondiente a $\frac{1}{2}$ y luego toma sectores corespondiente a $\frac{1}{12}$ hasta cubrierlo totalmente quedando congruentes. Y lo escribió en forma de fracción como se muesta en la figura 4.71

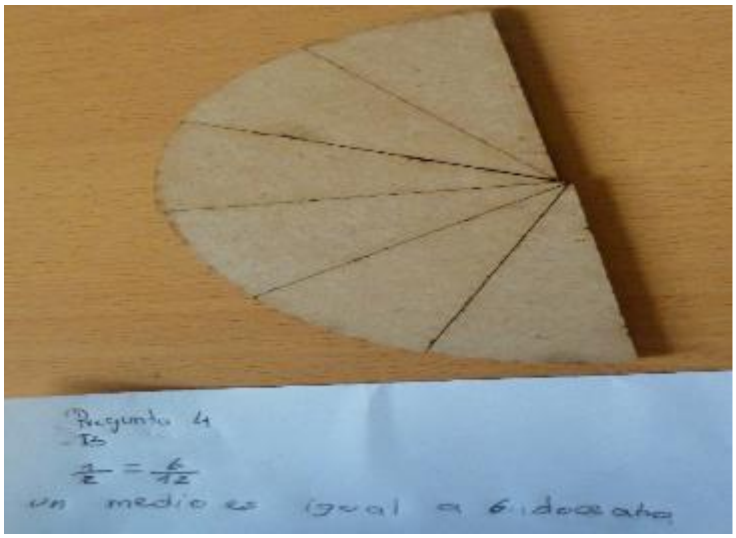


Figura 4.71 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 4. B

El estudiante E2 toma el sector correspondiente a $\frac{1}{2}$ y luego toma tres sectores juntos correspondientes cada uno a $\frac{1}{6}$ y lo expresa como puede observarse en la figura 4.72

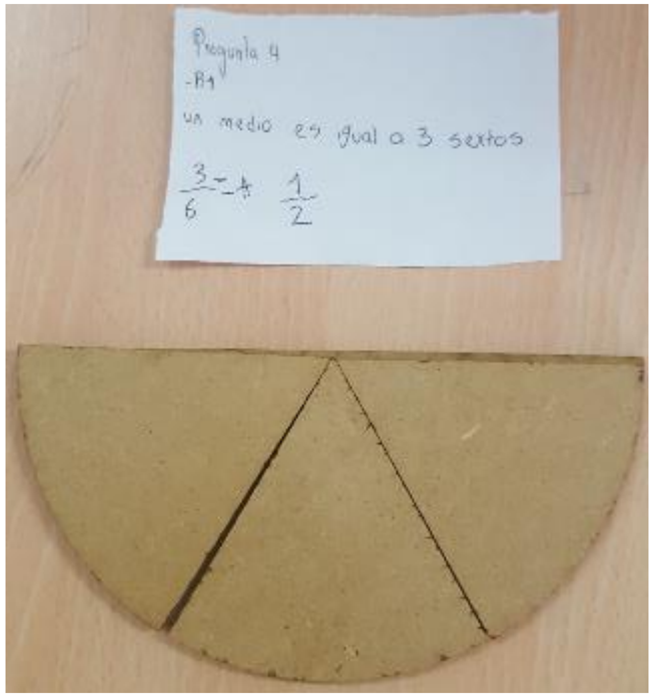


Figura 4.72 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 4. B

El estudiante E3 toma como sector más grande el correspondiente a $\frac{1}{3}$ y luego toma uno a uno los sectores correspondientes a $\frac{1}{12}$ y los va colocando encima hasta que lo cubre totamente y quedan congruentes. Lo expresa de manera matemática como se muestra en la figura 4.73

