



UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

LA RESIGNIFICACIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA EN EL PROCESO DE
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN GRADO NOVENO (14 a 16 AÑOS)

AUTORES:

GERMAN ALBERTO TORO GÓMEZ
JUAN CARLOS VÉLEZ SIERRA
SANUBER LÓPEZ MONTERO

TRABAJO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y
HUMANAS
MEDELLÍN

2018

LA RESIGNIFICACIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA EN EL PROCESO DE
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN GRADO NOVENO (14 a 16 AÑOS)

AUTORES:

GERMAN ALBERTO TORO GÓMEZ
JUAN CARLOS VÉLEZ SIERRA
SANUBER LÓPEZ MONTERO

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dr. JAVIER SANTOS SUÁREZ ALFONZO

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y

HUMANAS

MEDELLÍN,

JUNIO DE 2018

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar damos un sentido agradecimiento a nuestros directores de tesis, Dr. Luis Albeiro Zabala Jaramillo y Dr. Javier Santos Suárez Alfonzo por sus valiosas asesorías y sabios aportes académicos a la presente investigación.

En lo personal agradecemos a:

Mi familia, en especial a mis padres Edilma y Jaime por su constante apoyo; y a mi hermosa esposa Olga por impulsarme a cumplir todos mis sueños (German Alberto Toro Gómez).

A la memoria de mi madre Margarita que decidió morirse joven, y que aun ronda en mis aspiraciones. Al inmenso apoyo de mi padre Carlos, a mi hermana Mónica (chichi) que vive pendiente de su hermano, y a mi hijo Juan Andrés que es lo que más quiero en la vida. (Juan Carlos Vélez Sierra)

A Dios por brindarme fortaleza día a día; a mis hijos Daniel Felipe, Johjann Sanuber, a mis padres María Azucena y Guillermo, a mis hermanas Elvia y Blanca, a mis amigos John Jairo, Hernán Darío, Walter y Oscar por el apoyo oportuno e incondicional. (Sanuber López Montero).

RESUMEN

Esta investigación surge de evaluar los desempeños en pruebas censales SABER de estudiantes del grado noveno en el área de matemáticas, de las Instituciones Educativas Juan de La Cruz Posada y Héctor Abad Gómez de Medellín, Colombia; donde el 88% de los estudiantes se ubicaron en el nivel de insuficiente, acentuándose la dificultad en el componente aleatorio respecto al Uso de la Media Aritmética para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

Al indagar las causas de estos resultados se encontró incidencia directa de las prácticas docentes, que aún presentan de forma tradicional y descontextualizada, el objeto matemático. Lo que implica que no adquiera significado dentro y fuera del ámbito escolar quedándose en una fórmula que el estudiante olvida.

Dicha problemática se abordó considerando trabajar la Resignificación de la Media Aritmética bajo la teoría Socioepistemológica, permitiéndonos dar una mirada distinta bajo la premisa de enfocarnos en las prácticas que dan lugar al concepto y no en el mismo objeto en sí, indagando de esta manera los procesos de producción, adquisición y difusión de nuevos conocimientos, alejándonos del discurso matemático tradicional.

El recorrido histórico epistemológico que se realizó en la presente investigación valida como elemento fundamental en la construcción del concepto, el Uso de la Media Aritmética como un valor que equilibra los excesos y defectos en un conjunto de datos, constante que se hace presente en el diseño de los momentos de intervención.

La metodología empleada es cualitativa con un enfoque empírico experimental bajo un estudio de casos desde Stake (2010). De esta forma se logró dar cuenta del proceso de Resignificación para el cual se diseñó una secuencia didáctica aplicada a un grupo de 20 estudiantes de grado noveno, que hizo evidente los procesos de construcción de estos conocimientos, así las actividades planteadas como las preguntas y entrevista semiestructurada que permitieron inicialmente a partir de un análisis a priori y confrontación con un análisis a posteriori poder profundizar en las prácticas propias y posteriores procesos de razonamiento que conllevan al estudiante a generar relaciones matemáticas basadas en sus propios argumentos y que por lo general no son válidos en el discurso matemático escolar.

Al finalizar la investigación se plantea la necesidad de generar en diferentes escenarios educativos procesos que promuevan en el estudiante la argumentación y generación de nuevos significados basados en su propia experiencia o práctica mediante la interacción con sus pares, procesos que necesariamente están mediados o normados por la práctica social, tal como lo propone la teoría Socioepistemológica.

Palabras Claves: Media Aritmética, Socioepistemología, Investigación cualitativa y Educación básica secundaria.

ABSTRACT

This investigation arises from evaluating the performances in Pruebas SABER census tests of students of the ninth grade in the area of mathematics, of the Educational Institutions Juan de La Cruz Posada and Héctor Abad Gómez of Medellín, Colombia; where 88 percent of the students in the sample were at the performance level of insufficient. The difficulty is accentuated in the random component regarding the use of the Arithmetic Mean to analyze the behavior of a data set. When the causes of these results were investigated, direct incidence of teaching practices was found; who teach the mathematical object in a traditional and decontextualized way; which implies that it does not acquire meaning inside and outside the school environment, remaining in a formula that the student forgets.

The problem was addressed from the Resignification of the Arithmetic Mean under the Socio-epistemological theory. Which gives us a different perspective under the premise of focusing on the practices that give rise to the concept and not the same object itself, thus investigating the processes of production, acquisition and dissemination of new knowledge, which takes us away from the discourse traditional mathematician

The historical and epistemological journey that we carry out in this investigation validates as a fundamental element the construction of the concept, and the use of the Arithmetic Mean as a value that balances the excesses and defects in a set of data. This constant that is present in the design of the intervention moments. To give an account of the process of Resignification we designed a didactic sequence applied to a group of ninth grade students, who made evident the processes of construction of this knowledge. Likewise, the activities proposed, such as the questions and the semi-structured interview, allowed to deepen one's own practices as well as the subsequent processes of reasoning that lead the student to generate mathematical relationships based on their own arguments, and that, in general, these are not Valid in school mathematical discourse.

To finish the investigation, we propose the need to generate, in different educational scenarios, processes that promote in the student the argumentation and generation of new meanings based on their own experience or practice, through interaction with their peers. These processes are mediated or regulated by social practice, as proposed by the Socio-Epistemological theory.

Key Words: Arithmetic Media, Socioepistemology, Qualitative Research, Secondary Basic Education

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se aborda **la Resignificación de la Media Aritmética en el proceso de enseñanza y aprendizaje en grado noveno (14 a 16 años)** desde sus múltiples perspectivas como lo son sus implicaciones epistemológicas, sociales, didácticas y cognitivas entendiendo así la manera en que se produce, adquiere y difunde el conocimiento, características que trabaja la teoría Socioepistemológica.

Al ser consciente de situaciones vivenciales del entorno y las relaciones existentes con la matemática, se puede evidenciar cómo el estudiante puede adquirir herramientas funcionales que le sirven de argumentación que enriquecen su saber mediante la adquisición de los Usos y procedimientos, esto como consecuencia de que se logra normar las prácticas sociales.

Con el fin de alcanzar los fines descritos anteriormente basados en la Resignificación de la Media Aritmética se plantearon los siguientes momentos:

Momento I: “La Media Aritmética como punto de equilibrio”

Momento II: “La Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos”.

Momento III: “La Media Aritmética como valor representativo de un conjunto de datos”.

La situación anterior se planteó tomando en cuenta la construcción de conocimiento a partir de la práctica socialmente compartida de justicia y equidad, tomando distancia del discurso tradicional matemático que se remite a la aplicación de fórmulas ajenas a la construcción del estudiante, por tal razón se efectúa un rastreo o revisión histórico epistemológica de los procesos que dieron origen a la construcción del concepto de Media Aritmética y sus Usos.

En el **capítulo 1** del presente trabajo se desarrolla la problemática que dio origen a la presente investigación, se enuncian los antecedentes de algunas investigaciones realizadas con anterioridad, desde perspectivas como la teoría Socioepistemológica y otras desde la teoría Ontosemiótica y la metodología de proyectos, luego se plantea la hipótesis, así como la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos y una breve conclusión del capítulo que evidencia la necesidad de plantear nuevos Usos al objeto matemático a estudiar.

En el **capítulo 2** se realiza un recorrido histórico–epistemológico del concepto de Media Aritmética con el fin de rastrear significados y Usos que se han dado al concepto a través de la historia en el seno de diferentes culturas; hallando que este concepto tiene como característica fundamental la de equilibrar los excesos y defectos; elemento que se adapta a sus diferentes Usos: punto de equilibrio, reparto equitativo, valor estimativo de una medición y un valor representativo de un conjunto de datos. Finalmente se incluye un breve recorrido de otras medidas de tendencia central y sus características, haciendo énfasis en lo que concierne a nuestra investigación.

En el **capítulo 3** se describen los aspectos principales de la teoría Socioepistemológica que sustentan nuestra investigación, como lo son el proceso de Resignificación, de práctica social; aspectos que permiten analizar la adquisición del conocimiento desde diversas perspectivas de carácter epistemológico, social, didáctico y cognitivo.

En el **capítulo 4** se plantea el diseño metodológico de la investigación y se describen procesos como la investigación cualitativa, el estudio de casos, el contexto de la investigación y sus participantes, los instrumentos empleados, finalmente se explica la estructura de los momentos de intervención con sus actividades respectivas.

En el **capítulo 5** se analizan los datos resultantes de las actividades de intervención y de la entrevista semiestructurada, divididos en dos tipos de análisis: el análisis a priori de las actividades y el análisis a posteriori de las mismas, describiendo finalmente los hallazgos resultantes de la intervención.

Las conclusiones finales se plasman en el **capítulo 6**, en relación con los aspectos histórico–epistemológico, el marco teórico, los objetivos propuestos, y a la problemática planteada en la investigación.

Índice

AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	4
ABSTRACT.....	5
INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO 1	11
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	11
PROBLEMÁTICA.....	12
1.2 ANTECEDENTES.....	14
1.3 HIPÓTESIS.....	18
1.4 PREGUNTA PROBLEMA	18
1.5 OBJETIVO GENERAL	18
1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
1.8 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	18
CAPÍTULO 2.....	20
ASPECTOS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE LA MEDIA ARITMÉTICA.	20
2.1 LA ESTADÍSTICA.....	21
2.2 MEDIA ARITMÉTICA O MEDIA.....	22
2.2.1 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO.....	22
2.2.2 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO REPARTO EQUITATIVO.....	23
2.2.3 LA MEDIA ARITMÉTICA EN LA ESTIMACIÓN DE MEDICIONES.	23
2.2.4 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO UN VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.	24
2.3 LA MEDIANA.....	25
2.4 LA MODA.....	26
2.5 DIAGRAMA DE PUNTOS	27
2.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	28
CAPÍTULO 3.....	29
MARCO TEÓRICO.....	29
3.1 LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA	30
3.2 DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR	31
3.2 LA RESIGNIFICACIÓN	31
3.3 PRACTICA SOCIAL.....	32
3.4 PRACTICA SOCIAL DE JUSTICIA EQUIDAD O MEDICIÓN JUSTA	33

3.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	33
CAPÍTULO 4.....	34
DISEÑO METODOLÓGICO	34
4.1 INVESTIGACIÓN CUALITATIVA Y ESTUDIO DE CASOS	35
4.2 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES	35
4.3 ESQUEMA METODOLÓGICO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA	36
4.4 TÉCNICA E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN.....	38
4.5 MOMENTOS DE INTERVENCIÓN Y DISEÑO DE ACTIVIDADES.....	39
4.5.1 MOMENTO I: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO.	39
4.5.2 MOMENTO II: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO EL VALOR QUE EQUIPARA LOS EXCESO Y DEFECTOS.....	39
4.5.3 MOMENTO III: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.	40
4.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO	40
CAPÍTULO 5.....	41
ANÁLISIS DE DATOS	41
5.1 ELEMENTOS MATEMÁTICOS QUE JUEGAN UN ROL FUNDAMENTAL EN EL CONCEPTO DE MEDIA ARITMÉTICA.	42
5.2 ANÁLISIS DE DATOS	43
5.2.1 ANÁLISIS A PRIORI DEL LOS MOMENTOS DE INTERVENCIÓN.....	43
5.2.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LOS MOMENTOS DE INTERVENCIÓN.....	57
5.3 ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA	66
5.3.1 ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA	66
5.3.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA.....	67
5.4 HALLAZGOS.....	69
5.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO	71
CAPÍTULO 6.....	72
CONCLUSIONES	72
6.1. EN RELACIÓN CON LOS ASPECTOS HISTÓRICOS–EPISTEMOLÓGICOS.....	73
6.2. EN RELACIÓN CON EL MARCO TEÓRICO	73
6.3. EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS.....	74
6.4 EN RELACIÓN CON LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	75
6.5 PROYECCIONES.....	76
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

ANEXO 1: MOMENTOS DE INTERVENCIÓN.....	81
1.2 MOMENTO I: ACTIVIDAD 1.....	81
1.2. MOMENTO I: ACTIVIDAD II.....	85
1.3 MOMENTO II: ACTIVIDAD I.....	88
1.4 MOMENTO II: ACTIVIDAD II.....	92
1.5 MOMENTO III: ACTIVIDAD I.....	95
ANEXO 2: UNIDAD DIDÁCTICA.....	97
MOMENTO I: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO DE UN CONJUNTO DE DATOS.	97
ACTIVIDAD I: PUNTO DE EQUILIBRIO EN UNA PALANCA.	97
ACTIVIDAD II: MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO.	100
MOMENTO II: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO EL VALOR QUE EQUIPARA LOS EXCESO Y DEFECTOS.	102
ACTIVIDAD I: MEDIA ARITMÉTICA COMO EL REPARTO EQUITATIVO.....	102
ACTIVIDAD II: MEDIA ARITMÉTICA COMO LA ESTIMACIÓN REAL EN UNA MEDICIÓN.....	105
MOMENTO III: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.	107
ACTIVIDAD I: MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.....	107

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo presenta la problemática y el contexto en que surge; además se describen los resultados de algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas referente a la Media Aritmética; así como los objetivos a desarrollar en esta investigación.

PROBLEMÁTICA

Esta investigación surge a partir del análisis de los resultados de los estudiantes en el grado noveno de las Instituciones Educativas Juan de la Cruz Posada y Héctor Abad Gómez, durante los años 2014 y 2015 en el área de Matemáticas en las PRUEBAS SABER, definida esta como evaluación estandarizada de competencias básicas, cuyo propósito es evaluar lo que los estudiantes saben hacer en contexto con lo que aprenden, con el fin de mejorar la calidad de la educación en Colombia. Esta prueba es aplicada en todas las instituciones educativas del país en los grados tercero, quinto, noveno y undécimo por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior – ICFES–, en coordinación con el Ministerio de Educación Nacional –MEN–. Cabe aclarar que en el área de matemáticas las competencias evaluadas son comunicación, razonamiento y solución de problemas.

Los resultados obtenidos en estas PRUEBAS SABER evidencian una problemática sentida en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas ya que en el grado noveno el 88% de los estudiantes se ubicaron en los niveles de insuficiente y mínimo, específicamente centrándose la debilidad en el componente aleatorio, donde las dificultades se acentúan en la Media Aritmética en las competencias evaluadas: en *comunicación* con respecto a la representación de un conjunto de datos e identificar sus diferencias en diversas distribuciones; comparar e interpretar datos que provienen de contextos reales; traducir y analizar la pertinencia entre diferentes representaciones de un conjunto de datos; en *razonamiento* para fundamentar conclusiones y argumentaciones; y en la *resolución de problemas* que requieran su uso e interpretación para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

Al analizar las principales causas de estos resultados se encuentra una incidencia directa de las prácticas pedagógicas de los docentes de estas instituciones en la enseñanza de la estadística, que concuerdan con resultados de diversas investigaciones. En primer lugar a esta asignatura se le presta menos atención que otras ramas de la matemática (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994); es programada en los últimos meses del año sin darle la importancia debida y a veces sin llegar a ser tratada (Huayanca, 2008) y en el mejor de los casos se exponen formalmente, con pocos ejemplos de aplicaciones reales (Micheli, 2010); además de dificultades relacionadas con la ausencia de contextos diferentes del matemático, para abordar los contenidos de secundaria; lo que genera en los estudiantes una actitud negativa hacia el estudio de la matemática (Díaz, 2010) y en especial a considerar la estadística como monótona y aburrida por la presentación tradicional de contenidos (Behar, 2004) al no enseñarlos con la profundidad que merecen; a todo lo anterior se le suma la falta de preparación de los profesores en el área (Font, 2008).

Estas actitudes negativas de los docentes frente a la enseñanza de la estadística, conllevan a que conceptos como la Media Aritmética se aborden de forma tradicional y rutinaria haciendo una presentación descontextualizada del objeto matemático y utilitaria, es decir, que el concepto no adquiere significado dentro y fuera del contexto escolar convirtiéndose en un acto de aplicación de fórmulas en la cual el estudiante no logra, en la mayoría de los casos, extrapolar dicho conocimiento a otras situaciones o contextos y luego las olvida (Rosas, 2013).

A esto le sumamos que la Media Aritmética es considerada por los docentes como un concepto aparentemente simple, ignorando su complejidad, transversalidad y acepciones que la didáctica tradicional no hace explícitas (Rondero y Font, 2015), por ejemplo en la construcción de otros conceptos matemáticos juega un papel determinante, como afirma Rondero (2010) "... la noción de promediación, considerada a su vez como una idea germinal, en el sentido de que de ella se desprenden definiciones, teoremas y teorías, identificadas todas ellas como categorías constructivas del conocimiento matemático" (p. 388). Esta propiedad hace que la Media sea transversal a diferentes campos de la matemática como el cálculo, la estadística, la geometría y la aritmética, así como a otras ramas del conocimiento.

Con base a lo anterior cabe resaltar la desarticulación didáctica que se manifiesta en el sentido de que no se hacen explícitas las relaciones conceptuales entre los diferentes tipos de promedio que aparecen en la matemática escolar hasta la avanzada, así como sus diferentes representaciones y usos sociales (Rondero, 2010).

Por otra parte es oportuno mencionar que la formación de ciudadanos en estadística ha jugado un papel determinante en el desarrollo económico, científico y cultural de los países; ya que permite el manejo adecuado de la información, es fundamental para ubicarse en el mundo actual, su conocimiento se requiere en cualquier campo profesional, fomenta el pensamiento crítico y ayuda a comprender otros temas del currículo; razón por la cual se ha incluido al currículo de Matemáticas (Batanero, 2000). En Colombia en 1996, en el proceso de construcción de lineamientos curriculares reconociendo los aportes, avances y logros de la renovación curricular, se incorporan nuevos elementos provenientes de las investigaciones en el campo de la educación o didáctica de la matemática, nuevos enfoques y tendencias para la orientación de la matemática en contextos escolares y las nuevas perspectivas sobre la matemática escolar y sus propósitos formativos.

Esto llevó a la construcción participativa de tres documentos publicados por el MEN, en primer lugar los Lineamientos Curriculares de Matemáticas –LCM– y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas –EBCM– donde se describen los elementos que deben orientar el desarrollo del proceso de enseñanza, centrado en la integración de las matemáticas en un contexto de situaciones problemas, con una visión global e integral; basándose en tres grandes aspectos: los Procesos, los Conocimientos Básicos y el Contexto. Por último se publicaron los Derechos Básicos de Aprendizaje –DBA– que permiten conocer qué debe saber un estudiante de acuerdo al año escolar que esté

cursando. En todo este trabajo se enriqueció la perspectiva respecto a la naturaleza e importancia de contribuir al desarrollo del pensamiento aleatorio.

Sin embargo, el esfuerzo por incluir la estadística dentro del currículo no ha dado los frutos esperados, ya que persiste la presentación descontextualizada y desarticulada de los conceptos, alejados de los aspectos históricos que permitieron su origen y desarrollo.

1.2 ANTECEDENTES

En este apartado se reportan algunas investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática sobre la Media Aritmética desde diferentes perspectivas, donde se analizaron las implicaciones didácticas de abordar este objeto matemático en diferentes niveles educativos tanto con estudiantes como con docentes en formación. Esto nos permite tener un marco de referencia al respecto de otros estudios y un antecedente de los resultados que se han obtenido en relación a esta investigación.

En primer lugar se abordarán las investigaciones realizadas desde la teoría Socioepistemológica, las que hemos encontrado ya que son escasas las propuestas que abordan este objeto matemático; luego se reportan los trabajos realizados desde el enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, donde se ha centrado la mayor parte de las investigaciones y por último se abordaran algunos trabajos realizados en nuestro país bajo la metodología de la enseñanza de la estadística por proyectos.

Bajo la teoría Socioepistemológica encontramos la tesis de maestría realizada por De la Cruz (2007) denominada “Un estudio sobre la construcción social de la noción de promedio en un contexto probabilístico”; este trabajo es desarrollado en México con estudiantes de ingeniería del Instituto Politécnico Nacional –IPN– y tuvo como objetivo identificar los factores que hacen que el alumno transponga la noción de Media Aritmética a la de valor esperado, así como detectar los elementos que deben ser tomados en cuenta para una correcta aplicación del promedio en un contexto probabilístico y establecer así el vínculo entre estas dos nociones. Para tal fin el investigador analiza los planes de estudio y libros de texto de los niveles básico, secundario y superior del sistema educativo; además realiza un estudio histórico–epistemológico sobre el promedio. A partir de esto crea una unidad de intervención para describir la construcción social de la noción de valor esperado, dividida en tres etapas, que le permite clasificar algunos significados que los estudiantes tienen de la Media Aritmética según el contexto donde la usan, como calificación final, una fórmula, un punto de equilibrio, una cantidad más cercana a todas, una distribución equitativa, un estándar, lo más frecuente, aquello que da una idea general y la regularidad de una cantidad numérica. Esta investigación permite identificar algunos significados que los estudiantes le dan al objeto matemático de acuerdo a los Usos que realizan del mismo en su contexto.

Desde el enfoque Ontosemiótico se destacan las investigaciones lideradas por el Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada –GEEUG–, entre los cuales encontramos trabajos de campo, tesis de maestría y de doctorado.

Comenzando con el trabajo de campo realizado por Batanero, Godino y Navas. (1997), denominado “Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios”, cuyo objetivo era explorar los conocimientos y dificultades sobre la comprensión de los contenidos básicos estocásticos que se incluyen en el currículo. Para tal fin se analizaron las respuestas de estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la universidades de Granada y Minnesota a un cuestionario escrito que incluye cuatro ítems de opciones múltiples sobre distintos aspectos interpretativos de la Media Aritmética, además una serie de entrevistas aplicada a una muestra de estos, encontrando errores y dificultades como la falta de comprensión del algoritmo de cálculo de la Media Aritmética, el desconocimiento de la relación entre Media, mediana y moda en distribuciones no simétricas y de aplicación práctica del concepto de promedio. De acuerdo con las conclusiones de este estudio, se referencian algunas dificultades comunes que presentan los estudiantes en la comprensión y aplicación de la Media.

En esta misma línea teórica se encuentra el trabajo: “Significado y comprensión de las medidas de posición central” realizado por Batanero (2000), quien a partir del análisis documental de diversas investigaciones reportadas hasta la fecha desde diferentes perspectivas teóricas, sobre las dificultades que los estudiantes pueden encontrar en la comprensión de las medidas de tendencia central, encuentra que están relacionadas con obstáculos epistemológicos como la estimación de un valor real, el reparto equitativo, la propiedad representativa de un conjunto de datos y la Media como valor esperado. Este hallazgo nos permite identificar las dificultades epistemológicas que los hombres han afrontado en la construcción de la Media, así como los obstáculos que los estudiantes presentan en la construcción de este objeto matemático.

