RESIGNIFICACIÓN DE LA PROPORCIÓN DIRECTA EN ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO DE BÁSICA SECUNDARIA

JUAN GABRIEL FLÓREZ LONDOÑO

LEÓN DARÍO LONDOÑO ECHAVARRÍA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICAS

DIRECTORES DE TESIS

JAVIER SANTOS SUÁREZ ALFONSO

LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2019

AGRADECIMIENTOS

El equipo de trabajo quiere reconocer, exaltar y felicitar al Doctor Luis Albeiro Zabala por su apoyo, acompañamiento y disposición para la realización de este proyecto.

Al docente Javier Santos Suarez por sus acertadas apreciaciones.

A la cohorte 24 con los cuales el proceso fue ameno y fructífero.

A Viviana García por su constante apoyo, cariño incondicional y amor motivante.

A nuestras familias, compañeros y amigos que aportaron incondicionalmente al desarrollo de este trabajo.

A las Becas de Excelencia Docente del Ministerio de Educación Nacional de Colombia a través de la cual fue posible la realización de este trabajo.

A nuestros estudiantes… sin los cuales todo esto no tiene sentido.

RESUMEN

En el siguiente trabajo se analizan las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Proporción Directa –PD– al diseñar e implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa –TSME– como intervención a la problemática presentada en estudiantes de dos Instituciones Educativas de la ciudad de Medellín, según los resultados en la prueba Saber 9°, para el mejoramiento de las prácticas de aula y la construcción de conocimiento funcional en estudiantes del grado Octavo de Básica Secundaria.

Se desarrolla una metodología basada en el Estudio de Caso basado en Stake (2007) y una indagación de los aspectos históricos y epistemológicos de la PD como objeto matemático de interés debido a su transversalidad en todos los ciclos escolares como se observa en Reyes-Gasperini (2013).

Así mismo, se proponen actividades aplicables en cualquier aula de clases al definir un Marco de Referencia –MR– que permite establecer la Resignificación del Uso de la Proporción Directa, tal como lo señalan Cordero, Mendoza y Del Valle (2014) y registrar el Uso que hacen los estudiantes de la PD a partir de los modelos de pensamiento proporcional configurados por Cantoral, Reyes Gasperini,, y Montiel, (2014) para posteriormente construir la Unidad Didáctica –UD– considerando diversos elementos que contextualizan y regulan el proceso de enseñanza aprendizaje, tal como lo esboza Escamilla (1995).

Palabras Clave: Proporción Directa, Resignificación, Usos, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, Modelos de pensamiento proporcional.

INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo colombiano se presentan múltiples lineamientos que direccionan la práctica educativa en las instituciones públicas, los cuales buscan establecer criterios de calidad y desempeño desde la perspectiva del mejoramiento continuo. Sin embargo y bajo una mirada focalizada en los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas estandarizadas y la funcionalidad de conocimiento adquirido en el aula, las metodologías establecidas centran su propósito en los objetos matemáticos, generando apatía y descontextualización del conocimiento escolar y el conocimiento necesario en la vida cotidiana ya que excluye al estudiante de la construcción de su propio conocimiento y hegemoniza el mismo bajo criterios históricamente establecidos.

Este trabajo tiene como objetivo “Analizar las implicaciones de la Resignificación de la Proporción Directa al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Socioepistemología para las prácticas de aula” el cual se desarrolla en seis capítulos descritos a continuación.

En el capítulo 1 se describe y sustenta la problemática de investigación, los objetivos y los antecedentes que generan este trabajo a partir de dificultades identificadas en los estudiantes por los docentes en sus prácticas de aula y entorno al análisis realizado a los resultados en la prueba Saber 9° los cuales serán presentados, específicamente en el Uso de objetos matemáticos como la proporción Directa no sólo en el contexto escolar sino en contextos cotidianos, se plantea la necesidad de Resignificar, en términos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa – TSME –teniendo en cuenta para el desarrollo de las prácticas de aula los Usos que a través de la historia se le han dado al objeto de estudio como un mecanismo que busque enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Proporción Directa por medio de situaciones que integren el saber del cotidiano al conocimiento escolar y así contribuir a que los estudiantes establezcan la funcionalidad de dicho objeto matemático.

En el capítulo 2 se realiza un rastreo y análisis histórico epistemológico de la Proporción Directa con el fin de identificar las prácticas sociales de referencia usadas por algunas civilizaciones representativas para establecer sus significados, usos, definición y origen con lo cual se sustentarán las actividades planteadas en la Unidad Didáctica.

En el capítulo 3 se estudia la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, sus propuestas, metodología y estrategias bajo la cual se analiza y diseña la unidad Didáctica a desarrollar con los estudiantes.

El diseño metodológico se presenta en el capítulo 4 desarrollando un estudio de caso bajo la estructura planteada en Stake (2007), donde se establecen los aportes de la TSME y los análisis a priori y a posteriori de las situaciones diseñadas.

En el capítulo 5 se describen y analizan los datos recopilados y finalmente en el capítulo 6 se plantean conclusiones y reflexiones sobre e trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS.

LISTA DE TABLAS

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

PROBLEMÁTICA

Las políticas del Ministerio de Educación Nacional –MEN– de Colombia definen una metodología para medir la calidad de las instituciones educativas a partir del año 2014, cuya principal herramienta es el Índice Sintético de la Calidad Educativa –ISCE–, donde el objetivo principal es comparar el desempeño de los estudiantes en las áreas de lenguaje y matemáticas para establecer el nivel de mejoramiento institucional año tras año. Para esto, viene desarrollando una serie de programas y estrategias que buscan mejorar la calidad de la educación basándose especialmente en la interpretación de los resultados de pruebas externas a cada institución y estandarizadas para todo el país encabezada por la denominada prueba Saber.

Las pruebas Saber son aplicadas cada año en los grados 3° –Estudiantes de 8 años de edad promedio– y 5° –Estudiantes de 10 años de edad promedio– de primaria y en los grados 9° –Estudiantes de 14 años de edad promedio–. Hasta este grado, estas pruebas evalúan únicamente el desempeño de los estudiantes en las áreas de lenguaje y matemáticas, sin embargo, en el grado 11 –Estudiantes de 16 años de edad promedio– evalúa además, lenguaje, ciencias sociales, ciencias naturales e inglés, esto con el objetivo de poder tener una mejor información que permita caracterizar el perfil de los estudiantes en relación a sus habilidades, destrezas y competencias en estas áreas del conocimiento de tal manera que la información puedan ser usada como oportunidades de mejora a nivel institucional y en el diseño curricular en la educación básica y media del sistema educativo.

Es así, que el instrumento llamado ISCE – Índice Sintético de Calidad Educativa – es el insumo para establecer el nivel de calidad en cada institución educativa de Colombia que permite visualizar, según el MEN, los niveles que tienen en cada área y determinar las fortalezas, debilidades, amenazas y oportunidades específicas en cada área evaluada y así cada Institución Educativa en Colombia puede establecer estrategias de mejoramiento que permitan mejorar el desempeño de los estudiantes según los resultados en la prueba Saber 9° y el ISCE en cada institución.

Como docentes de matemáticas en el grado octavo de la básica secundaria en dos instituciones públicas de la ciudad de Medellín analizamos el ISCE de cada institución y los resultados de la prueba Saber 9°, en el cual tenemos los siguientes resultados en la I.E. El Corazón en el nivel Insuficiente hay un 42 % de los alumnos, en el nivel Mínimo hay un 56% de los alumnos, en el nivel Satisfactorio hay un 2% de los alumnos, en el nivel avanzado hay un 0% de los alumnos, para el caso de la I.E. Barrio Santander en el nivel Insuficiente hay un 23 % de los alumnos, en el nivel Mínimo hay un 47% de los alumnos, en el nivel Satisfactorio hay un 25% de los alumnos, en el nivel avanzado hay un 5% de los alumnos, dicha situación plantea la necesidad de intervenir analizando los lineamientos curriculares del MEN y de cada Institución Educativa participante, según la Didáctica de la Matemática, y el que hacer docente para proponer estrategias que mejoren nuestras prácticas de enseñanza y así generar nuevas alternativas que permita a los estudiantes construir conocimiento funcional en términos de la teoría base de este trabajo.

Sin embargo, desde la experiencia como docentes en el área de matemáticas, para las instituciones de básica secundaria, se ha observado que a los estudiantes se les dificulta modelar situaciones que involucran relaciones entre razones y usar argumentos matemáticos, para descubrir posibles soluciones a problemas de Proporción Directa presentadas en el aula. Más adelante se mostrará preguntas que tienen la prueba SABER que evidencian estas relaciones.

La problemática se centra en que a pesar de los esfuerzos desde los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación y las estrategias que implementan los docentes del área de matemáticas en cada institución, los estudiantes perciben la Proporción Directa (en adelante PD), como una simple relación de incremento de dos magnitudes que comparten una razón, es decir, conciben la Proporción Directa como el incremento constante y por igual de dos magnitudes conmensurables sin tener en cuenta el rigor matemático implícito ni los múltiples Usos y desarrollos que existen en todas las vertientes del conocimiento.

Se observa desde la cotidianidad de las prácticas docentes que las causas de la problemática planteada se generan debido a la poca relación entre el contexto cotidiano de los estudiantes y al contenido curricular como dME que basa el proceso de enseñanza aprendizaje de la PD en el objeto matemático, excluyendo al estudiante de la construcción de propio conocimiento. Además, la falta de metodologías que les permitan ser partícipes de la construcción de propio conocimiento y al discurso matemático escolar que limita la enseñanza de la PD a la aplicación de una técnica conocida como "la regla de tres", considerando que este es solo uno de los métodos que existen para solucionarla y las situaciones del aula en la solución se hacen sin tener presente su uso en la cotidianidad, esto genera desinterés y apatía por el conocimiento matemático en el estudiante.

Así mismo, manifiestan que no conciben a las matemáticas como un conocimiento útil sino como una obligación tediosa que deben superar, imposibilitando procesos de abstracción, transversalización y generalización que afectan su rendimiento académico y su desempeño en pruebas estandarizadas.

Por otro lado, el papel del docente es reducido por los lineamientos curriculares a implementar en al aula postulados diseñados desde el objeto matemático por el Ministerio de educación sin tener en cuenta la realidad situada y el contexto particular de las instituciones educativas, Los lineamientos curriculares son emitidos en 1998. Sin embargo, en 1994 mediante el decreto 1860 se obliga a las I.E. del país elaborar un PEI el cual debe responder a situaciones y necesidades de los educandos, de la comunidad local, de la región y del país y para ello debe tener en cuenta las condiciones sociales, económicas y culturales de su medio.

Además, se pretende cumplir con el logro de las competencias que, según los mismos lineamientos, deben adquirir los estudiantes negando la posibilidad de participación y construcción del conocimiento matemático desde el aula por todos los actores involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje convirtiéndolos en receptores de información que entrenan para un desempeño académico opacando los Usos del conocimiento en sus propios contextos. Por todo lo anterior, se propone la problematización del saber matemático escolar en términos de la Socioepistemología.

En los lineamientos curriculares definidos por el MEN, la Proporción Directa es un objeto matemático fundamental desde el tercer grado de educación primaria y se pretende generar una competencia en la solución de situaciones problema del contexto académico de los estudiantes, limitando los múltiples significados que ellos pueden generar del objeto matemático en cuestión.

Se plantea desde los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas[1] –EBCM– para el Grado Octavo de Educación Básica –Estudiantes entre los 13 y 15 años de edad–, que el objeto matemático, Proporción Directa, sea parte del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos definiendo el estándar de competencia que adquiere el estudiante como la propia capacidad de: "Analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y

[1] Estándares Básicos de competencias en Matemáticas –EBCM– publicación del Ministerio de Educación Nacional de Colombia con el fin de establecer los criterios en cada área para la educación Primaria, Básica y Media.

de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos" (MEN, 2006, p. 85).

Además, desde lo que establece el MEN, el pensamiento numérico y sistemas numéricos se busca la capacidad de: "Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos" (MEN, 2006, p. 85), dando cabida fuertemente a las expresiones algebraicas relacionadas con la proporción directa. Como vinculación entre la proporción directa y la geometría, el Ministerio de Educación plantea el pensamiento espacial y sistemas geométricos que señala: "Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)" (MEN, 2006, p. 85).

La caracterización realizada desde los estándares de competencia al objeto matemático, reduce los significados y usos que puede tener la proporción directa, además, limita el uso contextualizado y transversal del conocimiento buscando el alcance de una competencia y no la construcción de conocimiento.

En este momento se debería introducir los DBA ya que se está mencionando parte de las orientaciones del MEN.

Hasta ahora en las instituciones educativas públicas del país, se aplican los lineamientos trazados desde el MEN, pero los resultados de la prueba SABER en la básica secundaria de las instituciones educativas donde se aplica esta investigación, como son la Institución educativa El Corazón e Institución Educativa Barrio Santander de la ciudad de Medellín, no son favorables según la rúbrica diseñada por el MEN y evidencian una fragmentación en la construcción de conocimiento de la proporción directa desde su contexto social, cultural, económico y educativo.

El porcentaje de pérdida, según resultados en la PRUEBA SABER es muy alto en las dos instituciones y por ese motivo, mediante el proceso investigativo, se ofrece un aporte que tienda a mejorar los indicadores de manera progresiva, y dar algunas herramientas para posibilitar que el estudiante sea participe de la construcción de su propio conocimiento y reflexione sobre la funcionalidad de la matemática en términos de la teoría Socioepistemológica (Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel, 2014) y esa idea es lo que hace que se justifique revisar el discurso Matemático Escolar –dME – y proponer Rediseños al mismo, en cuanto al objeto matemático y analizando las preguntas y resultados de la prueba Saber que el conocimiento de la PD ayudará a mejorar los resultados esperados en el futuro en estas pruebas. En las figuras 1 y 2 se muestran los resultados de la prueba SABER del grado noveno en las dos instituciones

.

Figura 1. Reporte de porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño de la IE El Corazón en la prueba Saber 9°.

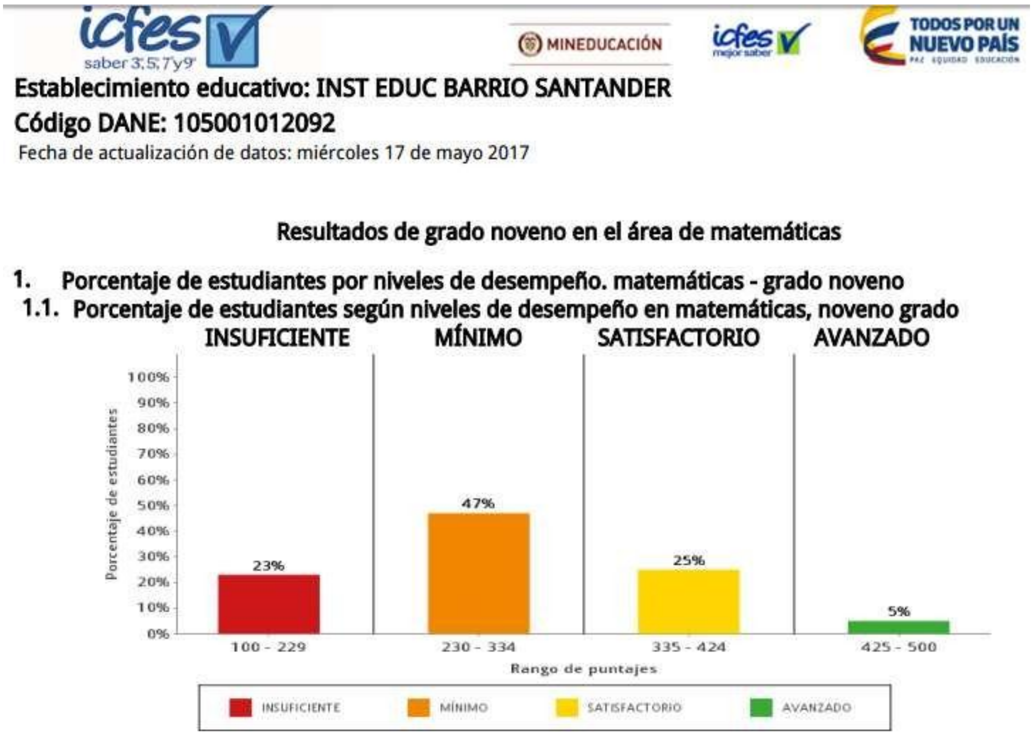


Figura 2. Reporte de porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño de la IE Barrio Santander en la prueba Saber 9°.

Se establece entonces, una ruptura entre los procesos de enseñanza y aprendizaje aplicado a los contenidos de clase y la forma de evaluarlos en las pruebas estandarizadas; En consecuencia, muchas instituciones educativas establecen estrategias de preparación y entrenamiento adicionales priorizando el desempeño en la prueba SABER, lo que evidencia que la institución en sí, no dispone de la educación matemática necesaria ni de los recursos pedagógicos para desarrollar en sus estudiantes conocimiento funcional que permita usarlo no sólo en una prueba externa sino en su vida.

