EPISODIOS DE LA AVENTURA DE LOS IRRACIONALES

EN LOS ALBORES DE LA MODERNIDAD

SIRWUENDY CARDONA POSADA
JUAN MAURICIO MUÑOZ ZAPATA

Asesor:

Leonardo Solanilla Chavarro

Universidad de Medellín

Maestría en Educación Matemática
2018 – 2

TABLA DE CONTENIDO

Introducción

Este proyecto se enmarca en la línea de investigación de Epistemología e Historia de las matemáticas. Por ello, tiene unas características particulares que lo diferencian de otros trabajos de grado. Su interés yace en el servicio que la Historia de las matemáticas provee al campo de la Educación matemática. En verdad, creemos que el marco histórico constituye una verdadera herramienta, que provee la interpretación correcta al concepto de número irracional. En este sentido, se considera que la Historia brinda, de forma no trivial, el material de partida fundamental para el ejercicio de la transposición didáctica en matemáticas.

Para empezar se da una contextualización al trabajo. Tal como el título lo dice, se trata de unos *Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad.* Se trata, pues, de un proyecto que pretende realizar una reconstrucción histórica del concepto de los números irracionales, revisando algunos aspectos centrales que han permitido la emergencia del concepto, basados metodológicamente en la hermenéutica. Ella permite, ciertamente, realizar la interpretación de los textos históricos, desde una concepción propia de la Historia. Para el estudio y análisis de dichos textos se tiene la siguiente metodología, que procede en dos momentos:

Camisa de fuerza: se deja en claro lo que dice el autor del texto; nada más, ni nada menos. Se deben usar las notaciones y las expresiones originales del autor o autores.

Tomar alas: se abre la puerta a la hermenéutica. Las interpretaciones son bienvenidas, se permite usar todo el conocimiento matemático del lector para dialogar con el texto.

Con esto en mente, el trabajo se ha organizado en tres capítulos. En el primer capítulo, titulado *La crisis de los inconmensurables en la Grecia clásica*, se ofrece un recorrido histórico a los irracionales en la antigüedad Griega. Allí surge la idea de número no racional, gracias a los trabajos de los Pitagóricos. Se presentan, además, diferentes eventos relevantes, como el descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado de lado unitario, así como la imposibilidad de medir la diagonal del pentágono regular tomando como unidad de medida a su lado.

Estos datos históricos fueron rastreados minuciosamente, siguiendo autores de gran importancia como Iamblichus, Carl B. Boyer, Sir Thomas Heath, Kurt Von Fritz, artículos de la editorial de la Universidad de Atenas e, incluso, revisando *Los Diálogos* de Platón (Teetetos) y los *Elementos* de Euclides.

El segundo capítulo, denominado *Álgebra y aproximación de los irracionales en el Islam medieval*, se dedica a los descubrimientos árabes medievales y europeos de finales de la Edad Media y del Renacimiento. Tal es el caso de Leonardo de Pisa, quien es uno de los promotores del cambio de sistema numérico (del antiguo grecorromano al decimal indoarábigo). Estos pensadores también explican, en su nuevo sistema, las operaciones aritméticas que conocemos hoy en día. Además, estudiamos los métodos heurísticos que concibieron para hacer aproximaciones a los números irracionales.

Entre los trabajos que más influenciaron a los europeos sobresalen las obras de Muhammad ben Musa Al-Khowârizmî, Al-Samawâl Yabyii Almaghribi, Ghiyath al-Din Jamshid Masúd Al-Kashi, Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi, Kushyar ibn Labban, aunque también se conocía el método de Ptolomeo. Con esto se favoreció el surgimiento y desarrollo de nuevos lenguajes que arrojan una nueva mirada a la existencia de la inconmensurabilidad o la irracionalidad (a la luz de tales nuevos pensamientos).

Para este análisis se hizo un rastreo de textos más concretos de la época, indagando y buscando la producción de matemáticos específicos de dichos siglos. Para ello se consultaron los siguientes autores: Al-Uqlidisi, Berggren, Heath, Hairer & Wanner, y Young.

En el tercer capítulo, bajo el título *Análisis del infinito e irracionales en el albor de la modernidad europea*, donde se alcanza el clímax del trabajo, se revisaron algunos métodos de la Modernidad para aproximar a los números irracionales. Dichos métodos se aglomeran alrededor de la noción de infinito y se manifiestan como series infinitas, y fracciones continuas. Estas heurísticas conllevan a la definición formal del número irracional en el siglo XIX.

Para este capítulo se recurrió principalmente a los libro: *Analisis by Its History* de Hairer y Wanner e *Introducción al análisis de los infinitos* de Leonhard Euler. También se apeló a otros autores como Lagrange, Havil, Maor, Heath, Brezinski, quienes hacen referencia de forma detallada de estos procesos heurísticos y a los métodos exhaustivos.

La idea principal del análisis es la construcción histórica de los números irracionales buscando dar respuesta a la pregunta de investigación: *¿Cómo se abordaron los principales aspectos del estudio de los números irracionales desde el Renacimiento hasta la emergencia del Cálculo desde lo geométrico, lo aritmético-algebraico y lo infinitesimal?* Además de esto, se brindan al final unas reflexiones de tipo didáctico que exhiben inicios o bases para construir o elaborar una propuesta didáctica fundamentada en la Historia y Epistemología del concepto de irracional. Estamos seguros de que esta perspectiva ofrece grandes ventajas a la enseñanza de los números irracionales, en cuanto trabajo de extensión o complemento del presente proyecto.

Dado que, en el periodo escogido, el "análisis matemático de lo infinito" no pretendía formalizarse, nos restringimos a argumentos heurísticos, los cuáles son más interesantes para la enseñanza que los conceptos ya acabados o formalizados. Estos procedimientos de búsqueda poseen la ventaja inmediata de encerrar actividades didácticas concretas, es decir, sugieren directamente alternativas para la transposición didáctica del concepto.

Así pues, en las *Reflexiones de tipo didáctico* (que sirven de conclusiones al trabajo), se exponen algunos de los asuntos que se deducen de ese recorrido histórico en la construcción del concepto de los números irracionales, que pasando por la época de la modernidad, dejan ver, a la luz de las nuevas tecnologías y las herramientas actuales, una gran posibilidad de usar la historia como instrumento para la transposición didáctica. De este modo, nos permitimos presentar bocetos de algunas guías para el docente, a la manera de factor motivador para la comprensión del número irracional.

En estas reflexiones finales, permeados ya por todo ese bagaje de eventos y episodios estudiados y analizados sobre el desarrollo epistémico del concepto de los irracionales, dejamos abierta una propuesta didáctica para que se continúe trabajando en pro de vincular de manera estrecha, la historia con la enseñanza.

Nuestro análisis y nuestra propuesta surgen debido a que la enseñanza y el estudio de la irracionalidad en el sistema de los números reales enfrentan muchos problemas en Colombia y el mundo. Las necesidades son sentidas y las dificultades están muy bien documentadas. Por ejemplo en el campo de la enseñanza, el trabajo de maestría de Escobar y Escobar (2015) tiene el objetivo de "Analizar el error en el uso de los números racionales e irracionales…" (p.4). En Crespo (2008) se menciona que "emergen en oportunidades indicios que muestran que los números irracionales no son correctamente construidos”. Otros autores, citados por Sánchez y Valdivé (2011), “afirman que a veces son sorprendentes las deficiencias de los estudiantes de la especialidad de Matemática y profesores de Matemática en la comprensión del número irracional” (p.3).

El asunto parece estar enmarcado (Escobar y Escobar, 2015) en un problema mucho más general relacionado con el estudio de los sistemas numéricos. Sin embargo, este trabajo se enfoca en el problema particular de del surgimiento de los irracionales. A propósito, recordamos que un número (real) es irracional si no se puede expresar como una razón de números enteros, o sea, como una fracción entera.

Es de esta manera que las reflexiones de tipo didáctico que emergen del presente trabajo están claramente ligadas a los alcances del análisis histórico, del recorrido por las aventuras de los episodios que se han estudiado a lo largo del proyecto, y por tanto no se alejan del objetivo principal que es el conocimiento de esta historia, permitiendo ver crecer un concepto por encima de múltiples dificultades de tipo cultural, político o social.

Esperamos sinceramente que estas reflexiones contribuyan al mejoramiento de la Enseñanza de los números racionales en los colegios y en los primeros semestres de Universidad, dentro de nuestro país.

Capítulo 1

La crisis de los inconmensurables en la Grecia clásica

Luego de un viaje hacia 2.500 años atrás, llegamos a la Europa mediterránea dominada por los griegos y su filosofía, su política, su ciencia y, en particular, su pensamiento matemático.

Durante los siglos V, IV y III ANE, Grecia presencia una extraordinaria revolución social y filosófica que conmocionó los fundamentos mismos de las matemáticas. De tales nuevas concepciones emergerían problemas que perduran, de alguna manera, hasta nuestros días.

La revolución a la que nos referimos se venía gestando desde los siglos anteriores.

DISCÍPULOS DE PITÁGORAS

La secta o escuela de los pitagóricos debe su nombre a su fundador y maestro Pitágoras. Nacido en la isla de Samos hacia el 570 ANE, hijo de Mnesarchus y Pythais, es todavía recordado por los estudiantes de Geometría gracias al famoso teorema que lleva su nombre. Murió hacia el 510 ANE en Metaponto. Estas fechas no son certeras. La verdad es que el nombre de Pitágoras se diluye entre las nubes de los tiempos pasados.

La filosofía, la matemática del número y las creencias religiosas se mezclaban sin problema en las mentes de los pitagóricos: “la esencia eterna del número es el principio más providencial del universo, del cielo y de la tierra, y de la naturaleza intermedia…” (Iamblichus, 1818, p. 34). Según una tradición, Pitágoras, en su Discurso Sagrado, sostiene que "el número es el gobernante de las formas y las ideas, y es la causa de los dioses y demonios" (Iamblichus, 1818, p. 34). La música, por ejemplo, era determinada por los números en cuanto las proporciones entre diferentes tonos definían los intervalos musicales y las progresiones armónicas. “Pitágoras, parece haber dicho que oyó la armonía celestial, como entendiendo las proporciones armónicas en números, de los celestiales Cuerpos, y aquello que es audible en ellos” (Iamblichus, 1818, p. 34). Parece ser que Pitágoras, ver Figura 1.1, habiendo escuchado los sonidos producidos por martillos de distintas masas en la forja de un herrero, reconoció diversas consonancias y disonancias.

Figura 1.1: Detalle del *Templo de la música* de Robert Fludd, mostrando a Pitágoras entrando a la forja del herrero. Imagen tomada de Fauvel,J., Flood,R. & Wilson,R. (2003, p.15).

Entonces, llevó la situación a los monocordios (instrumentos de una sola cuerda) y descubrió ciertas relaciones entre números enteros. El sonido de la cuerda estirada por una masa de 12 libras, en comparación con la estirada por 6 libras (razón 2:1), correspondía a una octava más arriba en cierta escala musical. La cuerda estirada por 12 libras y la cuerda estirada por 8 libras (razón 3:2) producían una consonancia "diapente", es decir, un intervalo de quinta. Y así, con otros intervalos musicales. De estas consideraciones surge la llamada afinación Pitagórica y las escalas musicales griegas. (Iamblichus, 1818). En conclusión, las proporciones numéricas explican todas las cosas, incluida la música.

En cuanto a los métodos para buscar la verdad, se combinaban creencias y convicciones con demostraciones y argumentos. Los pitagóricos participaron también en la política y a menudo fueron perseguidos por ello. En otras ocasiones, los pitagóricos atacaron. Se cuenta que, cierta vez, los habitantes de Sybaris sucumbieron bajo el poder del ejército de Crotona, defensor de las ideas de Pitágoras.

Con estos elementos podemos introducirnos ya de lleno en las matemáticas pitagóricas. Como lo indica la etimología, la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad son relaciones que tienen que ver con las mediciones. Si tomamos un segmento que sirva de unidad de longitud, la longitud de cualquier otro segmento debería poderse referir a dicha unidad. Todo indica que los pitagóricos esperaban que el proceso de medición se hiciera en un *número finito* de pasos: repitiendo la unidad, o dividiéndola en partes iguales, o combinando repetición y división del segmento unidad. Dando un paso más allá, con gran elegancia, los griegos redefinieron el problema de una manera más abstracta, independiente de la elección arbitraria de una unidad de longitud. Dos segmentos son conmensurables si es posible encontrar, en un *número finito* de pasos, un segmento que sirva de unidad común para los dos segmentos dados. La acción de encontrar dicha medida común da significado al verbo conmensurar (del latín *commensurāre*).

La revelación hipasiana de la existencia de segmentos inconmensurables (es decir, que no se pueden conmensurar) fue, según Merzbach & Boyer (2011), "…de significación devastadora para la filosofía de Pitágoras" (p. 65). Según la leyenda, tales segmentos ponían en tela de juicio todo lo construido por los pitagóricos, quienes basaban sus teorías en propiedades y relaciones de segmentos múltiplos de una unidad dada, o bien en divisiones finitas de dicha unidad. Lo inconmensurable se presenta entonces como lo impensable.

Cuenta la tradición que el problema de encontrar la medida común o "conmensura" entre la diagonal de un cuadrado y su lado evidenció por primera vez la existencia de segmentos inconmensurables. Un primer acercamiento a este problema se puede lograr con un cuadrado de lado entero suficientemente grande, que tenga un buen número de divisores.

Construimos, pues, un cuadrado de lado igual a doce unidades, con ayuda de la Figura 1.2, ponemos la punta del compás en el vértice B del cuadrado y llevamos la diagonal sobre la recta del lado AB para comparar: el segmento EB (diagonal) excede el lado AB en más de cuatro unidades, lo que corresponde a una tercera parte del lado. Así,

$$diagonal = 12 + 4 + algo\ más.$$

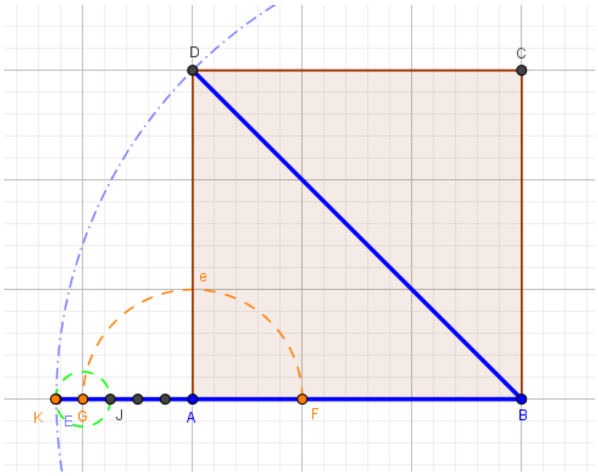


Figura 1.2. Cuadrado de lado igual a doce.

Mirado con más cuidado, o sea, mirando más de cerca lo que pasa cerca al punto K, notamos que dicho "algo" se pasa de la unidad (Figura 1.3). Por lo tanto, hay que restar una parte:

$$diagonal = 12 + 4 + 1 - algo\ más.$$

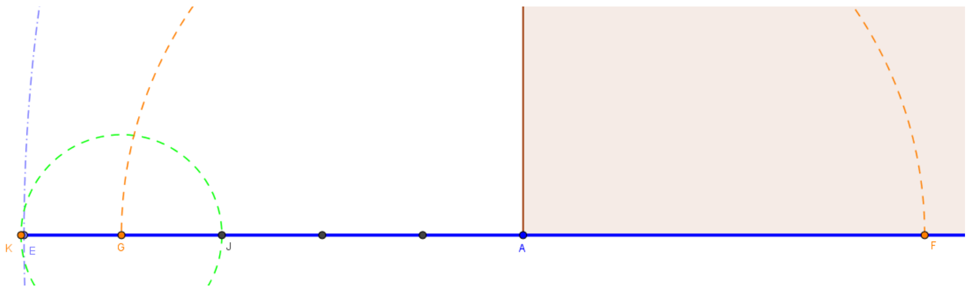


Figura 1.3. Acercamiento al segmento KF en la Figura 1.2.

No sabríamos decir si el proceso termina una vez comenzamos a dividir la unidad en cierto *número finito* de partes iguales (Figura 1.4). Es decir, queda la duda si este procedimiento termina en un *número finito* de iteraciones:

$$diagonal = 12 + 4 + 1 - \cdots ?$$

Figura 1.4. Acercamiento al segmento KG en la Figura 1.3.