Otra investigación en esta línea es desarrollada por Cobo (2003), quien realiza una tesis doctoral titulada: “El significado de las medidas de posición central en estudiantes de secundaria”; un estudio teórico-experimental desarrollado en España con estudiantes entre los 15 y 16 años de los grados de inicio y finalización de la Educación Secundaria, analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal; empieza con un análisis epistémico de libros universitarios para obtener un significado institucional de referencia, luego analiza los lineamientos curriculares para la educación en España y otros países, posteriormente hace un análisis cualitativo a una muestra de 21 libros de texto, a partir de lo cual identifica el significado local de las medidas de posición central; posteriormente aplica dos cuestionarios a una muestra de 312 estudiantes; el análisis cuantitativo permitió concluir que los significados de las medidas de posición central tiene un carácter multidimensional al encontrarse significados personales diferenciados para el mismo nivel de enseñanza; al igual que en estudios anteriores los alumnos tienen dificultades para calcular la Media ponderada ya que los estudiantes la asocian con la Media Aritmética. Esta investigación permite referenciar los significados que los estudiantes

asocian a las medidas de tendencia central, en especial a la Media Aritmética, al igual que los considerados tradicionalmente en los planes de estudio.

Así también, en Mayén, Cobo, Batanero, y Balderas. (2007) en la investigación “Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales”, iniciada a partir de la aplicación de un cuestionario a una muestra compuesta por 643 estudiantes, cuyas edades están comprendidas entre los 17 a 18 años, que pertenecían a dos niveles: 481 de bachillerato que estaban matriculados en seis centros de estudios científicos y tecnológicos del IPN, y 162 de secundaria que asistían a otras dos instituciones, encontraron que estos presentan dificultades al reconocer la mediana como mejor promedio de datos ordinales, se les dificulta el cálculo de Medias ponderadas, el cálculo de la mediana a partir de un gráfico, la comparación de datos ordinales, incluso en un contexto no es intuitiva y lo es menos para los estudiantes de bachillerato, es decir que los estudiantes mexicanos que finalizan la educación secundaria tienen dificultades en la comprensión de los conceptos de Media, mediana y moda. Para finalizar los investigadores sugieren enriquecer la enseñanza de las medidas de tendencia central con tareas más próximas a la vida cotidiana del estudiante, incrementando así su cultura estadística. Este hallazgo está en concordancia con los objetivos propuesto en este trabajo en relación a la construcción social del conocimiento matemático.

Un trabajo más reciente sobre los significados de la Media, mediana y moda, lo realizó Mayén (2009) en su tesis doctoral “Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato”, dando continuidad a la realizada por Cobo (2003), con alumnos que oscilan entre los 13 y 19 años de edad. En ella se hace un estudio especial sobre la comprensión de estos conceptos y se realiza, además, un análisis semiótico de las respuestas de los alumnos a los ítems que involucran el concepto de la Media. Se encontraron resultados importantes como el hecho de que persisten en los estudiantes ciertas dificultades, como por ejemplo, confundir las definiciones de Media y mediana, siendo el cálculo y la interpretación de la mediana más complicado que el de la Media. Tampoco identifican de manera correcta los problemas que involucran el Uso de la Media ponderada, causando conflictos y errores en su solución.

Otra dificultad encontrada en esta investigación es que no consideran el efecto que causa los valores atípicos sobre el cálculo de la Media, ignorando la representatividad del mismo. Aquí, es preciso recordar que las medidas de tendencia central se aplican a todo el conjunto de datos –distribución– más bien que a individuos. Otros conflictos que se encontraron están relacionados al cálculo de la Media de un conjunto de datos agrupados presentados por medio de tablas de frecuencias, así como también la estimación de valores e interpretación de datos a partir de gráficos estadísticos. Esta investigación a pesar de tener un enfoque centrado en el objeto matemático, nos permite identificar dificultades que enfrentan los estudiantes en la aplicación de la Media Aritmética.

A nivel de Colombia encontramos investigaciones sobre este objeto matemático bajo la metodología de proyectos propuesto por Batanero y Díaz, (2011), como la tesis de maestría de Molina y Suarez (2015) denominada “Unidad didáctica para la enseñanza de la estadística en los grados 6º y 7º”, realizada en la universidad de Antioquia basada en un enfoque constructivista, este trabajo inicia con el diseño de una prueba diagnóstica sobre la apropiación del nivel conceptual de la estadística descriptiva, la que posteriormente aplican a 70 estudiantes de los grados Sexto y Séptimo de la Institución Educativa San Vicente Ferrer, donde se identificó que los mejores desempeños se logran en la competencia comunicativa, estos dan cuenta de un nivel de comprensión básico del lenguaje de la Estadística, es decir, reconocen símbolos, representaciones gráficas, medidas de tendencia central como la moda y escalas de representación de datos; en las preguntas concernientes a la resolución de problemas, menos del 50% de los estudiantes lograron responder correctamente a estos ítems; en la competencia de razonamiento los estudiantes no lograron establecer la relación parte todo empleando el porcentaje; en este caso se puede apreciar la falta de apropiación y aplicación de conceptos matemáticos básicos, por parte de los estudiantes, para el desarrollo de procedimientos que les permitan abordar una situación haciendo un análisis adecuado. Esta investigación nos posibilita identificar preconceptos matemáticos que afectan el desarrollo de las competencias matemáticas en relación a la Media Aritmética.

En esta misma línea se desarrolla el trabajo de maestría realizado por Casallas (2016) titulado “Comprensión de las medidas de tendencia central a partir de una propuesta pedagógica basada en estadística con proyectos”; desarrollada en el Colegio Orlando Fals Borda IED de Bogotá con 16 estudiantes del grado sexto, donde se abordan las dificultades que tienen cuando hacen uso de las medidas de tendencia central; y se plantea como estrategia metodológica para su comprensión la enseñanza de la estadística con proyectos y el marco de la Enseñanza para la Comprensión de Gardner, Goodman y Perkins. Al proyecto se le da un enfoque cualitativo y se desarrolló en tres etapas; a partir de las cuales se pudo concluir que la metodología basada en proyectos le permite al docente reconocer al estudiantes en su contexto transformando el escenario escolar, además permite desarrollar el pensamiento aleatorio y potencializa las habilidades de los estudiantes frente al Uso comprensivo de las medidas de tendencia central para hacer análisis de datos. Este estudio nos da pautas sobre las virtudes de diseñar actividades de intervención donde se incluya el contexto del estudiante.

Cabe destacar que la mayor parte de las investigaciones rastreadas están centradas en el objeto matemático –Media Aritmética– y no analizan los aspectos sociales y culturales que llevaron al hombre a la construcción y desarrollo de este, por esta razón esta investigación a diferencia de las anteriores referenciadas, tuvo como elemento diferenciador el poder considerar los elementos históricos, sociales y culturales propios de la génesis del objeto matemático de estudio.

1.3 HIPÓTESIS

Entendiendo la complejidad de interpretaciones de la Media Aritmética como un concepto matemático funcional, es posible con el diseño e implementación de una Unidad Didáctica orientada hacia sus usos, con respecto a punto de equilibrio, reparto equitativo, estimación de mediciones y valor representativo de un conjunto de datos, lograr la Resignificación de este objeto matemático en los estudiantes.

1.4 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje al implementar una Unidad Didáctica en grado 9° fundamentada en la Socioepistemología para la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos y el desarrollo de competencias matemáticas?

1.5 OBJETIVO GENERAL

Analizar las implicaciones en la enseñanza aprendizaje al implementar una Unidad Didáctica para la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos en las prácticas de aula.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los Usos de la Media Aritmética con respecto a: reparto equitativo, punto de equilibrio, estimación de mediciones y valor representativo de un conjunto de datos.
- Resignificar la Media Aritmética a partir de la implementación de la unidad didáctica fundamentada desde los usos en situaciones del contexto del estudiante.
- Establecer las implicaciones didácticas en la enseñanza y aprendizaje de la Media Aritmética a partir de sus Usos.
- Diseñar e Implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la Socioepistemología que promueva la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos, para el desarrollo de competencias matemáticas.

1.8 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Frente a la problemática planteada en esta investigación, en los antecedentes encontramos pautas para fundamentar nuestro estudio, proporcionando patrones de comparación de nuestros resultados con las anteriores investigaciones y algunas posibles explicaciones para las dificultades de los estudiantes. También cabe destacar obstáculos epistemológicos identificados en Batanero (2000) respecto a los Usos de la Media Aritmética en la estimación de un valor real, el reparto equitativo, la propiedad representativa de un conjunto de datos y la Media como valor esperado.

A pesar de la variedad de investigaciones reportadas sobre la Media Aritmética, aun se hace necesario la creación de nuevas propuestas didácticas que busquen abordar su

complejidad, dada su importancia para la posterior construcción de otros conceptos y su
Uso frecuente en la vida diaria.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE LA MEDIA
ARITMÉTICA.

En el presente capítulo se realiza un recorrido Histórico–Epistemológico de la Media Aritmética, a la luz de la evolución de la matemática, que nos ofrece una interesante información acerca de los estados de desarrollo del conocimiento estadístico en el seno de diferentes culturas, a continuación se evidencian diversos datos a nivel histórico y conceptual de los hitos que marcaron el desarrollo de esta fundamental rama de la matemática ofreciéndonos datos e información que dan cuenta de la forma en que el conocimiento surge y evoluciona; así como presentar la matemática como una actividad humana encausada en el contexto sociocultural de cada época.

2.1 LA ESTADÍSTICA

La evolución histórica de la Estadística se puede ubicar desde el mismo origen del hombre, pero no fue un hecho casual, sino toda una suma de procesos surgidos desde la primitiva necesidad de llevar una contabilidad de las propiedades o pertenencias de las personas, así como de sus territorios, de esta manera la estadística ha evolucionado desde la simple recolección de datos hasta su sistematización en diversos lenguajes de programación. La palabra estadística procede del vocablo “estado” (Instituto Nacional de Estadística, 2018) pues la principal función de los gobiernos era establecer control sobre la población, registros de nacimientos, muertes, impuestos, cosechas.

Según Rosales (2011) los egipcios analizaban datos de la población y la renta del país mucho antes de construir pirámides, al igual que los babilonios que utilizaban arcillas de piedra para tallar en ellas datos de la producción agrícola y productos resultantes del trueque. El censo como instrumento de control de los gobernantes hacia sus pueblos se empleó en los imperios chino y asirio de igual manera en Grecia se hicieron importantes observaciones estadísticas en lo referente a la distribución territorial y militar.

En Estrella (2008) se evidencia que en la edad media, a excepción de Francia e Inglaterra, se olvidaron en gran parte los métodos estadísticos hasta el siglo XVI, donde Adolphe Quetelet aplica los conceptos de estadística a las ciencias sociales de manera práctica creando el concepto de “*hombre promedio*” al referirse al estudio de fenómenos sociales complejos tales como tasas de criminalidad, de matrimonio o de suicidios.

En el siglo XVII, según Batanero (2001), desde la escuela alemana surge la aritmética política que centra su trabajo en la recogida y análisis de datos que permitió observar la frecuencia para establecer conjeturas.

Posteriormente en el periodo comprendido entre los 1800 a 1820, se crean dos importantes conceptos que serían fundamentales en la teoría estadística, el concepto de la teoría de errores y la teoría de los mínimos cuadrados, estas últimas desarrolladas por Laplace, Gauss y Legendre (Bakker y Gravemeijer, 2006).

En la actualidad la estadística se ha transformado en un método indispensable para la descripción de valores de tipo económico, político, social, psicológico y físico; utilizada para relacionar con base a datos recolectados en una herramienta de toma de decisiones. En síntesis “Algunas investigaciones afirman que la historia de la Estadística está

resumida en tres grandes etapas: Los Censos; De la Descripción de los Conjuntos a la Aritmética Política; y Estadística y Cálculo de Probabilidades” (Estrella, 2008, p. 5).

A continuación, se describen las principales necesidades que dieron origen a la Media Aritmética, así como sus Usos sociales. Además se presentan otras medidas de tendencia central que se emplean como alternativa a ésta.

2.2 MEDIA ARITMÉTICA O MEDIA.

La Media Aritmética se ha desarrollado en el seno de diferentes culturas y ha tenido diferentes Usos sociales como: Punto de equilibrio, Reparto equitativo, estimación de un valor real de una medición y valor representativo de un conjunto de datos (Rondero, 2010).

2.2.1 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO

El Uso de la Media Aritmética como punto de equilibrio se remite a estudios desarrollados en la antigua Grecia en contextos de la geometría y la estática. Según Bakker y Gravemeijer (2006) en la escuela pitagórica en el 500 a.C. se desarrolló la teoría de los medios con relación a la teoría de la música, la geometría y la aritmética. Se diferenciaban tres casos: la Media Aritmética, la media geométrica y la media armónica. En este análisis solo nos centraremos en la Media Aritmética.

En Bakker y Gravemeijer (2006) encontramos que los griegos definieron este objeto matemático como: “El número medio b entre a y c se llama la Media Aritmética si y sólo si $a - b = b - c$ ” (p. 57); además tenía la característica de estar localizada en la mitad de los dos valores y las magnitudes se representaban por segmentos (Ver Figura 1).

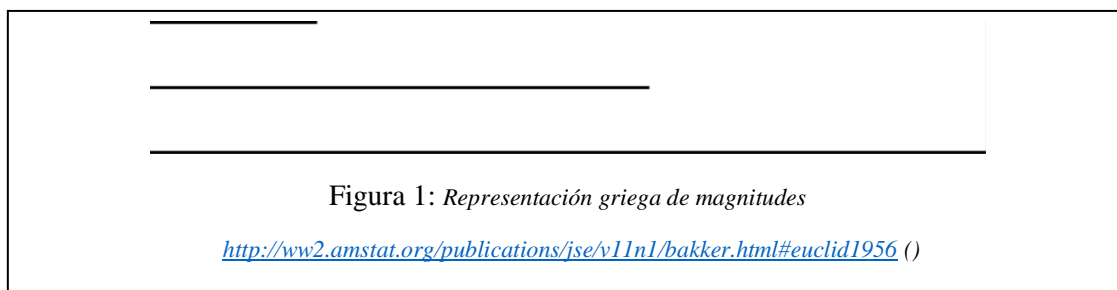


Figura 1: Representación griega de magnitudes

<http://ww2.amstat.org/publications/jse/v11n1/bakker.html#euclid1956> ()

Posteriormente se encontró que Arquímedes –214/212 a.C. – en muchos de sus trabajos sobre el principio de la balanza, y para estudiar el centro de gravedad de cuerpos geométricos, busco el punto equilibrio a partir de la equiparación entre los excesos y los defectos de sus mediciones. En notación matemática actual, se puede expresar el modelo del exceso y el defecto como lo expresa Rondero (2010, p. 390):

... para dos números reales positivos a y b , con $a < b$; para lo cual procedemos de la siguiente forma, el exceso de a respecto a un valor intermedio \bar{x} , con $a < \bar{x} < b$, que tiene la característica conceptual de ser el que equipara, es $\bar{x} - a$, mientras el defecto de b respecto a \bar{x} , es $\bar{x} - b$, en

forma tal que al equipararse se tiene, considerando $\bar{x} - a$, es un valor positivo, mientras que $\bar{x} - b$, es negativo.

$$\bar{x} - a + \bar{x} - b = 0$$

De donde,

$$2\bar{x} = a + b$$

O sea,

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}$$

Cabe aclarar que el estudio de la Media Aritmética como un punto de equilibrio no se desarrolló en un contexto estadístico, solo se calculaba para dos valores y representaba la equiparación entre los excesos y defectos de una medición.

2.2.2 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO REPARTO EQUITATIVO

El Uso de la Media Aritmética como reparto equitativo, según Bakker y Gravemeijer (2006), proviene del derecho marítimo. Pues en el primer milenio antes de Cristo el comercio marítimo en el mediterráneo estaba sometido a diferentes peligros como tormentas, acantilados, piratería, bancos de arena, entre otros; que generaban daños en la nave y pérdidas de cargas. Como solución a esta situación desde el año 700 a.C. los comerciantes y los cargadores convinieron en que los daños a la carga y al buque deberían ser repartidos por igual entre ellos. Más generalmente, significó la distribución proporcional de las pérdidas según la cantidad y calidad, entre los dueños de la carga.

2.2.3 LA MEDIA ARITMÉTICA EN LA ESTIMACIÓN DE MEDICIONES.

Según Plackett (1970) la aparición de este concepto estuvo relacionado con su Uso en el tratamiento de la información y la estimación de mediciones por parte de astrónomos babilónicos, que hace más de 2500 años tallaron en tablillas de arcilla (Ver Figura 2) registros sobre los movimientos de las estrellas y planetas, con el fin de resolver un problema de estimación mediante el cálculo de la suma total de las observaciones y dividiéndolo por el número de datos.



Figura 2: Tablilla de arcilla donde se registraron observaciones astronómica

<http://www.astrociencia.com/2007/06/19/tablillasbabilonicas/>

De acuerdo con Bakker y Gravemeijer (2006) hasta el siglo XVI se reconoció que la Media Aritmética podía generalizarse a más de dos valores $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)/n$, con la aparición del sistema decimal en 1585 que facilitó tales cálculos de división. Esta Media generalizada resultó útil para los astrónomos que querían reducir los errores de sus observaciones para conocer un valor real o verdadero, como la posición de un planeta o el diámetro de la luna. El Uso de la Media Aritmética para reducir los errores se convirtió gradualmente en un método común en otras áreas.

En esta perspectiva, según Conde (2015), Galileo Galilei en el estudio de distribución de errores experimentales en mediciones, específicamente de fenómenos astronómicos, propuso las siguientes premisas: hay solamente un valor numérico real que representa la distancia de una estrella a la tierra; todas las observaciones tiene errores debido a los instrumentos, a el observador y otras variables; las observaciones están distribuidas simétricamente alrededor del verdadero valor, y errores pequeños ocurren con mayor frecuencia que errores grandes.

En Conde (2015) encontramos que el estudio de la distribución de los errores y la necesidad de establecer la trayectoria del planetoides Ceres, llevo a que Gauss hiciera la mejor predicción de su trayectoria usando el criterio de los mínimos cuadrados y los siguientes postulados: Pequeños errores son más probables que grandes errores, la probabilidad de cometer errores de magnitud x y $-x$ son iguales, en presencia de varias mediciones el valor más probable es la Media.

Cabe resaltar que el trabajo de tomar la Media Aritmética para reducir errores en las observaciones de una medición, al igual que los estudios desarrollados por Arquímedes, se encuentra presente el modelo del exceso y el defecto como sustento de este concepto.

2.2.4 LA MEDIA ARITMÉTICA COMO UN VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.

El Uso de la Media Aritmética como valor representativo de un conjunto de datos surge de la estimación de un valor total de grandes números, un ejemplo de esto lo encontramos en Bakker y Gravemeijer (2006):

En una antigua historia india, que fue escrita en el siglo IV d C, el protagonista Rtuparna estimó el número de hojas y frutos en dos grandes ramas de un árbol frondoso. Se estima el número de hojas y frutos sobre la base de una sola rama, y se multiplica por el número de ramas en el árbol. El número 2095, después de una noche de recuento, resultó ser muy cercano al número real. Aunque no se sabe en la historia de cómo Rtuparna eligió la rama, parece que debe de haber elegido un "tamaño medio" (de rama), ya que daría lugar a una buena estimación (p. 152).

En este ejemplo, la rama que se eligió tenía la característica de representar todas las otras, dándole a la Media la característica de representatividad.

Posteriormente, de acuerdo con Doval (2004), el Uso de la Media como valor representativo de un conjunto de datos, fue formalizado en el siglo XIX por el astrónomo Quetelet al crear el concepto del “hombre promedio”. En sus estudios aplico la teoría de los errores utilizada en la astronomía, con el fin de encontrar regularidades en las características físicas y conductuales de los ciudadanos; esto implicó que el término no fuera necesariamente un valor real, y tuviera la característica de ser un valor representativo de un conjunto de datos. Como construcción estadística fue un importante cambio conceptual

Frente al origen de algunos símbolos usados para representar la Media o definirla encontramos en Miller (2016) que Karl Pearson, principal estadístico de principios del siglo XX, y sus contemporáneos usan la \bar{x} para los promedios de la muestra y para los valores esperados. La supervivencia de \bar{x} para la Media de la muestra se debe probablemente al influyente ejemplo de Fisher que lo utilizó en todas sus obras; la primera de ellas fue sobre un criterio absoluto para ajustar las curvas de frecuencia.

Por otra parte, el símbolo de sumatoria \sum fue utilizado por primera vez por Leonhard Euler -1707/1783- en 1755 (Boyer, 1987)

En la actualidad la Media se define como el cociente entre la suma de los datos y el número de datos de la muestra, generalmente se simboliza así \bar{x} , para datos no agrupados

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Donde $\sum_{i=1}^n x_i$ representa la sumatoria de los datos de la muestra, y n el número de datos de la misma.

2.3 LA MEDIANA

Según Bakker y Gravemeijer (2006) la mediana surgió históricamente como una alternativa a la Media, y el contexto más importante en el que se Uso fue en la teoría del error, donde el problema era encontrar el supuesto valor real de las observaciones de un fenómeno ante la presencia de valores atípicos.

Otro contexto estadístico donde se desarrolló la mediana fue el probabilístico; en Bakker y Gravemeijer (2006) encontramos dos ejemplos de ello, el primero conocido como el problema tiempo de vida medio y mediano. Alrededor de 1669, los hermanos Huygens abordaron un problema sobre la esperanza de vida de su padre. Para tal fin utilizaron las tablas de mortalidad, pero discreparon sobre ciertos cálculos al encontrar que había diferencia entre la vida Media o expectativa de vida; y la mitad de la vida, a la que una persona tiene igual probabilidad de sobrevivir. El estudio de las predicciones sobre los tiempos de vida permitió una distinción entre la Media y la mediana.

El segundo ejemplo está relacionado con el Uso que Legendre y Laplace le dieron a la mediana para denotar al término medio de probabilidades en el contexto de las funciones de probabilidad. Cournot alrededor de 1846 fue el primero en usar el término mediana para este valor, y la definió: “El valor x_0 para el cual la función de distribución F satisface $F(x_0) = \frac{1}{2}$, y explicó que es el valor para el cual el área bajo el gráfico es la misma a la izquierda y a la derecha”. (Bakker y Gravemeijer, 2006, p. 159).

Este concepto es formalizado posteriormente por Francis Galton quien utilizó el término inglés "median" por primera vez en 1882 Sus aportes surgen a partir de varias investigaciones donde utiliza la mediana para analizar datos o para hallar un valor representativo. Galton introduce el concepto asignándole la característica fundamental de representar un valor central. Edgeworth, un contemporáneo con Galton, prefirió la mediana que a la Media debido a la dificultad de calcularla para valores irregulares o atípicos.

En la actualidad la mediana es el valor central, el que divide al 50% de los datos en dos grupos, si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ son los datos, la mediana es el valor que se encuentra exactamente en la mitad de los datos en un arreglo ordenado, se simboliza M_e , y para datos no agrupados se aplica la siguiente relación para encontrar la posición de los datos.

Primero se realiza el arreglo ordenado, es decir, se ordenan los datos de una muestra de menor a mayor, y se escribe las posiciones de la siguiente manera: $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)}$, entonces la mediana está dada por:

$$M_e = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (1)$$

Donde n es el número de datos, y podemos hacer una de las elecciones de acuerdo a si es par o impar obedeciendo a los siguientes criterios.

1. En el caso de n entero impar se toma la expresión correspondiente en (1), y el resultado obtenido, indica la posición en el arreglo ordenado del valor de la mediana.
2. En el caso de n entero par se toma la expresión correspondiente en (1), y el resultado obtenido indica el valor de la mediana en ese caso.

2.4 LA MODA.

En Miller (2016) encontramos que el término moda $-M_o-$ fue acuñado por Karl Pearson, y lo usó en 1895 para la abscisa correspondiente a la ordenada de máxima frecuencia, de modo que la Media, la moda y la mediana tuvieran todos caracteres distintos.