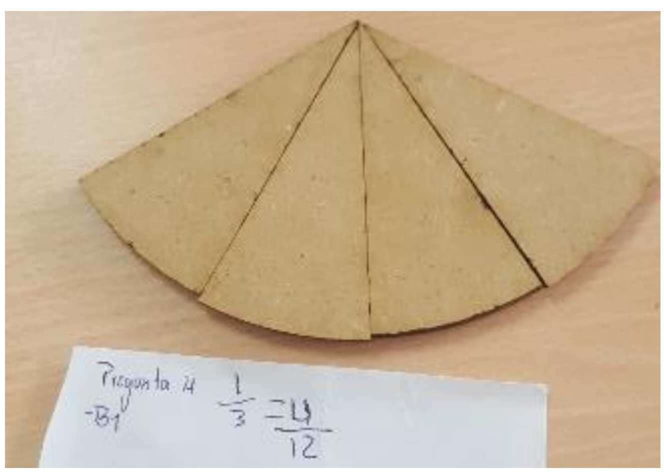


Figura 4.73 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 4. B

El estudiante E4 el sector correspondiente a $\frac{1}{2}$ y luego toma sectores correspondientes cada uno a $\frac{1}{2}$ y expresa el procedimiento como puede observarse en la figura 4.74

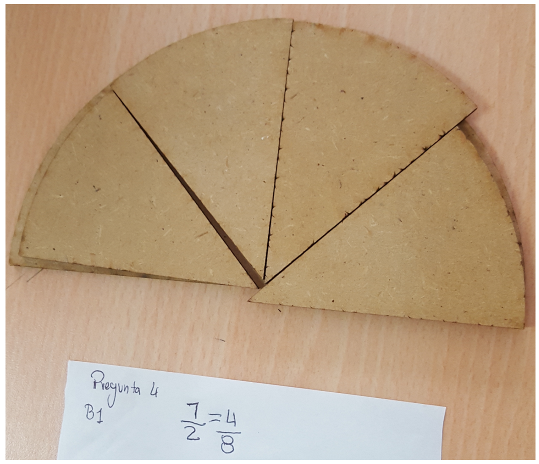


Figura 4.74 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 4. B

El estudiante E5 toma como sector mayor $\frac{1}{3}$ y lo cubre con sectores de $\frac{1}{12}$ que va poniendo uno a uno hasta cubrirlo. Luego lo expresa como se ve en la Figura 4.75

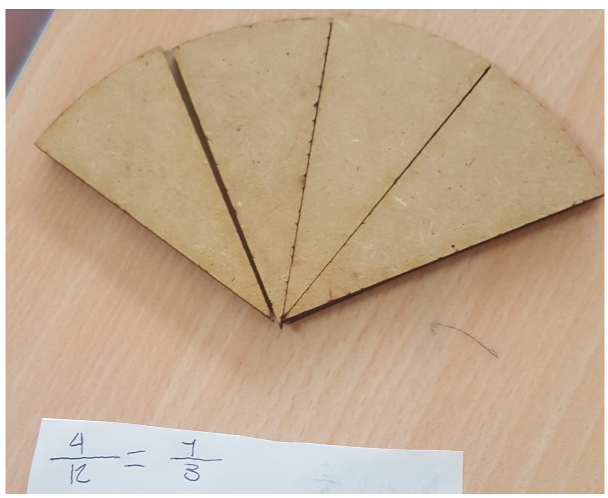


Figura 4.75 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 4. B

Pregunta 4. C

Para está pregunta necesariamente los estudiantes debían tomar el sector mayor que eligieron para la pregunta anterior y sumarlo con los sectores mas pequeños con los cuales lo igualaron. Las respuestas de los estudiantes E1, E2 y E5 estuvieron basadas en expresar la suma mediante la unión de los sectores circulares más no en la suma algoritmica de las fracciones.