Un ejemplo del cálculo aproximado de la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario, sin preguntas sobre la inconmensurabilidad se encuentra en palabras de Heath (1921, Vol. 1, p. 146) en un pasaje del *Āpastamba Dharmasūtra* (entre el 510 y el 240 ANE):

> "On the other hand, the truth of the theorem was recognized in the case of the isosceles right-angled triangle; there is even a construction for $\sqrt{2}$, or the length of the diagonal of a square with side unity, which is constructed as $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}\right)$ of the side, and is then used with the side for the purpose of drawing the square on the side: the length taken is of course an approximation to $\sqrt{2}$, derived from the consideration that $2 \cdot 12^2 = 288 = 17^2 - 1$; but the author does not say anything which suggests any knowledge on his part that the approximate value is not exact." (p. 146)

Con ayuda de la moderna notación para las fracciones, esto se reescribe convenientemente como

$$diagonal = \frac{12}{1} + \frac{12}{3} + \frac{12}{12} - \cdots ? = 12\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \cdots ?\right).$$

Se puede todavía encontrar otro término si usamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo formado por dos lados y la diagonal del cuadrado y "completamos el cuadrado" a conveniencia (álgebra renacentista):

$$(diagonal)^2 = 12^2 + 12^2 = 288 = 17^2 - 1 = 17^2 - 2(17)\left(\frac{1}{34}\right) + \left(\frac{1}{34}\right)^2 - \left(\frac{1}{34}\right)^2.$$

En resumen, aproximamos

$$(diagonal)^2 = \left(17 - \frac{1}{34}\right)^2 - \left(\frac{1}{34}\right)^2 \approx \left(17 - \frac{1}{34}\right)^2.$$

De aquí que podamos escribir con Heath (1921) que

$$diagonal = 12 + 4 + 1 - \frac{1}{34} + algo\ más \approx 12\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}\right) + ?$$

Por otro lado, la matemática griega separa número y magnitud ante la imposibilidad de admitir el concepto de número irracional y los irracionales quedan en el campo de las magnitudes, cuya existencia depende de poder ser construidas con regla y compás.

ANTHYPHAIRESIS EN LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Los Elementos de Euclides (alrededor del 300 ANE) constituyen ya un documento escrito y fiable de las matemáticas clásicas en la Grecia antigua. Ellos contienen, además, toda una teoría bien estructurada sobre la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad. Nos referiremos en concreto a las primeras proposiciones de los libros VII y X.

El libro VII comienza con las definiciones de unidad y de número. Seguimos la traducción de Heath (1908, Vol. 2, p. 277):

1. A unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.
2. A number is a multitude composed of units.

Queda claro que Euclides se limita a lo que hoy llamamos números enteros positivos. Luego siguen las definiciones de número par, impar; número primo, números primos entre sí; número compuesto, etc. De interés para lo que nos ocupa son las dos primeras proposiciones de este libro de Heath (1908, Vol. 2, p. 296 y 298):

> Proposition 1.
>
> Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until a unit is left, the original numbers will be prime to one another.
>
> Proposition 2.
>
> Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.

La idea que une a estas dos proposiciones es el procedimiento conocido como *anthyphairesis*, que quiere decir substraer repetidamente un número o segmento pequeño de un segmento grande hasta que lo que quede no se pueda medir con el pequeño. Luego, se toma lo que quedó y se repite el procedimiento substrayéndolo del segmento que antes era el más pequeño, pero que ahora juega el papel de más grande. El proceso termina después de un *número finito* de pasos, dado que se trata de enteros positivos. El número o segmento que queda al final es la medida común más grande de los dos segmentos. Si tal segmento es la unidad, los números son primos entre sí. En términos de hoy, se trata del famoso algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de dos números enteros positivos.

A manera de ejemplo, si se tienen dos segmentos desiguales AB y CD (de cinco y dos unidades), se puede buscar un segmento que los mida a ambos, esto es, una medida común con la cual comparar estos segmentos. Vamos por pasos, siguiendo a la Figura 1.5. Al restar del mayor AB el menor CD, se obtiene A_1B_1. Iterando este proceder se obtiene luego que, al restar A_2B_2 de A_3B_3 el resultado es cero. Se concluye que A_2B_2 (unidad) es la magnitud que puede medir a los segmentos AB y CD.

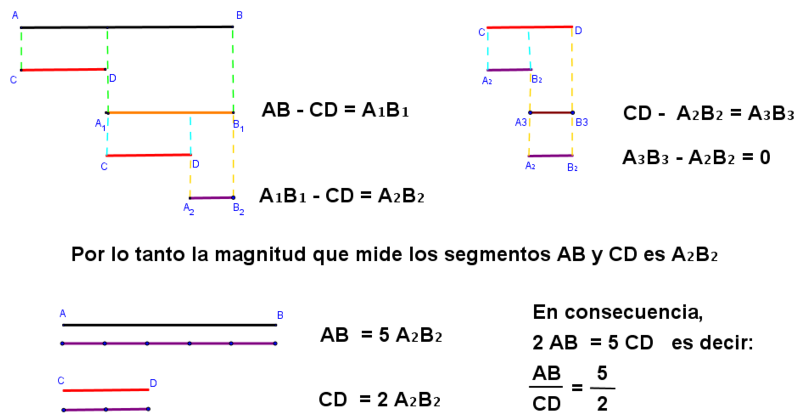


Figura 1.5. Ejemplo de *anthyphairesis*.

Esta poderosa idea griega evoca en la mente la definición contemporánea de número irracional, pues la proporción de dos segmentos inconmensurables no podría expresarse como el cociente de dos números enteros, un tema que Euclides trata más adelante en sus Elementos.

En efecto, en el libro X, *clasificación de los inconmensurables*, el maestro alejandrino pasa de los números enteros positivos a las "magnitudes" (su versión de los números reales). La primera definición, en la traducción de Heath (1908, Vol. 3, p. 10) dice así:

> 1. Those magnitudes are said to be commensurable which are measured by the same measure, and those incommensurable which cannot have any common measure.

Lo interesante aquí es la segunda proposición, la cual provee una manera para determinar si dos segmentos son inconmensurables:

> Proposition 2
>
> If, when the less of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from

the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable. (p. 17)

Euclides se abre a la posibilidad de que la sucesión de *anthyphairesis* no termine en un *número finito* de pasos. De hecho, el proceso no termina nunca y las magnitudes son inconmensurables. En otras palabras, no existe una magnitud (racional) que sirva de medida común a las dos magnitudes originales.

Con este criterio de inconmensurabilidad, contenido en los Elementos Proposición X.2, podemos volver a enfrentar la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado. En la Figura 1.6 hemos trazado un cuarto de una circunferencia de radio unitario en color azul claro. Sobre los dos radios perpendiculares entre sí construimos luego un cuadrado de lado unitario. Con el compás substraemos el lado de la diagonal. Lo que queda se toma y se substrae dos veces del lado (circunferencias en azul oscuro). Lo que queda esta vez (m) se usa para medir el diámetro de la circunferencia azul oscura (circunf. Roja). Y así sucesivamente. ¿Termina esto alguna vez?

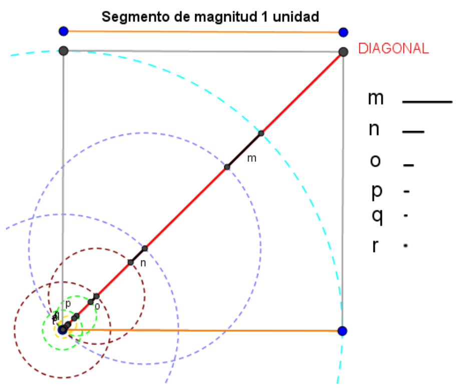


Figura 1.6. Substracciones repetidas en la diagonal de un cuadrado.

Hay otras construcciones, relacionadas con la Proposición X.2, que muestran la imposibilidad de encontrar una medida común entre la diagonal y el lado. La idea de tales construcciones consiste en mostrar que el resto o residuo que se obtiene en cada iteración conlleva las mismas dificultades del problema inicial. De esta manera, el procedimiento se itera "hasta el infinito". Por ejemplo, partamos de la Figura 1.7. Con la punta del compás en B, llevamos el lado BA sobre BF en la diagonal BC y obtenemos el resto $FC=BC-BF$. Por F se traza la tangente al arco de circunferencia AF, la cual encuentra el lado AC en D. Notamos que AC es tangente al arco AF en A de donde $AD=DF$. Ahora bien, el triángulo ABC es semejante al triángulo FCD por que tienen dos ángulos congruentes. Se sigue que el triángulo FCD es isósceles y FC es congruente con FD. Mejor dicho, se forma un triángulo semejante al inicial. En este nuevo triángulo se repite el procedimiento anterior, llevando un lado sobre la diagonal. Las repeticiones no paran jamás, lo que implica que la unidad común no puede ser hallada, por lo tanto, BC y AB son inconmensurables.

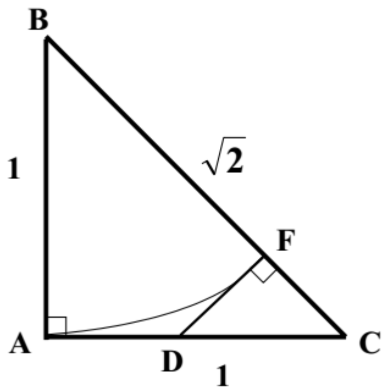


Figura 1.7. Cuadrado de lado unitario.

Observación: esta construcción presupone el conocimiento de otras proposiciones euclidianas. Por ejemplo: la tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio en dicho punto. También se necesita conocer la relación de semejanza de triángulos.

Otra manera (quizás más clara) de observar ese proceso infinito se logra construyendo los cuadrados que se forman en la diferencia entre la diagonal y el lado del cuadrado correspondiente. En la Figura 1.8 se ve cómo la construcción se repite indefinidamente.

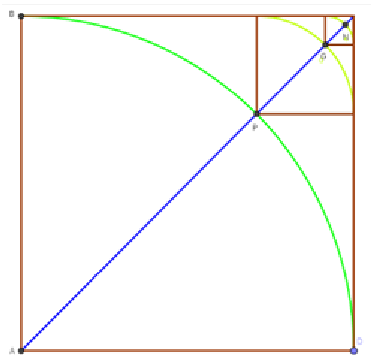


Figura 1.8. Cuadrados construidos con las diferencias entre diagonal y lado.

El problema de la diagonal del cuadrado no es el único problema de este tipo que nos ha legado la Antigüedad clásica. Cuando en un pentágono regular se trazan todas las diagonales se obtiene una "estrella de cinco puntas" o pentagrama áureo (Figura 1.9), una figura que, según la leyenda de las enseñanzas pitagóricas, encierra insondables misterios sobre lo divino y lo humano.

En el estudio de la medida común entre la diagonal y el lado del pentágono, encontramo:

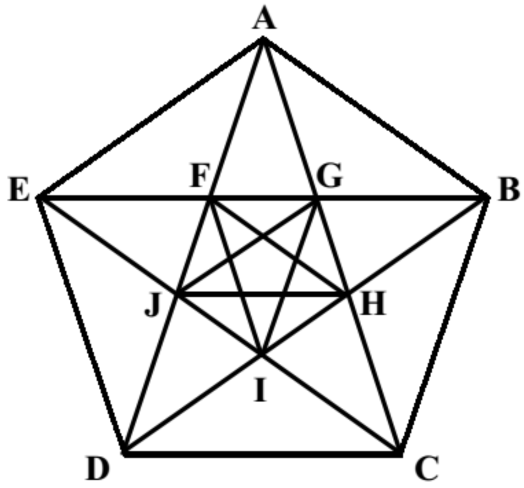


Figura 1.9. El pentagrama o pentáculo.

Primero se resta el lado del pentágono, segmento *EG=EA* (porque EGCD rombo) lo cual es demostrable, de la diagonal *EB*. Esto deja el residuo *GB,* que se substrae a su vez del lado *EG*. El nuevo resto es el segmento *FG*. Así se regresa a la relación original de los segmentos porque *FG* es el lado de un pentágono interior y el segmento *GB* es congruente con la pequeña diagonal *GI* del pentágono interior. En efecto, el triángulo *BGI* es isósceles con *GI=GB*. El pequeño pentágono es semejante al de partida ya que también es regular. Y así, *ad infinitum,* concluyendo con la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del pentágono. Según Iamblichus (1818), la divulgación de este descubrimiento fue el gran pecado de Hipasos de Metaponto al describir el método de formación de una esfera con doce pentágonos (p. 47).

Observación: Una demostración detallada de esta construcción podría requerir cierto conocimiento sobre la teoría de los rombos y los pentágonos.

Otras relaciones interesantes entre la diagonal mayor y los lados de los pentágonos interiores se pueden ver en la Figura 1.10. La diferencia entre estos segmentos se convierte en la diagonal del pentágono interior siguiente, puesto que conforman pares de lados opuestos en un paralelogramo, marcados en rojo y amarillo en la Figura. Los pentágonos que van apareciendo siguen un orden lineal *A, A', A''*..., que no termina nunca.

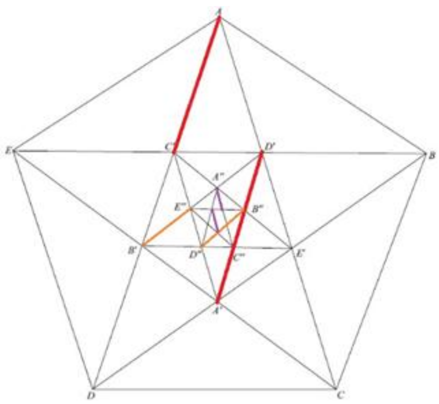


Figura 1.10

Se puede entender entonces que los procesos infinitos para los griegos estaban asociados al concepto de inconmensurabilidad, que a su vez está ligado al proceso de *anthyphairesis*, un concepto netamente geométrico que tiene que ver con la medida de un segmento con relación a otro y que se repite una y otra vez, es decir *ad infinitum*, lo cual se puede constatar en los dos ejemplos anteriores, y donde además se observa la importancia que tenían las representaciones gráficas para griegos más que las representaciones de tipo aritmético debido a las deficiencias de su mismo sistema numérico.

DEMOSTRACIONES POR *REDUCTIO AD ABSURDUM*

La *anthyphairesis* es un proceso de substracciones sucesivas. Los griegos clásicos también tenían otra herramienta teórica alternativa para comparar segmentos: la teoría de las proporciones (definidas en el libro V de los Elementos de Euclides).

En este contexto y en relación con la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado, la demostración de Aristóteles (384 a 322 ANE) en *Prior Analytics* (un tratado de Lógica) es la más conocida en los libros de texto hasta nuestros días. En la traducción de Heinemann (1957), el famoso pasaje dice que:

> All who argue *per impossibile* [from impossibility] infer first by syllogism a false conclusion, then they prove the original conclusion by hypothesis whenever something impossible follows from a contradictory assumption, as, for example, that the diagonal [of a square] is incommensurable [with the side] because odd numbers seem equal to odd numbers if it is assumed to be commensurate. It is inferred by syllogism that odd numbers are equal to even, and it is proved hypothetically that the diagonal is incommensurate, since a false conclusion follows from the contradictory assumption (p.110).

Hay varias cosas por aclarar a este respecto. En primer lugar, es una demostración basada en un método lógico muy particular: la reducción al absurdo o, según esta traducción, desde lo imposible. Esto abre las puertas a objetos que rechaza la intuición geométrica. En segundo lugar, se basa en una nueva definición de conmensurabilidad basada en la proporción: dos magnitudes son conmensurables si guardan una proporción como la que se da entre dos números (enteros positivos). Este tipo de proporción es pensable, es aceptable, es racional. Tercero, la demostración por reducción al absurdo era considerada muy difícil en la época del estagirita, pero hoy es estándar en las matemáticas: si suponemos que la diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables, entonces llegamos a que los números pares serían iguales a los impares, lo cual es un absurdo, una imposibilidad, un sinsentido. Por lo tanto, la diagonal del cuadrado no es conmensurable con el lado.

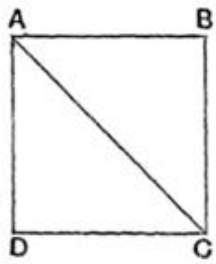
Una interesante interpretación (Figura 1.11) del anterior pasaje de Aristóteles se puede leer en Heath (1921, p. 91). Claro, la notación es algebraica. No se puede ser más claro al respecto. Notamos la aplicación esencial del Teorema de Pitágoras en la línea que invoca la proposición I.47 de los Elementos.

En relación con este hecho, Platón (alrededor de 427-347 ANE) pone en boca de Teeteto una anécdota sobre Theodorus de Cyrene (siglo V ANE). Este maestro explicaba un día a sus discípulos ciertos ejemplos de conmensurabilidad mostrándoles que el lado de un cuadrado que encerraba tres pies cuadrados, o cinco pies cuadrados, no era conmensurable con la unidad o pie. Y aún más, este maestro continuaba así hasta con el lado de un cuadrado que contenía 17 pies cuadrados y ahí se detenía. La demostración de Theodorus no se conoce, pero se presume que también procedía *per impossibile*.

Suppose AC, the diagonal of a square, to be commensurable with AB, its side. Let $\alpha : \beta$ be their ratio expressed in the smallest numbers.

Then $\alpha > \beta$ and therefore necessarily > 1.

Now $$AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2,$$
and, since $$AC^2 = 2AB^2, \qquad \text{[Eucl. I. 47]}$$
$$\alpha^2 = 2\beta^2.$$



Therefore α^2 is even, and therefore α is even.

Since $\alpha : \beta$ is in its lowest terms, it follows that β must be *odd*.