En la actualidad la moda de una serie de datos u observaciones para datos no agrupados, es aquel valor que se presenta con la mayor frecuencia, es decir, el valor más común en

un grupo de datos. Puede darse que la moda no exista o no sea única. En tales casos si dos datos diferentes tienen la misma frecuencia absoluta se dice que hay dos modas o que es bimodal, a partir de tres valores diferentes o más con la misma frecuencia absoluta se dice que es multimodal (Galindo, 2011).

El caso de la moda para datos agrupados generalmente se habla de clase modal y en ocasiones si se desea especificar un valor de la moda, se realiza un promedio ponderado; para fines de esta investigación no se consideró el caso en que los datos son agrupados.

2.5 DIAGRAMA DE PUNTOS

EL diagrama de puntos es una de las formas de resumir datos cuantitativos, donde cada dato u observación se representa mediante un punto sobre la recta numérica. Además permite distinguir entre otras cosas, la ubicación general de las observaciones, su respectiva dispersión y la presencia de valores u observaciones atípicas. (Galindo, 2011)

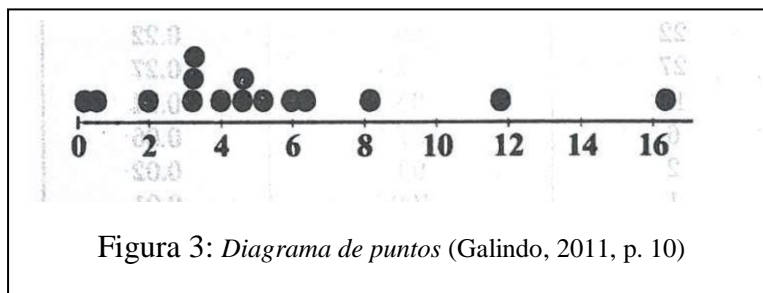
Debido a las características del diagrama de puntos se recomienda utilizarlo para un máximo de 20 observaciones individuales, pues al disponer de tantos datos es complicado distinguir entre ellos. En el mismo gráfico se pueden representar dos o más conjuntos de datos, al hacer lo anterior es recomendable usar una forma de representación alterna como lo son las estrellas (★) o triángulos (▲) como alternativa a los puntos (Galindo, 2011).

Al construir un diagrama de puntos se debe determinar en primer lugar el rango de las observaciones y la manera de representarlas y en segundo lugar fijar una escala apropiada que lleve a una correcta representación de los datos u observaciones.(Galindo, 2011)

Al representar datos nominales u ordinales el diagrama de puntos es de similar presentación a un diagrama de barras, solo que estas son reemplazadas por una serie de puntos, si los datos son continuos el diagrama de puntos se asemeja a un histograma, donde los puntos remplazan a los rectángulos.

Por ejemplo, consideremos el conjunto de datos:

$$\{6.4, 4.0, 3.2, 4.6, 3.2, 8.2, 6.0, 0.2, 4.6, 5.2, 0.6, 2.0, 11.8, 16.4, 3.2\}$$



En el diagrama de puntos (Ver Figura 3) se puede observar que los datos están concentrados alrededor del valor 5 y que la muestra corresponde a 15 elementos, donde se observa un dato atípico el cual es 16.4. En este caso se considera que una observación es atípica si no pertenece al intervalo $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ donde S es la desviación estándar muestral. Pero en esta investigación no se profundizara sobre las medidas de dispersión.

2.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Las Media Aritmética así como la mediana y la moda en su evolución histórico-epistemológica, surgen de la necesidad social del hombre de realizar ejercicios concretos de medición, haciendo de estas medidas instrumentos prácticos de Uso cotidiano; que a medida que se utilizan van evolucionando, adquiriendo nuevos significados en su concepción y desarrollo epistemológico, donde diversos personajes de la ciencia han contribuido a su perfeccionamiento teórico y aplicabilidad más amplia; de los anteriores mencionados tenemos personajes como Arquímedes, Karl Pearson, Galton, Leonhard Euler, Quetelet, entre otros descritos en el presente capítulo. En resumen afirmamos, basándonos en la literatura consultada, que la Media Aritmética ha sido una constante construcción forjada en su generalidad por necesidades prácticas de comprensión e interpretación de fenómenos cotidianos en contextos Físicos, Astronómicos, Geométricos o Estadísticos.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como propósito explicar cada uno de los elementos del enfoque teórico tomados para la investigación, que está sustentada y situada en la Teoría Socioepistemológica –TSE–; es así como se permite conformar evidencia empírica para proveernos de un marco de referencia que articule el objeto de estudio con los principales postulados de la TSE; principalmente con la Resignificación con el fin de interpretar los resultados del estudio, sustentar los objetivos y alcances de la investigación propuesta.

3.1 LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Esta teoría tiene sus inicios en la tesis “Un estudio de la formación social de la analiticidad”, obra considerada el fundamento de esta corriente de pensamiento que ahora denominamos Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa –TSME– (Cantoral, 2013). Cuando se ve la necesidad de establecer diferencia entre lo que se conoce como *Obra Matemática* –o *matemática pura*– y la *Matemática Educativa*, siendo esta última una disciplina científica que estudia los fenómenos didácticos ligados al saber matemático (Cantoral, 2014). Lo que busca la Socioepistemología es entender la construcción del conocimiento matemático como el producto de la misma actividad humana, que se forma durante el desarrollo de soluciones a problemas creados en las interacciones que produce el modo humano de vivir socialmente en un determinado tiempo y contexto. Por tal razón desde las prácticas de aula surge la necesidad de indagar sobre todos aquellos fenómenos y actividades humanas que permiten acceder al conocimiento matemático de una manera natural, consciente con la posibilidad de ofrecer respuesta a una multiplicidad de opciones e intereses que manifiestan los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad. Según Cantoral y Farfán (2003), se pasa a definir la Socioepistemología como un corrimiento al problema saber; lo contextualiza, lo sitúa.

Por otra parte, la teoría señala el aspecto socio-cultural como algo fundamental, porque es desde la misma actividad humana de donde surgen elementos que permiten explicar cómo los seres humanos construyen el conocimiento y a la vez cómo hace difusión de este. Esta mirada socio-cultural y relativista “baja” la matemática del pedestal donde imaginariamente la hemos puesto a un nivel más cercano al docente y al estudiante. Llevado a la práctica educativa, es importante porque para un estudiante que no comprende porque está errado su razonamiento, se considera su postura y mediante representaciones, modelaciones y argumentaciones, se pasa del “error” al obstáculo (Cantoral, Gasperini, y Montiel 2014). Posibilitando así otras formas de interactuar y de acceder al saber, lo que es de gran importancia para los escenarios de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido la Matemática Escolar está en función de responder a intereses y necesidades de los estudiantes y al mejoramiento continuo de los métodos de enseñanza por parte del docente. Es entonces cuando se habla de una matemática Funcional, que según Cordero (2006) es una matemática con sentido y significado desde la propia vida del educando, por lo tanto se centra en la actividad humana y en el rediseño del discurso

Matemático Escolar –rdME– pues no se trata de enseñar los resultados de una actividad sino de comunicar la actividad misma. Mostrando las dinámicas y situaciones socioculturales como posibilitadoras de la construcción de ese conocimiento.

Según Cantoral (2013) la Socioepistemología es de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde cuatro dimensiones:

- **Dimensión Social:** Hace referencia a la funcionalidad del conocimiento, tanto en la comunidad y situación donde este se usa y se Resignifica.
- **Dimensión Epistemológica:** Se enfoca en el análisis a profundidad de los hechos relevantes que hicieron posible la Construcción Social del Conocimiento Matemático.
- **Dimensión Cognitiva:** Reconoce que los objetos son creados a partir de la misma actividad humana y de estos surgen nuevos significados que nacen de la Resignificación que el sujeto hace desde sus interacciones con el entorno y las vivencias cotidianas.
- **Dimensión Didáctica:** La matemática escolar es su objeto de estudio y se centra en la difusión del conocimiento a partir del discurso Matemático Escolar –dME–.

De esta manera la TSE, prioriza la forma en la que los sujetos usan la matemática en su contexto socio-cultural, recuperando de alguna manera la forma primitiva de hacer matemática, focalizando la atención en el cómo se construye el conocimiento matemático. Por tal razón es necesario asumir un cambio de concepción profunda sobre el que hacer de la educación matemática basada en la construcción social del conocimiento, para pasar al rdME.

De esta manera se entiende la importancia que tienen los procesos constructivos de interacción social a la hora de enseñar y aprender las matemáticas.

3.2 DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

El dME tradicional aborda la enseñanza de las matemáticas centrado en la presentación de objetos abstractos, terminados y con poca aplicación real; que según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006) refiriéndose a su estructuración:

...este discurso no se reduce a la organización de los contenidos matemáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (p. 86).

Según Soto y Cantoral (2014) el dME se caracteriza por la atomización de los conceptos al no considerar los contextos sociales y culturales, el carácter hegemónico en la supremacía de argumentaciones y significados, y el carácter utilitario y no funcional del conocimiento.

De esta manera el dME se muestra como una entidad que yace a lo evidentemente visible, a lo que se puede denominar como explícito u objetivo, además de estar afectado por las creencias y concepciones de los miembros de la comunidad educativa.

3.2 LA RESIGNIFICACIÓN

Para Cantoral (2013) de la acción que realiza el sujeto sobre el objeto se derivan la construcción de significados, los cuales dependerán en gran medida del contexto sociocultural; y al poner en funcionamiento este significado frente a situaciones nuevas se enriquece adquiriendo argumentaciones, Usos, y procedimientos; produciendo así conocimiento. Este proceso de significación se denomina Resignificación.

Con base a lo anterior la Resignificación es concebida como un constructo Socioepistemológico que se refiere a la construcción del conocimiento en la organización del grupo humano normado por las prácticas sociales (Cordero, 2006). Desde esta perspectiva Resignificar se refiere al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus Usos, es decir los significados que subyacen a la actividad y no exclusivamente al objeto matemático (Montiel y Buendía, 2011).

Una situación Resignifica un conocimiento matemático cuando el estudiante desarrolla una matemática que sea funcional. Para lograr la Resignificación se debe estudiar el Uso del conocimiento, viendo este como algo que se va organizando y cambiando, es decir, se va desarrollando en el contexto. En este orden, el individuo resulta ser "...un ente activo modificando su entorno y modificándose a sí mismo en el contexto mismo de las prácticas en las que se involucra y éstas son la fuente de Resignificación del conocimiento matemático" (Buendía, 2004, p. 71).

En esta investigación para hablar del proceso de Resignificación con respecto a la Media Aritmética, es importante manifestar que las significaciones construidas por un individuo se modifican, obedeciendo a factores contextuales y coyunturales (Cabañas-Sánchez, 2011a; 2011b). Entendiendo que se Resignifica porque los grupos humanos somos diversos, de modo que dos grupos humanos no siempre entenderán o usarán un constructo del mismo modo.

3.3 PRACTICA SOCIAL

En la teoría Socioepistemológica la generación de conocimiento matemático tiene su génesis a partir de la actividad humana, es decir, se aprende haciendo; el hacer se presenta como generador del saber y lo constituye como tal. En esta perspectiva el ser humano está normado por prácticas que parten del consenso que a la vez regulan las relaciones humanas, así de esta forma la práctica humana se interpreta como práctica social normada, es decir, el conocimiento tiene su origen en prácticas sociales normadas (Cordero, 2006).

El análisis investigativo Socioepistemológico está centrado en la relación entre las prácticas sociales y el conocimiento, Para investigadores como Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez (2004), dichas prácticas se interpretan como "[...] un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente desarrolla el individuo para construir conocimiento" (p. 418).

Por su parte Camacho (2006) ve las prácticas sociales como el eje central de la Socioepistemología y como generadoras de Resignificaciones del conocimiento matemático.

En definitiva la práctica social es entendida como normativa de la actividad humana, más que una reflexión sobre la práctica y regula las actividades vinculadas a la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

3.4 PRACTICA SOCIAL DE JUSTICIA EQUIDAD O MEDICIÓN JUSTA

Según Sierra (2008) la práctica social de justicia y equidad es normativa de actividades donde el principal objetivo es encontrar una medición justa, como medir longitudes, contar, pesar o calcular equivalencias; al hacer interacción con los demás elementos de la comunidad.

En esta investigación la práctica social de justicia y equidad será incluida en el diseño de las situaciones de aprendizaje donde la medición justa promueva la construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos de diferentes mediciones para la construcción de nuevos significados a partir de sus Usos en diferentes contextos.

3.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La teoría Socioepistemológica, expuesta en este capítulo, permite analizar la problemática de los procesos de enseñanza aprendizaje de la Media Aritmética desde la matemática escolar, entendiendo y explicando el conocimiento como un constructo social, en otras palabras aprobando que la construcción de los conceptos matemáticos se presenta como consecuencia de la elaboración de significados simbólicos compartidos, a partir de las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares, con el fin de Resignificar el conocimiento y convertirlo en algo funcional. Muy diferente al conocimiento absolutista e intangible que encontramos en los libros de texto y en las dinámicas de aula tradicionales donde definiendo y deduciendo se tiene la creencia de que se aprende matemáticas (Cantoral, Reyes y Montiel, 2014).

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

Este capítulo enmarca el diseño metodológico empleado en esta investigación, el cual es de enfoque cualitativo a partir del estudio de casos, se describe el contexto donde se desarrolla y los participantes, así como los instrumentos para recolectar la información. Además se considera el esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2011) para investigaciones Socioepistemológicas.

4.1 INVESTIGACIÓN CUALITATIVA Y ESTUDIO DE CASOS

Esta investigación se desarrolla desde el método cualitativo de investigación, a partir del estudio de caso (Stake, 2010), con método empírico–experimental. El paradigma cualitativo permite una descripción, comprensión e interpretación detallada del fenómeno de estudio; para esta investigación consiste en analizar las implicaciones en la enseñanza aprendizaje al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Socioepistemológica para la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos en las prácticas de aula. Además se busca generar conocimiento de una manera holística a partir de hechos complejos que no pueden ser reducidos a sus características externas. Con un método empírico–experimental, que parte de observar e identificar la realidad cotidiana en la que viven y se desenvuelven los sujetos.

Además se realiza un estudio de casos, que según Stake (2010) busca establecer características básicas y formas de relacionarse de una persona o comunidad con su entorno; indaga por formas de percibir comportamientos, actitudes y características culturales de una población determinada. Sus resultados casi nunca pueden ser generalizados a otras comunidades, aunque pueden hacerse estudios réplica. Stake (2010) establece que:

La investigación con estudios de casos comparte la carga de clarificar las descripciones y de dar solidez a las interpretaciones. Aceptar una visión constructivista del conocimiento no obliga al investigador a abstenerse de ofrecer generalizaciones. Por el contrario, una visión constructivista invita a ofrecer a los lectores buena materia prima para su propio proceso de generalización (p. 91).

Con base a lo anterior los investigadores deben indagar tanto en los datos individuales como grupales, buscando el análisis directo de los datos.

4.2 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y PARTICIPANTES

La muestra estará conformada por un grupo de 20 estudiantes del grado noveno –edades de 14 a 16 años– de las sedes principales de la Instituciones Educativas Juan de la Cruz Posada y Héctor Abad Gómez de carácter oficial ubicadas en las comunas 8 y 10 respectivamente, de la ciudad de Medellín. Los estudiantes fueron seleccionados de acuerdo a su interés y disposición para participar en la investigación, con heterogeneidad en su rendimiento académico y de ambos sexos.

Para esta investigación los estudiantes, que se nominan E1, E2, E3,..., E20 se distribuirán aleatoriamente en parejas, donde cada una representa un caso, y se nombraran como P1, P2, P3,..., P9 y P10; como se muestra en la siguiente tabla:

PAREJAS	ESTUDIANTES
P1	E1-E2
P2	E3-E4
P3	E5-E6
P4	E7-E8
P5	E9-E10
P6	E11-E12
P7	E13-E14
P8	E15-E16
P9	E17-E18
P10	E19-E20

Los estudiantes participantes de esta investigación se le aplicaran un conjunto de actividades y una entrevista semiestructurada. Otro aspecto importante frente a la recolección de datos es la accesibilidad que tienen los investigadores a los grupos, ya que son docentes de área de los participantes.

4.3 ESQUEMA METODOLÓGICO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación, la Socioepistemología no propone un método en sí, sino un esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2011), coherente con las investigaciones científicas en didáctica de la matemática o Matemática Educativa y que da una visión global del camino que la tesis recorrerá (Ver Figura 4).

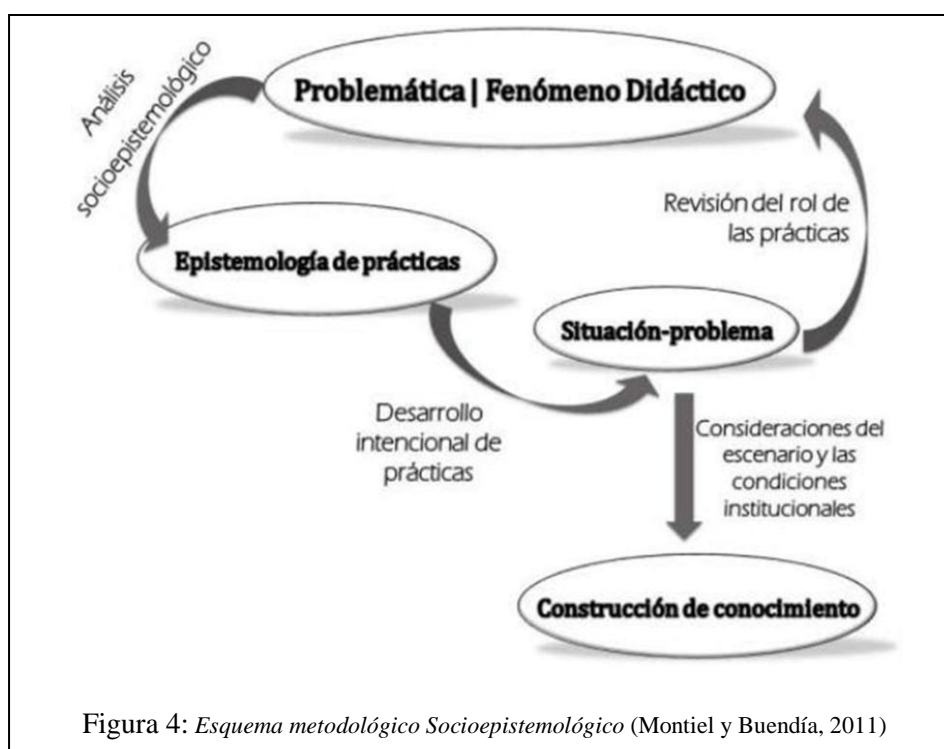


Figura 4: Esquema metodológico Socioepistemológico (Montiel y Buendía, 2011)

El esquema está compuesto por nodos que representan momentos o fases, y las flechas que lo componen representan acciones relacionantes entre los diferentes momentos. Cabe aclarar que una investigación puede tener un método compuesto por la combinación de algunos nodos y acciones relacionantes. A continuación se describen cada uno de los elementos que componen el esquema y como se contextualizan a esta investigación.

Momento Problemática o Fenómeno Didáctico: Para plantear una problemática se debe problematizar el saber en al menos tres dimensiones de análisis: Su naturaleza epistemológica, su Resignificación, y sus procesos de transmisión (Montiel y Buendía, 2011). Desde estas tres dimensiones se plantean investigaciones Socioepistemológicas. La unidad de análisis permite identificar las prácticas sociales que anteceden la producción de conceptos y que son determinantes en la construcción social del mismo. Con base a lo anterior Montiel y Buendía (2011) afirman que el método y su unidad de análisis se centran en estudiar al ser humano usando y haciendo matemáticas.

Para esta investigación en esta fase se planteó la problemática donde se cuestionaron las explicaciones clásicas que los docentes dan sobre la Media Aritmética y la tendencia a presentarla de forma descontextualizada y con pocos ejemplos de aplicación real reduciéndola a una fórmula carente de significado. Además se planteó la pregunta de investigación y sus objetivos.

Acción Relacionante Análisis Socioepistemológico: Se realiza un análisis de los Usos del saber, que lo caracteriza y es esencial para el saber matemático –Naturaleza epistemológica del saber–, de cómo se da una aprehensión del concepto a través de sus significaciones contextualizadas –Resignificación del saber– y de sus proceso de transmisión –Discurso matemático escolar–. Cada tipo de análisis constituyen tipos de investigación.

En este apartado se realizó un recorrido de los aspectos histórico– epistemológico sobre la Media Aritmética (capítulo 2) donde se identificó como elemento invariante para su construcción el exceso y el defecto en sus Usos como punto de equilibrio, reparto equitativo, estimación de mediciones y valor representativo de un conjunto de datos.

Momento epistemología de prácticas: Según Montiel y Buendía (2011) en esta fase se da cuenta de la construcción social del conocimiento, donde lo social será entendido como la relación epistemológica entre las prácticas que se involucra el hombre al hacer matemáticas y el saber matemático que genera. Esta fase se consideró como una primera base para la intervención didáctica.

En la presente investigación se analizó la naturaleza epistemológica de la Media Aritmética, identificando que el exceso y el defecto actúa en los diferentes contextos y representaciones donde se usa, ya sea como elemento constructor o eje de articulación conceptual (Rondero, 2013).

Acción Relacionante Desarrollo Intencionado de Prácticas: Esta acción relaciona las prácticas sociales asociadas a la construcción del objeto matemático, identificadas en la revisión Histórica–Epistemológica, y la generación de conocimiento matemático. En definitiva las practicas identificadas previamente deben ser desarrolladas intencionalmente en el diseño de situaciones de aprendizaje con el objetivo de favorecer la Resignificación del saber matemático (Montiel y Buendía, 2011).

Para esta investigación se implementará como practica socialmente compartida la búsqueda de justicia y equidad, que según Sierra (2008) norma actividades donde se requiere encontrar una medición justa; lo que está en concordancia con los Usos de la Media Aritmética para encontrar un equilibrio entre los excesos y defectos de una medición en diferentes contextos.

Momento Situaciones Problemas: En esta fase se diseñan los instrumentos o situaciones de aprendizaje que incidan en el sistema didáctico las cuales pueden ser entendidas como preguntas que propician una problematización y será el instrumento que propicie las acciones sobre el sistema didáctico (Montiel y Buendía, 2011).

Para el diseño de las situaciones de aprendizaje a partir de la unidad didáctica se tuvo como elemento relevante para la Resignificación de la Media Aritmética el poder considerarla como el valor que equipara los excesos y los defectos en diferentes situaciones: punto de equilibrio, reparto equitativo, estimación de mediciones y valor representativo de un conjunto de datos.

Acción Relacionante Revisión del Rol de las Prácticas: Relaciona la situación problema con la problemática o fenómeno didáctico, es decir, se analiza en una situación problema su papel para significar el conocimiento matemático probando la viabilidad de la epistemología de prácticas propuestas.

En esta fase de la investigación se aplicaron los instrumentos de intervención con el fin de contrastar el análisis a priori y a posteriori, es decir se confrontan las hipótesis basadas en los análisis preliminares con los resultados después de intervenir con el fin de validar la funcionalidad de los instrumentos. Posteriormente con los resultados obtenidos y retomando los momentos y acciones relacionantes entre la problemática y situaciones problema se pasará a la fase de construcción del conocimiento donde se completa el esquema metodológico mostrado en la Figura 4, obteniéndose así los insumos necesarios a considerar en el diseño de la Unidad Didáctica.

4.4 TÉCNICA E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Las técnicas utilizadas para recolectar la información fueron la observación participante de las actividades que los estudiantes realizaron durante el periodo de intervención, que le posibilita a los investigadores una mejor comprensión del caso (Stake, 2010) y la entrevista semiestructurada con el fin de indagar en los estudiantes sobre sus razonamientos en la realización de las actividades de intervención.