El estudiante E1 toma el sector de $\frac{1}{2}$ y lo une con los 6 sectores de $\frac{1}{12}$ formado un circulo completo y expresandolo matemáticamente como muesta la figura 4.76

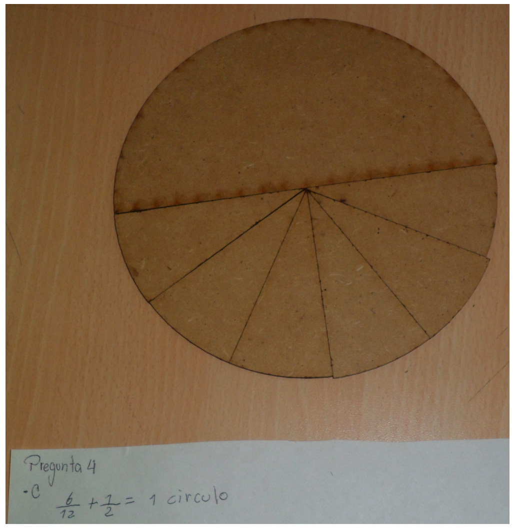


Figura 4.76 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 4. C

El estudiante E2 tomo el sector mayor y lo unió con los dos menores, expresa de forma verbal que la suma de estos le da 36 porque son tres doceavos y tres veces 12 le dan 36 y lo expreso matemáticamente como se observa en la figura 4.77

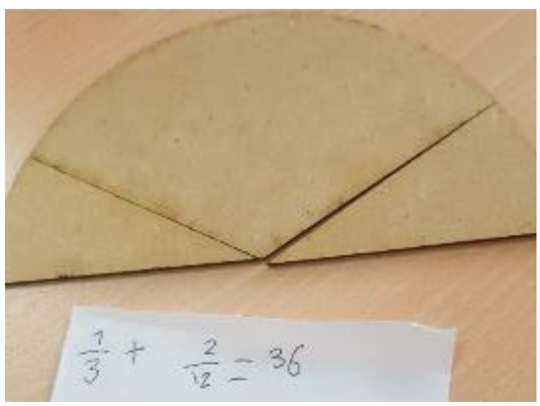


Figura 4.77 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 4. C

El estudiante E3 responde que si se pueden sumar, toma el papel y escribe la suma de las fracciones que para el represetan los sectores utilizados para responder la pregunta anterior, al sumarlos suma los numeradores y le da 2 y para sumar los denominadores se toma su tiempo y expresa que no se pueden sumar por que son diferentes, pero al final pone un dos, argumentando que abajo también debe ir un número.

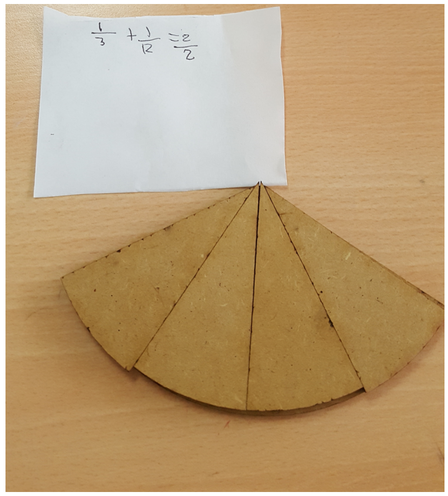


Figura 4.78 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 4. C

El estudiante E4 dice que si se pueden sumar y lo realiza sobre el papel, donde cambia la fracciones que había representado en la igualdad de la pregunta anterior, como puede notarse en la figura 4.79

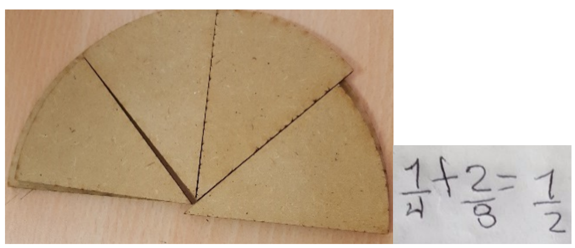


Figura 4.79 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 4. C

El estudiante E5 manifiesta después de unir los sectores utilizados para la pregunta anterior como se muestra en la figura 4.80 que no se pueden sumar porque son de diferentes tamaños.