Put $$\alpha = 2\gamma;$$
therefore $$4\gamma^2 = 2\beta^2,$$
or $$\beta^2 = 2\gamma^2,$$
so that β^2, and therefore β, must be *even*.

But β was also odd:
which is impossible.

Figura 1.11. Extracto de Heath (1921, Vol. 1, p. 91).

En cuanto a la relación entre la diagonal del pentágono y el lado respectivo, se puede ver que ellas guardan una proporción muy interesante para el arte del dibujo. Ciertamente, refiriéndonos de nuevo a la Figura 1.9,

$$diagonal\ EB : lado\ EG \ \ como\ lado\ EG : \ resto\ GB = EB - EG\ .$$

Es decir, todo el segmento *EB* es a la parte más grande (lado *EG*) como dicho segmento más grande (lado EG) es a la parte más pequeña de la división (resto *GB*). Se trata de la famosa proporción áurea (de oro). Esta manera de dividir un segmento es tan importante que Euclides la considera en la segunda definición del libro VI de los Elementos en traducción de Heath (1908, vol. 2):

> 2. A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the less (p.188).

En la Proposición 30 del mismo libro de Euclides, se muestra como dividir un segmento en proporción media y extrema (Figura 1.12).

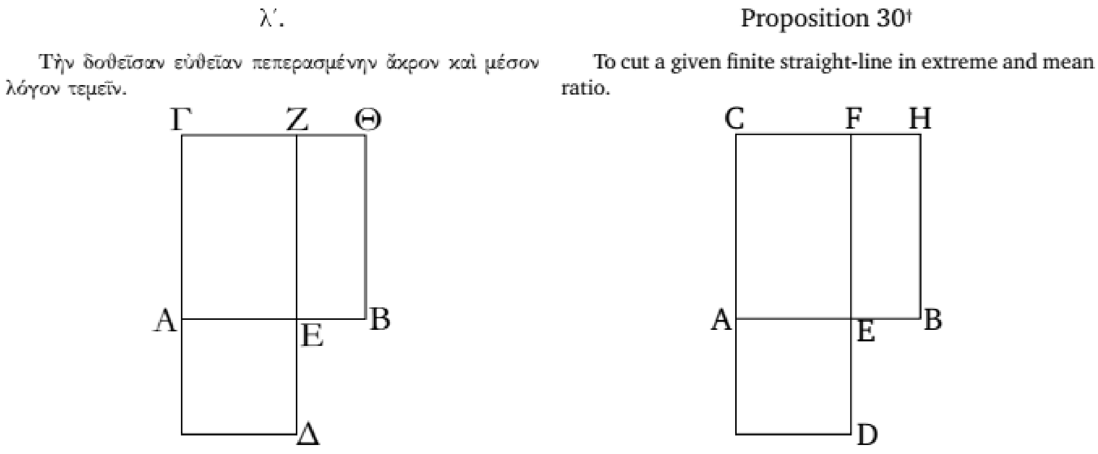


Figura 1.12. Extracto de Fitzpatrick (2008, p. 188).

En el libro de Merzbach & Boyer (2011, p.66) se recurre al álgebra renacentista para reformular este problema de segmentos como una ecuación cuadrática. En tal contexto, la proporción áurea buscada se deja interpretar como la solución φ de

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi} \quad si\ y\ sólo\ si \quad \varphi^2 + \varphi - 1 = 0.$$

Ahora, la prueba de la inconmensurabilidad:

Suponemos que $\varphi{:}1$ como $\alpha{:}\beta$, donde α, β son enteros positivos (mayores que uno, distintos) primos entre sí. Al construir los cuadrados, se obtiene que $\beta^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\alpha - \beta)$.

De esta manera, la magnitud α mide a β^2 y, por lo tanto, a β (Elementos VII.30). Pero esto contradice la suposición de que α, β son primos entre ellos.

Esto nos pone ya en el terreno del próximo capítulo.

En fin, si un par de magnitudes no son conmensurables, entonces ellas guardan una proporción o razón que no se puede expresar como una proporción o razón entre dos números enteros positivos. Para los pitagóricos más ortodoxos esto era impensable, inaceptable . . . irracional.

Capítulo 2

Álgebra y aproximación de los irracionales en el Islam medieval

Después de la guerra de Atenas con Esparta y luego de la caída del Imperio Romano, las matemáticas europeas sufrieron una parálisis por casi 700 años. No obstante, los árabes escribieron textos astronómicos basados en fuentes indias y persas al tiempo que tradujeron importantes textos griegos. En verdad, los primeros Califas, que tenían por misión difundir el Islam, preservaron algunos trabajos que aún no se sabe a ciencia cierta si son originales. De todos modos, esto permitió avanzar en los estudios de las matemáticas y otras ciencias y comunicar así sus resultados a los europeos, quienes comenzaron a retomar sus investigaciones al final de la Edad Media y comienzos del Renacimiento.

Los inicios del renacimiento europeo de las matemáticas empiezan con un estudioso italiano de las matemáticas árabes, Leonardo de Pisa (hacia 1170-1240), también conocido como Fibonacci. En 1202 publica su libro *Liber Abaci*, en el cual cambió el antiguo y complicado sistema de numeración de Europa por el Indo-árabe. Las ventajas se ponen de manifiesto es la comparación de la escritura de los números (MMMCCCXXIV sería lo mismo que 3327) y en la manera de realizar las operaciones de adición, multiplicación, descomposición de factores primos, entre otras muchas cosas. (Young, 1981).

Dicho renacimiento se debe en gran parte a los logros de los árabes entre 750 y 1450, aproximadamente. Entre los trabajos que más influenciaron a los europeos sobresalen las obras de Muhammad ben Musa Al-Khowârizmî (c. 780-850), en los cuales se usa ya la palabra *al-jabr*, álgebra. Según Berggren (1986), "Al-Khowârizmî, en su *Libro de adición y sustracción de acuerdo con el cálculo hindú*, presenta la introducción al sistema utilísimo de posición decimal que los hindúes habían desarrollado en el siglo VI A.D." (p.7). Este texto tuvo una extraordinaria influencia en la matemática occidental puesto que contiene los algoritmos para las diferentes operaciones elementales, entre los cuales se incluyen los algoritmos para la extracción de raíces cuadradas, cúbicas, etc. Este método fue adoptado posteriormente por los matemáticos y astrónomos islámicos Al-Samawâl Yabyii Almaghribi en el siglo XII y por Ghiyath al-Din Jamshid Masúd Al-Kashi en el siglo XV. Sobre esto volveremos más adelante en este capítulo. Cabe resaltar que el método se puede usar también para aproximar la proporción entre la circunferencia y su radio.

Pero las influencias de este matemático no terminan aquí. Según Berggren (1986), Al-Khowârizmî influye en Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi, quien "logra resolver (en su libro Aritmética hindú) problemas mediante el uso de fracciones decimales" (p.7). Revelando así la importancia de los trabajos de este gran matemático

SISTEMA DECIMAL Y OPERACIONES ELEMENTALES

Es impresionante ver cómo la contribución islámica a las matemáticas hace que emerjan, no sólo la escritura, sino también las operaciones básicas que hoy en día conocemos (adición, sustracción, multiplicación y división). Los hindúes ya tenían ciertas reglas, que fueron luego transformadas e introducidas en Europa por los árabes. Describimos a continuación las explicaciones del astrónomo y geógrafo Kushyar ibn Labban (971 – 1029) sobre las operaciones, siguiendo las interpretaciones de Berggren (1986) y Al-Uqlidisi (1978).

1. Primero se debían de aprender las nueve letras en ese orden (de derecha a izquierda):

Nueve letras

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

2. Luego se procedía a enseñar que el digito que está más a la derecha cuenta las unidades, el que le sigue cuenta las decenas y el tercer número (de derecha a izquierda) cuenta lo cientos o centenas (diez decenas). El que sigue cuenta los miles y así sucesivamente.

3. Existe una marca especial, el cero, el cual indica que un lugar está vacío.

Cuando se tenían claras estas reglas se procedían a enseñar la escritura de los números y su valor posicional para luego continuar con las operaciones. A continuación, se mostrarán los métodos utilizados por los hindúes para realizar operaciones elementales o básicas —según el texto de Al-Uqlidisi (1978)— tal como los relata Kushyar usando tableros de arena. Dichas tablas o tableros no eran muy grandes y permitían escribir con un dedo o con un palo, así como borrar fácilmente (aplanando la arena).

Doblar y partir a la mitad

Para doblar un número ellos tomaban dos veces el mismo número y lo sumaban, borrando así el número que habían tomado. Luego lo remplazaban por el número obtenido. Por ejemplo, uno y uno hacen dos: toman el uno lo borran de la posición y ponen el dos. Así con las otras situaciones posibles.

Números		**Doble**	**Operación**
١	1	2	Uno y uno hacen dos
٢	2	4	Dos y dos hacen cuatro
٣	3	6	Tres y tres hacen seis
٤	4	8	Cuatro y cuatro hacen ocho
٥	5	10	Cinco y cinco hacen diez
٦	6	12	Seis y seis hacen doce
٧	7	14	Siete y siete hacen catorce
٨	8	16	Ocho y ocho hacen diez y seis
٩	9	18	Nueve y nueve hacen diez y ocho

Luego si deseaban doblar un número mayor, por ejemplo 27, procedían de izquierda a derecha así: dos y dos hacen cuatro, luego en el lugar del 2 ponen el 4 obteniendo así 47. Llega el turno del siete, diciendo: siete y siete hacen catorce, borran el 7 y escriben el 4, pero se tiene diez que es de forma de uno en el siguiente lugar, agrégueselo al 4 para obtener 5. El resultado es 54. Se aprendía "que cada diez en cualquier lugar es uno en el siguiente" (Al-Uqlidisi, 1978, p.44). El doblar un número va de izquierda a derecha, es decir, desde la posición más alta.

De manera contraria, para reducir a la mitad, se procede desde las cifras de las unidades, o sea, de derecha a izquierda. A modo de ejemplo, se plantea reducir a la mitad el número 3754:

1. La mitad de cuatro es 2, porque dos y dos hacen 4, luego se borra el 4 y se pone el 2 (3752).
2. Se toma el 5 y se dice que la mitad de 5 es 2 y medio (medio es la mitad de 10 que es 5, porque el sistema es en base diez). Luego en el lugar del 5 ponen 2 y el medio es decir el 5 se lo agregan al número anterior, es decir, se borra 2 y queda 7 (3727).
3. Seguimos con el 7, se procede de igual forma que el paso anterior. Así, la mitad de 7 es 3 y medio. En el lugar del 7 se coloca el 3 y el medio (5) se le agrega al número anterior, es decir al 2, borrando así el 2 y colocando el 7 (3377).

4. Para terminar, se continúa con el número que sigue el 3, y se dice: la mitad de 3 es uno y medio; se borra el 3 y se coloca el 1, luego el medio (5) se le agrega al número anterior es decir al 3, borrando el 3 y colocando el 8.

3754 → 3752 → 3727 → 3377 → 1877

Luego la reducción a la mitad de 3754 es 1877.

Aumentar y disminuir

Para aumentar (agregar o sumar) un número con respecto a otro, se procedía la siguiente forma: se dibujaban dos líneas y se colocaba la cantidad menor debajo de la mayor de tal forma que coincidan unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas y así sucesivamente. Por ejemplo, para agregar 438 a 873, se procede de la siguiente forma:

1. Primero se deben colocar los números de la forma que el menor este debajo del mayor y deben coincidir, unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas.

8	7	3
4	3	8

2. Comenzamos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Agregamos 4 al 8 teniendo el 12, luego el en el lugar del 8 insertar el 12. Obteniendo lo de la derecha.

1	2	7	3
	4	3	8

3. Luego se le agrega 3 al 7, obteniendo 10, el 7 se cambia por el 0 y el 1 se le agrega al número anterior, es decir, al 2 obteniendo el 3, luego el 2 se cambia por 3. Queda así:

1	3	0	3
	4	3	8

1. Por último, agregamos la cifra de las unidades, es decir, le agregamos 8 al 3 obteniendo 11, luego el 3 se cambia por 1 y el 1 se le agrega al número anterior es decir que 0 se cambia por 1. Teniendo por último el resultado siguiente:

1	3	1	1
	4	3	8

Para disminuir (restar) se configura de igual forma que para agregar y se debe tener mucho cuidado para que el sustraendo sea siempre menor que el sustraído. Para esto, "comenzamos la resta desde lo más alto, restando cada lugar del anterior" (Al-Uqlidisi. 1978, p.46). Por ejemplo, si se quiere restar 438 de 873, se procede de la siguiente forma.

1. Se toman el 4 y el 8 y se procede así: cuatro de ocho, el 8 se cambia por 4.

4	7	3
4	3	8

2. Luego se procede con el 3 y 7, diciendo: tres de siete, esto es 4; luego el 7 se cambia por 4.

4	4	3
4	3	8

3. Por último, se toman las cifras de las unidades y se dice ocho de tres, como tres es menor que 8, se toma el número anterior con el 3, en este caso 43, luego 8 de 43 es 35, luego el 43 se borra y se coloca el 35. "No hay "préstamos" en el

4	3	5
4	3	8

procedimiento de Kushyar" (Berggren.1986, p.32). En el último paso, dado que no podemos restar 8 de 3, debemos restarlo de 43.

Multiplicación

Para comenzar con la multiplicación, Al-Uqlidisi (1978) sugiere memorizar y aprender la multiplicación de los números del uno al diez, para luego realizar multiplicaciones de dos lugares por uno, luego de dos lugares por dos y así sucesivamente.

Veamos el siguiente ejemplo citado en Berggren (1986, p.34): multiplicar 325 por 243 siguiendo el método de Kushyar. Se deben colocar primero las cifras de las unidades del segundo número debajo de las cifras de centenas del primero generando cinco columnas.

1. Disponiendo los números:

		3	2	5
2	4	3		

2. Se multiplica la cifra de las centenas del primer número por todas las cifras del segundo número. Así, 3 por 2 igual a 6 y este se coloca en la quinta posición es decir encima del número 2.

6		3	2	5
2	4	3		

3. Luego 3 por 4 igual a 12 y encima del 4 se coloca las cifras de las unidades del 12, en este caso el 2, y el uno se le agrega al número anterior es decir al 6, quedando en 7.

7	**2**	3	2	5
2	4	3		

4. Multiplicando 3 por 3 igual a 9, luego el 3 de se cambia por 9. Quedando así:

7	**2**	**9**	2	5
2	4	3		

5. Ahora se corre una unidad el segundo número hacia la derecha:

7	**2**	**9**	2	5
	2	4	3	

6. Se procede luego a multiplicar 2 por 2 igual a 4, luego se le agrega 4 al 72. Quedando en 76, luego el 72 se borra y se coloca el 76.

7	**6**	**9**	2	5
	2	4	3	

7. Luego se multiplica 2 por 4 igual a 8, se toma el 69 y se le agregan 8, quedando en 77, ahora se borra el 69 y se coloca 77.

7	**7**	**7**	2	5
	2	4	3	

8. Ya para terminar se multiplica el 2 por 3 igual a 6 y este se coloca en el lugar del 2. No se le agrega, pues por esta cifra es por la que se está multiplicando.

7	**7**	**7**	**6**	5
	2	4	3	

9. Por último, se repiten los pasos desde el quinto punto, siguiendo el mismo algoritmo, pero ahora corriendo un lugar hacia la derecha el segundo número.

7	**7**	**7**	**6**	5
		2	4	3

De esta manera, la multiplicación entre 243 por 325 es igual a **78975,** el procedimiento es algo extenso y laborioso a comparación del algoritmo actual (simplificado, pero en esencia es el mismo).

Esquema actual

		2	4	3
	*	3	2	5
+	1	2	1	5
	6	8	6	
7	2	9		
7	**8**	**9**	**7**	**5**

División

Esta operación es una de las más relevantes del sistema hindú, debido a la importancia de las fracciones y los decimales. Según lo explica Al-Uqlidisi (1978), los hindúes conocían el proceso para sacarle la mitad (un medio), la tercera parte (un tercio) y así sucesivamente con todas las nueve letras de una cifra o número básico. Este conocimiento les permitía razonar así: el sacarle la cuarta parte a un número equivale a buscar y encontrar un número que multiplicado por 4 produzca el número original. Por ejemplo, la cuarta parte de 24 es 6 porque 4 por 6 es igual a 24 (Al-Uqlidisi, 1978, p.55).

Sin embargo, para números más extensos, se puede lograr un algoritmo, tal como en ejemplo citado por Berggren (1986, p 35):

1. Se escribe el número a dividir o dividendo (5625) y, debajo de éste de izquierda a derecha, el número por el que va a ser dividido o divisor (243).

5	**6**	**2**	5
2	4	3	

2. Se busca un número que, al multiplicarlo por 243, logre abarcar la mayor cantidad posible del 562, en este caso el 2, debido a que 2 por 243 es 486. En este paso se hacía una especie de estimación de tal forma que siempre se pueda abarcar la mayor cantidad posible encima del número. Este número "2" hará parte entonces del cociente y se debe colocar en cima del número a dividir en el lugar de las decenas.