En la cotidianidad, la enseñanza aprendizaje de la proporción directa bajo el currículo establecido por el MEN y la evaluación que se realiza del mismo en la prueba Saber, difieren, por lo menos para los estudiantes. Se observa la falta de relación con las actividades humanas donde se desarrolla el objeto matemático, impidiendo que el estudiante modele, use y analice la proporción directa en su cotidianidad. Por todo lo anterior se propone en éste trabajo problematizar el saber en términos de Cantoral, Montiel y Reyes - Gasperini (2015), a saber:

> La Socioepistemología utiliza el recurso de la problematización del saber, proceso mediante el cual se realizan análisis de obras originales de una pieza de conocimiento, se examinan los libros de texto, se interpretan procesos mentales involucrados y se comparan los usos del conocimiento matemático. (Cantoral, Montiel y Reyes Gasperini, 2015, p. 14).

Según lo anterior este trabajo propone centrase en los lineamientos curriculares (dME) para fortalecer los usos del conocimiento.

1.1.1 CONCLUSIONES DE LA PROBLEMÁTICA

En el contexto educativo colombiano la enseñanza de la Proporción Directa es reducida a un algoritmo según las prácticas de aula actuales observadas en los docentes, limitando las posibilidades que tienen los estudiantes de Resignificarlo en diferentes contextos y construir el conocimiento, para esto se pretende aportar al mejoramiento de las prácticas de aula con la problematización del saber matemático escolar, en términos de la Socioepistemología, y la posterior postulación de actividades diseñadas desde este marco teórico y visualizar su posible contribución desde un estudio de caso en dos instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

Concluyendo, la problemática que motiva esta investigación es resignificar la Proporción Directa en términos de la Teoría Socioepistemologica de la Matemática Educativa – TSME - a partir del diseño de una unidad didáctica que incluya algunos usos de la proporción directa y los modelos de pensamiento proporcional que serán analizados en el capítulo 3 como un marco de referencia para la construcción de conocimiento matemático llevando este conocimiento a un nivel funcional.

1.2 ANTECEDENTES

La Proporción Directa ha tenido un papel importante en el desarrollo del mundo que nos rodea, con la ayuda de este objeto matemático se ha podido modelar muchas situaciones reales para posteriormente poder solucionarlas y así mejorar en muchos aspectos la calidad de vida de las personas

La Proporción Directa es en el fondo una comparación de magnitudes que se pueden o no medir y es uno de los pocos objetos matemáticos que han tenido amplia investigación por su importancia para el desarrollo del pensamiento variacional, debido a que genera soluciones de manera intuitiva y ser una solución a las necesidades cotidianas y de uso común.

A continuación, se revisarán algunas publicaciones realizadas desde la didáctica de la matemática, el marco teórico de la Socioepistemología y desde otras perspectivas, con el fin de reconocer y establecer los elementos teóricos que se han desarrollado sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Proporción Directa tanto desde lo conceptual como desde su didáctica.

Un gran aporte para este trabajo ha sido la recopilación de los modelos de pensamiento proporcional realizado por Reyes-Gasperini (2014) quien desde el texto "La transversalidad de la proporción" brindan conceptos desde autores base como Inhelder y Piaget (1972), Godino y Batanero (2002), Carretero (1989), Lamon (1993; 1999) y Vergnaud (1990) en un desarrollo del modelo de pensamiento proporcional, el cual será, la Categoría de practica en términos de Morales y Cordero (2014) y a su vez la base del diseño de las actividades desde la práctica de referencia *Modelación*, en términos de Cordero, Mendoza y Del Valle (2014) para configurar la Unidad Didáctica.

En esta investigación Reyes-Gasperini (2013) trata de localizar aquellas ideas que por su capacidad generativa relacionada con la proporcionalidad. Como síntesis de la situación problemática planteada Reyes Gasperini (2013) sostiene:

> La proporcionalidad juega un rol formativo y transversal en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio. Este hecho amerita comenzar con una clara diferenciación entre nociones: fracción, razón, proporción y proporcionalidad. (Reyes Gasperini, 2013, p. 21)

Sin embargo, la complejidad de las nociones sobrepasa los alcances de este proyecto.

La metodología utilizada para el desarrollo del trabajo es pertinente con la planteada por Reyes Gasperini (2013, p. 12) al proponer un enfoque teórico que permite investigar EN la educación y no DESDE la educación, un enfoque que permite intervenir a partir de la acción didáctica. Los resultados y conclusiones más importantes como lo plantea Reyes Gasperini (2013) son

> las características identificadas en la investigación respecto al discurso Matemático Escolar actual; los principios de la Socioepistemología y la propuesta para un nuevo discurso Matemático Escolar que se sustente en los principios de la Socioepistemología. (Reyes Gasperini, 2013, p. 59)

Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2014) analizan la problemática en la enseñanza de la PD respecto a factores limitantes en el uso de la misma, como lo es reducir el concepto a la generación de equivalencias entre razones con un sentido únicamente progresista. En esta investigación se presentan, como lo expresan Reyes Gasperini, Montiel y Cantoral (2014),

> Una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas, basándose en una unidad de análisis socioepistémica sobre la

> proporcionalidad, para que, a través de ellas, pueda realizarse la problematización del saber matemático escolar. (Reyes Gasperini, Montiel y Cantoral, 2014, p. 3)

Así mismo, contribuye con el análisis teórico de las dimensiones socioepistemológicas que sustentan este trabajo.

Como síntesis de la situación problemática planteada realizan una problematización del saber matemático relacionado a lo proporcional a través de una unidad de análisis socioepistémica (Reyes-Gasperini, Cantoral y Montiel, 2014) en la metodología utilizada para el desarrollo del trabajo hacen una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas a los resultados y conclusiones más importantes son en este escrito que cuestionan al saber matemático escolar, concibiendo que desde la Teoría Socioepistemológica no sólo se reflexiona sobre el cómo se enseña, sino sobre el qué se enseña.

En los textos Teoría socioepistemológica de la matemática educativa (Cantoral, 2013) y Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto (Cantoral, Montiel y Reyes Gasperini, 2015), se encuentran los elementos teóricos de la TSME y las argumentaciones que permiten analizar la problemática de aula de interés para el desarrollo de este trabajo.

García (2014) plantea que la representación de razones y proporciones geométricas contribuyen de manera significativa al fortalecimiento de la competencia matemática de comunicación. Llegando a la conclusión de que las actividades de representación de razones y proporciones propician unos procesos de enseñanza y aprendizajes dinámicos. Además, desarrolla habilidades como: expresar ideas oralmente, demostrar y describir a partir de información visual, construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones numéricas. Visualizamos en este trabajo la confirmación de que el estudiante debe ser quien construya su conocimiento a partir de prácticas de referencia y la Resignificación progresiva del mismo.

Los autores Ramírez y Block (2009) Realizan una investigación sobre el papel de la noción de razón en las matemáticas y como su vínculo con la noción de fracción no están claramente definidos. Se muestran algunas dificultades que se suscitan entorno al vínculo razón-fracción, según ellos:

> En los libros de texto clásicos las nociones de razón y fracción pierden sus diferencias históricas para identificarse una con la otra; por otra parte, algunos libros más actuales identifican las razones con las fracciones ya sea por definición o dándolo por hecho, sin que medie un trabajo de articulación; los docentes dan la definición explicita de las razones, como fracción, ocasionando la perdida de la noción de razón (Ramírez y Block, 2009, p. 37).

La investigación concluye que los docentes dan poca importancia a esta diferencia ya que no hay interés en las prácticas que los alumnos realizan, por ejemplo, que en un problema de disminución o incremento del tamaño de un objeto el estudiante use únicamente una razón externa natural o no fraccionaria. Además, la introducción de las fracciones en el proceso de resolver problemas de proporcionalidad resulta problemática y en ciertos momentos es superficial, quedando como una manera más de nombrar las cosas creándose una identidad entre razón y fracción, pero con un significado poco claro para los alumnos.

Esta investigación ayuda y aporta a este trabajo en la identificación de los elementos que limitan el proceso de enseñanza aprendizaje de la proporción directa e incluso de su uso, ya que se debe posibilitar la resignificación de la fracción para resignificar la proporción.

Para Acosta, Rondero y Tarasenko (2012) existen filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y linealidad que deben ser superados con el objetivo de rescatar algunos de los significados que inciden en el diseño de situaciones de aprendizaje. Por ejemplo, se muestra como en la antigüedad se empleó la proporcionalidad directa para el cálculo de pago de impuestos y se cuestiona el hecho que, aunque este tema se aborda en las temáticas actuales no se hacen evidentes las filiaciones conceptuales entre la proporción directa y los hechos socioculturales del cobro de impuestos en la antigüedad y la modernidad.

Lo que para la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la Proporción Directa es de vital importancia ya que se pretende articular la proporcionalidad, la linealidad con aspectos socioculturales tales el origen de los objetos matemáticos a través de las prácticas sociales que lo sustentan.

Salazar y Díaz (2009) realizan una investigación donde presentan las dificultades para articular en el proceso de enseñanza los conceptos de fracción y razón, generando obstáculos entre los conceptos. Para lograr dar sentido a dicha relación se toma la medición como práctica articuladora, haciendo las veces de eslabón entre la noción de razón desde la matemática y el uso de la razón en la cotidianidad, logrando esto desde una exploración Socioepistemología. Esto permite dinamizar la enseñanza de las fracciones y las razones dotándolas de sentido, lo que es muy significativo para el aprendizaje del pensamiento variacional y el álgebra. Por lo anterior, este trabajo es importante ya que los estudiantes del grado octavo de básica secundaria comienzan según los lineamientos curriculares con álgebra.

De acuerdo a los autores, el razonamiento proporcional es un recurso importante para la solución de diferentes problemas que se presentan en la vida cotidiana y sobre todo en las decisiones que deben tomar los estudiantes en su día a día, este objeto matemático asimismo tiene muchas aplicaciones en varios campos como el de la física, economía entre otros. También se puede modelar soluciones a problemas cotidianos.

En esta investigación se busca que los estudiantes exploren la manera de modelar y solucionar actividades por medio del objeto matemático y por ende hagan una construcción social del conocimiento de la Proporción Directa en la cual la puedan resignificar.

Resaltamos la importancia del trabajo pues contribuye desde la Socioepistemología a mejorar las prácticas de aula, al empoderamiento docente y a los Uso del conocimiento matemático en diversos contextos en que lo necesiten los estudiantes.

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde la Socioepistemología, el diseño y la implementación de una Unidad Didáctica que Resignifique la Proporción Directa a través de la problematización del saber matemático en las prácticas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el grado octavo.

1.4 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las implicaciones de la Resignificación de la Proporción Directa, en el grado octavo, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Socioepistemología, para el desarrollo de competencias matemáticas?

1.5 OBJETIVO GENERAL

Analizar las implicaciones de la Resignificación de la Proporción Directa al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Socioepistemología para las prácticas de aula.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Indagar por los Usos de la Proporción Directa, desde una mirada histórico epistemológica.

- Diseñar e Implementar una Unidad Didáctica con actividades que permitan la Resignificación de la Proporción Directa en estudiantes del grado octavo.

- Proponer actividades que fomenten los Usos de la Proporción Directa en contextos académicos y cotidianos.

1.7 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En el contexto educativo de Colombia el uso de la Proporción Directa es reducido a un algoritmo según las prácticas de enseñanza aprendizaje actuales, limitando las capacidades de los estudiantes de Resignificarlo en diferentes contextos, es decir, que el discurso Matemático Escolar – dME – en el contexto de las dos instituciones donde se realiza el trabajo, excluye en palabras de Soto (2010) a los “actores del sistema educativo… de la construcción de conocimiento” (p. 1540), para esto se pretende aportar una Unidad Didáctica – UD – diseñada desde la Socioepistemología, para el mejoramiento de las prácticas de aula con la postulación de actividades diseñadas desde los modelos de pensamiento proporcional de Reyes-Gasperini (2011) a partir de un estudio de caso en dos instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

Concluyendo, la problemática que motiva esta investigación es resignificar la Proporción Directa en términos de la Teoría Socioepistemologica de la Matemática Educativa – TSME - a partir del diseño de una unidad didáctica que incluya algunos usos de la proporción directa y modelos de pensamiento proporcional como un marco de referencia para la construcción de conocimiento matemático llevando este conocimiento a un nivel funcional.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA PROPORCIÓN DIRECTA Y LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES COMO DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR.

En el siguiente capítulo se pretende identificar, a partir de un análisis histórico epistemológico, algunas Prácticas Sociales y Usos que surgen en diferentes épocas y en diferentes lugares con el fin de establecer un marco de referencia que sirva para diseñar actividades aplicables al proceso de enseñanza aprendizaje que permitan la resignificación de la Proporción Directa. Podemos decir que en esta parte del análisis histórico intervienen distintos puntos de vista al momento de usar la PD, varias culturas entre ellas los egipcios, los chinos y los griegos han dejado vestigios de su conocimiento relacionado con la Proporción Directa.

La proporción y su potencial para solucionar dificultades en el entorno es un tema que ha sido estudiado en varias civilizaciones antiguas, debido a la necesidad que se ha tenido de solucionar problemas que tenían los grupos humanos, por así decirle, en su cotidianidad, estas necesidades debían ser solucionadas con técnicas o métodos asociados a la proporcionalidad, y por este motivo se puede observar que generaron conocimiento al tener la necesidad de establecer un método que sirviera como base para solucionarlos, y que se pudiera transmitir a otros miembros del grupo, entre las situaciones que se observan pudimos establecer que son de varias índoles desde poder hacer repartos equitativos, poder comparar magnitudes iguales o diferentes, Realizar mediciones, representaciones geométricas, entre muchos otros.

2.1 LA PROPORCIÓN EN LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS

Vamos a dar una mirada por algunas de estas civilizaciones en las cuales la utilización de la proporción y de sus técnicas asociadas fue desarrollado para la solución de problemas. Es necesario tener en cuenta que, al hacer un rastreo de información para encontrar los orígenes de algún objeto matemático, el objeto matemático como se concibe ahora, se ha enriquecido y expandido gracias a sus usos, debido a esto, es fundamental analizar las prácticas sociales asociadas al objeto matemático para lograr entender cuáles eran las premisas del momento en las prácticas anteriores, pues son a veces muy diferentes a la concepción que se tiene hoy en día de ellas.

Un ejemplo son los hindúes que, aunque están cronológicamente más tardíos comparándolos con los griegos, estos recogen historias anteriores. Es también muy interesante observar que, aunque todas estas culturas están distantes, sus métodos son similares, aunque no se plantean problemas basados en los mismos paradigmas y son similares a los métodos actuales.

El razonamiento proporcional es un recurso que se ha utilizado en las actividades humanas para solucionar problemas desde un tiempo inmemorial. Oller y Gairín (2013) Realizan un análisis histórico los aportes de los chinos y de los griegos, además de la civilización egipcia, por ejemplo, en la figura 3 encontramos en el texto de Oller y Gairín (2013) el problema 66 del *Papiro de Rhind* (s. XVII AC publicado en (Chace, 1979) citado por Oller y Gairín (2013) estableciendo el uso de razones para convertir sus magnitudes y por lo tanto realizan repartos equitativos y proyecciones en el tiempo, como sigue:

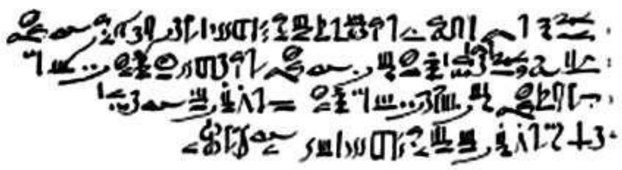


Figura 3. Problema 66 del papiro de Rhind (Chace, 1979, pág. 129, citado por Oller y Gairín, 2013)

Sin embargo, hay dos textos fundamentales en el análisis histórico epistemológico de la proporción directa que son: *Los elementos* de Euclides, especialmente los libros V y VII. y el libro de *los nueve capítulos* especialmente el libro 2 *Mijo y Arroz*.

2.1.1 LA PROPORCIÓN EN LA CIVILIZACIÓN GRIEGA Y EL CASO DE LA CIVILIZACIÓN CHINA

Oller y Gairin (2013) sostienen que la civilización China dio varios Usos a la PD, entre los más destacados está, el poder generar tablas de conversión de productos de interés, demostrado en el hallazgo de tablas de conversión de cantidades y precios de productos; así como la vasta obra griega.

Diferentes culturas han indagado sobre los Usos de la proporcionalidad, se puede observan que las civilizaciones mesopotámicas y egipcias desarrollan aplicaciones específicas de la PD para dar solución a situaciones de reparto equitativo o medición de figuras, como se comprueba en el *Papiro de Rihn* donde se establecen proporcionalidad entre los terrenos posterior a la inundación del rio Nilo y tablas de equivalencia entre los tributos a entregar. Es el caso del conocimiento albergado en los capítulos de Euclides, donde en el capítulo V se plantea la igualdad entre razones de igual magnitud se puede observar aplicaciones de la PD en el análisis de figuras geométricas y de razones entre igual magnitud.