Los instrumentos utilizados para la recolección de la información con el fin de registrar y describir los acontecimientos para su posterior análisis fueron: grabación de audio y video del trabajo de los grupos en las diferentes secciones de intervención al igual que de la entrevista semiestructurada realizada a los estudiantes; hojas de trabajo de los estudiantes donde ellos registran procedimientos y razonamientos para dar respuesta a las actividades propuestas y notas de campo de los investigadores, donde se registra lo que acontece en el aula, observaciones y reflexiones e hipótesis de los investigadores. De todo lo anterior se obtuvieron los insumos para la retroalimentación y diseño de la Unidad Didáctica.

4.5 MOMENTOS DE INTERVENCIÓN Y DISEÑO DE ACTIVIDADES

A continuación se describe el diseño de intervención que está basado en la práctica social de justicia y equidad o medición justa propuesta por Sierra (2008), que norma actividades de mediciones, conteos o equivalencias. Para las situaciones propuestas en esta investigación se requiere encontrar el valor de equidad o equilibrio entre los excesos y defectos en diferentes contextos de medición de una variable.

Con base a lo anterior, se propone un diseño estructurado en tres momentos que propicie en los estudiantes la Resignificación de la noción de Media Aritmética y conlleve al desarrollar una matemática funcional. En el primero los estudiantes construyen el objeto matemático significándolo como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos, en el segundo lo usa en situaciones de repartos equitativos y estimación de mediciones; y en el último momento lo usan como un valor representativo de un conjunto de datos.

4.5.1 MOMENTO I: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO.

Consta de dos actividades, en la primera los estudiantes usando la simulación “ley de equilibrio”, determinan la relación matemática que permite equilibrar diferentes masas en una palanca a partir de la relación entre estas y las distancias a las que se equilibran y (Ver Anexo 1.1). En la segunda actividad el estudiante significa la Media Aritmética como el punto de equilibrio de un conjunto de datos haciendo una analogía entre una palanca y un diagrama de puntos, y la usa verificando elementos y propiedades del objeto matemático (Ver Anexo 1.2)

4.5.2 MOMENTO II: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO EL VALOR QUE EQUIPARA LOS EXCESO Y DEFECTOS.

Está estructurado en dos actividades; la primera tiene como objetivo que el estudiante use la Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos en situaciones donde se realiza un reparto equitativo (Ver Anexo 1.3). Y en la segunda use la Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos en situaciones de su contexto donde debe minimizar errores de medición de longitud (Ver Anexo 1.4)

4.5.3 MOMENTO III: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.

Está conformado por una actividad donde el estudiante usa la Media Aritmética como un valor representativo para comparar dos conjuntos de datos (Ver Anexo 1.5)

4.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La investigación se desarrolló de acuerdo a los parámetros establecidos en este capítulo; se han realizado una secuencia didáctica que apuntan a la Resignificación de la noción de Media Aritmética a partir de sus Usos como punto de equilibrio, reparto equitativo, estimación de mediciones y valor representativo de un conjunto de datos; teniendo en todos los casos como constructo del concepto el exceso y el defecto. Además se utilizó la práctica social de justicia y equidad como normativa de las actividades propuestas de medición y equivalencias.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

El presente capítulo inicia con la presentación de los elementos matemáticos que juegan un rol fundamental en la construcción del concepto de Media Aritmética, luego se realiza un análisis a priori y a posteriori de los momentos de intervención y sus actividades bajo la teoría Socioepistemológica, al igual que a la entrevista semiestructurada de los estudiantes; finalmente se exponen los hallazgos de la intervención.

5.1 ELEMENTOS MATEMÁTICOS QUE JUEGAN UN ROL FUNDAMENTAL EN EL CONCEPTO DE MEDIA ARITMÉTICA.

A continuación se describe como aspecto fundamental en la construcción del concepto de Media Aritmética el exceso y el defecto, que según Rondero (2010) es un invariante epistemológico en la construcción del objeto matemático, ya que se adapta a sus diferentes Usos y representaciones.

Si consideramos como \bar{x} la Media Aritmética de n mediciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; la suma de los excesos y defectos debe ser nula:

$$\bar{x} - x_1 + \bar{x} - x_2 + \bar{x} - x_3 + \dots + \bar{x} - x_n = 0$$

Agrupando los términos nos queda

$$n\bar{x} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Y al despejar la Media Aritmética \bar{x} se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Luego la Media Aritmética para datos no agrupados se puede definir como la suma de las n mediciones dividido entre n .

En Rondero (2010) encontramos que la Media Aritmética adquiere otro significado cuando esta ponderada, donde cada observación x_i se multiplica por su ponderación p_i , donde la suma queda expresada como:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Haciendo $N = \sum_{i=1}^n p_i$ se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{N}$$

Esta fórmula para la media corresponde al caso de datos agrupados. En este trabajo solo se considerara el caso de datos no agrupados.

A continuación se muestran algunas propiedades de la Media Aritmética para datos no agrupados que fueron de interés para esta investigación:

1. La suma total de las observaciones es igual a n veces la Media Aritmética (Rontero, 2010).

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

2. La suma algebraica de las desviaciones de las observaciones respecto a su Media Aritmética es cero (Rontero, 2010).

$$\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) = 0$$

3. Se expresa en las mismas unidades que la variable (Galindo, 2011).
4. En su cálculo intervienen todos los valores de las observaciones (Galindo, 2011).
5. La Media es única (Galindo, 2011).

5.2 ANÁLISIS DE DATOS

Para analizar los datos se realizó un análisis a priori del diseño frente a las posibles respuestas de los estudiantes a la luz de la teoría Socioepistemológica de acuerdo al objetivo de la investigación; luego se confrontó con un análisis a posteriori de lo que realmente hicieron los estudiantes.

Posteriormente se realizaron las entrevistas semiestructuradas a las parejas de trabajo con el fin de indagar sobre los razonamientos empleados en la construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de los excesos y defectos; y como la usaron en las actividades propuestas.

Finalmente se presentan los hallazgos encontrados en los momentos de intervención de acuerdo a los objetivos propuestos en esta investigación.

5.2.1 ANÁLISIS A PRIORI DEL LOS MOMENTOS DE INTERVENCIÓN

A continuación se presenta el análisis a priori de los momentos y actividades de intervención, se inicia con la presentación de los criterios que se tendrán en cuenta para analizar y clasificar la información, luego se exponen lo que se espera que realicen las parejas de trabajo en los tres momentos de intervención.

Para analizar y clasificar las posibles respuestas de los estudiantes a los tres momentos de intervención y sus respectivas actividades, se construyeron los siguientes criterios de acuerdo a los objetivos de las mismas y de la investigación con el fin de dar cuenta de la Resignificación de la noción de Media Aritmética.

OBJETIVO POR MOMENTO	OBJETIVO POR ACTIVIDAD	CRITERIOS
Momento I: Construir la noción de Media	Actividad I: Determinar la relación matemática entre	Equilibra pares de masas en una palanca.

Aritmética como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos	masas y distancias para equilibrar en una palanca usando la simulación “Ley de la palanca.”	Determina la relación matemática entre distancias y masas para equilibrar una palanca.
	Actividad II: Significar la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos entre los excesos y defectos de un conjunto de datos.	Usa la relación matemática para determinar el punto de equilibrio de un conjunto de datos representado en un diagrama de puntos. Identifica propiedades del punto de equilibrio. Significa a la media aritmética como el punto de equilibrio entre los excesos y defectos de un conjunto de datos.
Momento II: Usar la noción de Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos en situaciones de repartos equitativos y estimación de mediciones.	Actividad I: Identificar la Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos en situaciones donde se realiza un reparto equitativo.	Usa el reparto equitativo para resolver la situación planteada. Relaciona la Media Aritmética, el reparto equitativo y el punto de equilibrio de un conjunto de datos. Explica por qué la suma de los excesos y defecto da cero.
	Actividad II: Usar la noción de Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos en situaciones de su contexto donde debe minimizar errores de medición de longitud	Identifica errores de medición por exceso o por defecto. Usa la Media Aritmética para determinar el valor real de medición. Significa la Media Aritmética como el valor que compensa los excesos y los defectos en los errores de medición.
Momento III: Usar la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio para significarla como un valor representativo de un conjunto de datos.	Actividad III: Identificar la Media Aritmética como un valor representativo para comparar dos conjuntos de datos	Usa la Media Aritmética para determinar el punto de equilibrio del conjunto de datos. Compara el punto de equilibrio de dos conjuntos de datos y lo interpreta dentro del contexto. Significa la Media Aritmética

		como el valor representativo de un conjunto de datos.
--	--	---

A continuación se presentan las respuestas esperadas de los estudiantes a cada momento de intervención y actividad, la cuales aparecen en un recuadro.

Momento I: La Media Aritmética Como Punto De Equilibrio.

En este momento se pretende que los estudiantes construyan la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos a partir de dos actividades.

Actividad 1: Ley del equilibrio en palancas.

Se busca que los estudiantes determinen la relación matemática entre masas y distancias para equilibrar en una palanca usando la simulación “Ley de la palanca.” al responder las siguientes preguntas.

1.1 Equilibra dos masas de 5 kg ubicándolas a diferentes distancias del punto de equilibrio. Describe como lo realizaste.

Respuesta: Se espera que los estudiantes concluyan, usando el exceso y defecto en las distancias, que estas dos masas se equilibran a distancias iguales.

1.2 Repite el procedimiento del punto anterior para masas de 10 kg, 15 kg y 20 kg. ¿Qué puedes concluir de las distancias a las que se equilibran masas iguales?

Respuesta: Se espera que los estudiantes concluyan usando el exceso y defecto, que masas iguales se equilibran a distancias iguales del punto de equilibrio.

1.3 Completa la siguiente tabla identificando la distancia que equilibra la masa del brazo derecho con la del brazo izquierdo, teniendo en cuenta que la distancia que equilibra el brazo izquierdo está dada en la segunda columna. Luego responde las preguntas.

Masa Brazo izquierdo	Distancia al punto de equilibrio	Masa Brazo derecho	Distancia al punto de equilibrio
10 kg	1	5 kg	
10 kg	2	5 kg	
10 kg	3	5 kg	
10 kg	4	5 kg	
15 kg	1	5 kg	
15 kg	2	5 kg	
15 kg	3	5 kg	
15 kg	4	5 kg	
20 kg	1	5 kg	
20 kg	2	5 kg	
20 kg	3	5 kg	

20 kg	4	5 kg	
-------	---	------	--

Respuesta: Se espera que los estudiantes usando el exceso y defecto en las distancias a las que ubican la masa correspondiente, completen la tabla encontrando la distancia que posibilita el equilibrio en cada caso.

Masa Brazo izquierdo	Distancia al punto de equilibrio	Masa Brazo derecho	Distancia al punto de equilibrio
10 kg	1	5 kg	2
10 kg	2	5 kg	4
10 kg	3	5 kg	6
10 kg	4	5 kg	8
15 kg	1	5 kg	3
15 kg	2	5 kg	6
15 kg	3	5 kg	9
15 kg	4	5 kg	12
20 kg	1	5 kg	4
20 kg	2	5 kg	8
20 kg	3	5 kg	12
20 kg	4	5 kg	16

1.3.1 ¿Dos masas de diferente valor se equilibran a distancias iguales? ¿Por qué?

Respuesta: Se espera que los estudiantes identifiquen que dos masas diferentes no se equilibran a distancias iguales; porque la palanca se desequilibra para el lado que tiene mayor masa.

1.3.2 ¿Qué relación hay entre la masa de 5kg y 10kg?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas concluyendo que la masa de 10kg es el doble de la masa de 5kg.

1.3.3 Según los datos de la tabla ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 10kg y una de 5kg?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas dadas y la distancia a la que se equilibran, concluyendo que la masa de 5kg se debe colocar al doble de distancia de la que está ubicada la de 10kg.

1.3.4 ¿Qué relación hay entre la masa de 15kg y la de 5kg?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas, concluyendo que la masa de 15kg es el triple de la masa de 5kg.

1.3.5 Según los datos de la tabla ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 15kg y una de 5kg?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas

dadas y la distancia a la que se equilibran, concluyendo que la masa de $5kg$ se equilibra al triple de distancia de la que se ubique la de $15kg$.

1.3.6 ¿Qué relación hay entre la masa de $20kg$ y la de $5kg$?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas, concluyendo que la masa de $20kg$ es el cuádruple de la masa de $5kg$.

1.3.7 ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de $20kg$ y una de $5kg$?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre las masas dadas y la distancia a la que se equilibran, concluyendo que La masa de $5kg$ se equilibra al cuádruple de distancia de la que se ubique la masa de $20kg$.

1.3.8 ¿Qué relación hay entre el valor de las masas que se están equilibrando y la distancia a la que se equilibran?

Respuesta: Se espera que los estudiantes encuentren la proporción entre cualquier par de masas y la distancia a la que se equilibran, concluyendo que dadas las masas m_1 y m_2 , con $m_1 = x m_2$, y con m_1 ubicada a una distancia d_1 del punto de equilibrio, entonces m_2 se debe ubicar a una distancia $d_2 = x d_1$, donde x es un número real.

1.3.9 Si se ubica una masa de $20kg$ a una distancia de 2 unidades, ¿a qué distancia se debe colocar una de $10kg$ para que se equilibren? ¿Por qué?

Respuesta: Se espera que el estudiante verifique la funcionalidad de la relación matemática entre masas y distancias para equilibrarlas en una palanca resolviendo la situación. Como la masa de $20kg$ es el doble de la de $10kg$, entonces la de $10kg$ se debe ubicar a 4 unidades del punto de equilibrio.

1.3.10 Si se ubica una masa de $10kg$ a una distancia de 2 unidades, qué valor debe tener la otra masa para que se equilibren al ser ubicada a una distancia de:

- 1 unidad
- 2 unidades.
- 4 unidades.

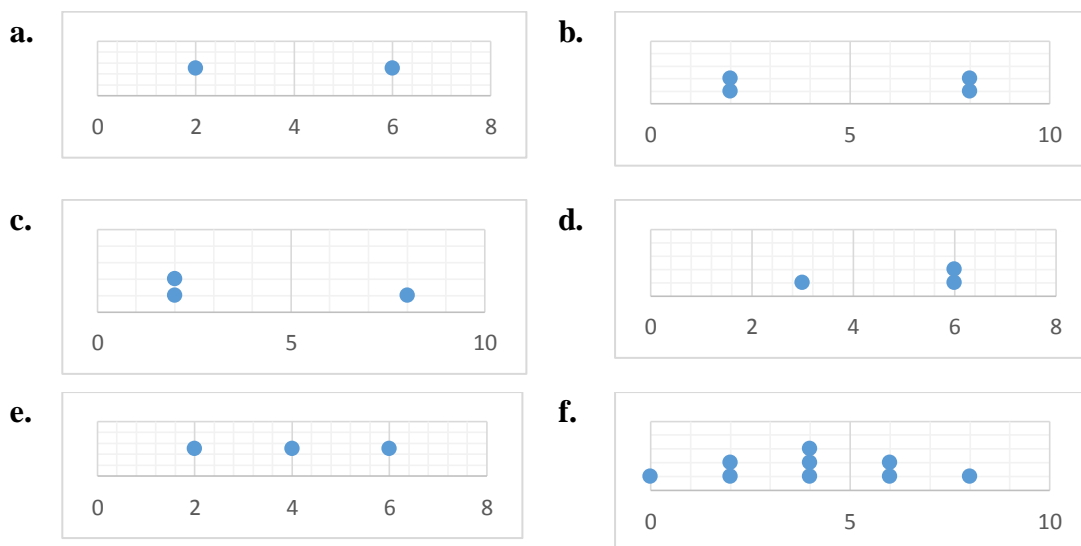
Respuesta: Se espera que los estudiantes analicen las condiciones de equilibrio usando la relación matemática entre masa y distancias.

- Como la distancia es la mitad, entonces la masa es el doble $20 kg$.
- Como la distancia es de 2 unidades la masa es de $10 kg$, porque masas iguales se equilibran a distancias iguales.
- Como la distancia es el doble, 4 unidades entonces la masa debe ser la mitad $5 kg$.

Actividad 2: Media Aritmética Como Punto De Equilibrio.

Se pretende que los estudiantes usen la relación entre distancias y masas para equilibrar una palanca, en la determinación del el punto de equilibrio de un diagrama de puntos e identificar algunas propiedades del mismo; además se pretende que signifiquen la Media Aritmética como un punto de equilibrio.

2.1 Considerando los siguientes diagramas de puntos como una palanca y a cada dato como una masa de igual valor; señala el numero donde se debe ubicar el punto de equilibrio.



Respuesta: Se espera que los estudiantes usen la relación entre masas y distancias en una palanca para determinar el punto de equilibrio de cada diagrama de puntos.

- a. 4
- b. 5
- c. 4
- d. 5
- e. 4
- f. 4

2.2 Con base al punto anterior, describe el procedimiento que permitió obtener el punto de equilibrio

Respuesta: En cada literal se espera que los estudiantes argumenten usando la relación entre masas y distancias para justificar como determinaron el punto de equilibrio en cada caso:

- a. El valor numérico donde se debe ubicar el punto de equilibrio es 4, porque masas iguales se equilibran a distancias iguales.
- b. El valor numérico donde se debe ubicar el punto de equilibrio es 5, porque masas iguales se equilibran a distancias iguales
- c. El valor numérico donde se debe ubicar el punto de equilibrio es 4, porque numero dos tiene el doble de la masa que hay en el número 8, luego la distancia del 8 al punto equilibrio es el doble de la distancia que del 2 al mismo.
- d. El valor numérico donde se debe ubicar el punto de equilibrio es 5, porque

las masas que hay en el número 6 son el doble de la que está en 3, luego la distancia del 3 al punto de equilibrio es el doble de la distancia al número 6 al mismo.

e. El punto de equilibrio es 4, por que la masa que están en 2 y 6 son iguales y se equilibran a la misma distancia, y la tercera al estar sobre el punto de equilibrio no lo afecta.

f. El punto de equilibrio es 4 por que las masas iguales se equilibran a distancias iguales, y las que están sobre el punto de equilibrio no lo afectan.

2.3 ¿Es posible que el punto de equilibrio este localizado por encima del máximo o por debajo del mínimo valor que toman los datos? Explica tu respuesta

Respuesta: Se espera que los estudiantes identifiquen la propiedad del punto de equilibrio que está ubicado entre el conjunto de datos.

2.4 ¿El punto de equilibrio debe coincidir con valores para los que se tengan datos?

Respuesta: Se pretende que identifiquen la propiedad que no es necesario que el punto de equilibrio coincida con los datos, ya que este debe cumplir únicamente con la función de equilibrar.

2.5 Si en los diagramas de puntos se añade un nuevo dato, donde se debe ubicar para que:

- El punto de equilibrio no cambie.
- El punto de equilibrio se mueva a la izquierda.
- El punto de equilibrio se mueva a la derecha.

Respuesta: Se pretende que el estudiante afiance la noción de punto de equilibrio:

- Se debe ubicar sobre el punto de equilibrio
- Se debe ubicar el nuevo dato al lado izquierdo del punto de equilibrio.
- Se de ubicar el nuevo dato al lado derecho del punto de equilibrio.

2.6 Determina la Media Aritmética de cada diagrama de puntos, ¿Qué puedes concluir?

Respuesta: Se espera que los estudiantes determinen la Media Aritmética de los diagramas de puntos usando la definición matemática como la suma de los datos dividida la cantidad de datos para obtener los resultados 4, 5, 4, 5, 4 y 4; que le posibilita inferir que el punto de equilibrio de cada diagrama de puntos coincide con la Media Aritmética.

2.7 ¿Con base al punto anterior como se puede definir la Media Aritmética de un conjunto de datos?

Respuesta: Se espera que definan la Media Aritmética como el punto de equilibrio de un conjunto de datos.

2.8 Con base a los puntos anteriores, ¿Qué características del punto de equilibrio cumple la Media Aritmética?

Respuesta: Se espera que los estudiantes asocien propiedades del punto de equilibrio a la Media Aritmética, tales como: Es el punto de equilibrio del conjunto

de datos; es única; está comprendida entre el valor mínimo y máximo de los mismos y no necesariamente es un valor igual a estos.

Momento II: La Media Aritmética Como El Valor Que Equipara Los Exceso Y Defectos.

Se pretende que los estudiantes, en la primera actividad usen la noción de Media Aritmética como el valor que equipara excesos y defectos en situaciones de reparto equitativo y en la segunda en la eliminación de errores de medición.

Actividad 1: Media aritmética como el reparto equitativo

Se pretende que los estudiantes usen la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos para significarla como un reparto equitativo.

3 Se plantea con un mes de anticipación, realizar una actividad de integración para visitar un centro de ciencia con 10 estudiantes del grado noveno de las instituciones educativas Héctor Abad Gómez y Juan de la Cruz Posada, que hacen parte del proyecto de investigación de estadística; los gastos por estudiante son: \$4.000 por transporte, \$3.000 refrigerio y \$6.000 por entrada al museo. Se concertó recolectar la plata por cuotas durante tres semanas, teniendo en cuenta las condiciones económicas de cada estudiante. A continuación en la siguiente tabla se muestra los resultados de este proceso.

ESTUDIANTES	CUOTAS SEMANALES EN \$		
	PRIMERA	SEGUNDA	TERCERA
ANA	3.000	4.000	5.000
PAOLA	6.000	6.000	10.000
CAMILA	2.000	8.000	7.000
FELIPE	4.000	8.000	7.000
SERGIO	5.000	4.000	3.000
JHOJAN	3.000	2.000	3.000
ALEXIS	2.000	3.000	2.000
VALENTINA	1.000	4.000	2.000
SEBASTIÁN	4.000	2.000	7.000
ELIZABETH	2.000	8.000	3.000

3.1 Marcar con una X Se cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración: Si____, No____

Respuesta: Se espera que identifiquen que si se alcanzó la meta.

3.2 ¿Qué proceso realizaste para verificar si se cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración?

Respuesta: Para verificar si se alcanzó la meta se espera que los estudiantes realicen un presupuesto de los aportes y el costo de la actividad de integración:

Cada estudiante debe aportar $\$4.000 + \$3.000 + \$6.000 = \13.000 pesos, luego

al multiplicar este resultado por el total de estudiantes en el grupo ($\$13.000 \times 10$) se obtiene $\$130.000$, que es la cantidad de dinero necesario que debe recoger todo el grupo.

Conociendo el valor total que se debe recoger, se suman los aportes por estudiante o por semana, obteniéndose $\$130.000$; lo que implica que se cumpla la meta.

3.3 ¿Por qué la totalidad de los estudiantes, si pueden asistir a la actividad de integración?

Respuesta: Se espera que identifiquen que los aportes de los estudiantes que contribuyeron con más de $\$13.000$ –exceso– se equilibran con los que aportaron menos de la cuota pactada –defecto–.

3.4 ¿Qué estudiantes en condiciones de aportes en dinero por cuotas, no podría asistir a la actividad de integración?

Respuesta: No podrían asistir los estudiantes que aportaron menos de $\$13.000$, es decir: Ana, Sergio, Jhohan, Alexis y Valentina.

3.5 Explique, cómo equilibrarías las cuotas pactadas, quién le puede colaborar a quien y con cuánto le colabora.

Respuesta: Se espera que edifiquen el reparto equitativo como una forma de equiparar los excesos con los defectos dentro del contexto: Los estudiantes con aportes mayores a $\$13.000$ (Paola, Camila y Felipe) le contribuyen a los que aportaron menos de esta cantidad (Ana, Sergio, Jhohan, Alexis y Valentina) hasta alcanzar el equilibrio en los aportes.

3.6 ¿Cuánto debe ser el aporte promedio del grupo para poder asistir a la actividad?

Respuesta: El aporte promedio debe ser $\$13.000$ por estudiante.

3.7 ¿De acuerdo con la situación se puede afirmar que la Media Aritmética representa el valor del reparto equitativo de las cuotas? Explica tu respuesta

Respuesta: Se espera que los estudiantes identifiquen la Media Aritmética como el valor que equilibra el reparto equitativo.