		2	
5	**6**	2	5
2	4	3	

3. Luego se procede restar 486 de 562 y el resultado es 76, por lo que 562 se cambia por 76.

		2	
	7	6	5
2	4	3	

4. Ahora se corre el 243 una unidad hacia la derecha y se procede igual al paso anterior. Se busca un número que multiplicado por 243 logre abarcar la mayor cantidad de 765, en este caso 3, porque 3 por 243 es igual a 729. Entonces, a 765 se le resta esta cantidad, quedando 36 como residuo.

	2	
7	6	5
2	4	3

	2	**3**
7	6	5
2	4	3

	2	**3**
	3	6
2	4	3

El algoritmo es algo más complejo que el moderno correspondiente, pero tiene mucho más valor educacional. En lenguaje moderno,

$$5625 \div 243 = 23 + \frac{36}{243},$$

lo cual conduce al problema de las fracciones de la unidad.

FRACCIONES DECIMALES Y SISTEMA SEXAGESIMAL

El último cómputo fue muy importante ya que el problema radicaba en saber cómo era de grande la fracción 36/243. Según Berggren (1986). Era necesario saber escribir esa fracción en subunidades para fines prácticos de la época, en astronomía, economía o construcción. Por ello Kushyar procede a resolver este problema en base 60 o sistema sexagesimal que se remonta a la época de los babilónicos:

1. Primero se va a realizar una relación $36/243 = n/60$. Por lo tanto, $\mathrm{n} = 36 * \ 60/243 = 2160/243$.
2. Al efectuar la división, se puede encontrar que el cociente es 8 con un residuo de 216, debido a que 8 por 243 es igual a 1944 y si esto se resta de 2160, daría 216: $\mathrm{n} = 2160/243 = 8 + 216/243$.
3. Si se repite el proceso nuevamente $216/243 = \mathrm{m}/60$, $\mathrm{m} = 216 * \ 60/243 = 12960/243 = 53 + 81/243$. Y así sucesivamente, se podría continuar las veces que sea necesario. Sin embargo, los islámicos utilizaban este sistema en base 60 para fines astronómicos e influenciados por el uso de la moneda local.

La respuesta aproximada al problema de dividir 5625 entre 243 sería algo así como: 23°8´53´con 81´.

Según Heath (1921), el descubrimiento de este sistema sexagesimal de los babilónicos fue hecho por W.K. Loftus en 1854 en su estudio de unas tablas de Senkereh, las cuales se pueden remontar a los años 2300 y 1600 ANE (p.28). Una muestra de este hecho se puede observar en la siguiente imagen tomada del libro *Analysis by History* (Hairer y Wanner. 2008, p.22). Sobre esta imagen volveremos más tarde.

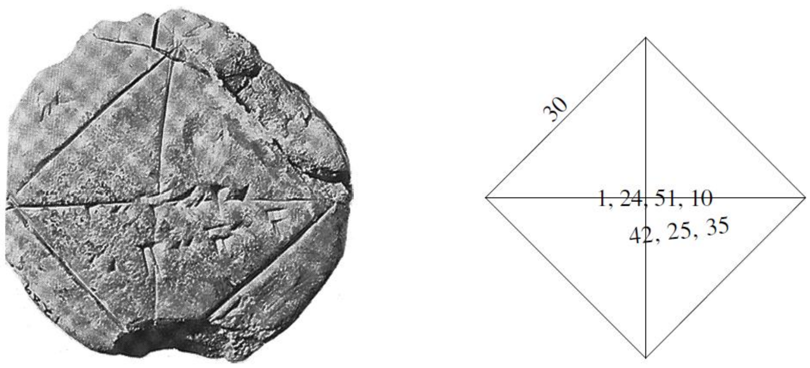


Figura 2.1: Tableta cuneiforme babilónica YBC 7289 desde 1990 a.C. representando un cuadrado de lado 30 con diagonal con diagonal 42,25,35 y relación 1,24,51,102.

El problema de las fracciones sexagesimales fue ciertamente de gran importancia para la evolución del sistema numérico decimal y, gracias a los aportes de grandes matemáticos Islámicos como Al-Uqlidisi, se terminó por escribir estas fracciones en términos de decimales, usando el punto que actualmente se emplea para diferenciar la parte entera y la parte decimal de un número.

Por ejemplo, para hallar la mitad de 4735, por el método de Kushyar citado en Berggren (1986, p. 33), se tiene:

1. Para sacar la mitad de un número se debe proceder de derecha a izquierda.
2. Tener presente que 1/2: en base 60 es igual a 30 y en base 10 es igual a 5.
3. Problema: encontrar la mitad de 4735.

4. De derecha a izquierda, la mitad de $5 = 2 + 1/2$; luego, en base 60, es 5°30´ y en base 10 es $2 + 1/2 = 2 + 0.5$. Por lo que en el lugar del 5 se pone el 2 y al final tenemos en cuenta el 1/2. Obteniendo así 4732.
5. Luego la mitad de 3 es $1 + 1/2$, luego se borra el 3 y se coloca el 1, y el 1/2 que se hace 5 se le agrega al lugar anterior. Quedando así el 2 de las unidades en 7. Obteniendo entonces 4717.
6. Se procede de igual forma con el 7, su mitad es $3 + 1/2$, luego en el lugar del 7 se coloca el 3 y el 1/2 se hace 5 se le agrega al lugar anterior así el 1 de las decenas queda en 6. Obteniendo entonces 4367.
7. Por último, se le saca la mitad al 4 que es 2, luego se cambia el 4 por el 2. Obteniendo finalmente la mitad del número 4735: es 2367 al cual se le agrega el 1/2 que estaba al inicio, pero como no hay ninguna cifra antes de la cifra de las unidades esta es tomada en forma fracción 2367 + 1/2, en base 60: 2367°30´ o en base 10: 2367.5.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES CUADRADAS, CÚBICAS, …

Heurísticas griegas tardías para la raíz cuadrada

Con base en el libro de Heath (1897) sobre los trabajos de Arquímedes, se presentan a continuación algunas interpretaciones sobre ciertas investigaciones griegas postclásicas en torno a la extracción de raíces cuadradas. Es difícil decidir si ellas corresponden al pensamiento original de los autores o si se deben a la generosidad de los estudiosos de las matemáticas griegas. Ellas abarcan la *Sintaxis matemática* o *Almagesto* de Tolomeo, algunos comentarios de Theon sobre esta obra y ciertas obras de Arquímedes, en particular *Sobre la medida de la circunferencia*. Por cierto, el sistema de numeración griego no es tan efectivo como el indo-árabe.

Se comienza por separar los números en bloques de dos cifras, debido a que, si un número de un dígito se eleva al cuadrado, dicho cuadrado no excede los dos dígitos: $9^2 = 81$ (será de dos dígitos a lo sumo). De igual forma, si se eleva un número de dos dígitos al cuadrado, su resultado tendrá máximo cuatro cifras $99^2 = 9801$.

Luego, usando la identidad $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ (*Elementos* de Euclides II.4) para buscar un valor para x tal que sea el máximo que se puede emplear para que la expresión $2ax + x^2$ sea menor que la diferencia $A - a^2$, donde A es el primer bloque de izquierda a derecha y a^2 es el mayor cuadrado que no lo excede.

Esto se entiende mejor con la ayuda de un ejemplo detallado. Se nos pide calcular $\sqrt{6889}$:

1. Se separan bloques de dos cifras de derecha a izquierda: 68 89, donde $\mathrm{A} = 68$
2. Se busca el máximo número cuyo cuadrado no exceda a 68:
   $\mathrm{a} = 8\,,\ \ 8^2 \leq 68.$
3. Se eleva al cuadrado y se hace la diferencia $\mathrm{A} - \mathrm{a}^2$,
   $\mathrm{A} - \mathrm{a}^2 = 68 - 64 = 4.$

4. Esta diferencia se completa con el siguiente bloque: $4 \quad 89 = 489$.
5. Luego se busca un número que satisfaga la expresión $2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2 \leq 489$.
6. Como el número original tiene cuatro cifras, su raíz será de dos cifras, donde 8 corresponde a la cifra de las decenas por lo que $\mathrm{a} = 8 \cdot 10$ realmente, lo que se debe buscar es un número que satisfaga la expresión $2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 \leq 489$. O lo que es lo mismo,

   $(160 + \mathrm{x})\mathrm{x} \leq 489$.
7. Por ensayo, es fácil encontrar el máximo valor:

   $(160 + 3)3 \leq 489\,;\ 489 = 489$.
8. La raíz cuadrada buscada es $\mathrm{a} \cdot 10 + \mathrm{x} = 8 \cdot 10 + 3 = 83$, $\sqrt{6889} = 83$.

Para encontrar $\sqrt{144}$ se procede de manera similar. Se escribe $1 \quad 44$ y así, $A = 1$. Se tiene $a = 1$, $1^2 \leq 1$, y $A - a^2 = 1 - 1 = 0$. Ahora, $0 \quad 44 = 44$. Se busca x tal que $2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot x + x^2 = (20 + x)x \leq 44$.

$(20 + 2)2 \leq 44$. Así que $\sqrt{144} = 12$.

Los anteriores ejemplos ilustran los pasos para los números que tienen raíz exacta. Ahora se presenta otro ejemplo que emplea el método de Ptolomeo para extraer la raíz usando el sistema de fracciones sexagesimales. Se trata del ejemplo explicado en Heath (1897, p.75) sobre la raíz cuadrada de 4500. Sin embargo, vamos a comenzar por verificar que la parte entera de esta raíz es 67.

1. Se separan los bloques de dos cifras de derecha a izquierda: $45 \quad 00$, de donde $\mathrm{A} = 45$.

2. Se busca el máximo número cuyo cuadrado no exceda a 45:

   $a = 6, \ \ 6^2 \leq 45.$

3. Se hace la diferencia $A - a^2 = 45 - 36 = 9.$
4. Esta diferencia se completa con el siguiente bloque 9 00 = 900.
5. Se busca el número que satisfaga la expresión

   $2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot x + x^2 \leq 900$ ó $(120 + x)x \leq 900.$

6. Al ensayar valores, $(120 + 6)6 = 756\,;\ (120 + 7)7 = 889\,;$

   $(120 + 8)8 = 1024.$ Luego, $x = 7, (120 + 7)7 = 889.$

   La diferencia será $900 - 889 = 11.$

Esto significa que $\sqrt{4500} = \sqrt{4489 + 11} = \sqrt{67^2 + 11}$ es decir, que no es una raíz exacta, por lo que se empleará el sistema de fracciones sexagesimales para determinar una raíz más precisa. Primero tratamos de lograr $\sqrt{4500} = \sqrt{67^2 + 11} \stackrel{?}{=} 67 + \frac{x}{60}$, para cierto entero positivo x entre 1 y 60. En otras palabras, $11 \stackrel{?}{=} \frac{2 \cdot 67x}{60} + \frac{x^2}{60^2}$.

Por ensayo y error se encuentra que la igualdad no es posible y que la mejor elección es $x = 4$, ya que $x = 5$ sobrepasa el valor de 11. Esto nos lleva a considerar; $\sqrt{4500} = \sqrt{67^2 + 11} \stackrel{?}{=} 67 + \frac{4}{60} + \frac{y}{60^2}$.

O sea, $11 - \frac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \left(\frac{4}{60}\right)^2 = \frac{7424}{60^2} \stackrel{?}{=} 2\left(67 + \frac{4}{60}\right)\frac{y}{60^2} + \frac{y^2}{60^4}$.

Lo que nos lleva a tomar el valor $y = 55$, que no alcanza, porque $y = 56$ se sobrepasa. En verdad, un sencillo cálculo prueba que

y	$z = 2\left(67 + \frac{4}{60}\right)\frac{y}{60^2} + \frac{y^2}{60^4}$	$\frac{7424}{60^2} - z$
50	1,863155864	0,19906636
51	1,900422917	0,16179931
52	1,937690123	0,1245321
53	1,974957485	0,08726474
54	2,012225	0,04999722
55	2,04949267	0,01272955
56	2,086760494	**—0,02453827**

De esta manera se llega a la aproximación tolemaica

$$\sqrt{4500} \approx 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2} = 67{,}08194444\ldots$$

El proceso se puede repetir las veces que se precise. Ésta, sin embargo, es una buena aproximación al valor correcto de la raíz.

El carácter poco sistemático de las indagaciones griegas es patente en la aproximación de Tolomeo; $\sqrt{3} \approx \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} \approx 1.7320509$, en interpretación de Heath (1897, p.77). Podemos explicar este resultado como sigue, ya que esta fuente no lo justifica.

1. Primero se multiplica y divide por 60^2 para obtener

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \cdot 60^2}{60^2}} = \frac{\sqrt{10800}}{60}.$$

2. Se separan bloques de dos cifras de derecha a izquierda: 1 08 00, de donde A = 1.

3. Se toma $a = 1$, $1^2 \leq 1$. Así, la diferencia $A - a^2 = 1 - 1 = 0$.
4. Se completa con el siguiente bloque $0 \quad 08 = 8$.
5. Se busca la incógnita de $2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot x + x^2 = (20 + x)x \leq 8$. $x = 0$.
6. Así que la nueva diferencia será $8 - 0 = 8$.
7. Ella se aumenta en el siguiente bloque de números: $8 \quad 00 = 800$.
8. Se busca $20 \cdot 10 \cdot x + x^2 = (200 + x)x \leq 800$. El valor es 3, pues con el 4 se sobrepasa.
9. $(200 + 3)3 = 609 \leq 800$ y $800 - 609 = 191$.

Con esto se logra:

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \cdot 60^2}{60^2}} = \frac{\sqrt{10800}}{60} = \frac{\sqrt{103^2 + 191}}{60}.$$

Para finalizar se hace:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{103^2 + 191}}{60} \overset{?}{=} \frac{103}{60} + \frac{x}{60^2} + \frac{y}{60^3}.$$

Por el método de más arriba se encuentra que las mejores elecciones posibles son $x = 55$ y $y = 23$.

Teniendo en cuenta lo expuesto sobre los procesos utilizados para aproximar las raíces cuadradas, es posible explicar la Figura 2.1 (tableta cuneiforme en Hairer y Wanner. 2008, p.22). Ella contiene unos cálculos para la diagonal de un cuadrado de lado 30. Primero,

$$x^2 = 30^2 + 30^2 = 1800, \; x = \sqrt{1800}.$$

1. Separando bloques de dos cifras de derecha a izquierda:

   $18 \quad 00$, $A = 18$.

2. Se busca el máximo número cuyo cuadrado no exceda a 18:

   $a = 4, \quad 4^2 \leq 18.$

3. Así, $A - a^2 = 18 - 16 = 2.$

4. Se completa con el siguiente bloque: $2 \quad 00 = 200.$

5. Luego se busca $2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot x + x^2 = (80 + x)x \leq 200.$

6. $x = 2\,,\ (80 + 2)2 \leq 200.$ La diferencia será $200 - 164 = 36.$

Esto significa que $\sqrt{1800} = \sqrt{1764 + 36} = \sqrt{42^2 + 36}$.

Luego se escribe $\sqrt{1800} = \sqrt{42^2 + 36} \stackrel{?}{=} 42 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}$

Determinando, como es sabido, $x = 25$ y $y = 35$ (mejores valores). Se recomienda el lector dar una mirada a la tabla para ver cómo estos valores aparecen allí. De esta manera, $\sqrt{1800} \approx 42{,}42638$.

Algoritmos de los grandes maestros musulmanes

En el Islam medieval el concepto de raíz, *jadhr*, significa el origen de cualquier cosa. Al-Shahrazuri menciona una máxima del Profeta: "la honradez está en las raíces de los corazones de los hombres" (Al-Uqlidisi, 1978, p. 437). Los pensadores islámicos tenían diferentes connotaciones para la noción raíz, según el contexto. En los negocios se referían a ella como *jadhr* (la raíz debería ser exacta, pero si no lo era se referían a ella como *asamm*); en geometría le decían *dil´* y en algebra, *shay*.

A diferencia de los griegos antiguos, los maestros musulmanes contaban con el poderoso sistema decimal, con una muy buena notación algebraica. Con estas herramientas superaron las heurísticas mediante algoritmos efectivos para encontrar raíces de cualquier grado entero, prácticamente.

a) Raíces cuadradas

Y también fueron capaces de dar definiciones más precisas. Al-Uqlidisi define la raíz como “un número que ha de ser multiplicado por sí mismo para dar el número cuya raíz se va a extraer” (Al-Uqlidisi, 1978, p.437). Además, en otros textos que utilizan la misma definición, agregan que la raíz cuadrada x satisface la relación $1 : x :: x : n$. Esto corresponde con la relación media y extrema para determinar la cuadratura de un rectángulo de área n cuya raíz es x.

Al-Uqlidisi (1978, p.437) da un ejemplo (tabla a la derecha) del algoritmo usado para extraer la raíz de 186.624, cuyo resultado es 437, una *jadhr* o raíz exacta. Sin embargo, este autor no proporciona ninguna explicación y hay que idearse un algoritmo para entender la tabla. Tal algoritmo se describirá enseguida y coincide con el de *Al-Kashi* explicado en el libro de Bergren (1986). La relación con las interpretaciones de Heath (1897) saltan a la vista.