2.1.1.1 EL LIBRO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Obra de referencia por excelencia donde se analiza la proporción directa desde una mirada más geométrica y demostrativa, lo que no nos permite ver esos orígenes del objeto como resultados de prácticas sociales y problemas concretos en los cuales los hombres de la época aplicaban la proporción directa para solucionar problemas de sus actividades diarias. Además, el concepto de proporción directa no está definido claramente considerándola en el libro V (ver figura 4) como una relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas, donde podemos ver primero, que la razón entre dos magnitudes tiene algo que ver con el tamaño, pero en ningún momento es un número, esto se observa ya que los números en el texto aparecen representados como segmentos, lo que evidencia la mirada geométrica del trabajo realizado por Euclides. En la figura 4, se encuentra la definición 5 del libro V de los elementos transcrita por Omar Khayyam publicado en (Rashed y Vahabzadeh, 1999, p. 345) citado en Oller y Gairín (2013).

وقال: إذا كانت أربعة مقادير، وأخذت الأضعاف على هذه / الصفة،
وكانت أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني، / ولم يكن أضعاف الثالث
زائدةً على أضعاف الرابع، قيل إن نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة
الثالث إلى الرابع.

Figura 4. Definición 5 del Libro V de los Elementos de Euclides.

En el mismo sentido no se plantea la igualdad de razones sino "guardar la misma razón" (libro V, de los elementos de Euclides, Definición. 5) o de "guardar una razón mayor" (libro V, de los elementos de Euclides, Definición. 7).

Matemáticamente, lo que plantea lo anterior es que, si a y b son dos cantidades de una misma magnitud, siempre existe un numero natural n tal que $na \geq b$. lo que si se evidencia es la composición de dos razones de la forma a/b y b/c para obtener a/c (usando notación actual) Como plantea el autor Grattan- Guinness (1996, p.367-368) "ve en esto un cierto trasfondo musical reforzado por el paralelismo entre las ternas número-magnitud-razón y aritmética-geometría-música" citado en (Oller y Gairin, 2013).

Para hallar la razón entre magnitudes homogéneas se usaba un proceso llamado antifairesis o antanairesis (actualmente conocido como algoritmo de Euclides) en donde dando dos cantidades se resta la menor a la mayor en una sucesión de restas hasta quede cero. Lo importante del proceso no es el resultado sino la cantidad de restas necesarias para llegar a cero, esta definición de razón por medio de la antifairesis pone en evidencia el carácter no numérico del concepto de razón en el libro de los elementos y nos refuerza su relación con los procesos de medida y el uso único de magnitudes homogéneas.

La ambigüedad en la definición del concepto de razón no permitió que el concepto evolucionara en el contexto de la aritmética, pero si en contextos como la música, la arquitectura, las bellas artes, entre otros, y según su uso estricto en el libro V, en el caso de razones de magnitudes fue necesario idear otra teoría, *Eudoxo* y sus teorías fueron presentadas en el libro VII, donde dejo de lado la definición de razón y se concentró en lo que para él era más importante, el aspecto geométrico, para esto entro a definir lo que significaba “guardar la misma razón” y “guardar una razón mayor” planteando lo siguiente:

> Una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimultiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimultiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Oller y Gairin, 2013, p. 324)

Esta aparente discrepancia entre los números y las magnitudes hacen que se desarrollen dos teorías, surgiendo la necesidad de probar resultados similares dos veces, esto sucede porque para los griegos el producto de dos magnitudes no tiene sentido. Por ejemplo, en las proposiciones de Euclides:

> Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero” (VII, Prop. 19) y “si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias. (Oller y Gairin, 2013, p. 325)

Estas situaciones requieren tratamientos radicalmente diferentes. Sin embargo, en el libro *X* cuando se prueba que dos magnitudes son conmensurables, sí y solo si guardan entre sí la misma razón que un número con otro número (libro X de los elementos de Euclides, Proposición 5-8). Parece haber una conciliación entre los dos puntos de vista, lastimosamente no podemos encontrar evidencia de cómo se superó esa

dificultad epistemológica ya que se requiere asumir que los números son magnitudes lo que como hemos dicho no era fácil de asumir en la época.

Otro aspecto importante sobre la Proporción Directa es el hecho de que la razón se definió únicamente entre magnitudes homogéneas, mientras el producto de magnitudes carecía de sentido, esto hace prácticamente inaplicable la teoría a situaciones prácticas en las que debía aplicarse. Además, en los problemas en los que se aplicaba solo se consideraban razones internas (entre la misma magnitud) y no externas (entre magnitudes diferentes).

2.1.1.2 EL LIBRO DE "LOS NUEVE CAPÍTULOS SOBRE ARTE MATEMÁTICO"

En los nueve capítulos encontramos una mirada más práctica diferente a la rigurosidad teórica encontrada en los elementos y otra forma de demostración diferente a la planteada en los elementos. La diferencia es tan notable que cuando se habla de matemáticos chinos se debe aclarar que no tiene sentido dar este término como profesión, sin embargo, lo podemos entender como aquellos que hacen o utilizan matemáticas.

Los libros chinos por más que escondan una cierta búsqueda de métodos generales, poseen un eminente enfoque práctico, por esto es natural la aparición de aspectos relacionados con la proporcionalidad. El concepto central que se encuentra es el *LÜ* (traducido al inglés como rate) y que se define como un *"conjunto de números correlacionados"* y enumera algunas propiedades y operaciones entre ellas. "Las Lü pueden convertirse unas a otras. Si hay fracciones en una LÜ, esta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las Lü se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador*"* (Kangshen, Crossley y Lun (1999. p. 80) citado en (Oller y Gairin, 2013, p. 327).

En los nueve capítulos, interpretan la razón entre dos magnitudes como su LÜ cuando una de ellas toma el valor 1. Además, el proceso para simplificar fracciones es similar al algoritmo de Euclides, sin embargo, no es claro ver la relación entre este concepto en las dos culturas, lo que si es cierto es que entenderlo nos permitirá comprender el razonamiento que dio origen a la regla de tres. Se observa entonces que esta concepción china se ajusta mejor a las aplicaciones mercantiles, pues no existe obstáculo para relacionar directamente dos magnitudes diferentes, predominando la idea de razón externa frente a la interna.

En el análisis Epistemológico podemos decir que el proceso empieza a tomar un rumbo más claro en cuanto a su aplicabilidad en algún contexto real cuando hacia el año 600 A.C. El padre tradicional de la matemática griega, Tales de Mileto, propone el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

> Teorema de Tales: Si dos rectas r y r' se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra. (Oller y Gairin, 2013)

A Tales se le atribuye el uso de sus conocimientos de geometría para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y calcular la distancia a la costa de barcos en alta mar. Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco señalan que la medida de la altura de las pirámides se llevó a cabo a través de la determinación de la longitud de la sombra que ellas producían cuando una vara clavada verticalmente en el suelo producía una sombra igual a su altura, como lo expresan Fernández, Luis y García (2005).

Para medir la distancia de los barcos en alta mar a la costa, la leyenda dice que Tales fue el primero en emplear la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Hay dudas muy grandes con respecto a esto, ya que estas ideas se habían manejado con mucha anterioridad en Egipto y Mesopotamia, donde Tales invirtió una parte de su vida.

Eudoxo de Cnido 390 a. C.-337 a. C. dio una solución satisfactoria en la cual dejo indefinido el concepto de razón y empezó a definir únicamente aquello que importaba desde el punto de vista geométrico; es decir definir lo que significa "guardar la misma razón" y "guardar una razón mayor" este aporte genero un avance en la manera de solucionar los problemas de proporcionalidad y denota una amplia comprensión de los números y permite el tratamiento de las cantidades continuas, no únicamente de los números enteros o números racionales. Cuando en esta teoría fue resucitada por Tartaglia y otros estudiosos en el siglo XVI, se convirtió en la base de cuantitativas obras de ciencias durante un siglo, hasta que fue sustituida por los métodos algebraicos de Descartes.

Los egipcios crearon también algunas medidas con sus cuerpos para calcular las áreas de sus tierras y saber cuánto debían pagar en impuestos y como obrar a la hora de repartirlas; Y en el uso de estos primeros procesos de medición aparecieron los números fraccionarios y las operaciones con los mismos como se comprueba en el papiro de Ahmes. No obstante, en el siglo VI d. C, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones.

2.2 LA PROPORCIÓN EN LA MODERNIDAD

Son innumerables las aplicaciones de la Proporción Directa y no alcanzará este trabajo para dar reporte de todas, sin embargo, nos proponemos plantear algunas interesantes como prácticas de referencia para las actividades de la Unidad Didáctica. Las medidas con base en el cuerpo humano han ocupado un importante papel en la arquitectura y el arte en general y aunque el sistema métrico trato de imponerse también en este campo han sido varios creativos los que han propuesto otros sistemas de medida, entre ellos un arquitecto suizo llamado Charles Édouard Jeanneret-Gris, conocido como Le Corbusier, en la década de 1940 a 1950. Él creía que las medidas se habían despersonalizado y creó un sistema de mediciones llamado "el modulor" con base en la escala humana; usado hoy por los diseñadores industriales a quienes el sistema métrico decimal no les es tan útil como lo es en otros campos. Le Corbusier es referente de la arquitectura moderna, y "el modulor" muy usado hoy en este arte y en la ergonomía para el diseño de los puestos de trabajo entre otros.

Son variados y extensos los usos de la PD en la modernidad, desde el análisis de funciones lineales hasta la generación de escalas para el mapeo de imágenes, así como su transversalización en contexto escolar del uso de la PD, se encuentra en la física como una práctica de referencia que usa y resignifica a la Proporción Directa. Son las prácticas de referencia mostradas en el texto de Freixenet. (2017) donde para los análisis del movimiento de objetos planetarios y terrestres se utiliza la PD desde teorías de grandes como Nicole Oresme en parís y Thomas Bradwardine en Oxford.

Un obstáculo epistemológico, en términos de Bachelard (2000), superado fue la rigidez de los postulados de Euclides sobre razones de igual género o magnitud la cual planteo Nicómaco de Gerasa en su teoría de razones y proporciones, fue descrita por Boecio en su Aritmética del siglo VI y finalmente expuesta por Bradwardine quien trabajó a partir de la versión de los libros V y VII de los elementos de Euclides en una versión de Campano de Novara del siglo XIII, según Freixenet (2017).

Cabe resaltar que la ruptura epistemológica que surge en la PD al separarse de la terminología euclídea y calificar las cantidades conmensurables como racionales y la inconmensurables como irracionales fue un aporte de vital importancia pues permite su posterior aritmetización y modelación.

Así mismo, se plantea por Bradwardine en Freixenet (2017) varios tipos de razones como las múltiples, de desigualdad, superpacientes, superparticulares, múltiples superpacientes y múltiples superpaticulares que permiten analizar los fenómenos físicos y que son aplicados por Boecio para la conformación de su Ritmomaquia, ver Espallargas (2004).

En posturas más cercanas cabe resaltar el trabajo de Zabala (2015) cuando plantea como un desarrollo actual como los aplicativos computacionales pueden desarrollar modelos proporcionales en los estudiantes.

> Se trata de dar interpretación geométrica a los distintos productos (escalar, vectorial, mixto) que se pueden definir entre los vectores de un espacio vectorial. Esto permite medir ángulos, áreas y volúmenes orientados; en particular, el volumen orientado del paralelepípedo que se puede formar a partir de tres vectores linealmente independientes. (Zabala, 2015, p. 1665)

2.3 EPISTEMOLOGÍA DE LA PROPORCIÓN

Se puede observar que surge la PD como una igualdad entre razones de igual magnitud, Sin embargo, la evolución de este conocimiento incluye su variación hacia el establecimiento de una constante de proporcionalidad entre razones. Cómo definiciones de la Proporción Directa para este trabajo se conservan en términos de Reyes-Gasperini (2013) en su página 30: “la idea de la proporcionalidad sustentada como la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes.”.

En términos formales de la matemática Obando, Vasco y Arboleda (2013) ofrecen un acercamiento bastante preciso, aunque de un nivel más elevado para el grado escolar de interés para este trabajo. A saber:

> Sobre la proporción. Siguiendo la noción clásica, se entiende la proporción como la equivalencia entre dos razones, es decir, la proporción se comprende como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones, o como un predicado cuaternario o tetradico entre cuatro cantidades: si las

> cantidades x, y, x', y' son tales que $x = \delta . x'$ implica $y = \delta . y'$ (igual medida relativa de x a x', que y a y'), entonces $x : y :: x' : y'$ (Obando, Vasco y Arboleda, 2013, p. 981).

Es importante reconocer las diferentes líneas de investigación en la que muchos investigadores han contribuido y continúan haciéndolo debido a la importancia de la Proporción Directa, para profundizar al respecto recomendamos tener en cuenta el trabajo de los doctores Daniela Reyes Gasperini, Gisela Montiel y Ricardo Cantoral en el 2014 denominado 'Cuando una crece, la otra decrece'... ¿Proporcionalidad inversa o directa?

2.4 LINEAMIENTOS CURRICULARES COMO DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

En Colombia el discurso Matemático Escolar es definido directamente por el MEN como instrumento de control social y político bajo objetivos de calidad, por lo tanto, es el MEN quien a través de sus organizaciones complementarias diseña estrategias, contenidos y documentos como directriz para el proceso educativo en todos los niveles que ofrece el país.

Según la TSME es posible analizar dicho discurso para proponer alternativas que permitan la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes.

2.4.1 POLÍTICA EDUCATIVA VIGENTE EN COLOMBIA VS PROBLEMATIZACIÓN DEL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia – MEN – las actividades, estrategias, planes de área y mallas curriculares que se diseñen en el área de Matemáticas deben estar alineados con el Proyecto Educativo Institucional – PEI – el cual es construido por cada institución educativa según su contexto, necesidades e indicaciones del MEN. Además, contener lineamientos que periódicamente se van actualizando buscando alcanzar indicadores educativos de alta calidad para el 2025; y todos estos esfuerzos continúan apoyando la idea del concepto matemático cómo centro del proceso y no al estudiante, como debe ser, ¿Cuál es el propósito de la educación? sino más que brindarle lo mejor del conocimiento a todos los estudiantes por igual de la manera más justa y cercana a su realidad cultural y contexto social tal como lo plantea la Teoría Socioepistemología de la Matemática educativa – TSME –.

2.4.1.1 LA PROPORCIÓN DIRECTA EN LOS LINEAMIENTOS DEL MEN

Una de las propuestas iniciales del MEN en el área de matemáticas es el documento Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) donde plantean el proceso de enseñanza aprendizaje de la educación, primaria, básica y media como la búsqueda de la formación de ciudadanos matemáticamente competentes para la sociedad actual a partir de lineamientos agrupados por ciclos en un contexto determinados centrando el proceso en los objetos matemáticos sin problematizarlo desde la educación matemática.

Actualmente las políticas educativas generan otro documento en su versión 2 denominado Derechos Básicos de Aprendizaje – DBA – donde se platean los aprendizajes estructurales que deben conocer los estudiantes por cada grado y algunas áreas. En el caso de las matemáticas se apoyan en los pensamientos matemáticos afirmados desde los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) continuando con la política de centrar la enseñanza en los objetos matemáticos apartando al estudiante de participar en la construcción de su propio conocimiento.