3.8 Completa la siguiente tabla

Estudiantes	Cuotas semanales en \$			Total aportes en \$	Valor que falta para equilibrar el aporte por estudiante
	Primera	Segunda	Tercera		
Ana	3.000	4.000	5.000		
Paola	6.000	6.000	10.000		
Camila	2.000	8.000	7.000		
Felipe	4.000	8.000	7.000		

Sergio	5.000	4.000	3.000		
Jhojan	3.000	2.000	3.000		
Alexis	2.000	3.000	2.000		
Valentina	1.000	4.000	2.000		
Sebastian	4.000	2.000	7.000		
Elizabeth	2.000	8.000	3.000		
			TOTAL		

Respuesta: Los estudiantes completan la tabla identificando los excesos y defectos en la cuota pactada.

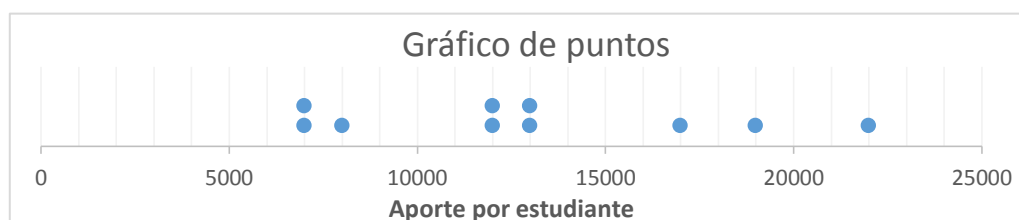
Estudiantes	Cuotas semanales en \$			Total aportes en \$	Valor que falta para equilibrar el aporte por estudiante
	Primera	Segunda	Tercera		
ANA	3.000	4.000	5.000	12.000	1.000
PAOLA	6.000	6.000	10.000	22.000	-9.000
CAMILA	2.000	8.000	7.000	17.000	-4.000
FELIPE	4.000	8.000	7.000	19.000	-6.000
SERGIO	5.000	4.000	3.000	12.000	1.000
JHOJAN	3.000	2.000	3.000	8.000	5.000
ALEXIS	2.000	3.000	2.000	7.000	6.000
VALENTINA	1.000	4.000	2.000	7.000	6.000
SEBASTIÁN	4.000	2.000	7.000	13.000	0
ELIZABETH	2.000	8.000	3.000	13.000	0
			TOTAL	150.000	0

3.9 ¿Por qué la suma de los valores que faltan para equilibrar la cuota da cero?

Respuesta: Los aportes de estudiantes por encima de la cuota –exceso– se equilibran con los aportes por debajo de la misma –defecto–.

3.10 Represente en un gráfico de puntos, el aporte total en dinero por cada estudiante y señale el valor que equilibra los aportes

Respuesta: Se espera que construyan un diagrama de puntos como el siguiente:



Por último el punto de equilibrio equivale a \$13.000 que lo determinarían hallando

la Media Aritmética, el punto de equilibrio o el reparto equitativo.

Actividad II: Media aritmética como la estimación de real en una medición.

Se pretende que los estudiantes usen la Media Aritmética en la eliminación de errores de medición por exceso o por defecto

4 Se quiere estimar la estatura del profesor de matemáticas del grado noveno de la Institución Educativa Juan de La cruz Posada, utilizando un mismo metro; se escogen 10 estudiantes de este mismo grado para realizar dicho proceso. A continuación se presentan los valores obtenidos en metros: 1.70; 1.72; 1.70; 1.73; 1.73; 1.75; 1.77; 1.72; 1.72 y 1.76.

4.1 ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?

Respuesta: En las mediciones se generan errores que dependen del observador, de su experiencia y de la precisión del instrumento de medición.

4.2 ¿De las mediciones realizadas por los estudiantes, se puede afirmar que algunos tienen errores de medición por encima o por debajo de la estatura real del profesor? Explica tu respuesta.

Respuesta: Se espera que identifiquen que algunos pudieron tomar mediciones por encima –exceso– o por debajo –defecto– de la medición real.

4.3 ¿Qué estrategia utilizarías para determinar el valor “real” de la estatura del profesor?

Respuesta: Para responder a esta pregunta el estudiante usara la Media Aritmética como el valor que equipara los errores de medición por exceso y por defecto.

4.4 Reparte equitativamente la última cifra decimal de las mediciones realizadas por los estudiantes. Describe el proceso que realizaste.

Respuesta: Se espera que el estudiante use el repartir equitativo para identificar que el valor que equipara los excesos y defectos de la medición es 1,73 m.

4.5 Un grupo de estudiantes afirma que la estatura real del profesor es 1,72 m; teniendo en cuenta que este es el dato que más se repite. Otro grupo concluye que el valor real es 1,73 m; debido a que 3 es el valor que equipara la última cifra decimal, que es la incertidumbre de las mediciones. ¿Cuál sería la mejor estimación de estatura real del profesor?

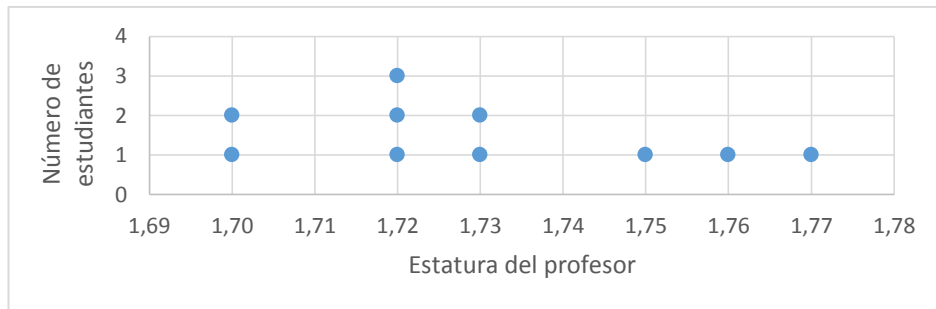
Respuesta: Se espera que los estudiantes usen la Media Aritmética y no la moda como la mejor estimación de la medida de real del profesor, la cual es 1.73 m ya que es el dato que equipara los errores de medición.

4.6 ¿Se puede concluir en este caso, que la Media Aritmética es el valor que equipara los errores de medición? ¿Por qué?

Respuesta: El estudiante puede calcular la Media Aritmética, y darse cuenta que coincide con el valor que equipara los errores de medición.

4.7 Represente en un gráfico de puntos la información.

Respuesta: El estudiante debe realizar un gráfico como el siguiente

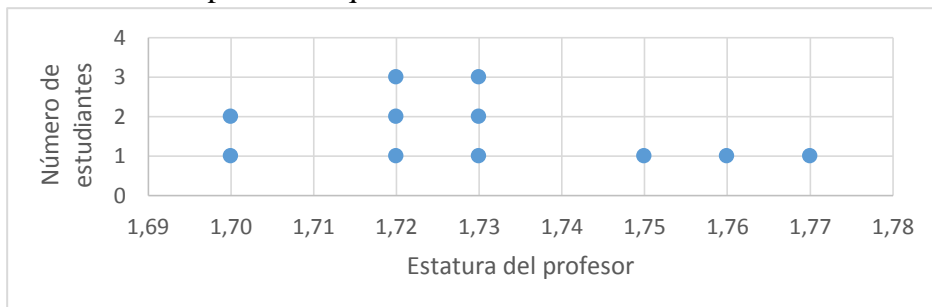


4.8 Se escoge al azar otro estudiante del grupo para que realice una nueva medición de la estatura del profesor, cuál debería ser el valor de esta medición para que:

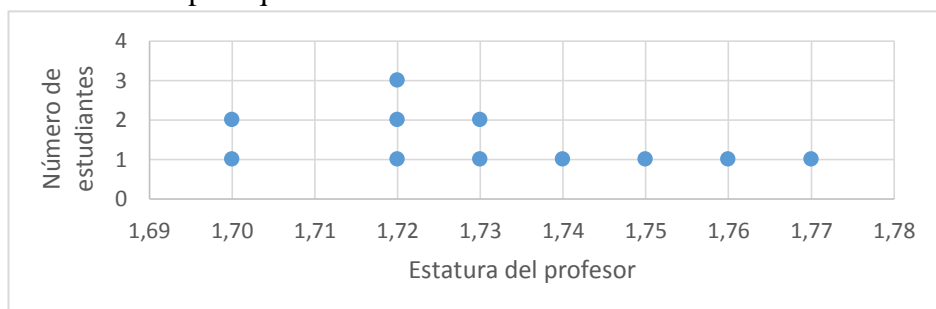
- la estatura real no cambie.
- La estatura real aumente.
- La estatura real disminuya.
- Representa las situaciones anteriores en un diagrama de puntos y analiza que sucede con el punto de equilibrio.

Respuesta: Se espera que el estudiante realice diagramas de puntos donde el punto de equilibrio cumpla con la condición dada, una posibilidad puede ser:

- Debe ser un valor igual al que equipara los errores de medición o la Media Aritmética o al punto de equilibrio.

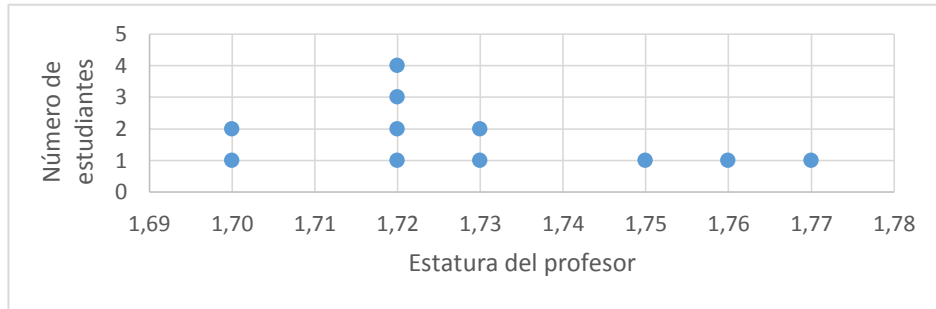


- Debe ser un dato mayor a la Media Aritmética o al valor que equipara los errores de medición para que el valor de la estatura real aumente.



- Debe ser un dato menor a la Media Aritmética o al valor que equipara los errores de medición para que el valor de la estatura real disminuya.

errores de medición para que el valor de la estatura real disminuya.



Momento III: La Media Aritmética Como Valor Representativo De Un Conjunto De Datos.

Este momento está conformado por una actividad donde se espera que los estudiantes signifiquen la Media Aritmética como una valor representativo de un conjunto de datos.

Actividad 1: La Media Aritmética Como Valor Representativo De Un Conjunto De Datos.

5 Al gimnasio se remitió un grupo de deportistas de sexo femenino en condiciones saludables y aceptables, pero con un sobrepeso promedio de 3 kg según los requerimientos para participar en un torneo Nacional de voleibol. Los siguientes valores se obtuvieron al medirle a cada una de ellas el peso en kilogramos (kg) al ingresar y al finalizar el primer mes de entrenamiento. En la siguiente tabla se muestra los resultados de la medición.

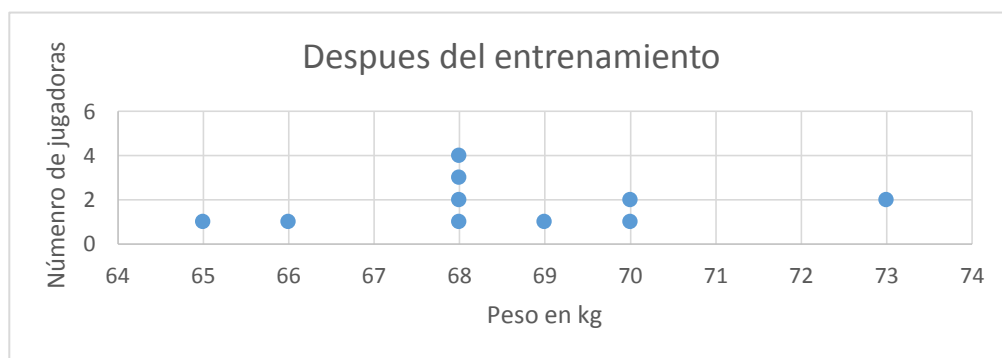
Deportista	Pesos en Kilogramos (kg)	
	Al ingreso	Al finalizar el primer mes de entrenamiento
Ana	75	70
Elvia	70	66
Gabriela	74	70
Juana	73	69
Teresa	69	68
Fanny	72	68
Yeny	77	73
Karla	68	68
Camila	70	68
Olga	67	65

5.1 Representa en diagramas de puntos los pesos del grupo de deportistas antes y después de finalizar los entrenamientos y determina el punto de equilibrio de cada uno.

Respuesta: Se espera que los estudiantes realicen dos diagramas de puntos como los siguientes, y que determinen el punto de equilibrio de cada conjunto de datos.



El punto de equilibrio antes del entrenamiento es $71.5kg$.



El punto de equilibrio después del entrenamiento es $68.5kg$.

5.2 ¿Qué significado tiene el punto de equilibrio en esta situación?

Respuesta: Se espera que los estudiantes signifiquen el punto de equilibrio como el peso promedio del grupo antes y después del entrenamiento.

5.3 Si fueras el entrenador, que estrategia utilizarías para establecer si el entrenamiento fue eficaz.

Respuesta: Se espera que los estudiantes comparen los puntos de equilibrio de las dos diagramas de puntos e identifiquen el peso promedio bajo en la meta esperada de $3 kg$.

5.4 ¿Cuánto debería bajar cada deportista para alcanzar la meta?

Respuesta: Se pretende que el estudiante analice cuanto debe bajar cada estudiante para alcanzar la meta propuesta de $3kg$ en promedio.

5.5 En caso de que se cumpla la meta, ¿cómo puedes explicar que algunos deportistas después del entrenamiento tienen pesos por debajo y otros por encima de la meta?

Respuesta: Se espera que los estudiantes identifiquen que el peso de los deportistas que están por debajo de la meta –defecto– se compensan con el peso de los estudiantes que están por encima de la meta –exceso–

5.6 Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.

Respuesta: Se espera que los estudiantes le den el significado a la Media Aritmética de un valor representativo de un conjunto de datos, ya que en esta situación el peso promedio representa una característica del grupo antes y después del entrenamiento.

5.2.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LOS MOMENTOS DE INTERVENCIÓN

A continuación, se analizan algunas respuestas de las parejas de estudiantes al cuestionario por momentos de intervención y actividades. A cada pareja se le nombró con la letra P, seguida de un numeral que se le asignó para mantener su anonimato; por ejemplo P1 es la pareja uno. Cabe aclarar que este análisis se enfoca en los procesos de construcción social de la noción de Media Aritmética y su Resignificación por parte de las parejas de trabajo a partir de sus Usos y no pretende verificar si las respuestas son o no correctas.

Momento I: La Media Aritmética como punto de equilibrio.

Este momento estuvo estructurado en dos actividades; en la primera las parejas de trabajo determinaron la relación matemática para equilibrar masas en una palanca y en la segunda construyeron la noción de Media Aritmética como punto de equilibrio de un conjunto de datos, haciendo una analogía entre una palanca y un diagrama de puntos.

Actividad I: Punto de Equilibrio.

Todas las parejas de trabajo identifican la relación para equilibrar masas de igual valor en una palanca, ubicando por ensayo y error, es decir exceso o defecto en las distancias al punto de equilibrio que ubicaban las masas; como se puede evidenciar en las respuestas de P1 y P4.

P1	<p>1.1 Equilibra dos masas de 5 kg ubicándolas a diferentes distancias del punto de equilibrio. Describe como lo realizaste.</p> <p>Iniciando se colocaron dos masas de 5kg a distancias 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 del punto de equilibrio; por cada distancia se analiza un equilibrio, cada distancia de igual peso muestra un equilibrio exacto, mientras que dos masas de igual peso no equilibran a distinta distancia.</p> <p>1.2 Repite el procedimiento del punto anterior para masas de 10 kg, 15 kg y 20 kg. ¿Qué puedes concluir de las distancias a las que se equilibran masas iguales?</p> <p>Se puede concluir que al usar un peso igual a ambos lados se obtiene o no equilibrio dependiendo su distancia, pues si se ubican dos masas de 15kg a distancia dos del brazo izquierdo y 3 del derecho mostrara gran inclinación al defecto o de mayor distancia.</p>
----	---

P4	<p>1.1 Equilibra dos masas de 5 kg ubicándolas a diferentes distancias del punto de equilibrio. Describe como lo realizaste.</p> <p>Ubicamos las dos masas de 5kg a lados opuestos en la misma distancia y queda equilibrada</p> <hr/> <hr/> <p>1.2 Repite el procedimiento del punto anterior para masas de 10 kg, 15 kg y 20 kg. ¿Qué puedes concluir de las distancias a las que se equilibran masas iguales?</p> <p>Para obtener equilibrio debemos tener el mismo peso de las masas y a la misma distancia</p>
----	---

Cuando se les pidió analizar el equilibrio entre pares de masas diferentes y la distancia a la que se equilibran, las parejas de trabajo P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 y P10 usaron nuevamente el exceso y el defecto para construir la relación matemática. P1 es el único expresa de forma general la relación encontrada, mientras que el resto la expresa similar a P4 identificando que la distancia depende de la proporción de las masas y dan un ejemplo.

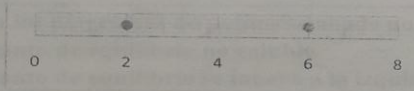
P1	<p>1.3.8 ¿Qué relación hay entre el valor de las masas que se están equilibrando y la distancia a la que se equilibran?</p> <p>existe cierta relación, la cual radica en que si una masa es x veces mayor que otra, entonces la masa menor se debe ubicar a una distancia x veces mayor de la distancia a la que está ubicada la masa mayor</p>
P4	<p>1.3.8 ¿Qué relación hay entre el valor de las masas que se están equilibrando y la distancia a la que se equilibran?</p> <p>si dos masas tienen el mismo peso se equilibran en distancias iguales; si por el contrario son masas con distinto peso; dependo del peso se encuentra la distancia; si por ejemplo hay dos masas una de 5kg y una de 15kg. la distancia de 5kg debe triplicar la distancia de 15kg</p>

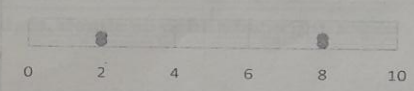
Actividad II: Media Aritmética como punto de equilibrio

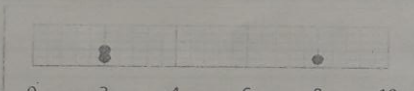
Cuando se les pide a los estudiantes hallar el punto de equilibrio en un diagrama de puntos usan el modelo matemático construido en la actividad anterior para determinarlos como se observa en la respuesta de P1.

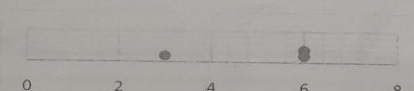
P1

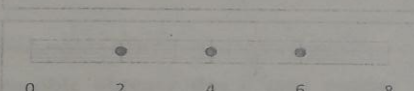
2.1 Considerando los siguientes diagramas de puntos como una palanca y a cada dato como una masa de igual valor; señala el número donde se debe ubicar el punto de equilibrio.

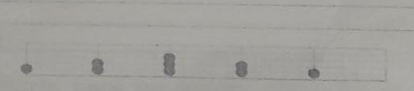
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

a. 4 f. 4
 b. 5
 c. 4
 d. 5
 e. 4

P1

los a-b-e se ubico el punto medio de tal forma que quedo a una distancia igual a ambos lados.
 los c-d se ubico el punto inclinándose al lado con más peso para balancearse.
 la f se ubico bajo tres masas para equilibrar a los lados masas iguales.

Luego cuando se les pide a las parejas de trabajo analizar las condiciones de equilibrio, para los diagramas de puntos al añadirse un nuevo dato, encuentra que cualquier distancia a la que se ubique afecta el equilibrio, como lo expresa P1.

P1

2.5 Si en los diagramas de puntos se añade un nuevo dato, donde se debe ubicar para que:

a. El punto de equilibrio no cambie.
 b. El punto de equilibrio se mueva a la izquierda.
 c. El punto de equilibrio se mueva a la derecha.

a. Justo sobre el punto de equilibrio.
 b. Una corta distancia al lado izquierdo.
 c. Una distancia al lado derecho.

Posteriormente se les pide a los estudiantes que determinaran la Media Aritmética de los conjuntos de datos representados en cada diagrama de puntos y que comparen los resultados con los respectivos puntos de equilibrio; las parejas P1, P2, P4, P6, P8, P9 y P10 identifican una equivalencia entre estas dos expresiones, como se observa en los razonamientos de P1 y P4.

P1

2.7 Determina la media aritmética de cada diagrama de puntos, ¿Qué puedes concluir?

a. $(2+6) \div 2 = 4$
 b. $(2+2+8+8) \div 4 = 5$
 c. $(2+2+8) \div 3 = 4$
 d. $(3+6+6) \div 3 = 5$
 e. $(2+4+6) \div 3 = 4$
 f. $(0+2+2+4+4+4+6+6+8) \div 9 = 4$

Tanto la media aritmética como el punto de equilibrio dan igual resultados.

P1	<p>2.8 ¿Con base al punto anterior como se puede definir la media aritmética de un conjunto de datos?</p> <p>Se debe de sumar cada distancia a la que se encuentre cada masa y se divide por la cantidad total de masas. La media aritmética se puede definir como el punto de equilibrio de un conjunto de datos</p>
P4	<p>2.7 Determina la media aritmética de cada diagrama de puntos, ¿Qué puedes concluir?</p> <p>a. $(2+6) \div 2 = 4$ b. $(2+2+8+8) \div 4 = 5$ c. $(2+2+8) \div 3 = 4$ d. $(3+6+6) \div 3 = 5$ e. $(2+4+6) \div 3 = 4$ f. $(0+2+2+4+4+4+6+8)$ $36 \div 9 = 4$.</p>
P4	<p>2.8 ¿Con base al punto anterior como se puede definir la media aritmética de un conjunto de datos?</p> <p>Se puede concluir que la medida aritmética, se puede relacionar con el punto de equilibrio sacando un promedio de los valores de los datos</p>

Además identifican que las propiedades del punto de equilibrio también las cumple la Media Aritmética.

P1	<p>2.9 Con base a los puntos anteriores, ¿Qué características del punto de equilibrio cumple la media aritmética?</p> <p>1. Debe estar ubicado entre ambos extremos. 2. Es único. 3. No necesariamente coincide con los datos del conjunto.</p>
P4	<p>2.9 Con base a los puntos anteriores, ¿Qué características del punto de equilibrio cumple la media aritmética?</p> <p>- Que el punto de equilibrio y la media aritmética es lo mismo. - Está ubicada entre los datos. - Es única, no hay 2 medias aritméticas o puntos de equilibrio</p>

De esta manera las parejas de trabajo P1, P2, P4, P6, P8, y P10 construyen la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio; mientras que P3, P6, P7 y P9 la siguen definiendo como la suma de los datos dividida la cantidad de datos.

Momento II

En este momento estuvo estructurado en dos actividades, donde las parejas de trabajo usaran la noción de Media Aritmética como punto de equilibrio entre los excesos y defecto, para realizar repartos equitativos y eliminar errores en la estimación de una medición.

Actividad I

En esta actividad todas las parejas de trabajo alcanzan el objetivo propuesto encontrándose los siguientes hallazgos:

Cuando se les pide a las parejas de trabajo realizar un reparto equitativo, buscan la igualdad o equidad entre los aportes que estaban por encima de la cuota con los que estaban por debajo de la misma, como se evidencia en los razonamientos de P1 y P2.