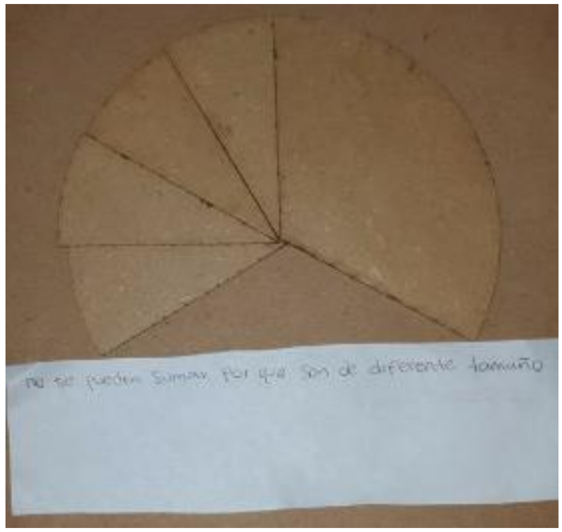


Figura 4.80 respuesta del estudiante E5 para la pregunta 4. C

Pregunta 5

En esta pregunta se tenía el ojetivo de que los estudiantes construyeran una Acción nueva sumando sectores circulares de diferentes tamaños de manera que como resultado les diera igual que el sector $\frac{1}{2}$ de dos formas diferentes. Los estudiantes E1, E4 y E5 toman sectores de diferente tamaño al azar, todos menores a $\frac{1}{2}$ y los juntan tratando de encontrar los que le den un medio como resultado y todos los logran y lo expresan matemáticamente mediante una suma de fracciones.

Figura 4.81 respuesta del estudiante E1 para la pregunta 5

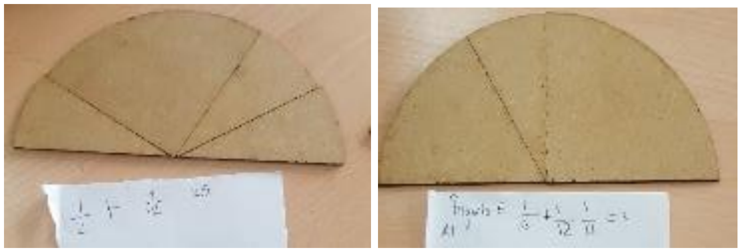


Figura 4.82 respuesta del estudiante E2 para la pregunta 5

El estudiante E3 después de mucho intentos solo logro construir un medio con regletas de diferentes tamaños y a pesar de que en la instrucción se les mostró una imagen como ejemplo no representó matemática de forma adecuada.

Figura 4.83 respuesta del estudiante E3 para la pregunta 5

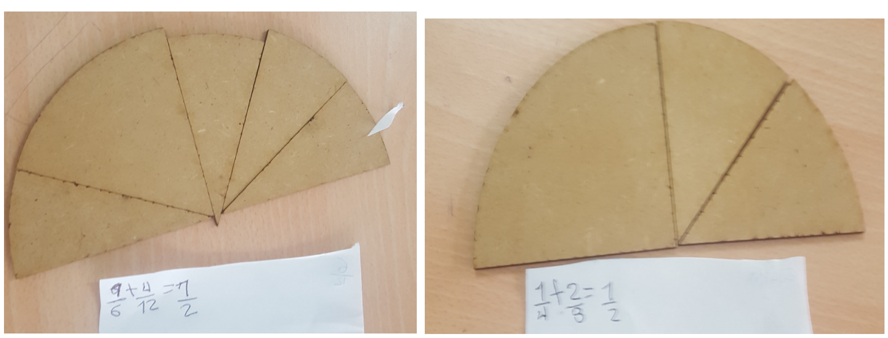


Figura 4.84 respuesta del estudiante E4 para la pregunta 5

Figura 4.85 respuestas del estudiante E5 para la pregunta 5

Pregunta 6

Esta pregunta se les aplicó a los estudiantes E1, E2 y E5 con el fin de constatar si con la repetición de Acciones anteriores lograban resolver dos situaciones problemas, evocando la practica con los objetos concretos.