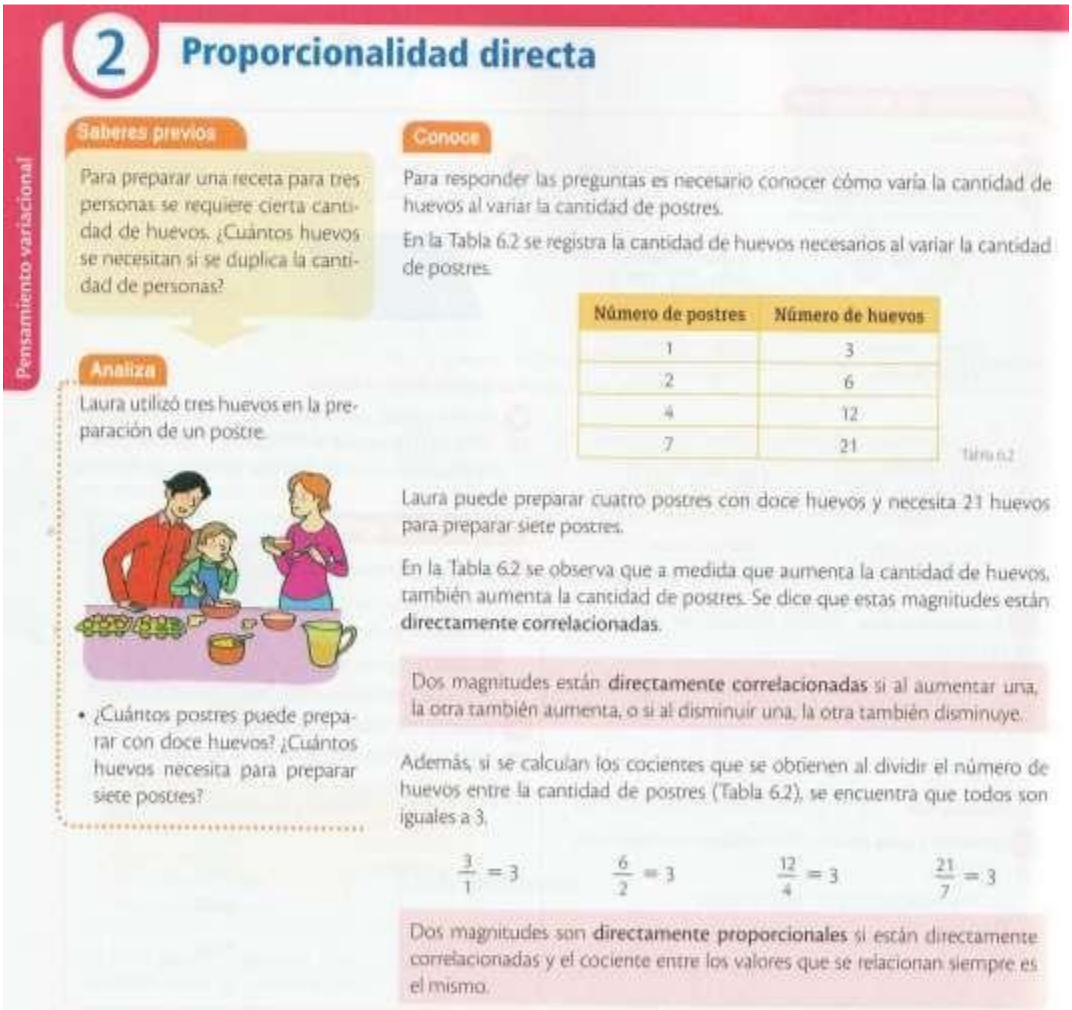
Adicionalmente el MEN ha impreso y distribuido una serie de textos para docentes y estudiantes conocidos como la serie “Vamos a aprender” para algunas áreas académicas que han sido priorizadas según el análisis de resultados de pruebas externas, entre ellas, matemáticas. La serie impresa en 2017 y distribuida en el 2018 (ver figura 5), establece contenidos y actividades de evaluación construidos desde los lineamientos curriculares siguiendo la estructura de los DBA para cada grado de educación básica y media, dichos textos continúan centrando el proceso educativo en el objeto matemático sin problematizarlo, manteniendo la hegemonía sobre el conocimiento y aislando al estudiante de la posibilidad de construirlo.

Figura 5. Documentos Diseñados y Publicados por el MEN.

Se observa que los textos mencionados utilizan diferentes medios de representación de la PD, vista la representación como un volver a presentar que sin duda muestra el conocimiento como algo acabado. Ver Reyes-Gasperini, Montiel y Cantoral (2014).

La Proporción Directa se configura según el MEN en los estándares de competencias como parte del pensamiento variacional y está presente desde el grado 4 de básica primaria, Para el ciclo previo al grado octavo, es decir al finalizar el grado séptimo, los estándares de competencia plantean: "Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos" (p. 85).

En los DBA versión 2, la Proporcionalidad Directa se muestra como un objeto de aprendizaje del grado 4 de primaria en la página 33, y para la básica secundaria solamente aplicaciones de la misma, Pretendiendo solucionar situaciones ajenas para el estudiante que si bien puede recordar los algoritmos difícilmente *usa* el conocimiento en cualquier contexto. En el texto "Vamos a aprender 6°" en su página 190 se observan planteamientos y definiciones para la proporción como equivalencia entre razones, la propiedad fundamental de las proporciones como un producto entre extremos y medios de las razones proporcionales (El mismo algoritmo de la regla de tres), así mismo en la página 192 se encuentra la definición de Proporción Directa como la correlación entre magnitudes con valor de su cociente constante. Ver figura 6.



Pensamiento variacional

2 Proporcionalidad directa

Saberes previos

Para preparar una receta para tres personas se requiere cierta cantidad de huevos. ¿Cuántos huevos se necesitan si se duplica la cantidad de personas?

Analiza

Laura utilizó tres huevos en la preparación de un postre.

• ¿Cuántos postres puede preparar con doce huevos? ¿Cuántos huevos necesita para preparar siete postres?

Conoce

Para responder las preguntas es necesario conocer cómo varía la cantidad de huevos al variar la cantidad de postres.

En la Tabla 6.2 se registra la cantidad de huevos necesarios al variar la cantidad de postres.

Número de postres	Número de huevos
1	3
2	6
4	12
7	21

Tabla 6.2

Laura puede preparar cuatro postres con doce huevos y necesita 21 huevos para preparar siete postres.

En la Tabla 6.2 se observa que a medida que aumenta la cantidad de huevos, también aumenta la cantidad de postres. Se dice que estas magnitudes están **directamente correlacionadas**.

Dos magnitudes están **directamente correlacionadas** si al aumentar una, la otra también aumenta, o si al disminuir una, la otra también disminuye.

Además, si se calculan los cocientes que se obtienen al dividir el número de huevos entre la cantidad de postres (Tabla 6.2), se encuentra que todos son iguales a 3.

$$\frac{3}{1}=3 \qquad \frac{6}{2}=3 \qquad \frac{12}{4}=3 \qquad \frac{21}{7}=3$$

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre los valores que se relacionan siempre es el mismo.

Figura 6. Proporcionalidad Directa según el texto "Vamos a aprender 6".

Continuando con el análisis en el texto “Vamos a aprender” del grado séptimo define en su página 76, la Proporción Directa como: “Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales si están directamente correlacionadas y el cociente entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante” como se muestra en la figura 7, limitando la PD en sus múltiples significados y modelos de pensamiento proporcional.

Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante.

Ejemplo 1

Si se quiere hallar el número de huevos que se necesitan para preparar un ponqué para 100 personas, se establece una proporción en la cual una de las razones contiene el valor desconocido y la otra corresponde a uno de los pares de valores que se relacionan en la Tabla 3.7. Luego, se encuentra el valor desconocido aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$$\frac{8}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow 8 \cdot x = 2 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 100}{8} \Rightarrow x = 25$$

Así, para preparar el ponqué para 100 personas se requieren 25 huevos.

La representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales corresponde a parejas de puntos (a, b) que están ubicados sobre una recta que pasa por el punto $(0, 0)$.

Figura 7. Definición de la Proporcionalidad Directa según texto escolar “Vamos a aprender 7”.

Así mismo, establece directamente la regla de tres como único método de solución a situaciones donde hay que encontrar alguna magnitud faltante a partir de una razón establecida como se muestra en la página 78. Ver figura 8.

La **regla de tres simple directa** es un procedimiento utilizado para resolver problemas que involucran magnitudes directamente proporcionales. Este método permite determinar el término desconocido de una proporción cuando se conocen los otros tres términos.

Ejemplo 1

Si ocho porciones de queso contienen 400 calorías, ¿cuántas calorías contienen 35 porciones?

En esta situación las magnitudes *número de porciones* y *calorías* son directamente proporcionales. Sabiendo esto, se puede responder la pregunta a partir del siguiente procedimiento.

Número de porciones	8	35
Calorías	400	x

Tabla 3.12

Se relacionan los datos en una tabla.

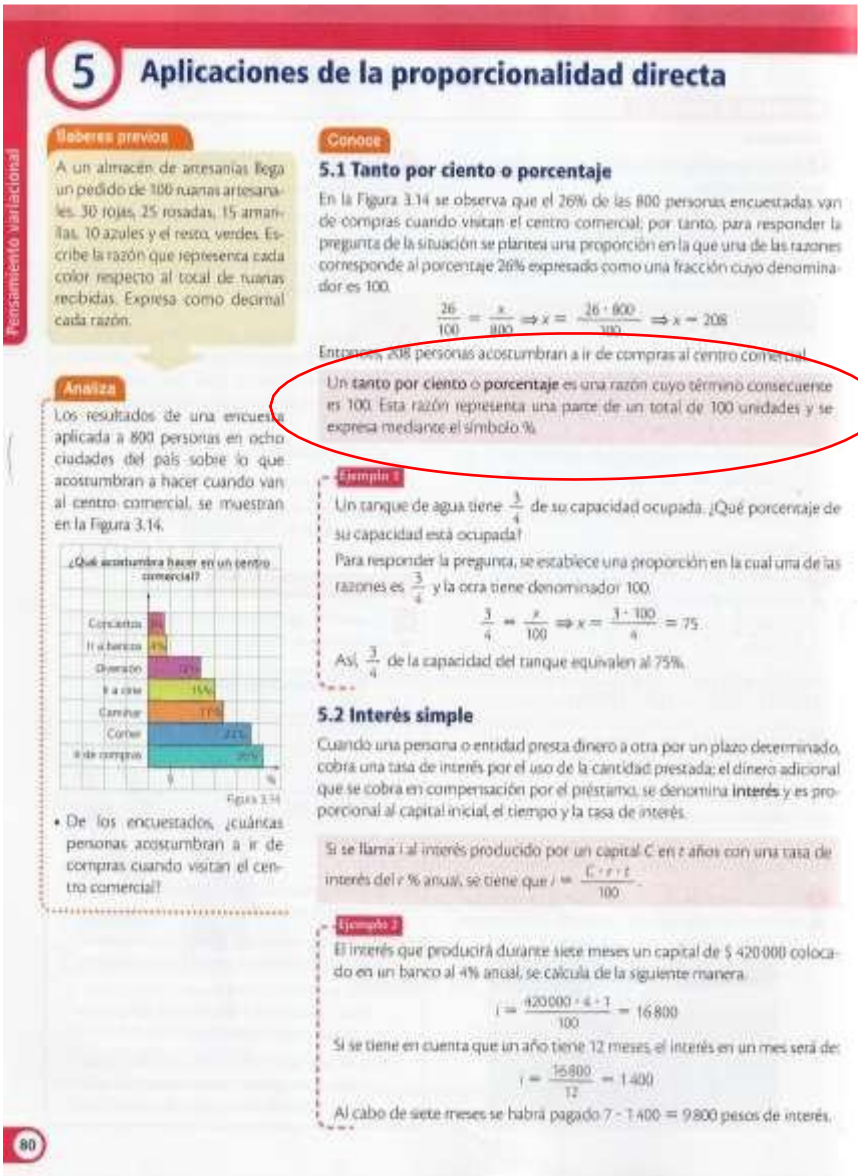
$$\frac{8}{400} = \frac{35}{x} \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 35}{8} = 1\,750$$

Se forma la proporción correspondiente y se halla el valor desconocido.

Por tanto, 35 porciones de queso contienen 1 750 calorías.

Figura 8. Regla de tres según texto “Vamos a aprender” del grado séptimo.

Adicionalmente, y cómo posibles aplicaciones de la PD se muestra en la página 80, los porcentajes y el interés simple, limitando nuevamente un sinnúmero de significados, usos, prácticas y aplicaciones que tiene la PD en aspectos Cotidianos, Científicos, Sociales, Tecnológicos y Escolares. Ver figura 9.



5 Aplicaciones de la proporcionalidad directa

Pensamiento variacional

Saberes previos

A un almacén de artesanías llega un pedido de 100 ruanas artesanales. 30 rojas, 25 rosadas, 15 amarillas, 10 azules y el resto, verdes. Escribe la razón que representa cada color respecto al total de ruanas recibidas. Expresa como decimal cada razón.

Analiza

Los resultados de una encuesta aplicada a 800 personas en ocho ciudades del país sobre lo que acostumbran a hacer cuando van al centro comercial, se muestran en la Figura 3.14.

• De los encuestados, ¿cuántas personas acostumbran a ir de compras cuando visitan el centro comercial?

Conoce

5.1 Tanto por ciento o porcentaje

En la Figura 3.14 se observa que el 26% de las 800 personas encuestadas van de compras cuando visitan el centro comercial; por tanto, para responder la pregunta de la situación se plantea una proporción en la que una de las razones corresponde al porcentaje 26% expresado como una fracción cuyo denominador es 100.

$$\frac{26}{100} = \frac{x}{800} \Rightarrow x = \frac{26 \cdot 800}{100} \Rightarrow x = 208$$

Entonces, 208 personas acostumbran a ir de compras al centro comercial.

Un **tanto por ciento** o **porcentaje** es una razón cuyo término consecuente es 100. Esta razón representa una parte de un total de 100 unidades y se expresa mediante el símbolo %.

Ejemplo 1

Un tanque de agua tiene $\frac{3}{4}$ de su capacidad ocupada. ¿Qué porcentaje de su capacidad está ocupada?

Para responder la pregunta, se establece una proporción en la cual una de las razones es $\frac{3}{4}$ y la otra tiene denominador 100.

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75$$

Así, $\frac{3}{4}$ de la capacidad del tanque equivalen al 75%.

5.2 Interés simple

Cuando una persona o entidad presta dinero a otra por un plazo determinado, cobra una tasa de interés por el uso de la cantidad prestada; el dinero adicional que se cobra en compensación por el préstamo, se denomina **interés** y es proporcional al capital inicial, el tiempo y la tasa de interés.

Si se llama i al interés producido por un capital C en t años con una tasa de interés del r % anual, se tiene que $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$.

Ejemplo 2

El interés que producirá durante siete meses un capital de $ 420 000 colocado en un banco al 4% anual, se calcula de la siguiente manera.

$$i = \frac{420000 \cdot 4 \cdot 1}{100} = 16\,800$$

Si se tiene en cuenta que un año tiene 12 meses, el interés en un mes será de:

$$i = \frac{16800}{12} = 1\,400$$

Al cabo de siete meses se habrá pagado $7 \cdot 1\,400 = 9\,800$ pesos de interés.

80

Figura 9. Aplicaciones de la PD en el texto “Vamos a aprender” séptimo grado.

Analizando el texto de grado octavo, que es el grado de interés para este trabajo, se relaciona la PD con las funciones lineales definiendo en su página 94: “Dos variables x y y están en proporción directa cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción; es decir, si su razón x/y es constante”. Se puede observar que nuevamente se limita la definición, incluso se plantean actividades donde el estudiante puede llegar a una solución e incluso replicar los métodos de solución como la regla de tres. Sin embargo, difícilmente alcanzará un nivel funcional del conocimiento debido a su nula participación en la construcción del mismo.

Finalmente, las mallas curriculares en las Instituciones Educativas – IE – y los planes de área se diseñan, contrario a lo que indica la Didáctica de la Matemática, en los DBA y los Estándares curriculares debido a que los directivos docentes son obligados a manejar indicadores y reportes basados en los documentos mencionados, ver figura 5, provocando una limitación al docente a proponer enfoques diferentes a los designados en los lineamientos, lo anterior genera apatía en el docente hacia el proceso de diseño del currículo afectando directamente el proceso de enseñanza aprendizaje e imposibilitando los procesos de empoderamiento docente cómo los plantea Reyes Gasperini (2014) perpetuando una educación tradicional sin posibilitar la problematización del proceso.

2.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se ha realizado un análisis del origen de la Proporción Directa a través de un recorrido histórico por los momentos en que diferentes culturas usan según sus necesidades el conocimiento para solucionar e interactuar con situaciones de su cotidianidad. Se indaga por las prácticas sociales alrededor de las cuales se genera el conocimiento y se revisa el dME vigente el cual es directriz para las Instituciones Educativas.

Es válido reconocer la importancia que tiene el objeto matemático para el desarrollo de conocimiento en áreas específicas del conocimiento y la posibilidad de interpretación de mensajes en todo tipo de medios transversalizados por la Proporción Directa.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

En este capítulo se presenta el marco teórico que soporta y apoya este trabajo, a saber, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa – TSME – como el sustento teórico que permite el análisis de las prácticas de aula desde un enfoque descentralizado en el objeto matemático para problematizar el saber matemático escolar y plantear desde sus dimensiones un estado del arte que permita el análisis del discurso Matemático Escolar – dME – donde sea posible visibilizar alternativas que le permitan al estudiante resignificar los objetos matemáticos, ser partícipes en la construcción de su propio conocimiento y usarlo funcionalmente a partir de prácticas sociales de referencia.

Se marca una brecha entre los modelos didácticos tradicionales desde la TSME debido a las diferencias entre el conocimiento hegemónico planteado desde el dME, representado en los libros de texto y en las dinámicas de aula tradicionales donde definiendo y deduciendo se tiene la creencia de que se aprende matemáticas (Cantoral, Reyes y Montiel, 2014).