P1	<p>3.5 Reparte equitativamente los aportes de cada estudiante, describiendo quien le puede colaborar a otro compañero, de manera que todos puedan asistir a la actividad.</p> <p>felipe ayudo a Valentina con 6.000 Paola ayudo a Alexis con 6.000 y a Jhojan con 3.000 Camila ayudo a Ana con 1.000, a Sergio con 1.000 y a Jhojan con 2.000</p>
P2	<p>3.5 Reparte equitativamente los aportes de cada estudiante, describiendo quien le puede colaborar a otro compañero, de manera que todos puedan asistir a la actividad.</p> <p>Paola, tuvo que dar 9000 y quedo con 13.000, Camila dio 4000, Sergio recibio 1000 de Paola, Jhojan recibio 5000, Felipe dio 6000, Ana recibio 1000, Alexis recibio 6000, Valentina recibio 6000, Sebastian estaba exacto y elizabeth tambien</p>

Además identifican que repartir equitativamente los aportes es equivalente a determinar la Media Aritmética y la significan como el valor que equilibra las cuotas.

P1	<p>3.7 ¿De acuerdo con la situación, se puede afirmar que la Media Aritmética representa el valor del reparto equitativo de las cuotas? Explica tu respuesta.</p> <p>Si, porque la Media Aritmética es de \$13.000 por estudiante y, al aportar dinero de un estudiante a otro se presenta igual valor.</p> <p>Por lo tanto el promedio (Media Aritmética) equivale al valor del reparto equitativo de las cuotas.</p>
P2	<p>3.8 ¿Existe alguna relación entre el punto de equilibrio, el reparto equitativo y la Media Aritmética de las cuotas por estudiante? Explica tu respuesta.</p> <p>Si, porque el punto de equilibrio sería el resultado de la media aritmética así mismo siendo el resultado del reparto equitativo, es decir, todos se consiguen con la misma operación la cual es sumar los datos y dividirlos por la cantidad de datos</p>

También identificaron que la Media Aritmética equilibra los aportes por encima de la cuota –exceso– con los aportes por debajo defecto, y por tanto la suma de los excesos y defectos es mínima.

P1	<p>3.10 ¿Por qué la suma de los valores que faltan para equilibrar la cuota da cero?</p> <p>Porque los valores sobrantes en algunos alumnos eran el total faltante en otros, por lo tanto, se repartieron equitativamente de manera que cada estudiante pudiese asistir.</p>
----	--

P2	<p>3.10 ¿Por qué la suma de los valores que faltan para equilibrar la cuota da cero?</p> <p>Porque unos de los estudiantes que dieron de más le ayudaron a los estudiantes que dieron menos y así se logra mantener un equilibrio para que todo quede con el valor exacto</p>
----	---

Actividad II

Cuando se les pide a las parejas de trabajo explicar por qué a pesar de utilizar el mismo metro la totalidad de estudiantes encontraron diferentes resultados al medir la estatura del profesor, identificando que en las mediciones se pueden cometer errores por exceso o defecto que dependen de la experiencia del observador, como lo evidencian P1, P2 y P4..

P1	<p>1. ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?</p> <p>Se pudieron obtener diferentes medidas porque al pesar de iniciar en un mismo punto algunos creen que su estatura puede ser a nivel del cabello, otros de sus caderas y así varia la estatura en cm más o cm menos</p>
P2	<p>1. ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?</p> <p>Porque depende de cada uno, el resultado propio que le da más que todo teniendo en cuenta la forma de medir de cada uno</p>
P4	<p>1. ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?</p> <p>Porque a pesar de tener el mismo aparato de medición, depende del observador y la manera de medir</p>

Luego para determinar la estatura real del profesor, todos usan la Media Aritmética o reparto equitativo para equilibrar los errores medición que se cometieron por exceso o defecto.

P1	<p>3. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar el valor "real" de la estatura del profesor?</p> <p>Repartir equitativamente cada medida hasta encontrar una exacta, luego verificamos usando la Media Aritmética</p>
P1	<p>6. ¿Se puede concluir en este caso, que la media aritmética es el valor que equipara los errores de medición? ¿Por qué?</p> <p>Si, porque este proceso me ha dado la estatura la acertada o aproximada la estatura real</p>

P1	<p>3. Si fueras el entrenador, explica cómo determinarías si el entrenamiento fue eficaz.</p> <p>A pesar de que no todos los integrantes del grupo rebajaron 3kg, el punto promedio muestra si haberlos disminuido, por lo que se diría que fue muy útil el entrenamiento.</p>
P4	<p>3. Si fueras el entrenador, explica cómo determinarías si el entrenamiento fue eficaz.</p> <p>Miraría el promedio o el punto de equilibrio del antes y el después, y si la diferencia es de 3 kilogramos, me doy cuenta que el entrenamiento fue eficaz.</p>

También identifican la Media Aritmética como el valor que equilibra los pesos de los deportistas que están por encima o por debajo de la meta esperada.

P1	<p>5. En caso de que se cumpla la meta, ¿cómo se puede explicar que algunos deportistas después del entrenamiento tienen pesos por debajo y otros por encima de la meta?</p> <p>Con los pesos de algunos deportistas se podrían compensar el de otros o, se repartió equitativamente los pesos ya se supo que algunos cubrían el faltante en otros.</p>
P2	<p>5. En caso de que se cumpla la meta, ¿cómo se puede explicar que algunos deportistas después del entrenamiento tienen pesos por debajo y otros por encima de la meta?</p> <p>Algunos tuvieron un entrenamiento más serio que otros, sin embargo, la suma de todos los pesos después se equilibran por el motivo de que los que bajaron más compensan a los que bajaron menos o no bajaron.</p>

Posteriormente identifican que la Media Aritmética tiene la propiedad de representatividad de un conjunto de datos.

P1	<p>6. Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.</p> <p>Sí, porque al obtenerse un valor referido como punto promedio de un conjunto de datos se muestra que la Media Aritmética puede ser el valor que lo representa.</p>
P2	<p>6. Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.</p> <p>Sí, claro, se puede definir como el valor promedio del tiempo o como un valor que representa el promedio del peso de antes como el de después.</p>
P4	<p>6. Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.</p> <p>Sí, ya que la medida aritmética o el punto de equilibrio es el valor que en cierta forma representa los datos de los ejemplos de personas como solo una.</p>

Con base a lo anterior, se presenta en la siguiente tabla la clasificación de las respuestas de las parejas de trabajo de acuerdo a los criterios de análisis de las respuestas, donde se

Significa la Media Aritmética como el valor que compensa los excesos y los defectos en los errores de medición.	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI
Momento III: Actividad I										
Usa la Media Aritmética para determinar el punto de equilibrio del conjunto de datos.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Compara el punto de equilibrio de dos conjuntos de datos y lo interpreta dentro del contexto.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Significa la Media Aritmética como el valor representativo de un conjunto de datos.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI

5.3 ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

La entrevista semiestructurada se realizó a la pareja de trabajo P1, de las 10 que realizaron el cuestionario; principalmente se les indaga por los procesos de construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de los excesos y defectos de una medición, y como esta es usada por los estudiantes en diferentes contextos desarrollando una Matemática funcional.

La entrevista inicialmente consta de dos preguntas abiertas, y de acuerdo a las explicaciones y argumentaciones que den los estudiantes, el investigador les ira formulando nuevas preguntas durante la entrevista.

5.3.1 ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Las siguientes son las dos preguntas que orientaran la entrevista a las parejas de trabajo, las demás surgen a partir del desarrollo de la entrevista.

¿Cómo determinaron la relación entre masas y distancias para encontrar el punto de equilibrio de una palanca?

Se espera con esta pregunta que los estudiantes describan como construyeron la relación matemática que les permitió equilibrar pares de masas en una palanca y determinar el punto de equilibrio de un conjunto de datos.

¿Cómo determinó que la Media Aritmética es equivalente el punto de equilibrio de un conjunto de datos? Y ¿Qué significa esto?

Se pretenden con esta pregunta que las parejas de trabajo describan como encontraron la relación entre la Media Aritmética y el punto de equilibrio entre los excesos y los defectos y describan como la usaron en diferentes situaciones.

5.3.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

A continuación se describen algunas respuestas de la pareja de estudiantes P1, a la entrevista semiestructurada donde dan cuenta de los razonamientos empleados en la construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de los excesos y defectos; y como la usaron en contextos donde tenían que encontrar una medida justa.

Entrevistador: ¿Cómo determinaron la relación entre masas y distancias para encontrar el punto de equilibrio de una palanca?

P1: Si en ambos brazos a partir del punto de equilibrio se encontraban masas de igual peso, se ubicaban a distancias de igual valor. Si una masa era de mayor peso que la otra, se ubicaba la de mayor peso a una distancia más cercana del punto de equilibrio y la de menor peso a una igual, al no equilibrasen se iba cambiando de distancia aumentando la de peso menor hasta hallar la distancia a la que se balancean.

Entrevistador: Por ejemplo, si tuvieran una masa de 10 kg y una de 5 kg ¿Cómo determinarían el equilibrio entre ellas?

P1: La masa de 10 es el doble de pesada a la de 5, entonces la de 10 se ubica a cierta distancia del punto de equilibrio, la de 5 al irse ubicando distancia por distancia se ubicaría; si la de 10 está a una distancia de 1 la de 5 a 2, porque al 10 ser el doble de 5, el 5 se tendría que ubicar a una distancia doble a la que se ubicó la de mayor peso para poder equilibrarlo

En la respuesta a la primera pregunta a P1, se evidencia el Uso del exceso y el defecto, en las distancias a las que ubica las masas, para encontrar la relación matemática de equilibrio en una palanca. Además en ejemplo explicita la proporción que encontró entre masas y distancias.

Entrevistador: ¿La relación matemática para encontrar el punto de equilibrio en una palanca se puede usar para encontrar el punto de equilibrio de un conjunto de datos?

P1: Si porque en un diagrama de puntos por ejemplo, se ubicarían puntitos que podrían ser los que equivalgan a las masas, que serían la de los pesos; entonces habría que ubicar un punto de equilibrio en medio de estos dos datos, masas o puntos; para poder que se equilibren estos.

Entrevistador: Por ejemplo si en un diagrama de puntos tiene en un lado dos puntos y en otro uno ¿Qué distancias deberían tener del punto de equilibrio?

P1: Del punto de equilibrio debería estar a una distancia de uno que sería la más cercana, la que tiene dos puntos, y una distancia doble la que tiene un solo punto para poder que se equilibren.

Se destaca como la pareja le da un peso a cada dato representado en el diagrama de puntos, para poder determinar el equilibrio usando la relación matemática encontrada en la primera actividad.

Entrevistador: ¿Cómo determinó que la Media Aritmética es equivalente el punto de equilibrio de un conjunto de datos? Y ¿Qué significa esto?

P1: Porque el punto de equilibrio es algo que balancea ciertos datos o pesos, y la Media Aritmética equilibra o balancea todo el conjunto, teniendo este como un punto que sería acertado para poder que todo quede igual.

Cuando compara el punto de equilibrio de un conjunto de datos representado en un diagrama de puntos, con la Media Aritmética, descubre que los dos tienen el mismo valor y la característica de equilibrar los excesos y los defectos de las distancias.

Entrevistador: ¿Por qué se relaciona el reparto equitativo con la Media Aritmética?

P1: Porque el reparto equitativo es compensar lo que más tiene con lo que menos, de manera que todo quede repartido de manera igualitaria; y la Media Aritmética es un dato que representa a todo el conjunto que también quedaría todo igual, equilibrándose.

Se puede identificar que usa el reparto equitativo como un proceso donde todo queda distribuido de forma igualitaria y que es equivalente a usar la Media Aritmética al tener esta la propiedad de equilibrar el conjunto de datos.

Entrevistador: Cuando se les pedía determinar la estatura del profesor ¿Por qué Usó la Media Aritmética?

Porque se estaba dando un conjunto de datos, que eran las estaturas que le daba a cada estudiante de lo que medía el profesor; entonces se usó todo el proceso de sacar la Media Aritmética, dando 1,73 cm que sería la estatura del profesor, ya que este al ser un conjunto de datos había que sacar el dato que fuera acertado.

Se puede evidenciar como la pareja de estudiantes Usó la Media Aritmética para determinar una medida justa de la estatura del profesor.

¿En esas mediciones que se tenían de la estatura del profesor había errores de medición?

P1: Sí, porque algunos estudiantes podían medir o un poco más debajo de la parte exacta donde se mide una persona o un poco más arriba.

Los estudiantes identifican que en la situación hay errores de medición por exceso y por defecto.

Entrevistador: En esta situación ¿Qué representaría la Media Aritmética?

P1: La estatura del profesor, porque se sacó del conjunto de datos, un dato que no era el más repetido, pero era el más acertado que dio la respuesta correcta de la estatura del profesor.

Identifican que la Media Aritmética es el dato que mejor representa la estatura del profesor.

Entrevistador: Por ejemplo cuándo se dice que la edad promedio de un grupo es 15 años ¿Qué significado tiene?

P1: Puede ser que la mayoría de los estudiantes del grupo tienen 15 años, o si se tratara con un reparto equitativo, pueden haber personas de mayor edad a 15 años y unas de menor, entonces la edad sobrante después de 15 años, de las personas de mayor se compensa con los de menor de 15 años, dando así una edad de 15 años para todos en el conjunto.

Cuando se les pide interpretar situaciones donde se usa la Media Aritmética, recurren a buscar el equilibrio entre el exceso y al defecto.

Entrevistador: ¿En qué situaciones de su cotidianidad podrías usar la Media Aritmética?

P1: Al recaudar dinero para hacer un paseo, para sacar la nota final de un estudiante, para repartir equitativamente algo, y también para sacar alguna medición de algún objeto.

Entrevistador: ¿Cómo entendía la Media Aritmética antes de las actividades y como la entiende ahora?

P1: Antes de realizarse las actividades entendía la Media Aritmética como la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos, ahora después de las actividades entiendo por Media Aritmética que es el punto de equilibrio de los datos que son mayores y menores de un conjunto.

Las actividades realizadas en los tres momentos de intervención por P1, favorecieron la definición de la Media Aritmética como un punto de equilibrio, que se usa en situaciones o contextos donde se deban equilibrar los excesos y los defectos.

5.4 HALLAZGOS

A continuación se realiza un análisis entre lo que se esperaba que hicieran los estudiantes y lo que realmente realizaron durante los tres momentos de intervención, tomando como categorías el papel determinante que juega el exceso y el defecto en la

construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio, y cómo sus Usos llevan a las parejas de trabajo a encontrar relaciones y propiedades del objeto matemático.

Momento I: La Media Aritmética como punto de equilibrio.

En este momento se esperaba que los estudiantes construyeran una relación matemática para equilibrar masas en una palanca, y que lo usaran para significar la Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos.

Se pudo evidenciar que para encontrar el equilibrio entre dos masas en una palanca, las parejas de trabajo recurrieron a la medición, encontrando que excesos o defectos en las distancias a las que ubicaban las masas afectaban el equilibrio, y que solo una medida justa entre estos favorecía alcanzarlo. Cada pareja verificaba sus hipótesis por medio de la simulación para convencer a su compañero de trabajo, y así construir la relación matemática, expresada en la mayoría de los casos en un lenguaje natural.

Esta expresión matemática la usaron las parejas de trabajo para encontrar el punto de equilibrio de un conjunto de datos representado en un diagrama de puntos; donde a cada punto lo asumieron como masas de igual valor, y al analizar condiciones de equilibrio identificaron que este es equivalente a la Media Aritmética y que comparten las mismas propiedades.

En este momento para las parejas de trabajo la Media Aritmética deja de ser una fórmula carente de significado, para representar un punto de equilibrio entre los excesos y defectos de un conjunto de datos.

Momento II: La Media Aritmética como el valor que equipara los excesos y defectos.

En este momento se esperaba que los estudiantes usaran la noción de Media Aritmética construida en el momento anterior, como el valor que equipara los excesos y defectos en un conjunto de datos, para realizar repartos equitativos y estimar mediciones.

Cuando se le propuso a los estudiantes situaciones donde deben realizar repartos equitativos, distribuyeron las cantidades del conjunto hasta encontrar un valor que equipara los datos mayores con los menores, identificando que este debe coincidir con la Media Aritmética.

Luego cuando se les pidió estimar el valor de una medición, de la que se tenían varios resultados, identificaron que en los datos había errores por exceso y por defecto relacionados con la exactitud de cada medida, cometidos por el observador y que el Uso de la Media Aritmética les favorecía obtener una medida real que equilibra dichos errores

En ambas situaciones se puede apreciar como los estudiantes movilizan el conocimiento construido en el primer momento a usarlo en otras situaciones, caracterizadas por tener que determinar un equilibrio entre los excesos y los defectos.

Momento III: La Media Aritmética como valor representativo de un conjunto de datos.

En este momento se buscaba que los estudiantes usaran la noción de Media Aritmética construida en el primer momento, en una situación donde debían comparar dos conjuntos de datos para analizar su característica de representatividad.

En el desarrollo de la actividad las parejas de trabajo usan la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio; ya que comparan este valor en el antes y después del entrenamiento para determinar si fue eficaz. Además identifican que este valor caracteriza el peso de todo el grupo y que tiene la característica de compensar los valores mayores a él con los menores.

En este momento los estudiantes concluyen que la Media Aritmética tiene la característica de representatividad de un conjunto de datos, ya que la toman como una medida que caracteriza al todo el conjunto de datos y su propiedad de equilibrar los excesos y defectos favorece comprender que no representa datos de forma individual.

5.5 CONCLUSIONES DEL CAPITULO

De acuerdo al análisis de la puesta en escena del modelo propuesto, destacamos que cuando el estudiante construye la noción de Media Aritmética por medio de la experimentación y la búsqueda de relaciones, el conocimiento comienza adquirir significado ya que este es capaz de movilizarlo para interpretar y resolver otro tipo de situaciones, encontrándole nuevos Usos en diferentes contextos al objeto matemático. Además las argumentaciones que surgen de la interacción social, conlleva a que las conjeturas que se establezcan sean validadas por el grupo, favoreciendo la construcción del conocimiento y su funcionalidad.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales y particulares de esta investigación en cuanto a los aspectos históricos–epistemológicos, marco teórico, objetivos propuestos y pregunta de investigación.

6.1. EN RELACIÓN CON LOS ASPECTOS HISTÓRICOS–EPISTEMOLÓGICOS

La presentación tradicional de la Media Aritmética en textos escolares y programas curriculares evidencia que el tratamiento dado al concepto dista mucho de ofrecer importancia a la génesis o epistemología del objeto, y su implementación o enseñanza se limita en gran medida a la aplicación de fórmulas o expresiones ya enunciadas que apartan al estudiante de su papel de constructor de conocimiento, así como de los Usos que pueda darle a este en su contexto, que es precisamente lo que plantea la teoría Socioepistemológica.

En el análisis de los aspectos históricos–epistemológicos se evidenció que en la construcción del concepto de Media Aritmética se encuentra como elemento matemático fundamental el exceso y el defecto, que según Rondero (2010) es una constante en la construcción del objeto matemático, pues este se adapta a sus diferentes Usos y representaciones, tales como: la Media Aritmética como un punto de equilibrio, como reparto equitativo, en la estimación de mediciones y como valor representativo de un conjunto de datos.

Uno de los hechos epistemológicos que evidencian la construcción del concepto de Media Aritmética mediante la equiparación de medidas entre el exceso y el defecto; son los procesos llevados a cabo según Rondero (2010) por Arquímedes, donde muchos de sus principios sobre la balanza están basados en la búsqueda del centro de gravedad mediante la equiparación entre los excesos y los defectos, de la misma manera según Conde (2015) Galileo en sus estudios sobre astronomía afirmó que las observaciones presentan como propiedad o característica una distribución simétrica alrededor de un valor verdadero.

Es así como la lectura, exploración y experimentación propia de nuestra investigación nos lleva a concluir, basándonos en los aspectos históricos–epistemológicos del Uso del elemento matemático del exceso y el defecto, que dicho argumento construye el objeto matemático en cuestión, evidenciando por su misma cuenta las fases que originaron el Uso y consolidación de la Media Aritmética.

6.2. EN RELACIÓN CON EL MARCO TEÓRICO

La Resignificación de la Media Aritmética en el proceso de enseñanza y aprendizaje en grado noveno (14 a 16 años) como se titula nuestra investigación y bajo la perspectiva de la teoría Socioepistemológica posibilitó visualizar desde una óptica diferente el concepto de Media Aritmética, pues la visión no se dirige exclusivamente hacia el objeto sino en mayor proporción hacia las prácticas sociales

que dieron origen al mismo, requiriendo de esta manera una mirada más amplia desde el plano epistemológico, social, didáctico y cognitivo tal como lo plantea la teoría misma.

Según la teoría Socioepistemológica el conocimiento se construye a partir de la misma actividad humana, de la interacción del sujeto con la realidad que le plantea el entorno, es por esto que esta investigación no partió de la aplicación de fórmulas matemáticas, pues esto de entrada riñe con el espíritu de la teoría, por esta razón la secuencia planteada está diseñada de tal manera que el estudiante mediante la interacción con actividades experimentales –**Momento I**– va construyendo bajo su misma responsabilidad y manejo sus propios argumentos que a la postre lo harán convencerse por su propia cuenta de los hallazgos realizados. Y es así como al pasar a los **Momentos II y III** el estudiante moviliza estos conceptos construidos a otro tipo de situaciones, estableciendo de manera espontánea un modelo matemático que le favorece construir nuevos significados validados por el mismo estudiante, y generar nuevos Usos para el concepto como lo es concluir que la Media Aritmética es un valor que equipara los excesos y los defectos en diferentes situaciones.

6.3. EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS

Esta investigación tiene como objetivo general **analizar las implicaciones en la enseñanza aprendizaje al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Socioepistemológica para la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos en las prácticas de aula**; el cual fue alcanzado a partir del cumplimiento de los objetivos específicos como se describe a continuación.

Entre los objetivos específicos planteados en la presente investigación está la identificación de **los Usos dados a la Media Aritmética**, que fueron rastreados en el análisis de los aspectos históricos–epistemológicos, llegando a la conclusión que este objeto matemático se usa en contextos donde haya que encontrar un equilibrio o equidad entre los excesos y defectos de una medición.

Frente a la **Resignificación de la objeto matemático a partir de los Usos** que hace el estudiante de sus propios hallazgos en su contexto, se puede evidenciar en la construcción de la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos –**Momento I**–, y su funcionalidad al poner este saber en uso en situaciones de repartos equitativos, estimación de mediciones –**Momento II**– y como un valor representativo de un conjunto de datos –**Momento III**–; donde el objeto matemático pasa de ser una fórmula carente de significado a tener la característica de equilibrar los excesos y los defectos de una variable en diferentes situaciones y contextos de medición, surgiendo así nuevas argumentaciones y procedimientos que permiten desarrollar una matemática funcional.

En las implicaciones didácticas podemos establecer basados en los aspectos históricos epistemológicos y en el discurso matemático escolar que existen elementos que están excluidos u opacados y que son determinantes en la construcción de la noción de Media Aritmética y su funcionalidad que han sido incluidas en el diseño de intervención; esto

se evidencio cuando el estudiante integró los conceptos previamente aprendidos estableciendo un nexo entre ellos y lo que por propia experimentación va adquiriendo al generar funcionalidad del concepto, pues ya no asume la Media solo como un promedio, sino como un valor que equipara los excesos y los defectos; significado que ha sido opacado en la didáctica tradicional.

Las implicaciones del **diseño e implementación de una Unidad Didáctica** como objetivo se evidencian en la **Resignificación de la Media Aritmética a partir de los Usos** dados al concepto, es así como resultado de la ruta didáctica planteada se observan procesos donde los estudiantes emplean la relación entre distancias y masas para equilibrar una palanca, en la construcción de la noción de Media Aritmética como punto de equilibrio de un conjunto de datos –**Momento I**–, en la misma dirección verifica su funcionalidad en el proceso de usarla apropiadamente en la equiparación de excesos y defectos en situaciones de repartos equitativos, además de la eliminación de errores de medición –**Momento II**– para llegar al momento donde los estudiantes la usan como un valor representativo de un conjunto de datos –**Momento III**–.