Pregunta 6. A

Los estudiantes debían resolver la siguiente situación problema:

María se gastó $\frac{1}{8}$ del dinero que le dio su abuelo de cumpleaños en comprar un libro de aventuras, y también se gastó $\frac{4}{8}$ de ese dinero en comprar una bolsa de dulces ¿Qué Fracción del dinero se gastó María? Las respuestas de los estudiantes E1, E2 y E5 fueron las esperadas en el análisis *A priori* evidencian una interiorización de las Acciones construidas con anterioridad evocando la manipulación de los objetos concretos (regletas de Cuisenaire y los sectores circulares) ya que al momento de sumar fracciones homogeneas, lo hacen sumando los numeradores y dejando el denominador igual.

$$\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

Figura 4.86 respuestas del estudiante E1 para la pregunta 6. A

$$\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

Figura 4.87 respuestas del estudiante E2 para la pregunta 6. A

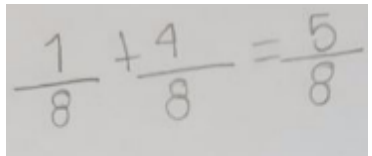


Figura 4.88 respuestas del estudiante E5 para la pregunta 6. A

Pregunta 6. B

Martha tiene un pastel y lo parte en ocho rebanadas, Juan se comió 5 rebanadas y José se comió 2 rebanadas, ¿qué parte del pastel se comieron entre Juan y José? Exprésalo en fracciones. En esta pregunta no se nota una evocación de las experiencias Físicas y lógico matemáticas vividas a través de los objetos concretos.

El estudiante E1 evidencia en esta respuesta un error en la cosntrucción del algoritmo de la fracción, intercambiando el numerador con el denominador.

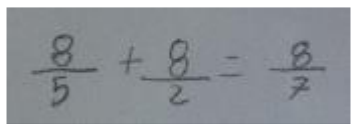


Figura 4.89 respuestas del estudiante E1 para la pregunta 6. B

El estudiante E3 a pesar de que se le indicó que expresara en fracciones la solución a la situación planteada, su respuesta inicial fue con números enteros. Cuando vuelve a leer la situación problema se da cuenta que debe expresarlo en fracciones, pero toma las rebanadas comidas por ambos personajes y pone uno de los número en el denominador y el otro en el numerador, finalmente realiza la suma que vemos en la figura 4.90

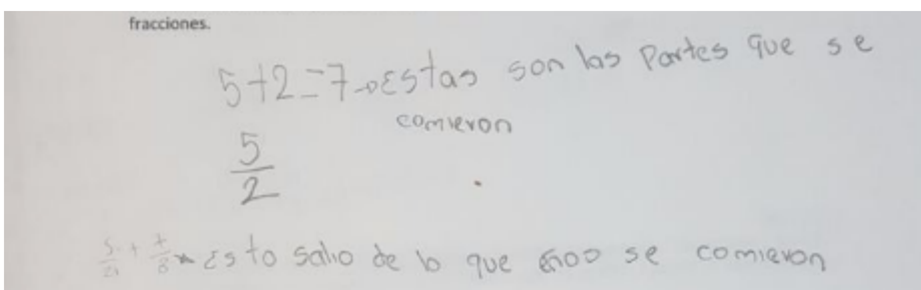


Figura 4.90 respuestas del estudiante E2 para la pregunta 6. B

La estudiante E5 extrae los datos que identifica en la situación problema como se muestra en la figura 4.93, no realiza la operación esperada en el *A priori.*