La Teoría Socioepistemológica

Esta teoría tiene sus inicios en la tesis “Un estudio de la formación social de la analiticidad…”, obra considerada el fundamento de esta corriente de pensamiento que ahora denominamos Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa en adelante TSME (Cantoral, 2013 citado en Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel., 2014). Cuando se ve la necesidad de establecer diferencia entre lo que se conoce como Obra Matemática (Matemática pura) y la Matemática Educativa, siendo esta última una disciplina científica que estudia los fenómenos didácticos ligados al saber matemático (Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel, 2014).

Lo que busca la Socioepistemología es entender la construcción del conocimiento matemático como el producto de la misma actividad humana, que se forma durante el desarrollo de soluciones a problemas creados en las interacciones que produce el modo humano de vivir socialmente en un determinado tiempo y contexto. Por tal razón desde las prácticas de aula surge la necesidad de indagar sobre todos aquellos fenómenos y actividades humanas que permiten acceder al conocimiento matemático de una manera natural, consciente con la posibilidad de ofrecer respuesta a una multiplicidad de opciones e intereses que manifiestan los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad, ya sea en transición (párvulos), básica primaria, básica y media. En palabras de Cantoral (2003) “se pasa a definir la Socioepistemología como un corrimiento al problema saber; lo contextualiza, lo sitúa”. (p. 54) citado por Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel (2014).

Por otra parte, la teoría señala el aspecto sociocultural como algo fundamental, porque es desde la misma actividad humana de donde surgen elementos que permiten explicar cómo los seres humanos construyen el conocimiento y a la vez como hace difusión de este. Esta mirada socio-cultural y relativista tiene en cuenta la transposición didáctica en términos de Chevallard citado en Reyes Gasperini (2011), donde se diferencia entre la ciencia matemática, la didáctica de la matemática y la matemática escolar.

Llevado a la práctica, es importante porque para un aprendiz que no comprende porque está mal, se considera su postura y mediante representaciones, modelaciones y argumentaciones, se pasa del “error” al obstáculo. Plantea Cantoral, Reyes y Montiel, 2014, p. 101. Posibilitando así otras formas de interactuar y de acceder al saber, lo que es de gran importancia para los escenarios de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido la Matemática Escolar está en función de responder a intereses y necesidades de los estudiantes y al mejoramiento continuo de los métodos de enseñanza por parte del docente. Es entonces cuando se habla de una matemática Funcional en términos de Cordero, Mendoza y Del Valle (2014) es decir una matemática con sentido y significado desde la propia vida del educando, por lo tanto, se centra en la actividad humana y en el rediseño del discurso Matemático Escolar –dME– pues no se trata de enseñar los resultados de una actividad sino de comunicar la actividad misma. Mostrando las dinámicas y situaciones socioculturales como posibilitadoras de la construcción de ese conocimiento.

La Socioepistemología es de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde cuatro dimensiones:

- **Dimensión Social**: hace referencia a la funcionalidad del conocimiento, tanto en la comunidad y situación donde este se usa y se resignifica. Cantoral, (2013).
- **Dimensión Epistemológica:** se trata de observar los temas relevantes que están presentes en la Construcción Social del Conocimiento Matemático. Cordero, (2001)
- **Dimensión Cognitiva:** reconoce que los objetos son creados a partir de la misma actividad humana y de estos surgen nuevos significados que nacen de la resignificación que el sujeto hace desde sus interacciones con el entorno y las vivencias cotidianas.
- **Dimensión Didáctica**: se centra en la difusión del conocimiento a partir del dME. Cantoral, (2013).

De esta manera la Teoría Socioepistemológica –TSE–, prioriza la forma en la que los sujetos usan la matemática en su contexto socio-cultural, recuperando de alguna manera la forma primitiva de hacer matemática, focalizando la atención en el cómo se construye el conocimiento matemático.

Por tal razón es necesario asumir un cambio de concepción profunda sobre el quehacer de la educación matemática basada en la construcción social del conocimiento, para pasar al rediseño del dME, el cual en palabras de Minguer (2004) citado por Cantoral (2013) aclara que “la estructuración de dicho discurso no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (discurso matemático escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos”.

De esta manera se entiende la importancia que tienen los procesos constructivos de interacción social a la hora de enseñar y aprender las matemáticas. Se establecen entonces desde la TSME un modelo de anidación de prácticas que explica Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel (2015) como se observa en la figura 9 y propone:

> Este modelo articula los siguientes momentos: de la acción directa del sujeto ante el medio, a su organización como una actividad humana situada socioculturalmente, para perfilar una práctica socialmente compartida, que cae bajo la regulación de una o varias prácticas de referencia –la expresión material e ideológica de un paradigma– que a la vez son normadas por la práctica social (Cantoral, 2013 citado en Cantoral, Reyes y Montiel, 2015).

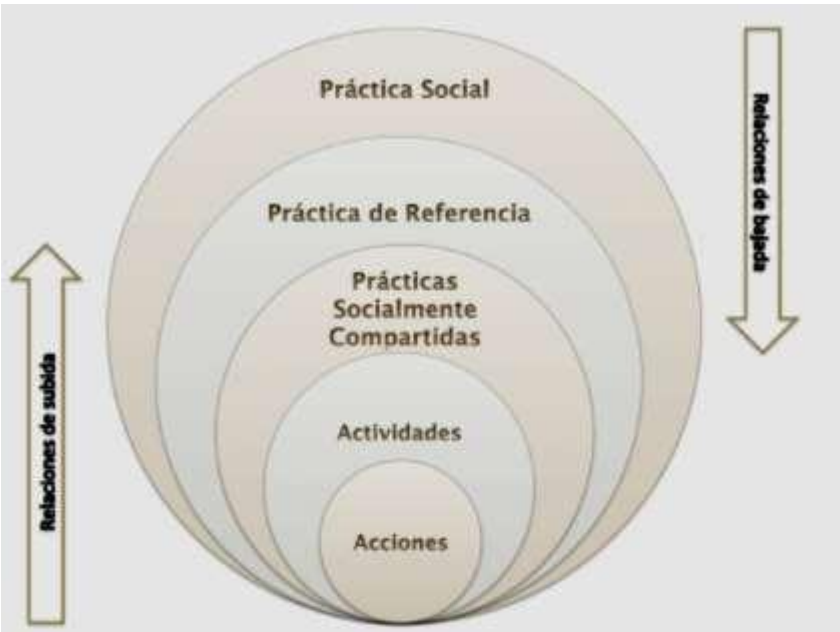


Figura 10. Modelo de anidación de prácticas de la TSME Cantoral, reyes y Montiel (2015).

La TSME ha propuesto una revisión del discurso Matemático Escolar y pretendemos aplicar esta categoría teórica al contexto colombiano a través de las propuestas visibles en la Tabla 1 y llevarlas hasta la Unidad Didáctica.

Es importante aclarar que en esta teoría se tiene en consideración todo tipo de forma de adquisición de saber, ya sea por tradición oral, prácticas técnicas u otra fuente de información, ya que todo esto corresponde a la experiencia humana que es parte importante de la articulación para llegar a la construcción del conocimiento desde el conocimiento puesto en uso Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel (2014) Definen cuatro principios fundamentales, aclarando que no son una secuencia lineal, sino una red nodal: El principio normativo de la práctica social, el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico y el principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada.

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010)	Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013)	Propuesta de dME
Falta marcos de referencia para la resignificación	*Resignificación progresiva*	*Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación*
Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales.	La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo, resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.

Tabla 1. Fragmento extraído de Cantoral, Reyes y Montiel, 2014. Propuestas al dME desde la TSME.

Marco de referencia

Como marco de referencia que permita la resignificación de la PD, se utilizan los modelos de pensamiento proporcional recopilados por Reyes-Gasperini (2011) en los cuales se plantean los distintos tipos de pensamiento proporcional y permite generar una ruta de análisis de las actuaciones de los estudiantes.

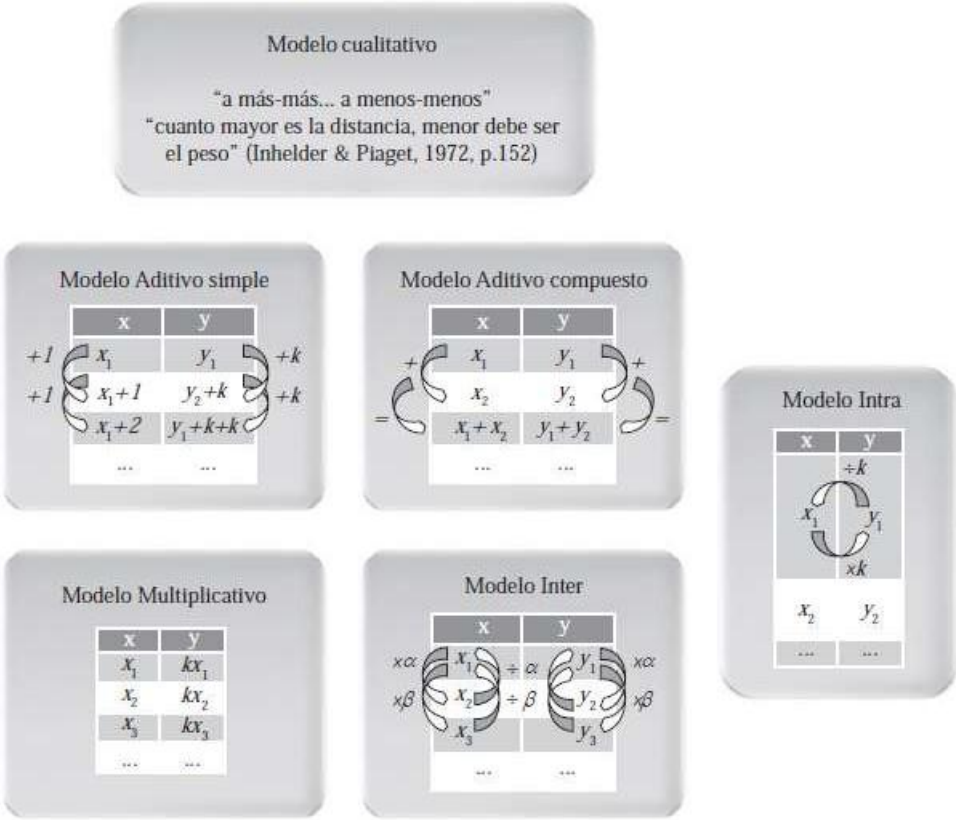


Figura 11. Modelos de pensamiento proporcional sintetizado por Reyes –Gasperini (2011)

Se diseñan entonces actividades enlazadas a cada uno de los modelos de pensamiento proporcional relacionados con la Proporción Directa con la intención de que el estudiante resignifique el objeto matemático y le dé un uso funcional al mismo.

3.1 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

Consideramos que el marco teórico escogido para justificar y sustentar este trabajo, la TSME, brinda la trayectoria académica necesaria para el análisis de la Proporción Directa ya que son diversas las investigaciones en ese campo sobre la noción en cuestión que aportan elementos estructurales y metodológicos para la construcción de este trabajo. Así mismo, la recopilación de los modelos de pensamiento proporcional realizada por la Doctora Daniela Reyes-Gasperini en su libro “La transversalidad de la proporción” permite dirigir las actividades al fomento del desarrollo de resignificaciones por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

De acuerdo con el objetivo general de esta investigación, el cual es, Analizar las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Proporción Directa al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Socioepistemología para las prácticas de aula, La investigación realizará un estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar colombiano, específicamente desde la Didáctica de la Matemática, a partir de una investigación cualitativa y así mismo aplicando un estudio de caso. Se entiende que las implicaciones deben estudiarse analizando la realidad del aula y por ello, se presentan los estudios mencionados, así como como base de análisis y construcción de éste trabajo.

La metodología sigue la línea planteada por Rosas (2015) donde coherentemente se estructura una metodología para este trabajo gracias a la nociones matemáticas relacionadas en ambos, ya que son comparativas y variacionales como la Proporción Directa, es decir, una investigación cualitativa sustentada por Stake (2007) y estructurada según Rosas (2015) que busca el análisis de un fenómeno social como lo es el proceso de enseñanza aprendizaje de la PD en el contexto educativo de dos instituciones de secundaria en la ciudad de Medellín.

El esquema metodológico utilizado también es coherente con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y con algunas adaptaciones para los propósitos de éste trabajo, en la etapa de diseño, se incluyen los análisis a priori y a posteriori desde el estudio de caso a realizar (Stake, 2010), para fundamentar y ajustar permanentemente las actividades para luego construir una unidad didáctica que sea dinámica, adaptable y *resignificativa*, el esquema metodológico adaptado desde la TSME puede observarse en la figura 12.

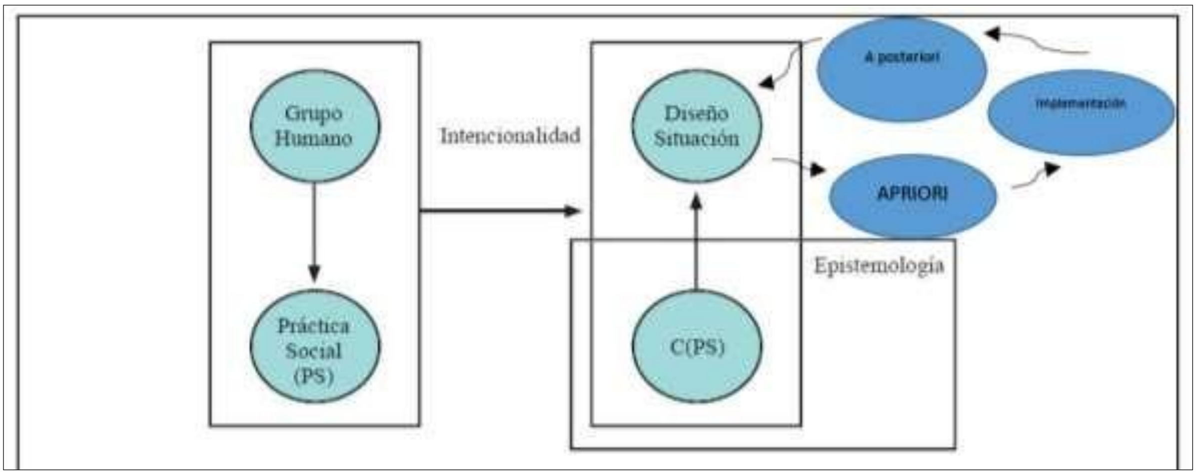


Figura 12. Adaptación del Esquema metodológico propuesto por Morales y Cordero (2014).

Este esquema planteado por los autores, Morales y Cordero (2014), reconoce la fundamentación en las prácticas sociales para la generación de conocimiento por lo cual en este trabajo problematizamos el conocimiento puesto en uso de la Proporción Directa para proponer actividades que estimulen la funcionalidad del conocimiento.

En el momento del diseño de la situación o actividad se tendrá en cuenta el análisis histórico epistemológico realizado en el Capítulo 2 de éste trabajo para extraer en los registros algunas prácticas de referencia, en términos socioepistemológicos, y así contrastar con acciones del cotidiano vivir de los estudiantes, además aporta la epistemología de la PD fundamental para conocer la multiplicidad de significados.

Finalmente, la intencionalidad y la categoría de práctica social, concebidos desde Morales y Cordero (2014), que sirve como argumento para este trabajo, son los modelos de pensamiento proporcional planteados por Reyes-Gasperini (2013) (ver Capitulo 3 de este trabajo), desde donde se diseñan situaciones para cada modelo de pensamiento proporcional y se presentan a los estudiantes para su posterior análisis.

La investigación tiene un corte empírico experimental pues al aplicar un estudio de caso instrumental que según Stake (2007) analiza fenómenos particulares que pueden ser generalizados y se pretende recopilar información sobre los significados que tienen los estudiantes del objeto matemático en el grado octavo, ¿Cómo lo usan?, ¿Qué significa para ellos?, ¿Para qué sirve? y ¿Qué les genera?

A partir de un análisis a priori de las actividades propuestas sobre la Proporción Directa en el contexto escolar, particularmente para el grado octavo, y a partir del marco teórico de la Socioepistemología, se establecen las actividades según prácticas socialmente compartidas donde el estudiante usa la PD y el modelo de pensamiento proporcional que puede utilizar para desenvolverse en dicha situación. A su vez al realizar el análisis a posteriori se ajustarán las actividades y se podrá establecer el uso y el modelo de pensamiento proporcional utilizado por el estudiante

Finalmente, al implementar una unidad didáctica donde se plantean modelos que buscan posibilitar la resignificación del objeto que al validarla en un análisis a posteriori, entendido éste como el uso del conocimiento que hicieron los estudiantes durante la implementación de la unidad, se posibilite la construcción del conocimiento.

4.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Como se menciona anteriormente, el estudio de caso empírico experimental, se realiza con 15 estudiantes del grado octavo de las dos instituciones públicas de la ciudad de Medellín utilizando técnicas como la observación de prácticas y diálogos personales con instrumentos de recopilación de información según disponibilidad de recursos grabación de audio y video, formatos de trabajo y diarios de campo para generar información relevante del proceso de enseñanza - aprendizaje al implementar las actividades propuestas desde la Socioepistemología.