Partiendo de las conclusiones establecidas en el presente apartado y con base en la descripción del proceso de Resignificación del concepto de Media Aritmética podemos afirmar que el estudiante está en la capacidad de desarrollar nuevas competencias matemáticas como **razonamiento, comunicación y solución de problemas**; pues el conocimiento no se remite simplemente a la aplicación de expresiones establecidas, sino por el contrario en el mismo proceso de su construcción el estudiante se ve abocado a establecer una comunicación efectiva con sus pares generando así una interacción social, que es uno de los pilares de la teoría Socioepistemológica y una de las competencias matemáticas a desarrollar en nuestros objetivos

6.4 EN RELACIÓN CON LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación asume como problemática, **¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje al implementar una Unidad Didáctica en grado 9° fundamentada en la Socioepistemología para la Resignificación de la Media Aritmética a partir de sus Usos y el desarrollo de competencias matemáticas?**

El diseño y aplicación de las actividades de intervención muestran evidencia del proceso de Resignificación de la Media Aritmética, y del desarrollo de competencias matemáticas, procesos evidenciados en el Uso que a través del proceso de intervención los estudiantes iban dando al concepto de Media como elemento matemático que equilibra los excesos y los defectos y la formulación de relaciones matemáticas, partiendo de la propia experimentación donde surgen de manera espontánea nuevos significados. La Media Aritmética deja de ser un valor entendido como un simple promedio resultante de una operación aritmética y comienza a convertirse en un valor que equilibra los elementos de un conjunto de datos. Es así como todos los significados anteriores surgen de un proceso de interacción social validado al interior del aula que finalmente posibilita que el estudiante lo lleve al plano de lo funcional.

Finalmente como propuesta complementaria a nuestro trabajo proponemos que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se implementen actividades donde se validen los argumentos dados por los estudiantes en la construcción social del conocimiento favoreciendo así una efectiva y real Resignificación de los conocimientos matemáticos.

6.5 PROYECCIONES

A partir de los resultados obtenidos en la presente investigación, el proceso de Resignificación del concepto de la Media Aritmética se puede extender a otros objetos matemáticos implicados en la estadística como lo son las diferentes medidas de tendencia central trabajadas en la escuela, implementando situaciones de aprendizaje donde se utilice el elemento matemático del exceso y el defecto, prestando mayor y fundamental atención a los argumentos presentados por los estudiantes a lo largo del proceso de construcción del conocimiento; donde es fundamental el Uso de elementos concretos que posibiliten el establecimiento de relaciones entre los elementos matemáticos a considerar, es por eso que estamos convencidos que en el proceso de consolidación del conocimiento estadístico es imprescindible la interacción social dado el carácter mismo de la estadística.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. & Suarez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 418-422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 149-168.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada, España: Departamento de didáctica de la matemática.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 25, 41-58.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada, España: Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Granada: Grupo editorial universitario.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D., Holmes, P. & Vallecillos, A. (1994) Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Behar, R. (2004). Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística: Mitos y Barreras. *Colombia. Heurística*, 11, 59-66.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid. Alianza Editorial.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 787-792. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación matemática* 18 (1), 133-160.

- Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(4), 27 – 46.
- Cantoral, R., Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de etnomatemática*, 7(3), 91-116.
- Casallas, L. (2016). *Comprensión de las medidas de tendencia central a partir de una propuesta pedagógica basada en estadística con proyectos*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.
- Conde, G. (2015). La distribución normal una rápida revisión histórica. *Heurística* 17, 59-65
- Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59 – 79.
- De la Cruz, A. (2007). *Un estudio sobre la construcción social de la noción de promedio en un contexto probabilístico*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
- Díaz, D. (2010). Matemática, ¿Dónde estás? *Acta Resúmenes III Congreso Nacional de Estudiantes de Pedagogía en Matemática*, pp 14.
- Doval, H. (2004). La “distribución normal” de Gauss y el “hombre tipo” de Quetelet. *Revista Argentina de Cardiología* 72 (3), 239-241
- Estrella, S. (2008). Medidas de tendencia central en la enseñanza básica en Chile. Análisis de un texto de séptimo año. *Revista chilena de educación matemática RECHIEM*, 1 (4), 5-10
- Font, V. (2008) Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En Gaita, C. (Ed), *Actas III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, (pp. 21-62). Peru: Cecilia Gaita.
- Galindo, E. (2011) *Estadística Métodos y Aplicaciones*. Quito: Prociencia editores
- Huayanca, W. (2008). Noción de distribución estadística en una muestra de estudiantes secundarios en el marco de la estructura curricular. En C. Gaita (Ed.), *Actas III*

Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, (pp 333–338). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Instituto Nacional de Estadística: Historia de la estadística (sf). Recuperado 27 de Julio de 2018 de http://www.ine.es/explica/explica_historia_estadistica.htm

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *UNION* 9, 187-201

Micheli, E. (2010). Desafío y oportunidades en la enseñanza de la Estadística. En U. Malespina (ed), *V Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas 1*, 3-18 Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias.

Miller, J. (2016) *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics*, Recuperado el 16 de noviembre de 2016 de <http://jeff560.tripod.com/f.html>

Minguer, L. (2004). Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Un estudio de caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemáticas Educativa* 17, 885 – 889. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Molina, C. & Suarez, L. (2015). *Unidad didáctica para la enseñanza de la estadística en los grados 6° y 7°*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia, Medellín.

Montiel, G. & Buendía, G. (2011). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 1, 443-454.

Plackett, R. (1970). Studies in the History of Probability and Statistics. VII The Principle of the Arithmetic Mean. *Biometrika* 45, 130-135

Rondero, C. & Font, V. (2015). La articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las ciencias* 33(2), 29-49.

Rondero, C. (2010). Calculo promedial. El caso de la media aritmética. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 13 (4-II), 387-408.

Rosales, I. (2011). Recuperado el 12 de septiembre de 2016 de <http://es.slideshare.net/Igneigna/breve-resea-histrica-de-la-estadistica>.

Rosas, L. (2013). *Una visión Socioepistemológica del rol de la argumentación gráfica en la resignificación del conocimiento matemático en torno a la noción de polígono*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Sierra, E. (2008). *Pesas y medidas: Un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.




Soto, D. & Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 48(28), 1525–1544

Stake, R. (2010). *Investigación con Estudio de Casos*. Madrid: Morata.

ANEXO 1: MOMENTOS DE INTERVENCIÓN

1.2 MOMENTO I: ACTIVIDAD 1

1

	Momento I Actividad 1		
Actividad 1: Punto de Equilibrio.			
Fecha: Abril 09 / 2018	Duración: 110 minutos	Hora de inicio: 12:50	Hora de finalización: 01:43
Estudiantes:			
OBJETIVO: Identificar la relación entre masa y distancia para determinar el punto de equilibrio de una palanca.			

Instrucciones: El presente cuestionario tiene como finalidad la construcción del concepto de Punto de Equilibrio en una palanca, mediante el uso de la simulación “Ley de equilibrio”. Responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

1.1 Equilibra dos masas de 5 kg ubicándolas a diferentes distancias del punto de equilibrio. Describe como lo realizaste.
 Iniciando se colocaron dos masas de 5kg a distancias 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 del punto de equilibrio; por cada distancia se analizó un equilibrio, cada distancia de igual peso muestra un equilibrio exacto, mientras que dos masas de igual peso no equilibran a distinta distancia.

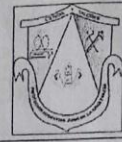
1.2 Repite el procedimiento del punto anterior para masas de 10 kg, 15 kg y 20 kg. ¿Qué puedes concluir de las distancias a las que se equilibran masas iguales?
 Se puede concluir que al usar un peso igual a ambos lados se obtiene o no equilibrio dependiendo su distancia, pues si se ubican dos masas de 15kg a distancia dos del brazo izquierdo y 3 del derecho mostrara gran inclinación al derecho o de mayor distancia.

1.3 Completa la siguiente tabla identificando la distancia que equilibra la masa del brazo derecho con la del brazo izquierdo, teniendo en cuenta que la distancia que equilibra el brazo izquierdo está dada en la segunda columna. Luego responde las preguntas.

Masa Brazo izquierdo en kilogramos	Distancia a la que se equilibra en unidades.	Masa Brazo derecho en kilogramos	Distancia a la que se equilibra en unidades.
10	1	5	2



Momento I Actividad 1



10	2	5	4
10	3	5	6
10	4	5	8
15	1	5	3
15	2	5	6
15	3	5	9
15	4	5	12
20	1	5	4
20	2	5	8
20	3	5	12
20	4	5	16

1.3.1 ¿Dos masas de diferente valor se equilibran a distancias iguales? ¿Por qué?

no, porque al tener una masa mayor en kg a otra en una distancia igual del punto de equilibrio, se inclinaria hacia el brazo de mayor masa

1.3.2 ¿Qué relación hay entre la masa de 5 kg y 10 kg?

la relacion que existe entre estas dos masas es que una masa de 10kg se puede dividir en dos masas de 5kg

1.3.3 Según los datos de la tabla ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 10 kg y una de 5 kg?

la relacion en distancias que existe para equilibrar ambas masas de diferente peso es que al ser una el doble de la otra, la de menor masa se ubica al doble de distancia de donde se ubique la de mayor masa

1.3.4 ¿Qué relación hay entre la masa de 15 kg y la de 5 kg?



Momento I Actividad 1



la masa de 5kg se relaciona con la de 15kg porque una es el Triple de la otra

1.3.5 Según los datos de la tabla ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 15 kg y una de 5 kg?

Para estas dos masas poder equilibrarse se debe colocar la de mayor peso en una distancia que sea la Tercera parte de la distancia en la que se ubica la de menor peso

1.3.6 ¿Qué relación hay entre la masa de 20 kg y la de 5 kg?

al dividirse la masa de 20kg en cuatro partes se obtienen masas de 5kg

1.3.7 ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 20 kg y una de 5 kg?

se debe ubicar la masa de 5kg a una distancia cuatro veces mayor a la distancia de la que se ubica la masa de 20kg

1.3.8 ¿Qué relación hay entre el valor de las masas que se están equilibrando y la distancia a la que se equilibran?

existe cierta relación, la cual radica en que si una masa es x veces mayor que otra, entonces la masa menor se debe ubicar a una distancia x veces mayor de la distancia a la que está ubicada la masa mayor

1.3.9 Si se ubica una masa de 20 kg a una distancia de 2 unidades, ¿a qué distancia se debe colocar una de 10 kg para que se equilibren? ¿Por qué?

se debe ubicar a una distancia cuatro por ser esta distancia el doble de la anterior y 10kg dos veces 10kg






Momento I Actividad 1



- 1.3.10 Si se ubica una masa de 10kg a una distancia de 2 unidades, qué valor debe tener la otra masa para que se equilibren al ser ubicada a una distancia de:
- 1 Unidad
 - 2 unidades.
 - 4 unidades.

a. se ubica una masa de 20kg a una distancia de uno
b. se ubica una masa de igual peso
c. se ubica una masa de 5kg a una distancia de cuatro unidades

1.2. MOMENTO I: ACTIVIDAD II

	<h1>Momento I</h1> <h2>Actividad 2</h2>		
---	---	--	---

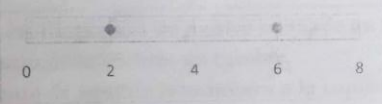
#1

Actividad 2: Media Aritmética Como Punto De Equilibrio.			
Fecha:	Duración:	Hora de inicio	Hora de finalización
11 / 04 / 2018	110 minutos	04:46	05:41
Estudiantes:			
OBJETIVO: Identificar la Media Aritmética como el punto de equilibrio de un conjunto de datos.			

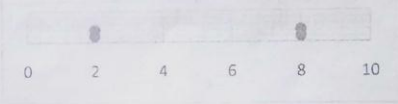
Instrucciones: El presente cuestionario tiene como finalidad identificar la media aritmética como punto de equilibrio, utilizando el diagrama de puntos. Responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

2.1 Considerando los siguientes diagramas de puntos como una palanca y a cada dato como una masa de igual valor; señala el número donde se debe ubicar el punto de equilibrio.

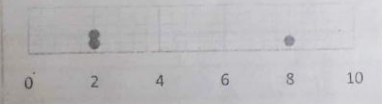
a.



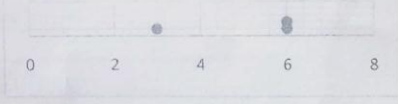
b.



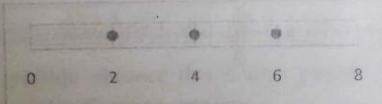
c.



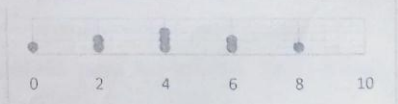
d.



e.



f.



a. 4 f. 4

b. 5

c. 4

d. 5

e. 4

2.2 Con base al punto anterior describe el procedimiento que permitió obtener el punto de equilibrio en cada numeral.



Momento I Actividad 2



Los a-b-e se ubico el punto medio de tal forma que quedo a una distancia igual a ambos lados.
Los c-d se ubico el punto inclinándose al lado con más peso para balancearse.
La f se ubico bajo tres masas para equilibrar a los lados masas igual

- 2.3 ¿Es posible que el punto de equilibrio este localizado por encima del máximo o por debajo del mínimo valor que toman los datos? Explica tu respuesta

No es posible en ninguno de los casos, puesto que al ubicarse de dicha manera se inclinaria la balanza hacia uno de los brazos (izquierda - derecha)

- 2.4 ¿El punto de equilibrio debe coincidir con valores para los que se tengan datos?

No en todos los casos, pueden haber momentos en que el punto se ubica bajo una masa de peso o dato al igual que en otros no.

- 2.5 Si en los diagramas de puntos se añade un nuevo dato, donde se debe ubicar para que:

- El punto de equilibrio no cambie.
- El punto de equilibrio se mueva a la izquierda.
- El punto de equilibrio se mueva a la derecha.

a. justo sobre el punto de equilibrio

b. Una corta distancia al lado izquierdo

c. Una distancia al lado derecho.

- 2.6 ¿Es posible obtener dos o más puntos de equilibrio para un mismo diagrama de puntos? Explica tu respuesta.

No, puesto que al haber dos bases o puntos de equilibrio no tendria movimiento la balanza.

- 2.7 Determina la media aritmética de cada diagrama de puntos, ¿Qué puedes concluir?

a. $(2+6) \div 2 = 4$

b. $(2+2+8+8) \div 4 = 5$



Momento I

Actividad 2



c. $(2+2+0) \div 3 = 4$

d. $(3+6+6) \div 3 = 5$

e. $(2+4+6) \div 3 = 4$

f. $(0+2+2+4+4+4+6+6+8) \div 9 = 4$

Tanto la media aritmética como el punto de equilibrio dan igual resultados.

2.8 ¿Con base al punto anterior como se puede definir la media aritmética de un conjunto de datos?

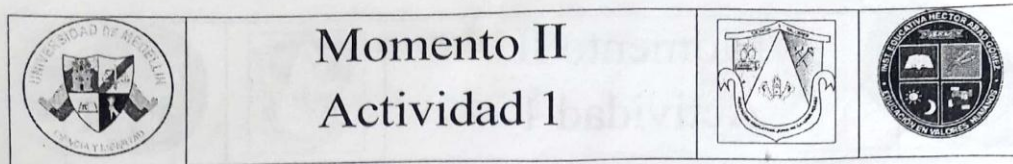
Se debe de sumar cada distancia a la que se encuentra con respecto a μ se divide por la cantidad total de datos.

La media aritmética se puede definir como el punto de equilibrio de un conjunto de datos.

2.9 Con base a los puntos anteriores, ¿Qué características del punto de equilibrio cumple la media aritmética?

1. Debe estar ubicado entre los dos extremos.
2. Es único.
3. No necesariamente coincide con los datos del conjunto.

1.3 MOMENTO II: ACTIVIDAD I



Actividad 1: Media Aritmética como el reparto equitativo.			
Fecha:	Duración:	Hora de inicio	Hora de finalización
16/04/2018	110 minutos	12:41	01:56
Estudiantes	[Redacted]		
OBJETIVO: Identificar la Media Aritmética como el reparto equitativo de un conjunto de datos.			

Instrucciones: El presente cuestionario tiene como finalidad la identificación de la media aritmética como un reparto equitativo, Responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

3. Se plantea con un mes de anticipación, realizar una actividad de integración para visitar un centro de ciencia con 10 estudiantes del grado noveno de las instituciones educativas Héctor Abad Gómez y Juan de la Cruz Posada, que hacen parte del proyecto de investigación de estadística; los gastos por estudiante son: \$4.000 por transporte, \$3.000 refrigerio y \$6.000 por entrada al museo. Se concertó recolectar la plata por cuotas durante tres semanas, teniendo en cuenta las condiciones económicas de cada estudiante. A continuación en la siguiente tabla se muestra los resultados de este proceso.

Estudiantes	Cuotas semanales en \$		
	Primera	Segunda	Tercera
Ana	3.000	4.000	5.000
Paola	6.000	6.000	10.000
Camila	2.000	8.000	7.000
Felipe	4.000	8.000	7.000
Sergio	5.000	4.000	3.000
Jhojan	3.000	2.000	3.000
Alexis	2.000	3.000	2.000
Valentina	1.000	4.000	2.000
Sebastián	4.000	2.000	7.000
Elizabeth	2.000	8.000	3.000

- 3.1 Marcar con una X si cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración: Si X o No ___
- 3.2 ¿Qué proceso realizaste para verificar si se cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración?



Momento II Actividad 1



Se sumaron las cantidades debidas por semana para dar un total de 130.000 que es la meta para la salida.

3.3 ¿Por qué la totalidad de los estudiantes, si pueden asistir a la actividad de integración?

Aunque a pesar de que algunos estudiantes no tuvieron el recurso para dar la cuota acordada, otros alumnos aportaron más dinero de lo indicado.

3.4 ¿Qué estudiantes en condiciones de aportes en dinero por cuotas, no podría asistir a la actividad de integración? Explica tu respuesta.

Ana - Sergio - Jhojan - Alexis - Valentina

Pudimos notar los valores aportados, llegando a la conclusión de que los valores entregados no cubrían todos los gastos necesarios.

3.5 Reparte equitativamente los aportes de cada estudiante, describiendo quien le puede colaborar a otro compañero, de manera que todos puedan asistir a la actividad.

Felipe ayudo a Valentina con 6.000.
Pablo ayudo a Alexis con 6.000 y a Jhojan con 3.000
Camila ayudo a Ana con 1.000, a Sergio con 1.000 y a Jhojan con 2.000

3.6 ¿Cuánto debe ser el aporte promedio del grupo para poder asistir a la actividad?

Transporte (4.000) + Refrigerio (3.000) + Entrada (6.000)
 $4.000 + 3.000 + 6.000 = 13.000$

Cada estudiante debe de aportar \$13.000 por cuota acordada.



Momento II

Actividad 1



3.7 ¿De acuerdo con la situación, se puede afirmar que la Media Aritmética representa el valor del reparto equitativo de las cuotas? Explica tu respuesta.

Si, porque la Media Aritmética es de \$13.000 por estudiante y, al apostar dinero de un estudiante a otro, se presenta igual valor.

Por lo tanto el promedio (Media Aritmética) equivale al valor del reparto equitativo de las cuotas.

3.8 ¿Existe alguna relación entre el punto de equilibrio, el reparto equitativo y la Media Aritmética de las cuotas por estudiante? Explica tu respuesta.

Si, porque efectivamente los tres son un igual procedimiento, solo que varía su significado y su nombre.

3.9 Completa la siguiente tabla; teniendo en cuenta para la última columna, que si el aporte por estudiante supera el valor que equilibra la cuota el resultado es negativo, y en caso contrario es positivo.

Estudiantes	Cuotas semanales en \$			Total aportes por estudiante en \$	Valor que falta para equilibrar el aporte por estudiante en \$
	Primera	Segunda	Tercera		
Ana	3.000	4.000	5.000	12.000	+ 1.000
Paola	6.000	6.000	10.000	22.000	- 9.000
Camila	2.000	8.000	7.000	17.000	- 4.000
Felipe	4.000	8.000	7.000	19.000	- 6.000
Sergio	5.000	4.000	3.000	12.000	+ 1.000
Johan	3.000	2.000	3.000	8.000	+ 5.000
Alexis	2.000	3.000	2.000	7.000	+ 6.000
Valentina	1.000	4.000	2.000	7.000	+ 6.000
Sebastián	4.000	2.000	7.000	13.000	0
Elizabeth	2.000	8.000	3.000	13.000	0
			Total	130.000	0



Momento II

Actividad 1



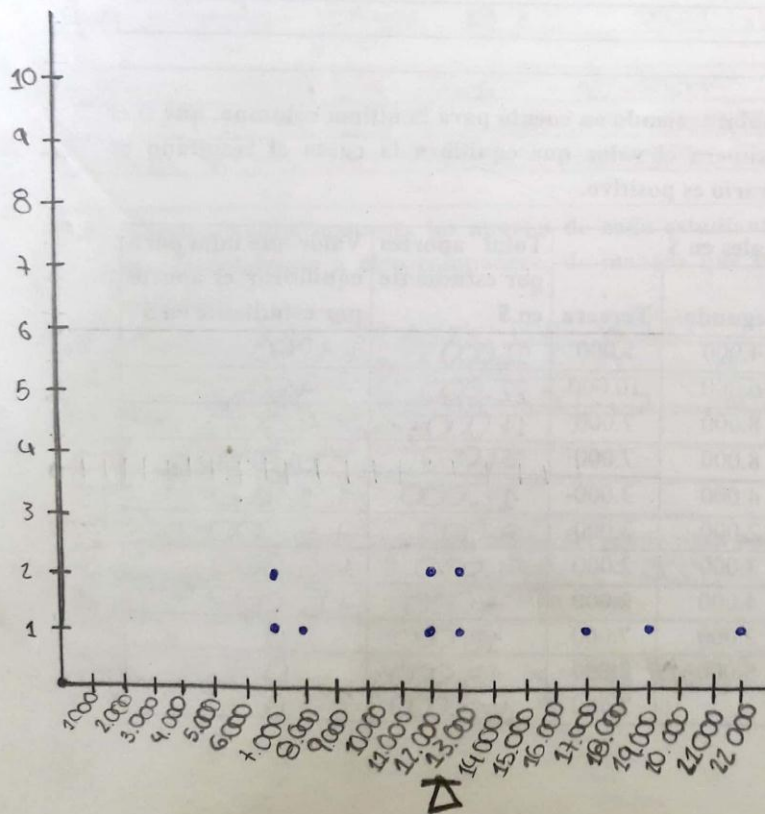
3.10 ¿Por qué la suma de los valores que faltan para equilibrar la cuota da cero?

Porque los valores sobrantes en algunos alumnos eran el total faltante en otros, por lo tanto, se repartieron equitativamente de manera que cada estudiante pudiese asistir.