2	17	
4	**3**	**2**
.	.	.
18	66	24
4	8**3**	**62**
2	49	
	17	24

Pasemos pues al algoritmo de Al-Kashi tal como lo describen Al-Uqlidisi (1978) y Berggren (1986). Mediante el cual se pueden extraer raíces cuadradas y quintas. Más tarde damos una interpretación y lo expandimos a las raíces cuartas y cúbicas.

Las siguientes imágenes han sido tomadas de los textos mencionados y muestran cómo se trabajaba (ya no en las tablas de arena) si no sobre papel. Esta ventaja permitió a Al-Kashi tener todos los pasos a la vista, organizándolos y tabulándolos. Se quiere extraer la raíz cuadrada de 331.781, es decir: $\sqrt{331.781}$.

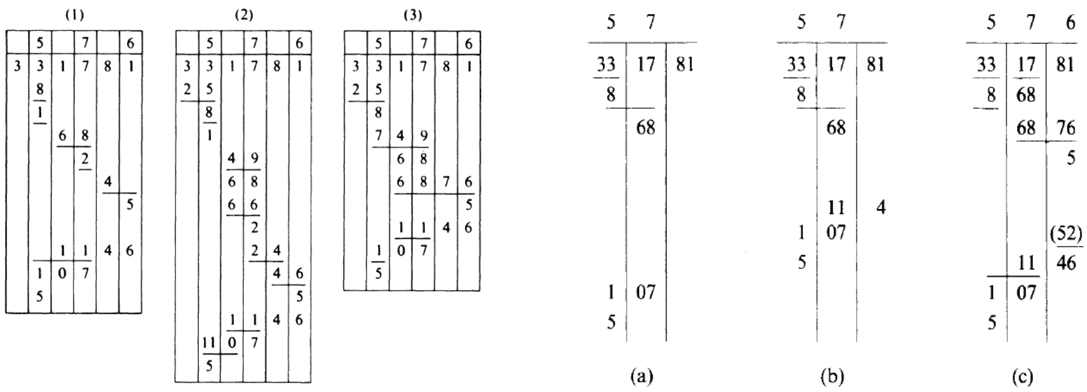


Figura 2.2: Al-Kashi "presenta tres arreglos para encontrar la raíz cuadrada de 331781. El último es el suyo, los otros dos primeros son de otros autores" (Al-Uqlidisi. 1978, p. 451).

Procedemos a explicar este ejemplo. Para ello, se modificó al agregar la primera columna de izquierda a derecha, la cual enumera el orden en que se hacían los diferentes procesos. Por ejemplo, el primer paso es: "se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda (a)". Y así sucesivamente. También agregó otra columna al final para explicar los procedimientos.

2	A	B	C	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento.
	5	**7**	**6**	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
1	33	17	81	Se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda (a).
4	25			Se coloca el cuadrado de $A^2 = 5^2$.
5	8	17		Se resta $33 - 25 = 8$ y se baja el 17. Esta fila será $\Delta 1 = 817$.
8	7	49		Se coloca el producto obtenido en la fila 7.
9		68	81	Se resta la fila 5 con la 8: $817 - 749 = 68$ y se baja el último bloque, $\Delta 2 = 6881$.
12		68	76	Se coloca el producto obtenido en la fila 11
13			5	Se resta la fila 9 y la 12 $\rightarrow 6881 - 6876 = 5 \quad \Delta 3 = 5$
14		11	52	(e) Se suma C a la fila 11 $\rightarrow$ $1146 + 6 = 1152$
11		11	46	(d) $(1140 + x)x \leq 6881 \rightarrow (1140 + \mathbf{6})\mathbf{6} = 6876 \leq 6881$. $C = \mathbf{6}$.
10		11	40	Se suma B a la fila 7 y se multiplica por 10 $\rightarrow$ $(107 + 7) \cdot 10 = 1140$
7	1	07		(c) $(100 + x)x \leq 817 \rightarrow (100 + \mathbf{7})\mathbf{7} = 749 \leq 846$. $B = \mathbf{7}$.
6	1	00		(b) Se escribe $2 \cdot A \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$
3	5			Se escoge el cinco porque $5^2 \leq 33$ y se coloca en la casilla de $A = \mathbf{5}$.

En resumen, $\sqrt{331781} = 576\frac{5}{1152} \approx 576{,}00434$.

Las letras entre paréntesis se refieren a las explicaciones siguientes:

a) Esto se hace por ser raíz cuadrada, es decir de índice 2, y es sabido como ya se mostró antes, que un cuadrado de un dígito, no excede a los dos dígitos.

b) Esta expresión puede provenir del binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donde se tiene que como A es del orden de las decenas, se puede entender como:

$$(10A+B)^2=(10A)^2+2(10A)B+B^2 \rightarrow (10A)^2+[\mathbf{2}(\mathbf{10A})+B]B$$

El resultado se coloca de derecha izquierda comenzando en la segunda columna.

c) Una vez se encuentra el mayor número que satisface esa ecuación, se toma como B en su correspondiente casilla, el cual se suma al número obtenido en la fila 6 para colocarlo en la fila 7 y simultáneamente el número obtenido en la expresión, se coloca en la fila 8.

d) Una vez se encuentra el mayor número que satisface esa ecuación, se toma como C en su correspondiente casilla, el cual se suma al número obtenido en la fila 10 para colocarlo en la fila 11 y simultáneamente el resultado de esta operación, se coloca en la fila 12.

e) Finalmente, el número será el formado por las cifras ABC es decir 576 y la parte decimal corresponde a una aproximación de la fracción formada por las filas 13 y 14.

Consideremos otro ejemplo de aplicación de las tablas de Al-Kashi: extraer la raíz cuadrada de 724.628. (Ver siguiente tabla)

2	**A**	**B**	**C**	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento.
	8	5	1	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
1	72	46	28	Se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda (a).
4	64			Se coloca el cuadrado de $A^2 = 8^2$.
5	8	46		Se resta $72 - 64 = 8$ y se baja el 46. Esta fila será $\Delta 1 = 846$.
8	8	25		Se coloca el producto obtenido en la fila 7.
9		21	28	Se resta la fila 5 con la 8: $846 - 825 = 21$ y último bloque $\Delta 2 = 2128$.
12		17	01	Se coloca el producto obtenido en la fila 11.
13		4	27	Se resta la fila 9 y la 12 → $2128 - 61701 = 427$ $\quad \Delta 3 = 427$.
14		17	02	(e) Se suma C a la fila 11 → $1701 + 1 = 1702$.
11		17	01	(d) $(1700 + x)x \leq 2128 \rightarrow (1700 + 1)1 \leq 2128 \rightarrow 1701 \leq 2128$.
10		17	00	Se suma B a la fila 7 y se multiplica por 10 → $(165 + 5) \cdot 10 = 1700$.
7	1	65		(c) $(160 + x)x \leq 846 \rightarrow (160 + 5)5 \leq 846 \rightarrow 825 \leq 846$.
6	1	60		Se coloca $2A \cdot 10 \rightarrow 2 \cdot 8 \cdot 10 = 160$ (b).
3	8			Se escoge el ocho porque $8^2 \leq 72$ y se coloca en la casilla de A = 8.

Es decir, $\sqrt{724.628} = 851\frac{427}{1702} \approx 851{,}25088$.

Las letras (a), (b), etc. tienen significado similar al descrito para la tabla anterior.

b) Raíces cúbicas

Una propiedad muy poderosa e interesante de los algoritmos árabes es que permiten concebir algoritmos similares para la extracción de raíces cúbicas, cuartas y así sucesivamente.

Por ejemplo, se puede generalizar el algoritmo anterior para hallar (en verdad, aproximar) la raíz cúbica de 74.789.437, es decir, $\sqrt[3]{74.789.437}$.

2	**A**	**B**	**C**	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento.
	4	2	1	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
1	74	789	437	Se escribe el número separado de **3** cifras de derecha a izquierda (a).
4	64			Se escribe el cubo $A^3 = 4^3 = 64$.
5	10	789		Se resta $74 - 64 = 10$ y se baja el 789. Esta fila será $\Delta 1 = 10.789$.
8	10	112		Se coloca el producto obtenido en la fila 7, para $B = 2$.
9		677	437	Se resta la fila 5 con la 8: $10.789 - 10.112 = 677$. $\Delta 2 = 677.437$.
12		530	461	Se coloca el producto obtenido en la fila 11.
13		146	976	Se resta la fila 9 y la 12: $677.437 - 530.461 = \Delta 3 = 146.976$. (f)
11		530	461	$529.200 \cdot C + 1260 \cdot C^2 + C^3 \leq 677.437$, o sea, $C = 1$ y $529.200C + 1260 \cdot C^2 + C^3 = 530461$. (e)
10		529	200	$3(4 \cdot 100 + 2 \cdot 10)^2 = 529.200, 3(4 \cdot 100 + 2 \cdot 10) = 1260$. (d)
7	5	056		Con $\boldsymbol{B = 2}$ se calcula $3A^2 \cdot 100 + 3A \cdot 10 \cdot B$ (c)
6	4	800		Se escribe $3A^2 \cdot 100 = 4800$, $3A \cdot 10 = 120$, (b)
3	4			Ya que $4^3 \leq 65$ y se coloca en la casilla de $\boldsymbol{A = 4}$.

Las explicaciones respectivas son:

a) Esto se hace por ser raíz cúbica, es decir de índice 3, y de manera similar que en cuadro anterior, esto tiene su fundamento en que el cubo de un número de un dígito, no excede las tres cifras.

b) Notamos el conocimiento de lo que los europeos llamaron luego triángulo de Pascal o binomio de Newton:

$$\Delta = (x+y)^3 - x^3 = 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (3x^2 + 3xy + y^2)y.$$

La idea es realizar, con $x = 10A$ y $y = B$,

$$(3A^2 \cdot 100 + 3A \cdot 10 \cdot B + B^2) \cdot B \leq \Delta 1.$$

Se comienza por $3(4^2) \cdot 100 = 4800$ y $3A \cdot 10 = 120$.

c) Se plantea $(4800 + 120 \cdot B + B^2) \cdot B \leq 10.789$

Se encuentra que el mayor número que satisface esa inecuación es $B = 2\ y$

$$3A^2 \cdot 100 + 3A \cdot 10 \cdot B = 5056.$$

d) El propósito final es que se cumpla la siguiente desigualdad

$$(3(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 \cdot C + 3(A \cdot 100 + B \cdot 10) \cdot C^2 + C^3) \leq \Delta 2.$$

$$3(4 \cdot 100 + 2 \cdot 10)^2 = 529.200, 3(4 \cdot 100 + 2 \cdot 10) = 1260.$$

e) De $529.200 \cdot C + 1260 \cdot C^2 + C^3 \leq 677.437,$

$C = 1\ y\ 529.200 \cdot C + 1260 \cdot C^2 + C^3 = 530361$

f) Finalmente, el número será el formado por las cifras ABC es decir 421 y la parte decimal corresponde a una aproximación de la fracción formada por los valores correspondientes a las filas 13 y 11, es decir,

$$\sqrt[3]{74.789.437} = 421\frac{146.976}{530461} \approx 421{,}2770.$$

Otro ejemplo de extracción de raíces cúbicas. Se trata de aproximar la raíz cúbica de 753.862.907.

2	**A**	**B**	**C**	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento.
	9	1	0	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
1	753	862	907	Se separa en grupos de 3 cifras de derecha a izquierda.
4	729			El cubo $A^3 = 9^3$.
5	24	862		La diferencia de las dos filas anteriores, bajando $\Delta 1 = 24862$.
8	24	571		El resultado de la fila 7.
9		291	907	Diferencia bajando el grupo siguiente, $\Delta 2 = 291907$.
10	2	484	300	$(3(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 + 3(A \cdot 100 + B \cdot 10) \cdot C + C^2) \cdot C \leq \Delta 2 \rightarrow \quad C = 0$
7	24	571		$(3(10A)^2 + 3(10A) \cdot B + B^2) \cdot B \ \leq 24862 \rightarrow \quad B = 1 \rightarrow 24571.$
6	23	400		$3(10A)^2 = 23400, 3(10A) = 270.$
3	9			Ya que $9^3 = 729$, $A \ = \ 9$.

En resumen, $\sqrt[3]{753.862.907} = 910\frac{291907}{2484300} \approx 910{,}11750.$

c) Raíces cuartas y quintas

En un paso más allá, este procedimiento se generaliza para raíces cuartas. Aunque las fuentes no muestran cómo se haría, presentamos un ejemplo de cómo se calcula la raíz cuarta de 683.234.642.291.

2	**A**	**B**	**C**	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento
	9	0	9	El número buscado
1	6832	3464	2291	Se escribe el número separado de 4 cifras de derecha a izquierda (a)
4	6561			Se coloca la cuarta potencia de A $A^4 = 9^4 = 6561$
5	271	3464	2291	$\Delta 1 = 2713464$
8		291	6000	Se coloca el producto obtenido en la fila 7
9	271	3172	6291	Se resta la fila 5 con la 8: $\Delta 2 = 27131726291$
12	266	4029	0960	Se coloca el producto obtenido en la fila 11
13	4	9143	5331	Se resta la fila 9 y la 12 $\rightarrow \Delta 3 = 146.976$
14				
11				
10	29	6003	2329	$(4(A \cdot 100 + B \cdot 10)^3 + 6(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 \cdot C + 4(A \cdot 100 + B \cdot 10)C^2 + C^3) \cdot C \leq \Delta 2$ (d)
7	291	6000		Al no haber algún número que satisfaga se asigna B=0 (c)
6	291	6000		Se coloca $(4(10A)^3 + 6(10A)^2 \cdot B + 4(10A) \cdot B^2 + B^3)B \leq \Delta 1$ (b)
3	9			Ya que $9^4 \leq 6832$ y se coloca en la casilla de A = 9

Las explicaciones respectivas son las siguientes:

a) Esto se hace por ser raíz cuarta, es decir de índice 4. Nuevamente, esto sustentado en que la cuarta potencia de un número de una cifra, no excede a los cuatro dígitos.

b) Se coloca de derecha a izquierda comenzando en la segunda columna.

c) $(4(10A)^3 + 6(10A)^2 \cdot B + 4(10A) \cdot B^2 + B^3)B \leq \Delta 1$, o sea,

$(4(10 * 9)^3 + 6(10 * 9)^2 \cdot B + 4(10 * 9) \cdot B^2 + B^3)B$

$$= (2.916.000 + 48.600 \cdot B + 360B^2 + B^3) \cdot B \leq 2.713.464$$

Como no hay un valor que la satisfaga, se toma como $B = 0$ en su correspondiente casilla, repitiendo el número de la fila 6 en la fila 7 y simultáneamente el resultado obtenido se coloca en la fila 8, luego de haber bajado el otro bloque.

d) $[4(A \cdot 100 + B \cdot 10)^3 \cdot C + 6(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 \cdot C^2 + 4(A \cdot 100 + B \cdot 10)C^3 + C^4] \leq \Delta 2,$

$$[4(9 \cdot 100 + 0 \cdot 10)^3 \cdot C + 6(9 \cdot 100 + 0 \cdot 10)^2 \cdot C^2 + 4(9 \cdot 100 + 0 \cdot 10)C^3 + C^4] \leq 27.131.726.291$$

$$(2.916.000.000 \cdot C + 6(900)^2 \cdot C^2 + 4(900)C^3 + C^4) \leq 27.131.726.291,$$

$$(4(900)^3 \cdot C + 4.860.000 \cdot C^2 + 3600C^3 + C^4) \leq 27.131.726.291.$$

Una vez se encuentra el mayor número que satisface esa inecuación que es 9, se toma como C en su correspondiente casilla, el cual se suma al número obtenido en la fila 10 para colocarlo en la fila 11 y simultáneamente el resultado obtenido se coloca en la fila 12.