4.1.1 IE El Corazón

La Institución Educativa El Corazón está ubicada en la comuna 13 (San Javier) de la ciudad de Medellín, en el barrio Belencito Corazón, atiende una población aproximada de 700 estudiantes, clasificada según el estado en estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. Cumple una función de servicio social al ofrecer educación pública en los niveles de primaria, secundaria y media. En la figura 13, se presenta la IE El Corazón.

Cabe resaltar que los docentes que desarrollan este trabajo pertenecen cada uno a ambas instituciones educativas. Además, ambas instituciones pertenecen al ente territorial de la Secretaría de Educación de la ciudad de Medellín de la cual dependen 278 instituciones educativas para el área urbana y rural, a las cuales se espera puedan acceder este tipo de investigaciones.

Figura 13. Institución Educativa El Corazón. Imagen tomada de http://www.ieelcorazon.edu.co/index.php

4.1.2 IE Barrio Santander

La Institución Educativa Barrio Santander está ubicada en la comuna 6 (Doce de Octubre) de la ciudad de Medellín, en el barrio Santander, atiende una población de 1700 estudiantes, clasificada según el estado en estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. Cumple una función de servicio social al ofrecer educación pública en los niveles de primaria, secundaria y media, educación para adultos con los CLEI y procesos de aceleración. En la figura 14, se presenta la IE Barrio Santander.

Figura 14. Institución Educativa Barrio Santander. Imagen tomada de http://mmmontoyao.blogspot.com.co/p/institucion-educativa-santander.html

4.1.3 POBLACIÓN

La selección de los estudiantes se realizó mediante convocatoria abierta presentando la invitación para participar en actividades extra clase y fomentar el aprendizaje de las matemáticas; una vez reunidos los interesados se realiza la selección aleatoria en la Institución Educativa Barrio Santander y en la El Corazón y se define la población para el estudio de caso.

Al comenzar la intervención se establecen dos grupos de estudiantes del grado octavo de cada institución educativa participante, Ocho estudiantes de la IE Barrio Santander y siete estudiantes de la IE El Corazón. Ambas instituciones son de carácter público, pertenecen a la entidad territorial certificada de la Secretaria de Educación de Medellín y tiene poblaciones similares en contextos económicos, culturales, académicos y normativos.

4.1.4 Los estudiantes del grado Octavo

En el grado octavo ambas instituciones atienden estudiantes con edades que oscilan entre los 13 y 15 años, incluso se llegan a los 17 años de edad en ese grado, este fenómeno se conoce como “extraedad” y es común en las instituciones públicas de Medellín, sin embargo y para el caso específico de esta investigación, el grupo de estudiantes tiene el rango de edad propio del grado octavo definido por el MEN, el cual es de 13 a 14 años. En la figura 15 se observa las características de una típica aula de una institución educativa en la ciudad de Medellín.

Como puede observarse en la tabla 3, Se recopila la información de los 15 estudiantes que participaron en el desarrollo de la actividad didáctica en ambas instituciones educativas, a saber, los estudiantes E1 a E8 pertenecen a la Institución Educativa Barrio Santander; y los estudiantes E9 a E15 pertenecen a la Institución Educativa El Corazón.


Figura 15. Imagen de un aula típica de la IE Barrio Santander.

ESTUDIO DE CASO INSTRUMENTAL: "Dos Instituciones Educativas con resultados similares."

Se ha definido que el estudio de caso es el método más apropiado para la construcción de este trabajo debido a que permite, en palabras de Stake (2007) analizar fenómenos particulares que puedan ser generalizados en un caso común. Al respecto Stake (2007) plantea:

> Salimos a escena con el sincero interés por aprender cómo funcionan en sus afanes y en sus entornos habituales, y con la voluntad de dejar de lado muchas presunciones mientras aprendemos. Stake (2007)

Para Stake (2007) el caso puede ser un grupo de estudiantes de instituciones educativas, éste los denomina los actores, donde las particularidades de su "*entorno habitual*" se convierten en prácticas socialmente compartidas, en términos de la TSME, así como el "*dejar de lado muchas presunciones*" se puede vincular con el principio socioepistemológico de la *resignificación progresiva*, (ver Reyes-Gasperini, 2011), el cual al fin y al cabo es el objetivo de este trabajo; así como el "*mientras aprendemos*" es la satisfacción de los estudiantes al ser partícipes en la construcción de propio conocimiento.

Realizado el análisis de los resultados de las pruebas externas de estas instituciones y al reconocer que ambas poseen deficiencias en los componentes relacionados con la PD, se establece un estudio de caso con 15 estudiantes de las dos instituciones educativas, seleccionados a partir de un criterio de interés y motivación por el área de matemáticas para lo cual se les convoca a participar en las actividades previas a la postulación de la unidad didáctica y al desarrollo de la misma en grupos de tres estudiantes.

La intención principal es diagnosticar los conocimientos previos que tienen los estudiantes del grado octavo, teniendo en cuenta que según el dME presentado en los lineamientos curriculares, la PD ya fue un tema tratado en ciclos anteriores.

4.1.5 TÉCNICAS, HERRAMIENTAS E INSTRUMENTOS

Se registra la implementación de un cuestionario a través de fotografías de las ideas generadas por los estudiantes con el objeto de establecer los significados aportados en el desarrollo de la actividad. Así mismo se utiliza el registro de audio y video para recopilar significados que puedan llegar a darle los estudiantes y los usos que ellos manifiestan.

La metodología utilizada para la recolección de datos durante las sesiones de trabajo con los estudiantes es la siguiente.

- Se realiza el protocolo de saludo y bienvenida a la actividad y se plantean los objetivos generales y la metodología, así como indicaciones generales.
- Se invita a los estudiantes a integrarse en grupos de tres.
- Se entrega el material de trabajo a cada grupo de trabajo.
- Se registra en audio y video el desarrollo de la actividad en cada sesión.

- Se registra e fotografías las respuestas de los estudiantes.

Se propone entonces, realizar la intervención con los estudiantes en cuatro momentos, donde cada sesión corresponde a una de las actividades propuestas en el análisis a priori, a saber:

1. Momento 1: Sesión donde se realiza la actividad 1 con los estudiantes. Se identifica como M1y se desarrollan aquí las actividades relacionadas con la compra y venta de objetos.
2. Momento 2: Sesión donde se realiza la actividad 2 con los estudiantes. Se identifica como M2 y es el momento de activar los recursos tecnológicos.
3. Momento 3: Sesión donde se realiza la actividad 3 con los estudiantes. Se identifica como M3, se trata sobre sensibilización musical.
4. Momento 4: Sesión donde se realiza la actividad 4 con los estudiantes. Se identifica como M4, estudio geométrico.

A través de los momentos y teniendo en cuenta a los estudiantes será posible visualizar la resignificación de la Proporción Directa en cada uno de ellos.

4.1.6 ANÁLISIS APRÍORI Y SELECCIÓN DE ACTIVIDADES

Como se establece en el capítulo 2, luego de identificar las prácticas sociales que dieron origen al uso del conocimiento matemático, específicamente al uso de la Proporción Directa, planteamos las siguientes actividades con el objetivo de analizar las incidencias en el aula y establecer si al usar el objeto matemático los estudiantes logran Resignificarlo. Son cuatro actividades que relacionan el mismo objeto matemático desde diferentes usos y contextos cuyo objeto es contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje del objeto matemático.

Cabe resaltar que las actividades se diseñan desde prácticas sociales de referencia (ver Morales y Cordero, 2015), para los estudiantes y que cada actividad puede ser desarrollada desde diferentes modelos de pensamiento proporcional en términos de Reyes-Gasperini (2011). Cómo prácticas seleccionadas se plantean las siguientes:

- *Comparación de magnitudes*. El uso de la Proporción Directa para interpretación de datos a través de los porcentajes, comparación de precios y cantidades, así como relaciones entre magnitudes homogéneas y heterogéneas.
- *Relación entre figuras geométricas*. Aplicación del teorema de Tales como uso de la Proporción Directa, al comparar dimensiones de los lados en triángulos.
- *Sensibilización de sonidos*. Surge como un uso escondido en la cotidianidad de los estudiantes.
- *Conversión de unidades y escala*. El uso de las razones proporcionalmente directas para resignificar unidades medidas en una situación dada. Así mismo, la transversalización de la Proporción Directa en otras áreas del conocimiento escolar como las ciencias naturales, las ciencias sociales e incuso el lenguaje.

4.2.2.1 ACTIVIDAD 1 ¿LAS COSAS CAMBIAN? “A COMPRAR EL ALGO”.

La primera actividad pretende que los estudiantes analicen una situación de compra venta en la tienda escolar y que establezcan desde su propio criterio e intereses el costo beneficio de uno u otro producto al comparar la proporción implícita. En la tabla 2, se ilustran los costos y cantidades de diferentes productos, según el interés que manifiestan los estudiantes al momento de realizar sus compras en la tienda escolar, asimismo planteará el uso de los porcentajes como mecanismos de análisis de las situaciones.

El objetivo de la actividad es usar la Proporción Directa para solucionar una situación cotidiana de comparación de productos según las necesidades o gustos de los estudiantes.

PRODUCTO	PRECIO COP	CANTIDAD VENTA	CANTIDAD INDIVIDUAL	PRECIO INDIVIDUAL
Gaseosa marca A	$ 1200	500 ml		
Gaseosa marca B	$ 500	150 ml		
Gaseosa marca C	$ 3000	1250 ml		
Jugo marca A	$ 1000	200 ml		
Jugo marca B	$ 700	150 ml		
Bebida a base de malta A	$ 1200	250 ml		
Bebida a base de malta A	$ 2000	500 ml		
Pastel A	$ 2000	80 gr		
Pastel B	$ 2200	85 gr		
Pastel C	$ 2500	100 gr		
Pastel dulce A	$ 2200	200 gr		
Pastel dulce B	$ 2000	180 gr		

Golosina A	*$ 150*	*25 gr*		
Golosina B	*$ 500*	*40 gr*		
Golosina C	*$ 200*	*20 gr*		

Tabla 2. Actividad 1. Comparación entre magnitudes.

Los estudiantes realizarán la actividad en grupos de tres personas donde podrán seleccionar, de acuerdo a sus preferencias, los productos a comprar y así, calcular los costos que tendrá su alimento a consumir en el descanso. La actividad implica que el estudiante use la Proporción Directa como objeto de conocimiento y a su vez, le brinde un nuevo significado más allá de las expresiones algebraicas que utiliza.

Resignificación del uso de la Proporción Directa en la actividad 1

La resignificación del uso de la Proporción Directa se espera visualizar al momento en que los estudiantes definan que objeto matemático pueden utilizar para calcular los costos de los productos y así escogerlos, independiente de la forma algebraica en que modelen la situación.

4.2.2.2 ACTIVIDAD 2. TALES Y PASCUALES.

En la segunda actividad se busca acercar a los estudiantes al uso de la Proporción Directa desde la geometría, específicamente, en las formas triangulares usando el teorema de Tales para identificar triángulos semejantes y por lo tanto sus dimensiones. Para esta actividad se utiliza el software Cabri como mediador para la construcción y verificación de la proporcionalidad de los lados de los triángulos (ver Zabala, 2015).

En la figura 16, se muestra un ejemplo de construcción de triángulos semejantes a partir del trazo de líneas paralelas a cualquiera de los lados, a partir de allí, el estudiante en forma individual resignifica el uso de la Proporción Directa.

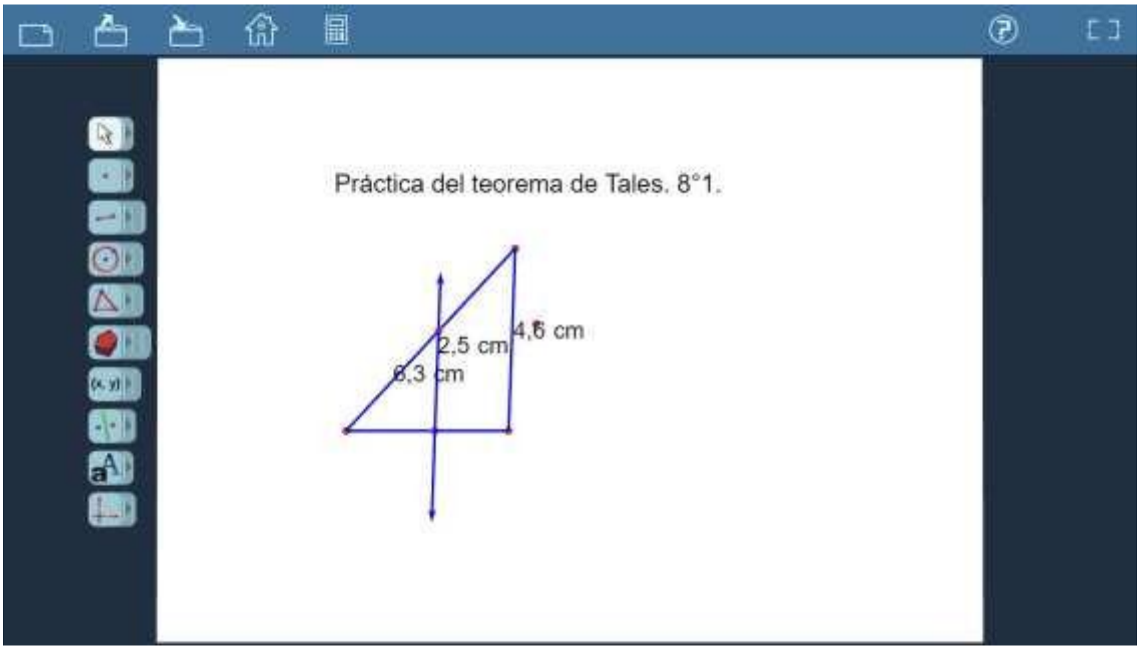


Figura 16. Imagen de actividad realizada en software Cabri.

Resignificación del uso de la PD en la actividad 2

A partir de la construcción de los triángulos rectángulos se espera que el estudiante Resignifique la Proporción Directa logrando proyectar triángulos infinitos como infinitas líneas paralelas a sus lados y en el momento deseado pueda establecer sus dimensiones a partir de la modelación algebraica de la situación.

4.2.2.3 Actividad 3. ¿Y el bajo qué?

La música ha tenido un sinnúmero de significados en la historia de todas las civilizaciones, sin embargo, en esta actividad nos referimos a un fenómeno sonoro específico de la música occidental, la escala "Pitagórica". El sistema musical occidental tiene como base prácticas sociales usadas por los pitagóricos, quienes encontraron una relación proporcional en los sonidos producidos por un instrumento de cuerda.

NOTAS EN EL BAJO (4 Cuerdas)

AFINACIÓN STANDARD

www.elprofedeguitarra.blogspot.com

	4	3	2	1
0	MI	LA	RE	SOL
1	FA	LA# SI b	RE# MI b	SOL# LA b
2	FA# SOLb	SI	MI	LA
3	SOL	DO	FA	LA# SI b
4	SOL# LA b	DO# RE b	FA# SOLb	SI
5	LA	RE	SOL	DO
6	LA# SI b	RE# MI b	SOL# LA b	DO# RE b
7	SI	MI	LA	RE
8	DO	FA	LA# SI b	RE# MI b
9	DO# RE b	FA# SOL b	SI	MI

Figura 17. Bajo eléctrico con el que se realiza la actividad en clase y tabla de notas y ubicación.

Los pitagóricos encontraron que existe una relación (Razón) entre los sonidos graves y agudos y que la consonancia de los mismos logra crear una melodía agradable, dependiendo del tipo de relación establecida. Para crear sus melodías notaron que esta proporción se logra, en un instrumento de cuerda, presionando en puntos específicos del diapasón del instrumento relacionados con la longitud de la cuerda.

Se recupera entonces de (Guitarra & perfil, 2019) una tabla a utilizar en la actividad donde los estudiantes pueden relacionar los sonidos con su ubicación y número de traste para recoger datos y analizar su relación proporcional.

Resignificación del uso en la actividad 3

Al "pisar" una cuerda del bajo eléctrico en un punto específico y medir su longitud es posible determinar que es directamente proporcional a su longitud según los criterios musicales, en la actividad los estudiantes deben modelar y relacionar los sonidos con el punto donde se presiona la cuerda y establecer algebraicamente la constante de proporcionalidad entre uno y otro sonido relacionados.

4.2.2.4 Actividad 4. Escalas.

Otro uso de la Proporción Directa que se busca resignificar se relaciona con el tamaño de los objetos y su representación gráfica, específicamente la fotografía. La actividad consiste en que los estudiantes tomen la fotografía de un objeto, la impriman y luego midan sus dimensiones para establecer una comparación entre las dimensiones físicas del objeto y las dimensiones de la imagen, para calcular la escala y proporción entre el objeto real y su representación pictográfica. En la figura 18, se ejemplifica la relación entre un objeto y su imagen para establecer su escala, según se puede profundizar en la web de dibujo técnico, ver Zarraonandia (2016).