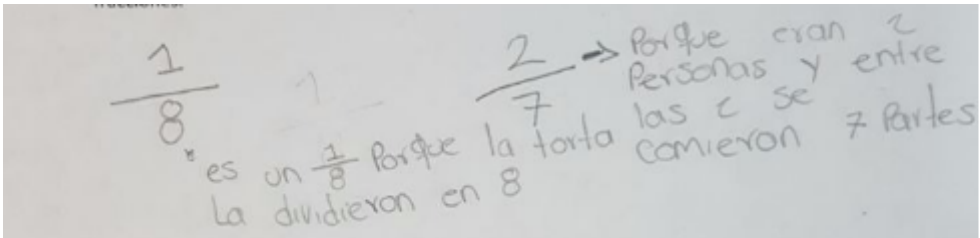


Figura 4.91 respuestas del estudiante E5 para la pregunta 6. B

4.1.1 Análisis de los datos

Con base en la entrevista aplicada anteriormente, se trae a colación observaciones importantes en las construcciones y mecanismo presentados por los estudiantes, analizados desde los antecedentes como los niños a partir del trabajo con objetos concretos logran dimensionar la fracción no cómo dos números naturales diferente Baltazar y Valdemoros (2017), sino que contemplan la fracción como un solo número (racional) que puede ser representado por una parte de un todo.

En los datos arrojados en la P1. A3 se especifica la información relacionada con aspectos la DGH; en donde después que los estudiantes aplicaron una Acción sobre un material concreto creado por ellos mismos, y haciendo comparaciones entre ellas observando una relación de congruencia y asignando un valor numérico a ésta, pasando de un proceso concreto a uno abstracto.

Otro aspecto evidenciado por los estudiantes es la repetición de Acciones sobre los objetos concretos (regletas de Cuisenaire y sectores circulares) donde los estudiantes establecen de manera paulatina esa relación parte-todo, construyendo la noción de fracción y su adición.

El proceso de pasar de lo continuo a lo discreto y viceversa es más factible cuando los estudiantes han podido establecer diferentes Acciones sobre objetos concretos, como se encuentra en la Acción aplicada por los estudiantes E4 y E1 en la P1. B3, en donde hacen una división mental sobre un objeto concreto para solucionar una situación problema.

A medida que los estudiantes van aplicando Acciones sobre los objetos concretos las van *interiorizando* gradualmente, como se observa en las imágenes los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 dan cuenta de la equivalencia entre fracciones a partir de la comparación de objetos concretos, siempre teniendo como principal característica la congruencia entre los sectores.

Los estudiantes E1, E2 y E5 evocan una *interiorización* de Acciones incorrectas pasando a otras Acciones parcialmente correctas para finalmente aplicar Acciones correctas aplicadas a objetos concretos, dónde estos estudiantes a través de la repetición de acciones reflexionan sobre éstas y Construyen un Proceso sin necesidad de manipular un objeto concreto.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1 Conclusiones con base en la pregunta problematizadora.

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que debe desarrollar un estudiante de cuarto primaria sobre la noción de suma de fracciones?

Al revisar el análisis de datos se concluye que la implementación de una propuesta basada en el modelo cognitivo APOE, permite evidenciar una construcción mas detallada de un Objeto, en este caso la noción de suma de fracciones, que a través del manejo de material concreto los estudiantes pudieron estructurar Acciones evidenciadas en la comparación de las regletas de Cuisenaire y los sectores circulares. La repetición de éstas permitió observar una interiorización en los estudiantes de estas Acciones, mostrando un avance bastante significativo en su comprensión.

Los Procesos se destacaron en las relaciones que los estudiantes hacían del material concreto manipulado, en la abstracción que realizaban de estas tareas concretas llevándolas al campo de lo aritmético. Otro de los Procesos que construyeron los estudiantes y que permitió una comprensión importante sobre la equivalencia de fracciones a través de las comparaciones entre regletas de Cuisenaire y sectores circulares, observando como en las respuestas a las actividades, como contemplaban la equidad no como una igualdad, sino como una representación diferente de una misma fracción.