Finalmente, el número será el formado por las cifras ABC es decir 909 y la parte decimal corresponde a una aproximación de la fracción formada por las filas 13 y 10, es decir,

$$\sqrt[4]{683.234.642.291} = 909\frac{491435331}{2960032329} \approx 909{,}1660.$$

Para la extracción de la raíz quinta de 44.240.899.506.197, seguimos a *Al-Kashi* según el texto de Bergren (1986). Se usa una tabla diferente a la anterior, que sin embargo, guarda los mismos principios y algoritmos (Bergen, 1986, p.54):

Row of the result			
Row of the number	4 4 2 4	0 8 9 9 5	0 6 1 9 7
Row of the square–square Row of the second of the number			
Row of the cube Row of the third of the number			
Row of the square Row of the fourth of the number			
Row of the root Row of the fifth of the number			

El procedimiento se resume en la tabla siguiente:

2	**A**	**B**	**C**	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento
	5	3	6	el número buscado
1	4424	08995	06197	Se escribe el número separado de 5 cifras de derecha a izquierda (a)
4	3125			Se coloca el cubo de A $A^5 = 5^5 = 3125$
5	1299	08995		$\Delta 1 = 129908995$
8	1056	95493		Se coloca el producto obtenido en la fila 6
9	242	13502	06197	Se resta la fila 5 con la 8: $\Delta 2 = 27131726291$
12	242	13502	06176	Se coloca el producto obtenido en la fila 11
13			21	Se resta la fila 9 y la 12 → $\Delta 3 = 21$
14				
11				
10				
7	40	35583	67696	$(5(A \cdot 100 + B \cdot 10)^4 + 10(A \cdot 100 + B \cdot 10)^3 \cdot C + 10(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 \cdot C^2 + 5(A \cdot 100 + B \cdot 10) \cdot C^3 + C^4) \cdot C \leq \Delta 2$ (c)
6	352	31831		Se coloca $(5(10A)^4 + 10(10A)^3 \cdot B + 10(10A)^2 \cdot B^2 + 5(10A) \cdot B^3 + B^4)$ (b) luego se multiplica por B
3	5			Ya que $5^5 \leq 4424$ y se coloca en la casilla de A = 5

Explicaciones:

a) Esto se hace por ser raíz quinta, es decir de índice 5. Sonará ya repetido, pero se tiene en cuenta que la quinta potencia de un número dígito, no excede las cinco cifras.

b) Una vez más se verifica el uso de los coeficientes tomados del conocido triángulo de Pascal, aunque “podría con más justicia llamarse triángulo de al-Karají, porque fue Al-Karají quien alrededor del año 1.000 D.N.E. llamó la atención de los matemáticos en el mundo islámico a las notables propiedades de la matriz triangular de números" (Bergen, 1986, p. 58)

Aunque la técnica de Al-Karají , como la muestra Bergren, difiere en detalles del que hoy conocemos como Triángulo de Pascal, pues el disponía los números de la siguiente manera:

1					
1	6				
1	5	15			
1	4	10	20		
1	3	6	10	15	
1	2	3	4	5	6

La regla de formación se parece mucho, pues se parte de una columna de "potencias de 1" y luego se va sumando, cada par de términos como se sigue:

1					
1	6				
1	5	15			
1	4	10	20		
1	3	6	10	15	
1	2	3	4	5	6

Ahora bien, de esta forma se pudieron haber obtenido los coeficientes que se requieren para los pasos subsecuentes, resaltados en la expresión

$$(5(10A)^4 + 10(10A)^3 \cdot B + 10(10A)^2 \cdot B^2 + 5(10A) \cdot B^3 + B^4) \leq \Delta 1$$

Una vez se encuentra el mayor número que satisface desigualdad, se toma como B en su correspondiente casilla, y se coloca en la fila 6 para luego multiplicar nuevamente por B (que es 3) y colocar el producto en la fila 8.

c) Nuevamente se utilizan los coeficientes para determinar la tercera cifra, pero en esta ocasión se tiene en cuenta que se trata de las cifras de la centenas, decenas y unidades respectivamente:

$$(5(A \cdot 100 + B \cdot 10)^4 + 10(A \cdot 100 + B \cdot 10)^3 \cdot C + 10(A \cdot 100 + B \cdot 10)^2 \cdot C^2 + 5(A \cdot 100 + B \cdot 10) \cdot C^3 + C^4) \cdot C \leq \Delta 2$$

Al encontrar que el mayor número que satisface esa expresión es 6, se toma como C en su correspondiente casilla, y el resultado se coloca en la fila 7 para luego multiplicar nuevamente por C (6) y colocar el producto en la fila 12 cuyo valor se restará de la fila 9 para obtener el $\Delta 3$, es decir, la última diferencia, que pasará a ser el numerador de la fracción que aproxima los decimales de la raíz que se buscaba.

$$\sqrt[5]{44240899506197} = 536\frac{21}{403558367969} \approx 536{,}00000000002037$$

Luego de haber hecho un recorrido detallado por los episodios que identificaron el desarrollo de las operaciones básicas y de la evolución de los sistemas numéricos, se da una idea de la manera en que se superaron algunos de los obstáculos que surgieron en el descubrimiento de nuevos métodos y formas de llevar a cabo las ideas matemáticas, como lo fue la transición del sistema de numeración greco-romano al sistema decimal indu-árabe y donde se le daba prelación a los cálculos numéricos desde la aritmética y el álgebra, más que desde lo geométrico como era de costumbre en los griegos. De esta manera, se pudo observar la forma como se trabajaba con los números irracionales en el islam medieval abriendo un mundo de posibilidades para el desarrollo de nuevos aportes de los matemáticos en los albores de la modernidad, que se trabajarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

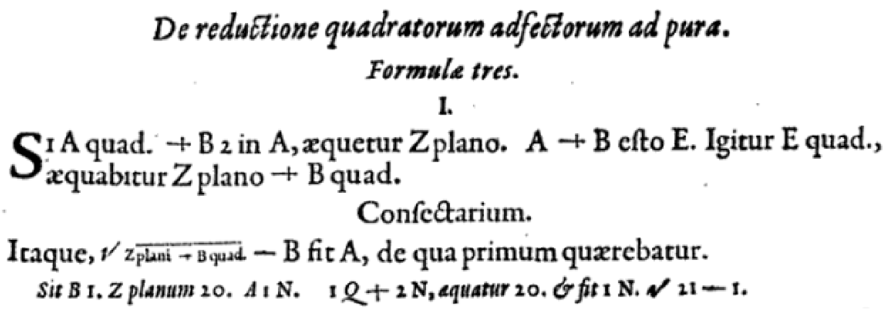
Análisis del infinito e irracionales en el albor de la Modernidad europea

La época del renacimiento trajo grandes desarrollos a las matemáticas en lo aritmético y algebraico, gracias a lo aprendido de los árabes e hindúes y de los manuscritos griegos. Una muestra de ello se manifiesta en nuevos métodos de estudio para los números irracionales, pues aún existía la pregunta si eran o no números. También, los procedimientos aritméticos y algebraicos para trabajar con ellos no exigían una demostración formal, al estilo de los Elementos de Euclides (levantados sobre un fuerte fundamento lógico). La intuición e ingenio de grandes matemáticos, permitió que la Aritmética y el Álgebra avanzaran y llegaran a tener la importancia que tienen hoy en día.

Los matemáticos del Renacimiento que se mencionan en este capítulo tenían grandes influencias, tanto de las matemáticas griegas como de las musulmanas. En particular, el francés François Viète (1540 - 1603) estaba influido por el italiano Girolamo Cardano (1501 - 1576) y el árabe Al-juarismi, los cuales hicieron grandes aportes al algebra, al resolver muchos tipos de ecuaciones.

RUDIMENTOS DE ÁLGEBRA RENACENTISTA

Viète (o Vieta) es el primer matemático en trabajar las ecuaciones cuadráticas de forma general proveyendo una expresión para su solución. Allí emerge la teoría que hoy en día conocemos al respecto. En su libro *Opera matemática 1646,* capítulo I (*Emendatione aeqvationvm*), se puede ver lo siguiente:



De reductione quadratorum adfectorum ad pura.

Formulæ tres.

I.

SI A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano. A + B esto E. Igitur E quad., æquabitur Z plano + B quad.

Consectarium.

Itaque, $\sqrt{\text{Z plani} + \text{B quad.}}$ — B fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1 Q + 2 N, æquatur 20. & fit 1 N. $\sqrt{21}$ — 1.

Figura 3.1: Opera matemática de Vieta, (1646, pag.129).

Si A cuadrado $+B2$ en (por) A es igual $Z\,plano$. Sea $A+B$ (igual a) E. Por lo tanto, E cuadrado será igual a $Z\,plano+B$ cuadrado. En consecuencia, $\sqrt{Zplano+B2}-B$ ha de ser A, que era lo que se buscaba.

En términos de hoy esto se puede interpretar como sigue.

1. $A^2+2BA=Z \quad ecuación\ \ principal, A\ es\ la\ incógnita$
2. $A^2+2AB+B^2=Z+B^2$

   $propiedad\ uniforme\ para\ completar\ el\ trinomio\ cuadrado$
3. $(A+B)^2=Z+B^2\ \ cuadrado\ de\ un\ binomio$
4. $A+B=\sqrt{Z+B^2}\ \ sacando\ raíz\ cuadrada\ a\ ambos\ lados\ de\ la\ igualdad$
5. $A=\sqrt{Z+B^2}-B\ \ propiedad\ uniforme$

En su lenguaje, Vieta utiliza las vocales para representar las variables (incógnitas) y las consonantes representan los números (conocidos). Hoy, en cambio, se utilizan las últimas letras del alfabeto (x, y, z) para representar las variables y las primeras $(a, b, c, \ldots)$ para los valores de números constantes.

Se presentan a continuación unos ejemplos de aplicación de este resultado de Vieta, donde se verifican las posibles soluciones de ecuaciones cuadráticas a la luz del lenguaje moderno. Con soluciones racionales,

$$x^2 + 6x = 7 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2(3)x = 7$$

$$x = \sqrt{7 + (3)^2} - 3 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{16} - 3 \rightarrow x = \pm 4 - 3$$

$$x_1 = 4 - 3 = 1 \;\; ; \quad x_2 = -4 - 3 = -7.$$

Se obtienen soluciones enteras puesto que las raíces son exactas. Sin embargo, para la época de Vieta, las soluciones negativas no eran consideradas. Con soluciones irracionales,

$$x^2 + 2x = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2(1)x = 2$$

$$x = \sqrt{2 + (1)^2} - 1 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{3} - 1$$

$$x_1 = \sqrt{3} - 1 \;\; ; \quad x_2 = -\sqrt{3} - 1.$$

Se puede ver que la solución contiene un número irracional abordado en el capítulo anterior, por lo tanto esta fórmula para resolver ecuaciones podía conducir a soluciones irracionales. También se pueden obtener soluciones que hoy se encontrarían en el campo de los números complejos, pero para la época de Cardano o de Vieta, eran llamadas soluciones "ambiguas".

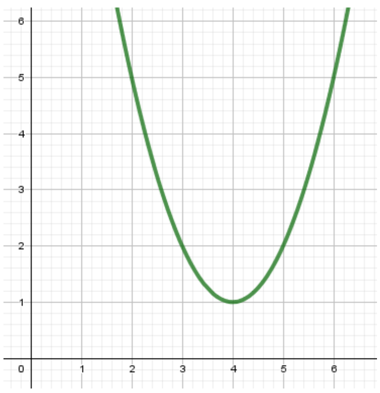
Hoy es muy conocida la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que se obtiene de manera similar (completando el trinomio cuadrado perfecto) partiendo de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$.

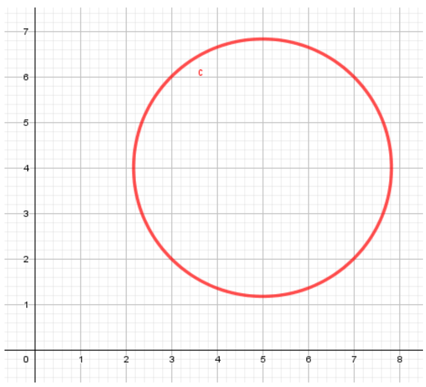
Así pues, se comienza a hablar en lenguaje algebraico de las ideas que en el pasado solo se veían desde lo geométrico o aritmético (como lo trabajaba Al-juarismi en su época).

Este asunto se generaliza en la Geometría Analítica, introducida por René Descartes (1596 - 1650) en el siglo XVII. Inspirado por un famoso problema planteado por Pappus en la antigüedad, logra llegar a una expresión muy importante que representa las secciones cónicas en un lenguaje que unifica el álgebra y la geometría:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Con esto se prefigura la representación gráfica de relaciones, por ejemplo: $y = x^2 - 8x + 17$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$





Para Kline (1985), “la idea básica es, desde luego, que las curvas pueden ser representadas mediante ecuaciones” (p. 147). Para Descartes, el concepto de función se entendía como una ecuación o relación entre variables. Está noción sería luego desplazada por la definición de función del suizo Leonard Euler (1707-1783) en su obra *Introducción al análisis de los infinitos*: “Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes” (Euler, 1748, p. 15). De esta manera, la fórmula general de las funciones enteras (hoy polinomios) dada por Euler (1748, p. 19). es:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&\mathrm{c}$$

Donde el símbolo &c (etcétera) significa que la función tiene más términos, aunque Euler no aclara si es un polinomio (finito) o si es una serie infinita de potencias. En *Analisys by Its History*, de Hairer y Wanner (2008) prefieren usar la definición moderna:

> Una función polinomial es una expresión de la forma
>
> $$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$
>
> Donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes arbitrarias. Si $a_n \neq 0$ la función es polinomial de grado n (p.10)

Surge naturalmente el problema de determinar una (la) función polinomial para ciertos puntos conocidos. Para ello se emplea un método llamado “polinomio de interpolación” y con él se abre el camino hacia el teorema del binomio atribuido al matemático y físico inglés Sir Isaac Newton (1647-1727).

Abscissæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\kappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\kappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi.$
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi.$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma.$

Figura 3.2: Una interpolación de Newton (1676, *Methodus differentialis*) , (tomada de Hairer y Wanner, 2008, p. 11).

Ésta es una de las ideas centrales del cálculo diferencial, pues se comienza con unas restas de polinomios (diferenciales) que permitieron generalizar el teorema del binomio a exponentes no enteros. Estas diferencias se observan en esta tabla anterior, Figura 3.2.

A esta tabla se le puede dar una interpretación para comprender mejor la necesidad de efectuar diferencias que permitan simplificar un sistema de ecuaciones de manera que se puedan despejar los coeficientes que se requieren para la construcción del polinomio de interpolación. Por ejemplo, si se pretende encontrar los coeficientes de la función

$$A+bx+cx^2+dx^3+ex^4=y,$$

Se toman los puntos dados como

Abscisa	Ordenada
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$

Estas cinco ecuaciones, obtenidas de evaluar la abscisa en los valores p,q,r,s,t, en relación al punto A, deben resolverse para los coeficientes A,b,c,d,e. Se procede por diferencias:

Diferencias	Cocientes producidos por las diferencias
$p-q$	$b(p-q)+c(p^2-q^2)+d(p^3-q^3)+e(p^4-q^4)=\alpha-\beta$
$q-r$	$b(q-r)+c(q^2-r^2)+d(q^3-r^3)+e(q^4-r^4)=\beta-\gamma$
$r-s$	$b(r-s)+c(r^2-s^2)+d(r^3-s^3)+e(r^4-s^4)=\gamma-\delta$
$s-t$	$b(s-t)+c(s^2-t^2)+d(s^3-t^3)+e(s^4-t^4)=\delta-\varepsilon$

En esta tabla se observa el resultado de restar la segunda ecuación con la primera, la tercera con la segunda y así sucesivamente para obtener solo cuatro ecuaciones (la variable "A" se eliminó).

Ahora, para simplificar las expresiones (pensando en eliminar b), se divide entre $p-q$:

Cociente	Cocientes producidos por las diferencias
$\dfrac{\alpha-\beta}{p-q}$	$b+c(p+q)+d(p^2+pq+q^2)+e(p^3+p^2q+pq^2+q^3)=\vartheta$

$\frac{\beta-\gamma}{q-r}$	$b+c(q+r)+d(q^2+qr+r^2)+e(q^3+q^2r+qr^2+r^3)=\theta$
$\frac{\gamma-\delta}{r-s}$	$b+c(r+s)+d(r^2+rs+s^2)+e(r^3+r^2s+rs^2+s^3)=\varphi$
$\frac{\delta-\varepsilon}{s-t}$	$b+c(s+t)+d(s^2+st+t^2)+e(s^3+s^2t+st^2+t^3)=\pi$

Y se itera el proceso anterior:

diferencia	Cocientes producidos por las diferencias
$\vartheta-\theta$	$c(p+q-q-r)+d(p^2+pq+q^2-q^2-qr-r^2)$ $+e(p^3+p^2q+pq^2+q^3-q^3-q^2r-qr^2-r^3)=\vartheta-\theta$
$\theta-\varphi$	$c(q+r-r-s)+d(q^2+qr+r^2-r^2-rs-s^2)$ $+e(q^3+q^2r+qr^2+r^3-r^3-r^2s-rs^2-s^3)=\theta-\varphi$
$\varphi-\pi$	$c(r+s-s-t)+d(r^2+rs+s^2-s^2-st-t^2)$ $+e(r^3+r^2s+rs^2+s^3-s^3-s^2t-st^2-t^3)=\varphi-\pi$

Nuevamente se realizan restas sucesivas para dejar tres ecuaciones con tres incógnitas, pues la variable b se eliminó del sistema.

diferencia	Cocientes producidos por las diferencias
$\vartheta-\theta$	$c(p-r)+d(p^2+pq-qr-r^2)+e(p^3+p^2q+pq^2-q^2r-qr^2-r^3)=\vartheta-\theta$
$\theta-\varphi$	$c(q-s)+d(q^2+qr-rs-s^2)+e(q^3+q^2r+qr^2-r^2s-rs^2-s^3)=\theta-\varphi$
$\varphi-\pi$	$c(r-t)+d(r^2+rs-st-t^2)+e(r^3+r^2s+rs^2-s^2t-st^2-t^3)=\varphi-\pi$

Al simplificar sumando términos semejantes,

cociente	Cocientes producidos por las diferencias
$\frac{\vartheta-\theta}{p-r}$	$c+d(p+q+r)+e(p^2+pq+q^2+pr+qr+r^2)=\mu$
$\frac{\theta-\varphi}{q-s}$	$c+d(q+r+s)+e(q^2+qr+r^2+qs+rs+s^2)=\tau$

$\frac{\varphi-\pi}{r-t}$	$c+d(r+s+t)+e(r^2+rs+s^2+rt+st+t^2)=\omega$

Es fácil constatar que el cociente

$$\frac{p^2+pq-qr-r^2}{p-r}=p+r+q.$$

De manera similar,

$$\frac{p^3+p^2q+pq^2-q^2r-qr^2-r^3}{p-r}=p^2+pq+q^2+pr+qr+r^2.$$

Siguiendo con este método de diferencias y cocientes, se obtiene el valor para la última variable, o sea e. Ella se sustituye en la anterior para obtener todos los valores de los coeficientes (d, c, b, A), los cuales determinan la función polinomial que se busca.