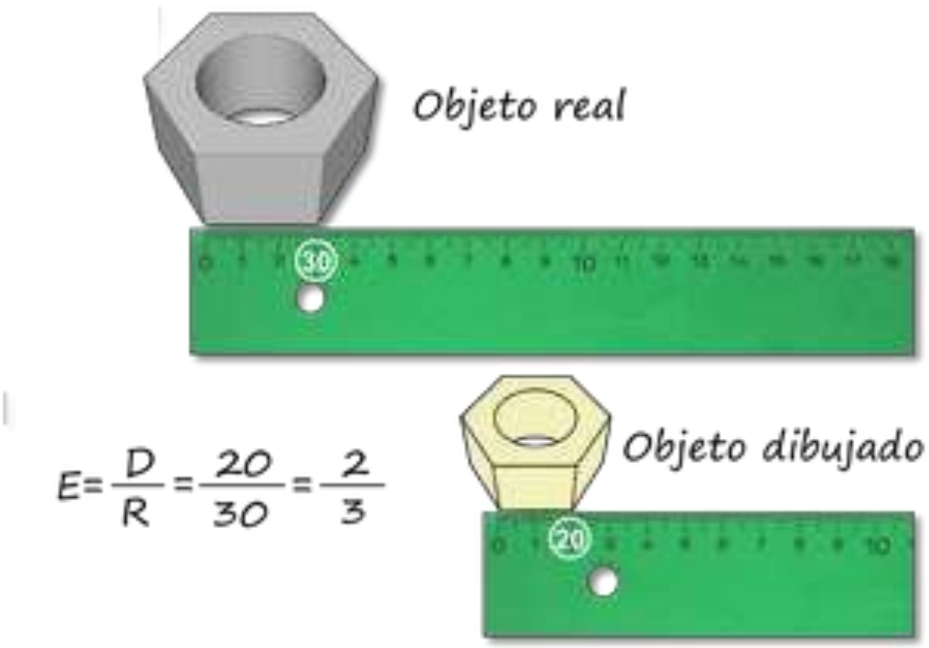


Figura 18. Escalas de un objeto a través de la PD.

Resignificación del uso de la PD en la actividad 4

Al identificar la escala y la conversión de unidades como un uso de la PD, el estudiante resignifica el objeto matemático al reconocer y usarlo y relacionarlo con aplicaciones contemporáneas como la fotografía, la ingeniería y el diseño.

4.3 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS

Como priorización se recogen los datos del trabajo realizado por los estudiantes en los cuestionarios cuyo desarrollo permite visualizar no sólo los modelos de pensamiento proporcional que utiliza sino la resignificación de la PD, así como las grabaciones de las actividades donde se aportan significados progresivamente. Los estudiantes fueron catalogados codificados para su identificación con las letra E seguida del número, así el estudiante número uno, será E1 y sucesivamente se cataloga hasta el E15. Con esta clasificación es posible analizar uno a uno la actuación de ellos.

4.4 ANÁLISIS A POSTERIORI

A continuación, se realizará el análisis a posteriori de las actividades mencionadas según los momentos, estudiantes, modelos de pensamiento proporcional y prácticas de referencia, principalmente la de comparación entre magnitudes, tal como se plantea en el análisis histórico epistemológico y el discurso Matemático Escolar realizado en el Capítulo 2. Para ello, se presenta, en la figura 19, el modelo de Unidad Didáctica presentada a los estudiantes para su desarrollo y resignificación de la Proporción Directa.

Es pertinente resaltar que el análisis a posteriori se realizará en los cuatro momentos, con las actividades, que señala el análisis a priori.

Secretaría de Educación de Medellín
Institución Educativa Barrio Santander
Medellín –Colombia. Carrera 78 C Nº 104 F - 78
Nit. 811.019.724-1 Código Dane 105001012092 Código Icfes 050914 - 191692

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Resignificación del Uso de la Proporción Directa en estudiantes del grado octavo.

Nombre:	
Grupo:	

Objetivo: Posibilitar la expresión de nociones relacionados con la Proporción Directa.

Metodología: La actividad se debe realizar en equipos de tres estudiantes. Responda las siguientes preguntas según la discusión de grupo.

Actividad: ¿Las cosas cambian? Sesión 1. 60 minutos.

Discutan y respondan en grupo las siguientes preguntas:

- Pregunta 1: ¿Qué significa medir?
- Pregunta 2: ¿Qué significa para ustedes la noción "magnitud"?
- Pregunta 3: ¿Qué significa para ustedes la noción "Razón"?
- Pregunta 4: ¿Qué significa para ustedes la noción "Proporción"?
- Pregunta 5: ¿Qué significa para ustedes la noción Proporción Directa?

Actividad: "A comprar el algo". Sesión 2. 60 minutos

Objetivo: es repartición equitativa y no equitativa de los productos comprados para su consumo.

Metodología: Se presenta información con productos consumibles en la cafetería escolar. En grupos de tres estudiantes propongan el presupuesto y los productos a consumir para:

1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 estudiantes.

Deben tener en cuenta las preferencias, la calidad, la cantidad y el costo de los productos. Cada estudiante debe consumir algún líquido, algún comestible y algún dulce.

Lista de productos, precios y cantidad. Precios reales de las cafeterías de colegio.

PRODUCTO	PRECIO COP	CANTIDAD
Gaseosa marca A	$ 1200	500 ml
Gaseosa marca B	$ 500	150 ml
Gaseosa marca C	$ 3000	1250 ml
Jugo marca A	$ 1000	200 ml
Jugo marca B	$ 700	150 ml
Bebida a base de malta A	$ 1200	250 ml

Figura 19. Aparte de la Unidad Didáctica presentada a los estudiantes.

Momento 1. *Comparación de magnitudes.M1.*

En la actividad 1, denominada ¿las cosas cambian? y "A comprar el algo", se puede observar, en la figura 20, cómo los estudiantes perciben la noción de ProporciónDirecta. Nótese el carácter cualitativo de la respuesta del estudiante con relación a la PD, coherente con lo planteado por Piaget & Inhelder, (1984), citado en Reyes-Gasperini, Montiel y

Cantoral (2014) respecto al modelo de pensamiento proporcional. Además, al preguntarle al estudiante E5 por su respuesta, éste señala que la palabra "bien" para él, puede significar lo constante, carácter que manifiesta la PD en su constante de proporcionalidad.

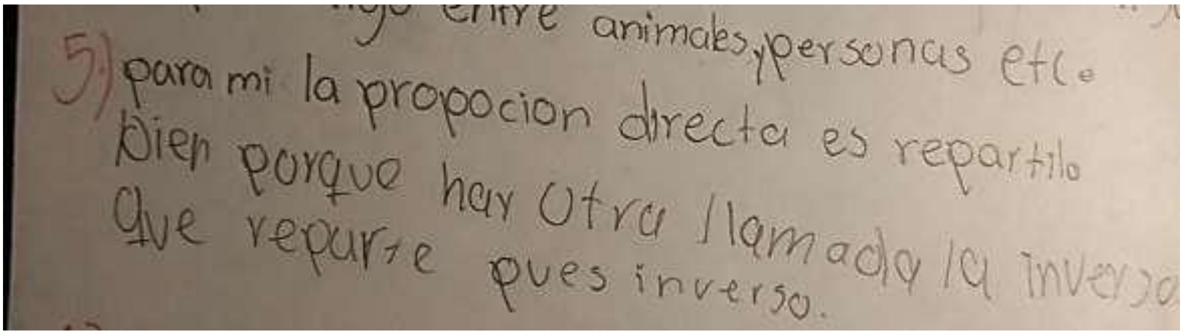


Figura 20. Respuesta del estudiante E5 en M1.

Es importante resaltar la estructura de las expresiones pictóricas que construyen los estudiantes cuando resuelven un problema matemático, en el entorno escolar, para la noción de Proporcionalidad Directa sólo algunos de los estudiantes logran, numérica y algebraicamente, escribir una expresión relacionada con la PD, tal como se muestra en la figura 21.

Se devela también, que los estudiantes utilizan el modelo de pensamiento proporcional *aditivo simple,* propuesto por Reyes-Gasperini (2011). Algunos incluso plantean como una opción según ellos "más complicada" el uso del pensamiento proporcional multiplicativo como opción rápida de acuerdo con la complejidad del ejercicio. En la figura 21, se observa cómo los estudiantes escriben columnas de valores refiriéndose a la suma de los valores, es decir percibiendo el ejercicio desde el modelo de pensamiento proporcional *aditivo simple* (Reyes-Gasperini, 2011).

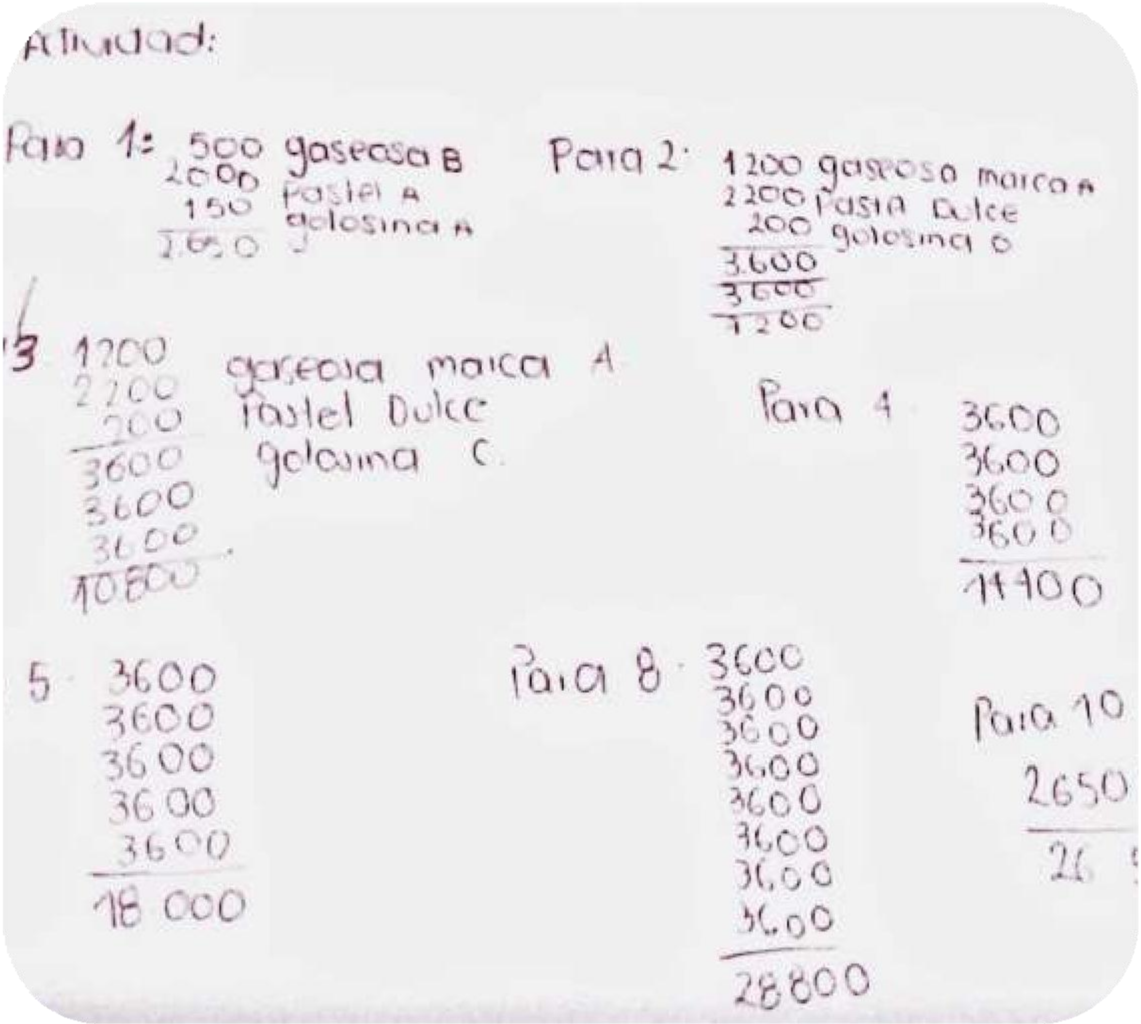


Figura 21. Respuesta de estudiantes E1 y E15 en el M1.

Momento 2. *Relación entre figuras geométricas.M2.*

Con la actividad número dos, denominada “Tales y pascuales”, es importante entender el uso de las TIC como mediador en el aula (ver Zabala, 2015), específicamente el software Cabri, que, si bien no es el objetivo de este trabajo profundizar en su estudio, vale la pena resaltar y potencializar el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje, propuesto como una práctica social de referencia. Ver figura 16.

En este momento, M2, todos los estudiantes logran configurar los objetos y utilizar las herramientas del aplicativo Cabri, las cuales son de fácil gestión para los estudiantes. En esta actividad, los estudiantes establecen a través del teorema de Tales, las razones entre los lados de los triángulos encontrando dos situaciones, la primera relacionada con los modelos *aditivo simple y multiplicativo,* ver Reyes Gasperini (2014) y en la segunda, otro modelo de pensamiento proporcional, esta vez, el modelo *Intra* visualizado en dos estudiantes, E7 y E12, ver figura 21, donde descubre la constante de proporcionalidad y la manipulan multiplicándola y dividiendo.

A pesar de que los estudiantes son de grado octavo, no reconocen la razón aurea, ni pretenden prolongar sus análisis para hallar constantes universales.

Momento 3. *Sensibilización de sonidos.* ¿Y el bajo qué?

El uso de un instrumento musical, en este caso, el bajo eléctrico, obedece sin duda alguna al *empoderamiento docente,* en términos de Reyes-Gasperini y Cantoral (2014) por parte de los investigadores, debido a que uno de ellos interpreta este instrumento y pretende aportar dicho conocimiento a sus prácticas de aula (ver figura 17)

En este momento, el interés de los estudiantes y las ansias por conocer el instrumento mantiene la atención de los estudiantes durante toda la actividad, todos los estudiantes reconocen la relación con la PD y demuestran nuevos significados para la misma.

Cabe anotar que los estudiantes utilizaron el modelo *Inter,* debido a que la constante de proporcionalidad les permite relacionar dos sonidos del bajo eléctrico con una misma nota musical. Dicha situación se desarrolló de manera grupal con una construcción colectiva y participación activa.

Momento 4. *Conversión de unidades y Escala. M4.*

En esta actividad los estudiantes debían reconocer la noción de Escala en términos de la Proporción Directa, para los cual usaron el *modelo de pensamiento proporcional intra* tratado en el capítulo 3, Debido a la necesidad del uso de la conversión de unidades a partir de razones establecidas y la determinación final de la escala del objeto (ver figura 18).

4.5 Hallazgos

Los hallazgos deben estar fundamentados con el análisis de los datos, se deben mostrar las producciones de los estudiantes para soportar las afirmaciones que hacen. De este modo, el lector va comprendiendo el análisis que ustedes ofrecen.

La TSME brinda posibilidades teóricas y metodológicas que permiten resignificar y cambiar la forma de enseñar de los docentes latinoamericanos, tanto así, que durante el desarrollo de este trabajo los docentes fueron caracterizando sus prácticas a partir de los principios de la misma.

Durante los cuatro momentos de la actividad se evidencio que los estudiantes encontraron nuevos significados para un objeto matemático y se dispusieron a *usarlo* a partir de *prácticas de referencia* logrando que todos resignificarán la PD en el sentido de su *uso* y la mayoría utilizar los modelos de pensamiento proporcional.

En el caso analizado, todos los estudiantes demuestran utilizar el modelo *aditivo simple* y el modelo *multiplicativo*, 7 estudiantes de 15, demuestran resolver las situaciones desde el modelo de pensamiento *aditivo compuesto* únicamente, donde otros 6 estudiantes aplican el modelo *Inter* e *intra* para todas las situaciones a pesar de que en los momentos 3 y 4 deben utilizarlos por el diseño propio de la actividad. Tan sólo 2 estudiantes demuestran dificultades con los modelos *Inter e Intra*.

4.6 Diseño de la Unidad Didáctica

La Unidad Didáctica configura para el aula, las actividades analizadas en este trabajo, con el fin de plantear una herramienta con posibilidades de inclusión en el discurso Matemático Escolar y que pueda ser útil a otros colegas docentes. Se basa en la estructura planteada por Escamilla (2000) y por Ríos (2017) para argumentar y presentar las actividades que permitan la resignificación de la PD.

La UD diseñada, recopila los cuatro momentos analizados en cuatro sesiones de clase, dos sesiones, M2 y M4 a realizar en ambientes web por lo que es necesario contar con los equipos de cómputo necesarios, conexión a la red para el uso del aplicativo Cabri y formatos de registro de la actividad. Ver Anexo 2. Unidad Didáctica.