El trabajo con el material concreto ayudó a que los estudiantes concibieran una representación física desde lo concreto y una representación abstracta desde lo aritmético, como dos procesos complementarios y necesarios para adquirir conocimientos sobre las fracciones y su suma. De esto se destaca la necesidad de coordinar los dos Procesos en un único Proceso que, de paso a la encapsulación de la noción de la suma de fracciones, Objeto demostrable desde los concreto y lo abstracto.

Sobre la segunda pregunta de investigación ¿Qué implicaciones tiene el diseño de un modelo cognitivo sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de suma de fracciones para estudiantes de cuarto primaria? la implementación del modelo cognitivo en esta investigación permitió evidenciar el paso por las estructuras y mecanismos que los estudiantes construyen para llegar a la noción de suma de fracciones. Esto sustentado desde los resultados y análisis de datos, al observar desde la construcción de un material manipulable como las regletas de Cuisenaire y el trabajo con sectores circulares, donde establecieron relaciones por tamaño y forma, interiorizando un Proceso de equivalencia al cuál le dieron sentido desde lo observado en sus respuestas de la entrevista y que de manera secuencial lograron plasmar esas Acciones concretas representando de forma simbólica una serie de actividades contempladas desde lo abstracto, evidenciando una mayor apropiación y demostrando una comprensión significativa de la noción de suma de fracciones.

5.2 Conclusiones con base los objetivos

La creación de la unidad didáctica se crea a partir de la aplicación de la entrevista y el análisis de datos, que esta relación con el objetivo general de esta investigación: Analizar las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de cuarto primaria sobre la suma de fracciones cuando realizan la manipulación de material concreto para interiorizar Acciones (comparar, medir, entre otras) en Procesos mentales abstractos. Basado en un marco teórico cognitivo como APOE, se pudo analizar algunas estructuras mentales como las Acciones y los Procesos, que, observados e interpretados dentro de las prácticas de aula, generan espacios de producción autónoma de los estudiantes.

En cuanto a los objetivos específicos de esta investigación con la creación de la unidad didáctica se logró refinar la DG preliminar, a través del análisis e interpretación de los datos arrojados en la entrevista se contemplan las Estructuras y Mecanismos necesarios para la adquisición del concepto de noción de suma de fracciones. La manipulación del material concreto y las expresiones tanto orales como escritas por parte de los estudiantes, vislumbraron las estructuras y mecanismos construidas, arrojando resultados positivos en cuanto a que se valida la importancia de abordar un marco cognitivo como APOE, el cual permite observar detalladamente el proceso de aprendizaje de los estudiantes, pormenorizando así la dicotomía que se puede generar en ocasiones entre la enseñanza y el aprendizaje de una noción.

5.3 Conclusiones con base en el diseño y validación de la DG

La DG hipotética permite evidenciar, con las respuestas dadas por los estudiantes, las Acciones que ya tenían construidas, de igual forma por medio de la manipulación de los objetos concretos los estudiantes logran construir nuevas Acciones asociadas con: la relación entre la parte todo, la equivalencia entre fracciones que es vista por los estudiantes de grado cuarto como la misma representación de un todo a través de objetos con diferentes tamaños, el Proceso de noción suma de fracciones evocando lo anteriormente construido.

La aplicación de Acciones sobre objetos concretos demostró de forma clara las estrategias que utilizaron los estudiantes para solucionar las situaciones problema y de igual forma se pudo constatar la manera en que fueron construyendo Acciones nuevas, las cuales posibilitaron adquirir nuevos conocimientos y establecer relaciones entre éstos, así queda claro resaltar que sin la manipulación de esta clase de elementos sería difícil para mi como investigador poder establecer una ruta adecuada en la DG.

5.4 Conclusiones basadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje

La implementación de una unidad didáctica basada en un modelo cognitivo como APOE, apoyada en la manipulación de material concreto, es una herramienta que da la posibilidad al docente de cualificar su proceso de enseñanza, brindándole estrategias para observar la forma en que aprenden los estudiantes, dándole sentido a las expresiones (corporales, gestuales y escritas) dadas por estos, asimismo como la creación de una ruta clara que guiará a los educandos a construir conceptos y nociones con sentido, de igual manera abre la posibilidad de refinar ese camino metodológico que apunta al alcance de unas competencias básicas y mejoramiento de la calidad educativa.