Veamos un ejemplo de aplicación del método. Hallar el polinomio de tercer grado por los puntos $(0,-2); (1,4); (2,16); (3,40)$.

Queremos obtener una función de la forma: $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3$. Se debe tener, para las abscisas y ordenadas los siguientes valores:

$x_0=0$	$y_0=A$
$x_1=1$	$y_1=A+B+C+D$
$x_2=2$	$y_2=A+2B+4C+8D$
$x_3=3$	$y_3=A+3B+9C+27D$

Los diferencias son, pues,

$$\Delta y_0=y_1-y_2=(A+B+C+D)-A=B+C+D$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = (A + 2B + 4C + 8D) - (A + B + C + D) = B + 3C + 7D$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = (A + 3B + 9C + 27D) - (A + 2B + 4C + 8D) = B + 5C + 19D$$

Las segundas diferencias producen

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (B + 3C + 7D) - (B + C + D) = 2C + 6D$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (B + 5C + 19D) - (B + 3C + 7D) = 2C + 12D$$

La tercera diferencia es, finalmente,

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (2C + 12D) - (2C + 6D) = 6D \to D = \frac{\Delta^3 y_0}{6}.$$

De esta manera se obtiene un valor para$D$. Regresándonos a las segundas diferencias,

$$\Delta^2 y_0 = 2C + 6\frac{\Delta^3 y_0}{6} \to \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 = 2C \to C = \frac{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0}{2}.$$

Se obtiene el valor de C y luego, en las primeras diferencias,

$$\Delta y_0 = B + C + D \to \Delta y_0 = B + \frac{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \to$$

$$B = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}.$$

Finalmente reemplazamos A, B, C, D en la ecuación original

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

$$y = y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right)x + \left(\frac{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0}{2}\right)x^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3$$

$$y = y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right)x + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)x^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3$$

$$y = y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right)x + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)x^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3$$

$$y = y_0 + \Delta y_0 x - \frac{\Delta^2 y_0}{2}x + \frac{\Delta^3 y_0}{3}x + \frac{\Delta^2 y_0}{2}x^2 - \frac{\Delta^3 y_0}{2}x^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3$$

$$y = y_0 + \Delta y_0 x + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2}x^2 - \frac{\Delta^2 y_0}{2}x\right) + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{6}x^3 - \frac{\Delta^3 y_0}{2}x^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{3}x\right)$$

$$y = y_0 + \Delta y_0 x + \frac{\Delta^2 y_0}{2}x(x-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}x(x^2 - 3x + 2)$$

O sea,

$$y = y_0 + x \cdot \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot \Delta^3 y_0.$$

A la manera de Newton, el proceso se realiza con una tabla de diferencias:

y_0					-2			
	Δy_0					6		
y_1		$\Delta^2 y_0$			4		6	
	Δy_1		$\Delta^3 y_0$			12		6
y_2		$\Delta^2 y_1$			16		12	
	Δy_2					24		
y_3					40			

De esta forma,

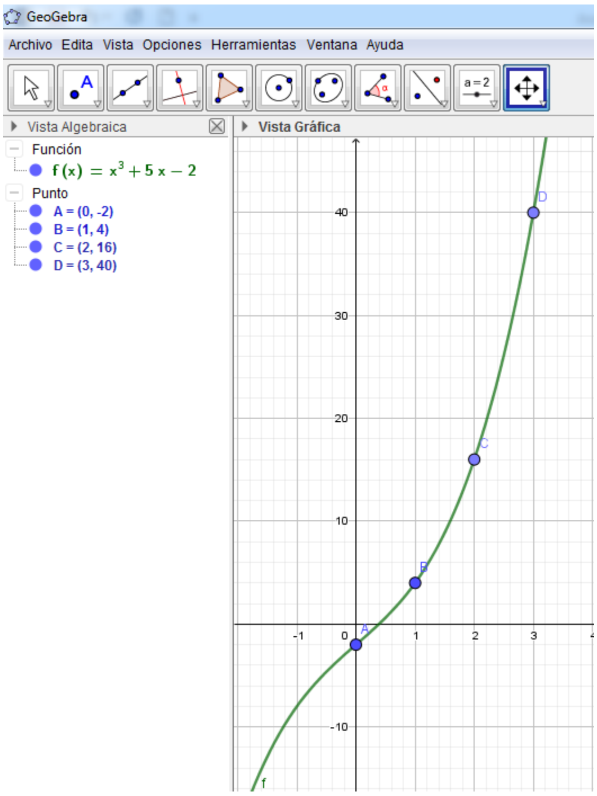
$$y = y_0 + x \cdot \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot \Delta^3 y_0$$

$$y = -2 + 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

$$y = -2 + 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$\boxed{y = x^3 + 5x - 2}$$

La gráfica de GeoGebra para este polinomio muestra que la respuesta es correcta:



Por inducción, para n puntos, se obtiene la siguiente expresión general para el polinomio en términos de las diferencias:

$$y = y_0 + \frac{x}{1} \cdot \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \Delta^n y_0.$$

Este descubrimiento pudo ser la base para la formulación del Teorema del Binomio, aunque "incluso Newton descubrió que su argumento de interpolación era peligroso" (Hairer y Wanner. 2008, p. 24). Casi dos siglos después, en 1826, este famoso teorema sería demostrado rigurosamente por el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802 -1829). La fórmula del binomio, para a racional, es

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

Esta es una de las primeras ocasiones aparece la idea de una suma o serie infinita. Este teorema será de gran utilidad para verificar la expresión de algunas funciones en tales series infinitas. En efecto, como menciona Euler en su *Introducción al análisis de los infinitos*, (1748) "se suelen buscar expresiones que se prolongan hasta infinito para exponer el valor de cualquier función quebrada o irracional" (p. 59). El resultado se puede entender y utilizar como un método heurístico para hacer un acercamiento numérico a algunos irracionales en la forma $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$ Esta es una forma "más apta para representar en la mente funciones de toda índole, aun cuando el número de términos sea infinito" (Euler, 1748, p. 60). Con esta herramienta se pueden estudiar los números irracionales de los capítulos anteriores, así como otros nuevos números desconocidos antes del Renacimiento. Tal como hoy en día, usaremos el poderoso lenguaje de las funciones.

LOGARITMOS

El matemático escocés John Napier nació en 1550 y murió en 1617, conocido por la invención de los logaritmos en 1614 publicados en el tratado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* En dicho tratado, se da una explicación al lector de cómo se usan las tablas logarítmicas y se muestran algunas aplicaciones en geometría plana y trigonometría esférica, además de que se describe que el propósito es acelerar y simplificar los cálculos extensos, tediosos y engorrosos de multiplicaciones, divisiones, raíces cuadradas y cúbicas. Al respecto Napier escribe: "Después de pensarlo mucho, finalmente, he encontrado una forma asombrosa de acortar los procedimientos" (Havil, 2014, p. 65) aunque no describe cómo llegó a dichas tablas. Más adelante según Maor (1994), Napier en 1624 en su libro *Arithmetica logarithmica* propone las tablas de logaritmos con una precisión de catorce lugares decimales.

Es importante anotar, que en la época en que Napier publica dichas tablas logarítmicas, se desarrollaban trabajos de astronomía que exigían complejos cálculos que involucraban los valores de las razones trigonométricas, que aunque se trabajaban desde muchos años antes, solo se tenían unas tablas con los valores de aproximaciones decimales de dichas razones. Así, es muy factible que las tablas que expone Napier para los logaritmos (llamados neperianos o naturales en la actualidad) surjan, como lo propone Havil (2014) en su libro dedicado a su vida y obra, de proporciones entre las magnitudes de los segmentos que se describen en la figura, correspondientes a las razones trigonométricas y la semejanza de dichos triángulos:

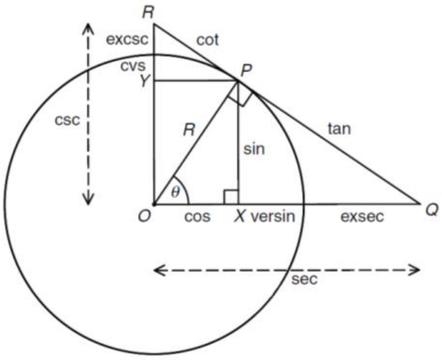


Figura 3.3: Valores trigonométricos, (tomada de Havil, J. 2014, p.69).

Se puede constatar de forma dinámica, usando el GeoGebra, que las tablas de las funciones trigonométricas (seno, coseno y cotangente) usadas entonces con buenas aproximaciones de decimales, se obtienen de estas relaciones en la circunferencia unitaria, figura 3.4.

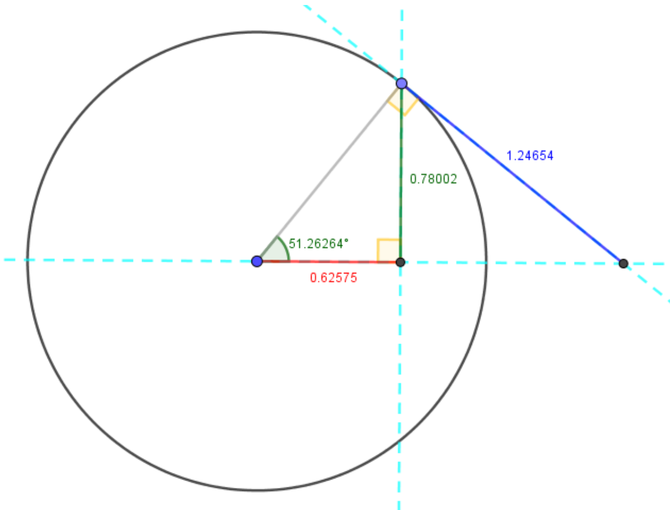


Figura 3.4: Valores trigonométricos, construcción dinámica en GeoGebra.

De esta manera, Napier utiliza sus logaritmos para convertir multiplicaciones y divisiones en sumas y restas, sintetizando así grandes cálculos y eliminando complejas operaciones.

Una manera práctica de evidenciar estas conversiones en las operaciones (de multiplicaciones a sumas) se puede ver en la siguiente tabla:

$\dots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\dots$
$\dots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	$\dots$

Figura 3.5: Tabla de logaritmos, (tomada de Hairer y Wanner, 2008, p. 29).

Donde se representa una función que asigna a cada lugar de la tabla el doble del valor de la casilla anterior (fila inferior). De esta manera se puede constatar que si se quiere multiplicar 8 x 32, basta con sumar sus números correspondientes (logaritmos) 3 + 5 = 8 y verificar en la tabla la imagen correspondiente al 8, concluyendo así que 8 x 32 = 256.

De esta manera se presenta una definición para las funciones logarítmicas (Hairer y Wanner. 2008)

$$Una\ función\ l(x)\ definida\ para\ valores\ positivos\ de\ x,$$

$$es\ llamada\ función\ logarítmica, si\ para\ todo\ x, y > 0$$

$$l(x \cdot y) = l(x) + l(y)\ (p. 29)$$

Y con un cambio de variable se puede validar que se cumple también:

$$l\left(\frac{z}{x}\right) = l(z) - l(x).$$

Se puede constatar lo anterior a la luz del lenguaje moderno, pero interpretando una de las tablas (Havil, 2014, p. 74) con las que se aplicaban los conceptos expuestos por Napier, quien como ya se mencionó, no explica cómo construye dichas tablas

En la figura siguiente se observa una tabla con 7 columnas, la primera indica los minutos (0-30) correspondiente al grado 26, los otros minutos (31-60) se encontraban en otra página. En la segunda columna se encuentran los senos correspondientes a cada ángulo, en la tercera los logaritmos de dichos senos y en la cuarta se encuentra un valor correspondiente a la diferencia entre la tercera y la quinta, que a su vez es el logaritmo del seno del ángulo complementario, la sexta columna tiene los senos de estos ángulos y finalmente en la última columna aparecen los minutos de dicho ángulo. Es importante anotar que estos números se encuentran multiplicados por 10^7 para facilitar las operaciones. Veamos:

Table 3.3. Left page of 26°.

Min	Sine	Logarithm	+/−	Logarithm	Sine	Min
0	4383711	8246894	7179880	1067014	8987940	60
1	4386326	8240932	7172499	1068433	8986665	59
2	4388940	8234974	7165121	1069853	8985389	58
3	4391553	8229021	7157746	1071275	8984112	57
4	4394166	8223072	7150375	1072697	8982834	56
5	4396779	8217128	7143007	1074121	8981555	55
6	4399392	8211188	7135643	1075545	8980276	54
7	4402004	8205253	7128282	1076971	8978996	53
8	4404615	8199321	7120924	1078397	8977715	52
9	4407227	8193394	7113569	1079825	8976433	51
10	4409838	8187472	7106218	1081254	8975151	50
11	4412448	8181554	7098871	1082683	8973868	49
12	4415059	8175640	7091526	1084114	8972584	48
13	4417668	8169731	7084185	1085546	8971299	47

Figura 3.6: Tabla de logaritmos página izquierda 26°, (tomada de Havil, J. 2014, p.70).

Verifiquemos para el ángulo $26°12'$:

$$sin(26°12') = 4415059$$

$$NapLog[sin(26°12')] = 8175640$$

$$sin(90° - 26°12') = sin(63°48') = 8972584$$

$$NapLog[sin(63°48')] = 1084114$$

Pero tenemos que si se requiere por ejemplo la división entre estos valores, $\frac{sin(26°12')}{sin(63°48')}$ es decir $\frac{4415059}{8972584}$ que para la época era una operación muy compleja, se realizaba la resta de los logaritmos correspondientes, es decir:

$$8175640 - 1084114 = 7091526$$

Luego se buscaba en la tabla para ver a qué número le corresponde el logaritmo 7091526 lo cual se verifica para el $sin(29°28') = 4920610$ cuyo logaritmo corresponde a 7091526 y es el resultado de la división propuesta.

De esta manera, se cambia el proceso de efectuar una división extensa y engorrosa por una simple resta, ubicando los resultados en la tabla de los senos correspondiente.

Otra manera tal vez más gráfica de comprender la propiedad de los logaritmos, se puede evidenciar en la determinación del área bajo la curva de la hipérbola, similar a como se describe en *Analysis by its History* (Hairer y Wanner. 2008, p. 35). Veamos:

Se tiene que la gráfica de la función $y = \frac{1}{x+1}$ es:

En esta se puede representar el área bajo la curva en [1,2](a) y en [3,6](b) y constatar que son iguales.

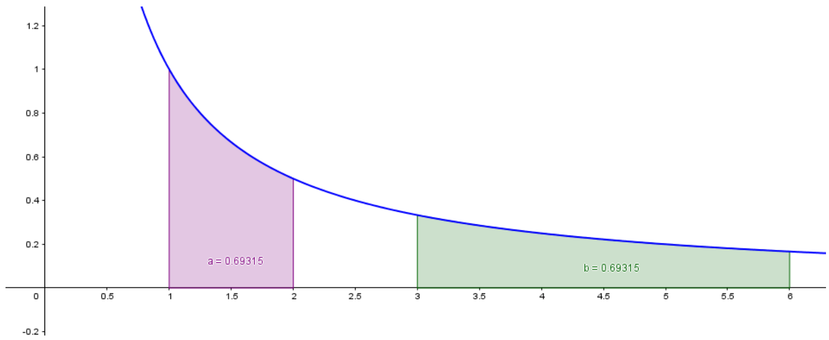


Figura 3.7: Área bajo la curva de la hipérbola, construcción dinámica en GeoGebra.