4.7 Conclusiones del Capítulo

La estrategia metodológica implementada ha permitido diseñar actividades fundamentadas en la TSME en diferentes contextos escolares buscando la generación de conocimiento funcional por los estudiantes y comparar los modelos de pensamiento proporcional presentes en el marco de referencia con las estrategias demostrada por ellos durante su desarrollo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

Los datos recopilados durante el desarrollo de este trabajo se relacionan directamente con los modelos de pensamiento proporcional descritos en Reyes-Gasperini (2011) y los fundamentos de la TSME, así como la observación constante de los significados que surgen a partir del uso de la PD por los estudiantes de las instituciones educativas, el momento o sesión aplicado de la Unidad Didáctica y la *resignificación* de la Proporción Directa en términos de Cantoral, Reyes Gasperini y Montiel (2014). En la tabla 3, se muestran los resultados recopilados en el trabajo reportando por cada estudiante participante el tipo de modelo de pensamiento proporcional y el momento de la Unidad Didáctica en el que lo demuestra.

Los estudiantes son categorizados y enumerados para respetar su identidad y permitir comparación entre los modelos de pensamiento proporcional mostrados en el desarrollo de las actividades de la Unidad Didáctica.

EST.	Momentos	Modelos de pensamiento proporcional Reyes-Gasperini (2011)						Resignificación de la PD.
	M1, M2, M3 y M4.	*Cualitativo*	*Aditivo simple*	*Aditivo compuesto*	*Multiplicativo*	*Inter*	*Intra*	
E1		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	Se reconoce en todos los estudiantes que el proceso operativo representa dificultades en algunos momentos. Sin embargo, todos participantes, se apoyan y resignifican la Proporción Directa a través del uso y sin saberlo requieren de
E2		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	
E3		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	
E4		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	

E5		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.			modelos de pensamiento proporcional cada vez más complejos.
E6		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	
E7		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.			
E8		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	
E9		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	

E10		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.		
E11		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.
E12		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.
E13		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.
E14		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.

E15		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 y M4.		M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	M1, M2, M3 Y M4.	

Tabla 3. Resultados del análisis de datos generados.

A modo de sugerencia, dado que el estudiante al momento de abordar una situación problema muestra rasgos de un modelo de pensamiento proporcional, éste puede ser aprovechado por el docente para hacerlo avanzar, con lo cual se enfrenta a un momento de enseñanza según la mirada profesional y didáctica del docente.

Tal como se muestra en la tabla 3, el modelo de pensamiento proporcional denominado aditivo compuesto es un modelo de pensamiento mostrado en 7 estudiantes y no claramente visible en 8 de ellos, asociado, según indagación en los estudiantes, a la versatilidad y agilidad que presentan otros modelos de pensamiento proporcional comparado con éste, lo cual plantea que los modelos de pensamiento proporciona no son algoritmos ejecutables bajo orden definido sino por el contrario, estrategia opcionales a utilizar según la necesidad de los estudiantes.

Particularmente se resalta la solidaridad que manifiestan los estudiantes para con sus pares al momento de recordar conocimientos adquiridos que pueden ser útiles para lograr los objetivos, esta actitud, aunque presente naturalmente en los estudiantes, con los modelos curriculares actuales no es aprovechada en todo su esplendor debido al carácter individualista que se observa en las Instituciones Educativas.

5.1 Conclusiones del capítulo

Se resalta la tendencia mostrada por los estudiantes al momento de realizar las actividades hacia la construcción de su propio conocimiento a través de la acción de compartir la práctica social, lo cual permite la posibilidad de resignificar no sólo el objeto matemático sino también la estrategia o modelo de pensamiento proporcional manifestado inicialmente.

Además, el hecho de que a pesar de la existencia de los distintos modelos de pensamiento proporcional el estudiante según sus necesidades y conocimientos previos seleccione o no un modelo especifico, propone que a partir de uso el estudiante resignifica el conocimiento y no simplemente aplica algoritmos o recetas sin argumentos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Desde el marco teórico de la TSME

La TSME brinda la posibilidad de analizar, contextualizar, reconocer y resignificar el discurso matemático escolar (dME) establecido bajo lineamientos curriculares y políticas educativas centradas en los objetos matemáticos que dificulta la problematización del saber y su generación por parte de los estudiantes al generar fenómenos de exclusión en términos de Soto (2010).

La resignificación como resultado del Uso de la Proporción Directa posibilita al estudiante su participación en la construcción de conocimiento y no lo restringe a la aplicación simples algoritmos memorizables sin sentido alguno.

Desde el objetivo general

Las implicaciones de problematizar el saber desde su Uso y no desde un discurso hegemónico se relacionan con que al resignificar los procesos de enseñanza aprendizaje, éstos se enriquecen desde la multiplicidad de contextos en los que los actores del proceso educativo son parte vital y activa en la construcción del conocimiento.

El proceso de enseñanza aprendizaje para los estudiantes se vuelve más ameno y creativo pues se sienten parte fundamental de un conocimiento que reconocen evolucionado a través de su Uso y se solidarizan con el aprendizaje propio y de sus compañeros.

Desde la pregunta de investigación

Resignificar la Proporción Directa implica crear otros escenarios de aprendizaje en el sentido Socioepistemológico del término, donde los estudiantes Usen y validen los conocimientos desde contextos cotidianos, familiares y transversales a su momento histórico.

La implementación de Unidades Didácticas diseñadas bajo marcos teóricos específicos como la TSME enriquece las prácticas de aula al permitir a los actores del proceso significar y resignificar los objetos matemáticos a conveniencia e interés logrando una funcionalidad de mismo.

Otras implicaciones se relacionan con un fenómeno producido en el docente denominado desde la TSME como empoderamiento, a través de cual el docente también problematiza sus prácticas de aula e incluso logra también resignificar la misma.

Desde los docentes

Existe un resultado colateral cuando el docente reflexiona sobre sus prácticas, problematiza el saber y reconoce la epistemología de los objetos matemáticos y es el empoderamiento docente, fenómeno de potencialización para el desarrollo de la educación matemática.

Desde lo epistemológico

La Proporción Directa es un objeto matemático trascendental en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes pues les permite modelar situaciones cotidianas, relacionar magnitudes en diferentes contextos y potencializa la transversalización de saberes al reconocer su Uso en diferentes áreas del conocimiento como la física, la química, la economía y hasta las estructuras jurídicas.

Desde los antecedentes

A pesar de que la Proporción Directa ha sido objeto de múltiples investigaciones, es evidente, dada su transversalidad en el contexto escolar, la necesidad de continuar con éstas para el beneficio de los sistemas educativos y sus actores. Se resalta el aporte del trabajo de Reyes-Gasperini (2014) en cuanto a la recopilación de los modelos de pensamiento proporcional y se concluye que, si bien éstos existen, los estudiantes usan a conveniencia y agrado el que más se les facilita para cumplir los objetivos.

Finalmente, se invita a continuar con la investigación de objetos matemáticos transversales como lo es la Proporción Directa desde la TSME para el enriquecimiento de los procesos de enseñanza aprendizaje en todos los contextos.

REFERENCIAS

Acosta, J. A., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2010). La resignificación de la noción de linealidad. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 65-73. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.

Cabañas, G., Cantoral, R., Farfán, R., y Ferrari, M. (2013). *Matemáticas 2. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGraw Hill.

Cantoral, R. (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*, Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R. Montiel G. y Reyes - Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28.

Carreteto, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. Anuario de Psicología 42(3), 85–101.

Cordero, Francisco (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* RELIME, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F., Mendoza, J., y Del Valle, T. (2014). Multidisciplina y modelación. Un diálogo entre la ingeniería y la matemática educativa. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1531-1538). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ríos, W. (2017). Modelación y representación con geometría dinámica y matemática condicional en la comprensión del concepto de volumen del prisma (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Medellín, Colombia.

Díaz, L., y Salazar, M. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 207-216). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Escamilla, A. (1995). *Unidades didácticas: una propuesta de trabajo en el aula*. Madrid: Edelvives.

Espallargas, J. M (2004). La aritmética de Boecio y la ritmomaquia: teoría y práctica del juego medieval de los sabios. *Anuario de estudios medievales*, *34*(1), 279-306.

Fernández, A. O., Luis, J., y García, G. F. (2005). *Historia de la matemática*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Freixenet, J. T. (2017). Matemáticas y Movimiento en el Siglo XIV. *Pensamiento Matemático*, *7*(2), 87-99.

García, C. (2014). Desarrollo de la competencia matemática de comunicación a través de la representación de razones y proporciones geométricas en la construcción de situaciones didácticas. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia.

Godino, J. D.; Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. España, Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them? Historia Matemática, 23 (4), 355-375.

Inhelder, B., Piaget, J. (1972). El equilibrio de la balanza. En B. Inhelder y J. Piaget (Ed.), De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales. Buenos Aires: Paidos. pp. 142–155.

El profe de Guitar. (13 de noviembre de 2013). *Notas en el bajo - diapasón (bass notes)***.** [Mensaje en un blog]. Recuperado de http://elprofedeguitarra.blogspot.com/2012/11/notas-en-el-bajo-diapason.html

Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children´s Thinking. Journal for Research in Mathematics Education 24(1), 41–61.

Lamon, S. (1999). Reasoning Proportionally. In S. Lamon (Ed.), Teahcing fractions and rations for understanding. Nueva Jersey, EU: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. pp. 223–238.

Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 319-345.

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Recuperado de http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares de competencia de matemáticas*. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/estudiantes2016

Obando, G., Vasco, C. E., y Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 979-988). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Oller, A. M., y Gairín J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16 (3), 317-338.

Ramírez, M., y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, *21*(1), 63-90.

Reyes–Gasperini, (2011). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Secretaría de Educación Pública.

Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. y Cantoral, R. (2014). Cuando una crece, la otra decrece… ¿proporcionalidad inversa o directa? *Revista Premisa*, *16*(62), 3-15.

Reyes-Gasperini, D., y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, 28*(48), (pp. 360-382).

Rosas, l. (2015). Una visión socioepistemológica del rol de la argumentación grafica en la resignificación del conocimiento matemático en torno a la noción de polígono. (Tesis de maestría). Recuperada del repositorio de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Salazar, M., Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. *ALME 22, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 207-216.

Soto, D. (2010). El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepiste- mológica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, DF, México.

Stake, R. E., (2007). *Investigación con estudio de casos*. España: Morata.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherchers en Didactiques des Mathématiques 10(2), 133 – 170.

Zabala, L., y Parraguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta cabri para el cálculo de volúmenes. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1664-1671). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zarraonandia, I., (8 de septiembre de 2016). *Dibujo Técnico: Escalas*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de https://ibiguridt.wordpress.com/temas/vistas/escalas.

ANEXOS

ANEXO 1

La Unidad Didáctica

Para la construcción de la Unidad Didáctica – UD – se toma la estructura planteada en escamilla (2000), a continuación, se presenta la UD trabajada con los estudiantes.

Área: Matemáticas

Título de la unidad didáctica: Resignificación de la Proporción Directa

No. sesiones previstas 4

Introducción
En esta Unidad Didáctica vamos a usar la Proporción Directa en diferentes actividades con el objetivo de Resignificar su uso y fomentar la generación de conocimiento funcional en los estudiantes.

Objetivos didácticos	**Criterios de evaluación**	**Actividad a realizar**
Actividad 1. Reconocer y usar los significados de la Proporción Directa en una actividad de intercambio comercial.	• Uso de la Proporción Directa • Reconocimiento de la constante de proporcionalidad • Uso de los modelos de pensamiento proporcional establecidos en el marco de referencia.	Solucionar una situación cotidiana de comparación de productos según las necesidades o gustos de los estudiantes.

Actividad 2. Acercar a los estudiantes al uso de la Proporción Directa desde la geometría, específicamente, en las formas triangulares usando el teorema de Tales para identificar triángulos semejantes y por lo tanto sus dimensiones usando e software Cabri Express como mediador.	• Manejo y uso del aplicativo Cabri Express • Reconocimiento y uso de la PD en el teorema de tales partir de las construcciones realizadas. • Uso de los modelos de pensamiento proporcional establecidos en el marco de referencia.	• Construcción de los triángulos rectángulos en el aplicativo. • Construcción y análisis de triángulos congruentes a partir del triángulo inicial. • Proyectar triángulos rectángulos infinitos como infinitas líneas paralelas a sus lados y en el momento deseado establecer sus dimensiones a partir de la modelación algebraica de la situación.
Actividad 3. Modelar y relacionar los sonidos con el punto donde se presiona la cuerda del bajo eléctrico y establecer algebraicamente la constante de	• Reconocimiento de la PD y la constante de proporcionalidad. • Uso de los modelos de pensamiento proporcional establecidos en el marco de referencia.	• Reconocimiento de instrumento musical bajo eléctrico. • Reconocimiento de una nota musical.

proporcionalidad entre uno u otro sonido.		• Medición de la longitud de las cuerdas. • Escucha de un sonido correspondiente a una nota especifica. • Resignificación de la PD. • Determinación de la constante de proporcionalidad.
Actividad 4. Utilizar la Proporción Directa para significar la representación gráfica de un objeto.	• Reconocimiento de la PD y la constante de proporcionalidad. • Uso de los modelos de pensamiento proporcional establecidos en el marco de referencia.	• Medición de las dimensiones de un objeto. • Representación gráfica del objeto en diferentes escalas.

Contenidos

- Segmento, semirrecta, recta, figuras planas.
- Razón.
- Proporción Directa.
- Constante de proporcionalidad.
- Línea recta paralela, Línea perpendicular, Triángulos rectángulos.
- Notas musicales.
- Escala.

Actividades y tareas propuestas	Competencias básicas trabajadas desde la TSME		
	Representación	Modelación	Resignificación
Uso de la Proporción Directa para el cálculo de una tercera magnitud faltante a partir de la constante de proporcionalidad en una situación de reparto equitativo.		X	X
Construcción de triángulos rectángulos en el aplicativo Cabri Express	X	X	
Construcción de triángulos rectángulos congruentes a partir de uso del teorema de Tales.	X	X	X
Medición de longitud de las cuerda de un Bajo eléctrico.		X	
Relación de longitud de cuerda con una nota musical específica.	X	X	
Determinación de la constante de proporcionalidad existente entre la longitud de cuerda y una nota musical.	X	X	X
Medición de dimensiones de un objeto.	X	X	
Calculo de escala adecuada para la representación según contexto.		X	
Representación gráfica del objeto a diferentes escalas.	X	X	X

Metodología

Para cada actividad se plantean metodologías diferentes, a saber:

Actividad 1: Luego de la presentación de la tabla de precios de los productos de la cafetería escolar, los estudiantes reunidos en grupos de tres, deben establecer la mejor forma de repartir los productos usando la PD y la constante de proporcionalidad.

Actividad 2: Para el desarrollo de esta actividad se dispone de un equipo de cómputo para dos estudiantes, de conexión a internet y del aplicativo Cabri Express en el cual se construyen, analizan y resignifican las dimensiones del triángulo rectángulo a partir del teorema de Tales.

Actividad 3: Es requerida la sensibilización del instrumento musical con los estudiantes para fomentar el análisis, luego se deben medir las longitudes de las cuerdas y relacionarlas con una nota musical específica para luego calcular la constante de proporcionalidad entre ellas.

Actividad 4: Medición de las dimensiones de un objeto, cálculo y selección de escala adecuada para su representación gráfica y cálculo de la constante de proporcionalidad.

Atención a la diversidad

Permita que los estudiantes socialicen, discutan y signifiquen cada momento de las actividades.

Retroalimente en forma personalizada cada momento de las actividades.

Permita el acercamiento y sensibilización de todos los estudiantes con el aplicativo Cabri Express y el instrumento musical.

Evite términos o calificaciones despectivas relacionadas con la ejecución de las actividades.

Posibilite al estudiante el uso de métodos y estrategias propias si descalificar ninguna.

Espacios y recursos

Aula de clase y otros espacios disponibles donde el estudiante pueda acomodarse en grupo y discutir con sus pares.

Sala de cómputo y Conexión a internet.

Aplicativo Cabri Express.

Instrumento musical de cuerda, en este caso un Bajo eléctrico con su respectivo amplificador.

Hojas de cálculo y formatos para recopilación y registro de actividades.

Procedimiento de evaluación	Instrumentos de evaluación
Manifestación de argumentaciones que sustenten el uso de la Proporción Directa. Uso de pregunta que buscan resignificar el objeto matemático. Observación de estrategias de acción y uso de los modelos de pensamiento proporcional recopilados por Reyes-Gasperini (2014) Fomentar la significación constante a través de interpretaciones y expresiones de los estudiantes. Estimule el trabajo cooperativo y la construcción social del conocimiento según criterios de la TSME.	Modelos de pensamiento proporcional establecidos en el marco de referencia y socializados con los estudiantes. Entrevista. Debates. Talleres.