3.11 Represente en un diagrama de puntos, el aporte total en dinero por cada estudiante y señale el valor que equilibra los aportes.

$$12.000 + 22.000 + 17.000 + 19.000 + 12.000 + 8.000 + 7.000 + 7.000 + 13.000 + 13.000 = 130.000$$

$$130.000 \div 10 = 13.000$$



1.4 MOMENTO II: ACTIVIDAD II

	<h3>Momento II</h3> <h3>Actividad 2</h3>		
Actividad 2: Media Aritmética en la estimación real de en una medición.			
Fecha: 19/04/2018	Duración: 110 minutos	Hora de inicio: 12:43	Hora de finalización: 01:40
Estudiantes:			
OBJETIVO: Identificar la media aritmética como el valor que compensa los excesos con los defectos en los errores de medición.			
<p>Instrucciones: El presente cuestionario tiene como finalidad identificar la media aritmética como el valor que compensa los excesos con los defectos. De acuerdo a la siguiente información responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.</p> <p>Se quiere estimar la estatura del profesor de matemáticas del grado noveno de la Institución Educativa Juan de La Cruz Posada, utilizando un mismo metro; se escogen 9 estudiantes de este mismo grado para realizar dicho proceso. A continuación se presentan los valores obtenidos en metros: 1.70; 1.72; 1.70; 1.73; 1.73; 1.75; 1.77; 1.72; 1.72 y 1.76.</p>			
<p>1. ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?</p> <p>Se pudieron obtener diferentes medidas porque al pesar de iniciar en un mismo punto algunos creen que su estatura puede ser a nivel del cabello, otros de su cráneo y así variar la estatura en cm más o en menos</p>			
<p>2. ¿De las mediciones realizadas por los estudiantes, se puede afirmar que algunos tienen errores de medición por encima o por debajo de la estatura real del profesor? Explica tu respuesta.</p> <p>Sí, porque algunos se fijaron en su estatura creyendo ser un poco más arriba de él y otros un poco más abajo</p>			
<p>3. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar el valor "real" de la estatura del profesor?</p> <p>Repartir equitativamente cada medida hasta encontrar una exacta, luego verificamos sacando la Media Aritmética</p>			



Momento II Actividad 2



4. Reparte equitativamente la última cifra decimal de las mediciones realizadas por los estudiantes. Describe el proceso que realizaste.

Buscamos un número que se equilibrara, es decir, un número intermedio entre el mayor y el menor, llegando a la conclusión de que fuera el 1,73, después se hizo un reparto igualitario (equitativo) y se vio el resultado de que era esta la estatura real.

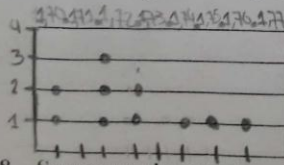
5. Un grupo de estudiantes afirma que la estatura real del profesor es 1,72m; teniendo en cuenta que este es el dato que más se repite. Otro grupo concluye que el valor real es 1,73m; debido a que 3 es el valor que equipara la última cifra decimal, que es la incertidumbre de las mediciones. ¿Cuál sería la mejor estimación de estatura real del profesor?

La mejor estimación para mí sería 1,73m, puesto que al ser realizado el proceso de un reparto equitativo y la Media Aritmética me ha dado dicho resultado.

6. ¿Se puede concluir en este caso, que la media aritmética es el valor que equipara los errores de medición? ¿Por qué?

Sí, porque este proceso me ha dado la estatura real o aproximada la estatura real.

7. Representa en un diagrama de puntos la información; y de acuerdo con la situación ¿Cómo se puede interpretar el punto de equilibrio?



Se interpreta, mostrando que al estar más cercanas las más pesadas y más lejos las más livianas se equilibra por distancia tal y como en la ley de equilibrio.

8. Se escoge al azar otro estudiante del grupo para que realice una nueva medición de la estatura del profesor, cuál debería ser el valor de esta medición para que:
- la estatura real no cambie.
 - La estatura real aumente.
 - La estatura real disminuya.
 - Representa las situaciones anteriores en un diagrama de puntos y analiza que sucede con el punto de equilibrio.



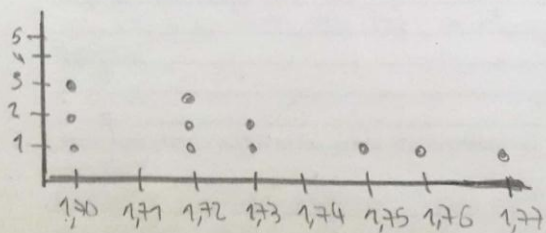
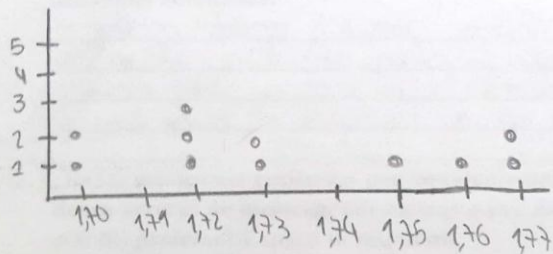
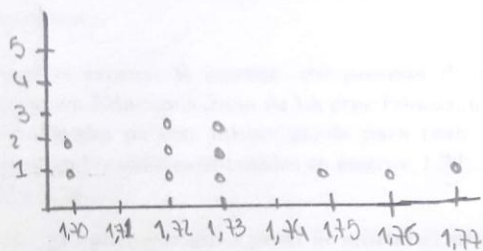
Momento II Actividad 2



a. Debe ser 1,73m.


b. Una medida mayor a la estatura real ya dicha.

c. Una medida menor a 1,73m para que cambie la estatura real.





1.5 MOMENTO III: ACTIVIDAD I

Nº 1



Momento III

Actividad 1

Actividad 1: Media aritmética como valor representativo de un conjunto de datos			
Fecha:	23/04/2018	Duración:	110 minutos
		Hora de inicio:	12:46
		Hora de finalización:	01:31
Est:			
	Lopez		

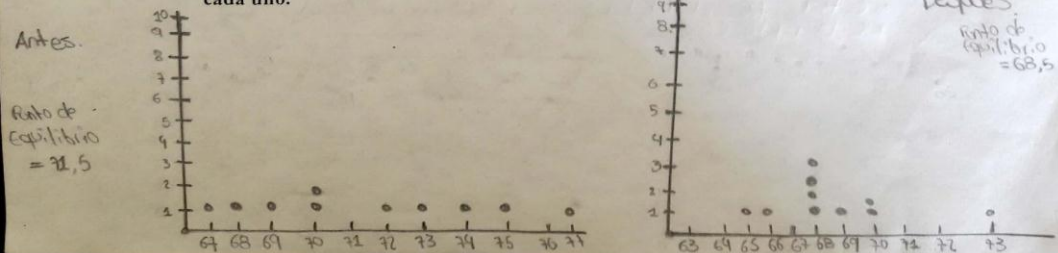
OBJETIVO: Identificar la Media Aritmética como un valor representativo para comparar dos conjuntos de datos.

Instrucciones: El presente cuestionario tiene como finalidad identificar la Media Aritmética como valor representativo de un conjunto de datos. Responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

Al gimnasio se remitió un grupo de deportistas de sexo femenino en condiciones saludables y aceptables, pero con un sobrepeso promedio de 3 kg según los requerimientos para participar en un torneo Nacional de voleibol; los siguientes valores se obtuvieron al medirla a cada una de ellas el peso en kilogramos (Kg) al ingresar y al finalizar el primer mes de entrenamiento. En la siguiente tabla se muestra los resultados de la medición.

Deportista	Pesos en Kilogramos (kg)	
	Al ingreso	Al finalizar el primer mes de entrenamiento
Ana	75	70
Elvia	70	66
Gabriela	74	70
Juana	73	69
Teresa	69	68
Fanny	72	68
Yeny	77	73
Karla	68	68
Camila	70	68
Olga	67	65

1. Representa en diagramas de puntos los pesos del grupo de deportistas antes y después de finalizar los entrenamientos y determina el punto de equilibrio de cada uno.





Momento III

Actividad 1



2. ¿Qué significado tiene el punto de equilibrio en esta situación?

Este punto de equilibrio representa el promedio de los pesos en kg, el cual permite saber quien puede entrar al equipo

3. Si fueras el entrenador, explica cómo determinarías si el entrenamiento fue eficaz.

A pesar de que no todos los integrantes del grupo rebajaron 3kg, el punto promedio muestra si haberlos disminuido, por lo que se diría que fue muy útil el entrenamiento

4. ¿Cuánto peso debería bajar cada deportista para alcanzar la meta?

Cada uno debía bajar 3kg que pesaba de meta

5. En caso de que se cumpla la meta, ¿cómo se puede explicar que algunos deportistas después del entrenamiento tienen pesos por debajo y otros por encima de la meta?

Con los pesos de algunos deportistas se podrían compensar el de otros o, se repartió equitativamente los pesos ya se supo que algunos cubrían la falta en otros.

6. Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.

Si, porque al obtenerse un valor representado como punto promedio de un conjunto de datos se muestra que la Media Aritmética puede ser el valor que lo represente

ANEXO 2: UNIDAD DIDÁCTICA




La unidad didáctica está estructurada en tres momentos, y tiene como finalidad la Resignificación de la noción de Media Aritmética a partir de sus usos. En primer lugar los estudiantes construyen la noción de media aritmética como punto de equilibrio – **Momento I**–, luego la usan en situaciones de repartos equitativos y estimación de mediciones donde deben equilibrar los excesos y defectos –**Momento II**– y por último la usan como un valor representativo para comparar dos conjuntos de datos –**Momento III**–

MOMENTO I: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO DE UN CONJUNTO DE DATOS.

Este momento está conformado por dos actividades, que tiene como objetivo que los estudiantes construyan la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio de un conjunto de datos.

ACTIVIDAD I: PUNTO DE EQUILIBRIO EN UNA PALANCA.

Para el desarrollo de la actividad en primer lugar se explica por parte del docente el funcionamiento de los comandos de la aplicación “Ley de equilibrio”; luego los estudiantes desarrollaran la actividad en parejas con el fin de compartir conjeturas y razonamientos. Se finaliza la actividad con una puesta en común.

	Momento I Actividad I		
Actividad I: Punto de equilibrio en una palanca.			
Fecha:	Duración: 90 min	Hora de inicio:	Hora de finalización:
Estudiantes:			
Objetivo: Construir la relación matemática entre masas y distancias para equilibrar cuerpos en una palanca.			

Instrucciones: Tenga presente las indicaciones del docente frente a la configuración y funcionamiento de la simulación “ley de equilibrio”; luego Responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

- 1. Equilibra dos masas de 5kg ubicándolas a diferentes distancias del punto de equilibrio. Describe como lo realizaste.**

-
-
2. Repite el procedimiento del punto anterior tomando pares de masas iguales de 10kg , 15kg y 20kg . ¿Qué puedes concluir de las distancias a las que se equilibran masas iguales?

-
-
-
-
3. Completa la siguiente tabla identificando la distancia en unidades que equilibra la masa del brazo derecho con la del brazo izquierdo; luego responde las siguientes preguntas.

Masa Brazo izquierdo en kilogramos	Distancia a la que se equilibra en unidades.	Masa Brazo derecho en kilogramos	Distancia a la que se equilibra en unidades.
10	1	5	
10	2	5	
10	3	5	
10	4	5	
15	1	5	
15	2	5	
15	3	5	
15	4	5	
20	1	5	
20	2	5	
20	3	5	
20	4	5	

- 3.1 ¿Dos masas diferentes se equilibran a distancias iguales? ¿Por qué?

- 3.2 ¿Qué relación hay entre una masa de 5kg y una de 10kg

- 3.3 ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de 5kg y una de 10kg ?

3.4 ¿Qué relación hay entre una masa de $5kg$ y una de $15kg$?

3.5 ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de $5kg$ y una de $15kg$?

3.6 ¿Qué relación hay entre una masa de $5kg$ y una de $20kg$?

3.7 ¿Qué relación hay entre las distancias a las que se equilibran una masa de $20kg$ y una de $5kg$?




3.8 Para cualquier par de masas, ¿qué relación hay entre el valor de las masas que se están equilibrando y la distancia a la que se equilibran?

3.9 Ubica una masa de 10kg a una distancia de 2 unidades y usa la relación matemática del punto anterior para determinar el valor de la otra masa si se ubica a una distancia de:

- a. 1 Unidad
- b. 2 unidades.
- c. 4 unidades.

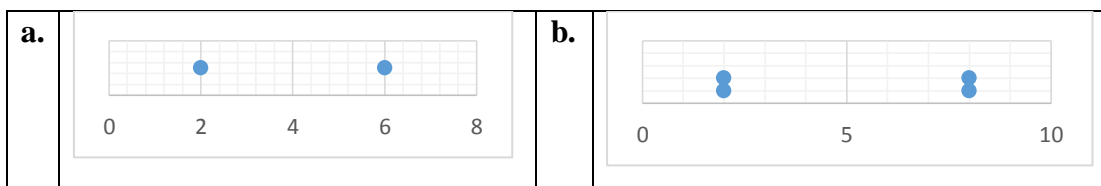
ACTIVIDAD II: MEDIA ARITMÉTICA COMO PUNTO DE EQUILIBRIO.

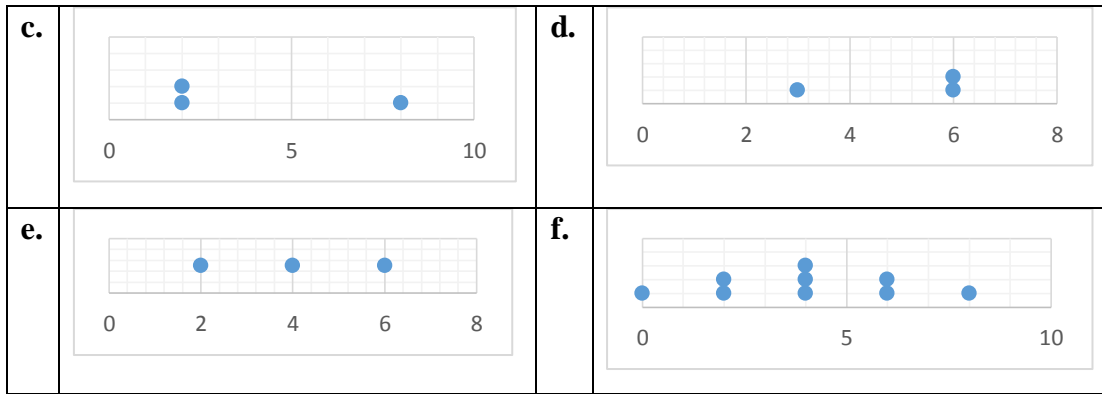
En primer lugar se dan por parte del docente las orientaciones para iniciar el trabajo donde les pide a los estudiantes desarrollaran la actividad en parejas. Al finalizar la sesión cada pareja expone sus hallazgos.

	Momento I Actividad II		
Actividad II: Media Aritmética como punto de equilibrio.			
Fecha:	Duración: 110 minutos	Hora de inicio	Hora de finalización
Estudiantes:			
Objetivo: Identificar la Media Aritmética como el punto de equilibrio de un conjunto de datos.			

Instrucciones: Desarrolla la presente actividad siguiendo las indicaciones del docente; responde cada pregunta de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

1. Considerando los siguientes diagramas de puntos como una palanca y a cada dato como una masa de igual valor; señala el número donde se debe ubicar el punto de equilibrio y justifica cada respuesta.





2. ¿Es posible que el punto de equilibrio este localizado por encima del máximo o por debajo del mínimo valor que toman los datos? Explica tu respuesta

3. ¿El punto de equilibrio debe coincidir con valores para los que se tengan datos?

4. Si en los anteriores diagramas de puntos se añade un nuevo dato, donde se debe ubicar para que:

- a. El punto de equilibrio no cambie.
- b. El punto de equilibrio se mueva a la izquierda.
- c. El punto de equilibrio se mueva a la derecha.

5. ¿Es posible obtener más de un punto de equilibrio para un mismo diagrama de puntos? Explica tu respuesta.

6. Determina la media aritmética de cada diagrama de puntos, ¿Qué puedes concluir?

7. ¿Con base al punto anterior como se puede definir la media aritmética de un conjunto de datos?




8. Con base a los puntos anteriores, ¿Qué características del punto de equilibrio cumple la media aritmética?

MOMENTO II: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO EL VALOR QUE EQUIPARA LOS EXCESO Y DEFECTOS.

Este momento está conformado por dos actividades, que tiene como objetivo que los estudiantes usen la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos de un conjunto de datos, para realizar repartos equitativos y estimar mediciones.

ACTIVIDAD I: MEDIA ARITMÉTICA COMO EL REPARTO EQUITATIVO

Para el desarrollo de la actividad se les indica a los estudiantes que trabajen en parejas, al finalizar la sección e socializan las construcciones de los estudiantes.

	Momento II Actividad I			
Actividad I: Media Aritmética como el reparto equitativo.				
Fecha:	Duración: 110 minutos	Hora de inicio	Hora de finalización	
Estudiantes:				
Objetivo: Identificar la Media Aritmética como el reparto equitativo de un conjunto de datos.				

Instrucciones: Lee atentamente la siguiente situación y responde las preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

Se plantea con un mes de anticipación, realizar una actividad de integración para visitar un centro de ciencia con 10 estudiantes del grado noveno de las instituciones educativas Héctor Abad Gómez y Juan de la Cruz Posada, que hacen parte del proyecto de investigación de estadística; los gastos por estudiante son: \$4.000 por transporte, \$3.000 refrigerio y \$6.000 por entrada al museo. Se concertó recolectar la plata por cuotas durante tres semanas, teniendo en cuenta las condiciones económicas de cada estudiante. A continuación en la siguiente tabla se muestra los resultados de este proceso.

Estudiantes	Cuotas semanales en \$		
	Primera	Segunda	Tercera
Ana	3.000	4.000	5.000
Paola	6.000	6.000	10.000
Camila	2.000	8.000	7.000
Felipe	4.000	8.000	7.000
Sergio	5.000	4.000	3.000
Jhojan	3.000	2.000	3.000
Alexis	2.000	3.000	2.000
Valentina	1.000	4.000	2.000
Sebastián	4.000	2.000	7.000
Elizabeth	2.000	8.000	3.000

1. Marcar con una X si cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración: Si ____ o No ____
2. ¿Qué proceso realizaste para verificar si se cumplió o no, con la meta esperada en dinero para realizar la actividad de integración?

3. ¿Por qué la totalidad de los estudiantes, si pueden asistir a la actividad de integración?

4. ¿Qué estudiantes en condiciones de aportes en dinero por cuotas, no podría asistir a la actividad de integración? Explica tu respuesta.

5. Reparte equitativamente los aportes de cada estudiante, describiendo quien le puede colaborar a otro compañero, de manera que todos puedan asistir a la actividad.

6. ¿De acuerdo con la situación, se puede afirmar que la Media Aritmética representa el valor del reparto equitativo de las cuotas? Explica tu respuesta.

7. ¿Existe alguna relación entre el punto de equilibrio, el reparto equitativo y la Media Aritmética de las cuotas por estudiante? Explica tu respuesta.

8. Completa la siguiente tabla; teniendo en cuenta para la última columna, que si el aporte por estudiante supera el valor que equilibra la cuota el resultado es negativo, y en caso contrario es positivo.




Estudiantes	Cuotas semanales en \$			Total aportes por estudiante	Valor que falta para equilibrar el
	Primera	Segunda	Tercera		

				en \$	aporte por estudiante en \$
Ana	3.000	4.000	5.000		
Paola	6.000	6.000	10.000		
Camila	2.000	8.000	7.000		
Felipe	4.000	8.000	7.000		
Sergio	5.000	4.000	3.000		
Johan	3.000	2.000	3.000		
Alexis	2.000	3.000	2.000		
Valentina	1.000	4.000	2.000		
Sebastián	4.000	2.000	7.000		
Elizabeth	2.000	8.000	3.000		
			Total		

9. ¿Por qué la suma de los valores que faltan para equilibrar la cuota da cero?

ACTIVIDAD II: MEDIA ARITMÉTICA COMO LA ESTIMACIÓN REAL EN UNA MEDICIÓN.

Para el desarrollo de la actividad se les indica a los estudiantes que trabajen en parejas, al finalizar la sección se socializan las construcciones de los estudiantes.

	Momento II			
	Actividad II			
Actividad II: Media Aritmética como la estimación real en una medición.				
Fecha:	Duración: 110 minutos	Hora de inicio	Hora de finalización	
Estudiantes:				
Objetivo: Usar la Media Aritmética como el valor que compensa los errores de medición por exceso y defecto en una medición.				

Instrucciones: Lee atentamente la siguiente situación y responde las preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

Se quiere estimar la estatura del profesor de matemáticas del grado noveno de la Institución Educativa Juan de La Cruz Posada, utilizando un mismo metro; se escogen 9 estudiantes de este mismo grado para realizar dicho proceso. A continuación se presentan los valores obtenidos en metros: 1.70; 1.72; 1.70; 1.73; 1.73; 1.75; 1.77; 1.72; 1.72 y 1.76.

1. ¿Explica por qué a pesar de utilizar el mismo metro los estudiantes encontraron diferentes resultados?

2. ¿De las mediciones realizadas por los estudiantes, se puede afirmar que algunos tienen errores de medición por encima o por debajo de la estatura la estatura real del profesor? Explica tu respuesta.

3. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar el valor “real” de la estatura del profesor?

4. Un grupo de estudiantes afirma que la estatura real del profesor es $1,72m$; teniendo en cuenta que este es el dato que más se repite. Otro grupo concluye que el valor real es $1,73m$; debido a que 3 es el valor que equipara la última cifra decimal, que es la incertidumbre de las mediciones. ¿Cuál sería la mejor estimación de estatura real del profesor?

5. ¿Se puede concluir en este caso, que la Media Aritmética es el valor que equipara los errores de medición? ¿Por qué?

6. Representa en un diagrama de puntos la información; y de acuerdo con la situación ¿Cómo se puede interpretar el punto de equilibrio?

7. Se escoge al azar otro estudiante del grupo para que realice una nueva medición de la estatura del profesor, cuál debería ser el valor de esta medición para que:




- a. la estatura real no cambie.
- b. La estatura real aumente.
- c. La estatura real disminuya.
- d. Representa las situaciones anteriores en un diagrama de puntos y analiza que sucede con el punto de equilibrio.

MOMENTO III: LA MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS.

Este momento está conformado por una actividad, que tiene como objetivo que los estudiantes usen la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos para comparar dos conjunto de datos.

ACTIVIDAD I: MEDIA ARITMÉTICA COMO VALOR REPRESENTATIVO DE UN CONJUNTO DE DATOS

Para el desarrollo de la actividad se les indica a los estudiantes que trabajen en parejas, al finalizar la sección se socializan las construcciones de los estudiantes.

	<p>Momento III</p> <p>Actividad I</p>		
<p>Actividad I: Media aritmética como valor representativo de un conjunto de datos</p>			
<p>Fecha:</p>	<p>Duración: 110 minutos</p>	<p>Hora de inicio</p>	<p>Hora de finalización</p>
<p>Estudiantes:</p>			
<p>Objetivo: Usar la noción de Media Aritmética como un punto de equilibrio entre los excesos y defectos para comparar dos conjunto de datos.</p>			

Instrucciones: Lee atentamente la siguiente situación y responde las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, explicando todas tus respuestas.

Al gimnasio se remitió un grupo de deportistas de sexo femenino en condiciones saludables y aceptables, pero con un sobrepeso promedio de $3kg$ según los requerimientos para participar en un torneo Nacional de voleibol; los siguientes valores se obtuvieron al medirlas a cada una de ellas el peso en kilogramos (Kg) al ingresar y al finalizar el primer mes de entrenamiento. En la siguiente tabla se muestra los resultados de la medición.

Deportista	Pesos en Kilogramos (kg)	
	Al ingreso	Al finalizar el primer mes de entrenamiento
Ana	75	70
Elvia	70	66
Gabriela	74	70
Juana	73	69
Teresa	69	68
Fanny	72	68
Yeny	77	73
Karla	68	68
Camila	70	68
Olga	67	65

1. Representa en diagramas de puntos los pesos del grupo de deportistas antes y después de finalizar los entrenamientos y determina el punto de equilibrio de cada uno.

2. ¿Qué significado tiene el punto de equilibrio en esta situación?

3. Si fueras el entrenador, explica cómo determinarías si el entrenamiento fue eficaz.

4. ¿Cuánto peso debería bajar cada deportista para alcanzar la meta?

5. En caso de que se cumpla la meta, ¿cómo se puede explicar que algunos deportistas después del entrenamiento tienen pesos por debajo y otros por encima de la meta?

6. Según la situación planteada, ¿Se puede definir la Media Aritmética como un valor representativo de un conjunto de datos? Explica tu respuesta.