Con la experiencia obtenida en esta investigación se sugiere que en posteriores investigaciones se permitan dar uso a objetos concretos como las regletas de Cuisenaire y los sectores circulares, los cuáles permiten observar la forma en que los estudiantes van creando algunas estructuras y mecanismos, que de modo oral o escrito no podrán expresar con precisión. Así para el investigador serámn herramientas de análisis con resultados objetivos.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer Science.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society

Baltazar, C. y Valdemoros, M. (2017). La reflexión como vía de aprendizaje de las fraciones. En L. Serna, (Ed) *Acta Latino Americana de Matemática Educativa* 30, 403– 411.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.

Campos, V. (2017). Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de algebra lineal: una mirada desde la teoría APOE. Tesis de maestría no publicada. Ciudad de México, México.

Día E. Recuperado el 4 de mayo de 2017 de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/siemprediae.

Dubinsky, E. (1996), "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria", Educación Matemática, 8 (3), 24-41.

Dubinsky, E (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95- 126.

Fandiño, M. I. (2005). Le frazioni, aspetti concettuali e didattici. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italia.

Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria. Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1

Estrategias en Matemáticas 4 (2010). Editorial, Libros & Libros S.A. Bogotá, Colombia.

Gamboa, M. (2013). Construcción cognitiva de la raíz cuadrada una mirada desde la teoría APOE. Tesis de maestria no publicada. Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.

Graeber, A., & Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice teachers' performance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 263-280.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), agosto, 65-89.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). Fracciones: la relación parte-todo. Sevilla: Síntesis.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1997). Fracciones (Vol 4). Madrid: Editorial Síntesis.

Londoño, N., Kakes, A. Llanes, J. (2015). *Dificultades en conceptos matemáticos que impliquen el uso de fracciones.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 230-237). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Matemáticas Edición Especial, Proyecto sé 5. Ministerio de Educación Nacional (2012). Bogotá Colombia.

Mena, A. (2011). Estudio Epistemológico del teorema del isomorfismo de Grupos. Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México.

Obando, G (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte – todo. Revista EMA, 8(2), 157-182.

Parraguez, M. (2009). Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial. Tesis para obtener el grado de Doctora en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria, Tesis Doctoral. Mexico: Cinestav Matemática Educativa.

Piaget, J. (1964). Desarrollo cognitivo en niños: desarrollo y aprendizaje. *Revista de investigación en enseñanza de la ciencia*, 2, 176-186.

Piaget, J. (2001). Studies in Reflecting Abstraction. 1-27 y 303-322, New York, EE. UU: Taylor and Francis.

Piaget, J. y García, R. (1982) Psicogénesis e Historia de la Ciencia, Editorial Siglo XXI: México.

Rico, L. (1995) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo editorial Iberoamérica.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(1), 89-112.

Saunders R. y Binsham A. (1984). Perspectivas Piagetianas en la Educación Infantil. Ministerio de Educación y Cultura. Madrid. Ed. Monta (pp. 142)

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. Journal for Research in Mathematics Education, 24, 233-254

Salas, J. (2012). *Resignificación de la suma de fracciones.* En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 982-990). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Stewart, I. (2007). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Grupo Planeta.

Valverde, G. (2017) Desarrollo de la competencia matemática de futuros docentes de educación primaria. En L. Serna, (Ed) *Acta Latino Americana de Matemática Educativa* 30, 1199 – 1207

Valdemoros, M. E. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: estudio de casos. *Educación Matemática 13* (1), 51–67.

Yin, R. K. (1984/1989). Case Study Research: Design and Methods, Applied social research Methods Series, Newbury Park CA, Sage