Luego, se usa el hecho de que el área en todo el intervalo [1,6] (d) se compone de la suma de las áreas entre [1,3](c) y [3,6] es decir que $d = c + b$

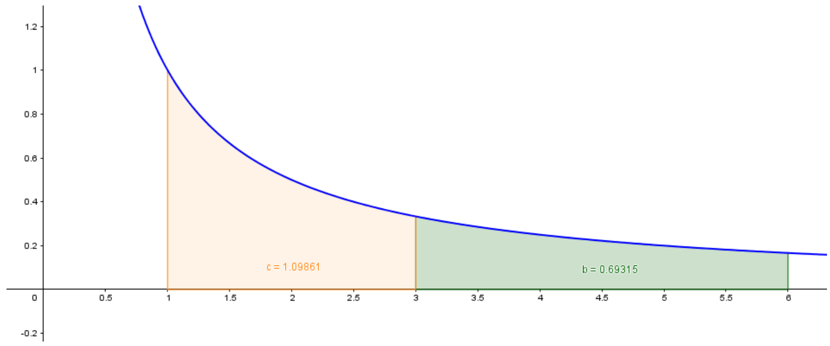


Figura 3.8: Área bajo la curva de la hipérbola, construcción dinámica en GeoGebra.

Pero vimos antes que $a = b$, luego se puede afirmar que $d = c + a$ realizando la sustitución indicada. Así que si se tiene que $lnx = área[1, x]$ entonces: $área[1,2] + área[1,3] = área[1,6] \quad \rightarrow ln2 + ln3 = ln6$

y es evidente que 2 x 3 = 6, luego se constata que se cumple la definición del logaritmo natural:

$$lna + lnc = ln(a \cdot c)$$

De esta manera se tiene que el área bajo la gráfica de una función racional como $y = \frac{1}{x+1}$ corresponde a una función logarítmica por lo que se puede entonces, usando la expansión del binomio de Newton y el Teorema de Fermat para hallar el área obtener:

$$y = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

Para $a = -1$

$$y = (x+1)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1} \cdot x + \frac{(-1)\big((-1)-1\big)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(-1)\big((-1)-1\big)\big((-1)-2\big)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

$$y = 1 - 1 \cdot x + \frac{2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Luego, con el Teorema de Fermat que indica que el área bajo la curva $y = x^a$ entre 0 y B está dada por $S = \frac{B^{a+1}}{a+1} \;\; si \;\; a > -1$

Se puede aplicar término a término en la serie:

$$y = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Y ya que como se mencionó antes, el área bajo esta curva corresponde a una función logarítmica, se tiene:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots$$

De esta manera se puede obtener, al reemplazar x por 1, una expresión para $ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots$ de donde se obtienen las aproximaciones sucesivas

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}83333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{,}583333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0{,}783333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0{,}616666$$

Que se acercará cada vez más al logaritmo natural de dos, que es aproximadamente $ln(2) = 0{,}69314718\ldots$ teniendo presente que no es una convergencia muy rápida, es decir, tarda bastante en acercarse al número conocido. Hay otras maneras de encontrar series infinitas que determinen logaritmo natural de dos, de una manera más rápida.

Por ejemplo: al cambiar (x) por $(-x)$ se obtiene:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Que de acuerdo con la definición del logaritmo se puede reescribir de la siguiente manera:

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = ln(x+1) - ln(1-x)$$

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots\right)$$

Que sería otra manera de crear una serie para $ln2$, haciendo $x = \frac{1}{3}$

$$ln\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = ln\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = ln2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} \dots\right)$$

$$ln2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} \dots$$

Veamos cómo es la convergencia:

$$ln2 \approx \frac{2}{3} \approx 0.6666666$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} \approx 0.691358$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} \approx 0.693004$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} \approx 0.69313$$

Es evidente que esta serie converge más rápidamente al valor esperado para logaritmo natural de dos. De esta manera se puede también verificar una serie infinita para $ln3$:

Se busca primero escribir el 3 en términos de un número al cual ya se conozca la serie para describirlo, por ejemplo el 2,

$3 = \frac{3}{2} \cdot 2$ y luego se busca un x tal que $\frac{(x+1)}{(1-x)} = \frac{3}{2}$

$$2(x+1) = 3(1-x) \rightarrow 2x + 2 = 3 - 3x \rightarrow 5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots\right)$$

$$ln\frac{\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{5}\right)} = ln\frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = ln\frac{3}{2} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{7} \dots\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} \dots$$

De esta forma se tiene que

$$ln3 = ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln(2)$$

$$ln3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} \dots + \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \dots$$

$$ln3 = 1{,}098612288 \dots$$

De forma análoga se puede encontrar una serie infinita que converja al logaritmo natural de algún otro número.

Hasta ahora se verificó el trabajo con logaritmos neperianos o naturales, los cuales no presentan una base explícita para el logaritmo ni muestra una relación directa con las funciones exponenciales, ya que se trabajó como una función que surge, como ya se mencionó, de las relaciones entre las funciones trigonométricas, es decir de razones y proporciones, como lo describe Havil (2014), "Es oportuno recordarnos la tarea que Napier había establecido él mismo: para asignar a cada minuto de cada grado del primer cuadrante un número que inicialmente denominó artificial y, posteriormente, logaritmo, lo que permitió la fácil manipulación de los senos de los ángulos.” (p. 97)

La idea de la función logarítmica como inversa de la función exponencial surge más de un siglo después con la definición de logaritmo presentada por Euler en su *Introducción al análisis de los infinitos* que dicta: “así como dado el número a se puede descubrir el valor de y a partir de cualquier valor de z, así también, a la inversa, dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$ al que suele llamarse logaritmo de y.” (Euler, 1748, p. 86)

EXPONENCIALES

Según Harier y Wanner (1996), un año después de que el matemático francés Florimond de Beaune (1601-1652), conocido también como Debeaune, hiciera una lectura de la *Géométrie* de Descartes de 1637, le planteó a éste último un problema geométrico de importancia:

Encontrar una curva y (x) tal que para cada punto P las distancias entre V y T, el punto donde la línea vertical y la tangente cortan el eje x, siempre son iguales a una constante dada (p.25).

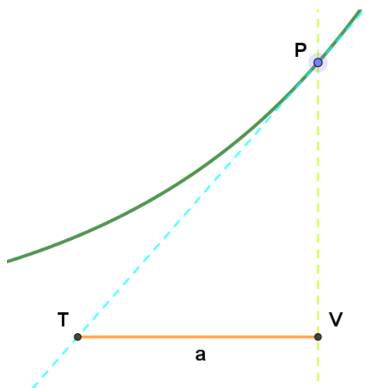
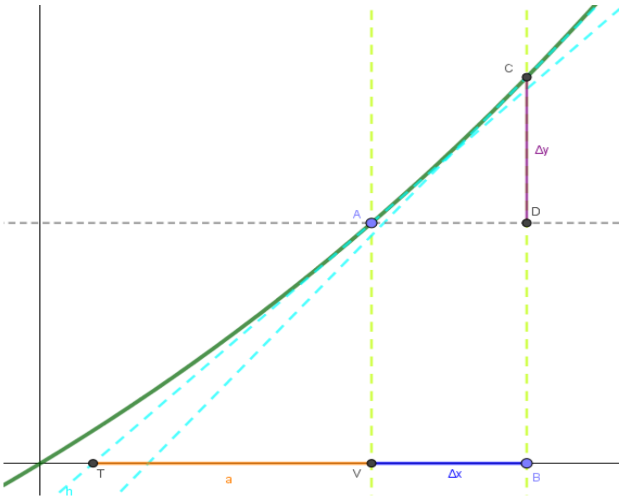


Figura 3.9: Debeaune (1601-1652), construcción dinámica en GeoGebra.

En otras palabras, trazar una curva que cumpla que la distancia entre la proyección de uno cualquiera de sus puntos sobre un eje y el punto de corte de la tangente en ese punto con dicho eje se mantenga constante. Esta distancia se conoce también en nuestro lenguaje, con el nombre de subtangente.

Ninguno de los dos dió respuesta al problema. Sólo 50 años después según Harier y Wanner (1996), Leibniz (1684) propuso una solución de la cual se presenta a continuación una interpretación:

Esta es la situación que se plantea: se busca que el segmento a representado en la gráfica de la izquierda, sea de longitud constante.



Para verificar la solución se debe plantear una construcción auxiliar en un sistema coordenado y se agregue un incremento en la abscisa para obtener un incremento en la ordenada que genere un triángulo semejante al inicial y a partir de los dos, establecer una proporción por ser dos triángulos que tienden a ser semejantes en la medida que el incremento en la abscisa sea menor.

En esta situación, la curva que se está buscando tendrá como coordenadas en el punto $A(x,y)$ y de esta manera se representa el punto $C(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Como los triángulos TVA y ADC son semejantes, se cumple la proporción:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{a}$$

De donde se puede ver que $\Delta y = \frac{y \cdot \Delta x}{a}$ de manera que la ordenada de C quedaría reescrita como $y + \Delta y = y + \frac{y \cdot \Delta x}{a} = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)y$ de esta manera puede afirmarse que las coordenadas de dos puntos consecutivos cuya abscisa esté incrementada en Δx corresponden a $A(x,y)$ y $C(x_1, y_1)$ con $x_1 = x + \Delta x$ y $y_1 = y + \Delta y = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)$. Para determinar un tercer punto en la curva buscada entonces se hace $x_2 = x_1 + \Delta x = x + 2\Delta x$ y por tanto se obtiene que $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right) + \frac{y_1 \cdot \Delta x}{a} = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right) + y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)\frac{\Delta x}{a}$ de donde se saca el factor común queda que $y_2 = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right) = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)^2$.

De modo similar se obtiene que para $x_3 = x + 3\Delta x$ y asume un valor de $y_3 = y\left(1 + \frac{\Delta x}{a}\right)^3$ y en general se puede establecer que para $x_n = x + n\Delta x$ será $y_n = y(1+w)^n$ con $w = \frac{\Delta x}{a}$.

Pero si se quiere que $a = 1$ (para escoger una constante simple) entonces se da que $w = \Delta x$ y como se dijo, se pretende que Δx sea tan pequeño que se aproxime a cero. De la misma manera si se toma un n bastante grande se puede reescribir la función como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con n tomando un valor muy grande.

Es ahora cuando se puede usar el antes citado Teorema del binomio de Newton, para transformar esta función en una serie infinita. Veamos:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

Si se tiene que $x = \frac{1}{n}$ y $a = n$, es decir, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se tiene que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots$$

Euler afirma que "si n es un número más grande que cualquier número asignable, luego $\frac{(n-1)}{n}$ es igual a 1 " (Hairer y Wanner. 2008, p. 26) así que cuando n tiende a infinito se obtiene el conocido número de Euler que se define con la serie infinita

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Con lo que se puede hacer una aproximación tan buena como se desee a partir de agregar términos al número obtenido basado en la fórmula antes descrita, veamos un ejemplo:

Se va estableciendo un resultado a partir de sumar

$$e \approx 1 + 1 = 2$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2{,}66666666$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2{,}70833333$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2{,}71666666$$

Con lo que se puede observar que de continuar de manera indefinida agregando el término siguiente, el resultado converge en el número conocido como "*e*" del que hoy se conocen más de 10 millones de cifras y del cual podemos ver a continuación los primeros cien dígitos:

e =2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772 40766303535475945713821785251664274274... en los cuales se verifica que no siguen ningún patrón de recurrencia y, por lo tanto, se denomina un número de infinitos decimales no periódicos.

El uso de la letra *e* para representar este número se debe a Euler quien escribe en su *Introducción al Análisis de los infinitos*: "pongamos en gracia a la brevedad la letra constante *e*, que denotará entonces la base de los logaritmos naturales o hiperbólicos" (Euler, 1748, p. 112). Es pues Euler quien usa por primera vez dicha representación en textos publicados y desde ahí se sigue utilizando.

Se podría pensar, que las series infinitas como en el ejemplo del número de Euler pudieran ser todas convergentes y arrojar siempre valores certeros. Sin embargo, el mismo Euler se percata del problema, de acuerdo con los comentarios en Euler (1748), al obtener algunos absurdos concluía que "determinados razonamientos con series, no son convincentes" (p. 110).

De manera similar a lo realizado anteriormente, usando $a = 1$, se puede verificar que pasa si se escoge $a = 2$

Si $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ se tiene que

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{2n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^3 + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + \frac{n}{2n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2 n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3 n^3} + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \cdots$$

De donde si se quieren hacer algunas aproximaciones, se tendrá que

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \approx 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} = 1{,}375$$

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}=1{,}3958333$$

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}=1{,}3984375$$

Es así que se puede entender que este tipo de números que surgen de una función exponencial, que entre otras cosas puede ser un método para encontrar infinitos números irracionales que, aunque no tengan ciertas características particulares como ocurre con el número de Euler, no dejan de ser por ello números irracionales ya que "cualquier cantidad exponencial se podrá expresar merced a logaritmos hiperbólicos mediante series infinitas" (Euler, 1748, p.115)…

De esta manera si ya no se hace el exponente igual a 1 sino que se tiene otro número cualquiera x, la función exponencial

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3+\cdots$$

Al realizar la sustitución de $m=\frac{n}{x}$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to \left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} \to \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x \to e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Con esto se da pues una relación directa entre las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas entendidas como otra manera de interpretar dichas exponenciales, y para el caso particular del logaritmo neperiano o hiperbólico y el número de Euler, se tiene la expresión: $log_e x = lnx.$

Esta serie obtenida para e^x, permite obtener otro tipo de series que pueden ser útiles más adelante como lo son: $e^{-1}\ cuando\ x=-1$ ó $\sqrt{e}\ cuando\ x=\frac{1}{2}$ veamos:

$$e^{-1}=\frac{1}{e}=1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\cdots$$

$$e^{1/2}=\sqrt{e}=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}+\cdots$$

$$\sqrt{e}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}+\cdots$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

"Uno de los intereses más antiguos en geometría es la medición de ángulos, principalmente con fines astronómicos…" (Hairer y Wanner. 2008, p. 40). Es así como se puede introducir la idea de medir ángulos como un reto que se ha trazado desde la historia con la intención de resolver inquietudes y poder descubrir los misterios que subyacen a la interpretación del universo.

Así, los babilonios dividieron el círculo en 360º, más adelante Ptolomeo introdujo subdivisiones en el sistema sexagesimal, minutos y segundos. Ésta no era la única manera de medir los ángulos, pues había otra en la que el círculo tenía 400º y otra relacionada con la medida del arco de longitud igual al radio, de esta manera se definía el radián.

La longitud del arco de media circunferencia de radio 1 corresponde a una medida aproximada para 100 dígitos de:

π =3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209
749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066
470938446 . . .

Con lo que se pretende decir, que la otra manera de medir un ángulo que es de acuerdo al arco que subtiende, se denomina radián ya que la unidad corresponde al ángulo formado por la longitud de arco igual al radio. En una circunferencia de radio igual a 1 se observa que dicho radio está 3,141592… veces en la semicircunferencia, número al cual Euler asigna el nombre de π, seguramente por corresponder a la medida de su Perímetro y teniendo en cuenta que William Jones ya había usado la notación π como la razón entre la circunferencia y su diámetro, pero no se puede establecer si Euler la adopta o la propone de forma independiente, en cualquier caso con esto, se puede establecer una relación entre la medida sexagesimal de los grados propuesta por los babilonios, y la medida en radianes:

$$360° = 2\pi rad \rightarrow 180° = \pi rad$$

Un radián se determina por el ángulo subtendido en una cuerda de longitud igual al radio, en este caso la unidad.

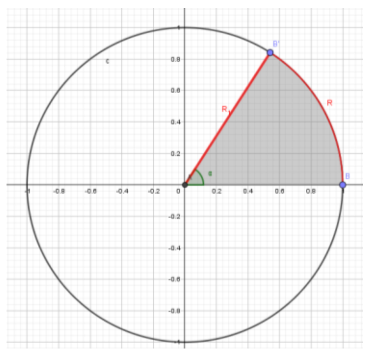
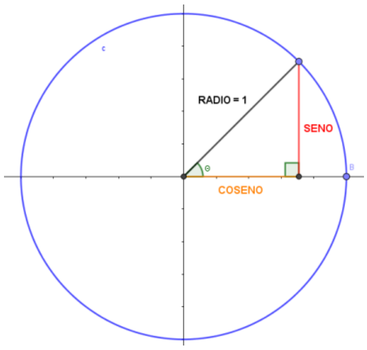


Figura 3.10: Imagen de un radián, construcción dinámica en GeoGebra.

Definición de las funciones trigonométricas



La función seno anteriormente se llamaba *sinus rectus*, pero no es su nombre original, pues "la consideración de la semicuerda del ángulo doble como línea trigonométrica fundamental tiene origen hindú… con el nombre de jiva" (Euler, 1748, p. 118) y a partir de múltiples traducciones al árabe y al latín se modifica dicho término a causa de algunos errores en la traducción como por ejemplo cambiar de jiva a Jiba, y posteriormente cuando al omitir las vocales se encuentra un texto que tiene la expresión Jb para dicha línea trigonométrica, la traducen como jaib que es entendida en la traducción latina como sinus, terminando por interpretarse como seno. La expresión luego para el coseno se toma como una abreviación del complemento del seno. Los términos tangente y secante fueron introducidos por el danés Thomas Finck en 1583.

Es importante tener en cuenta que las razones trigonométricas que hoy conocemos (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante) fueron en su origen líneas trigonométricas y no razones, solo cuando se toma el valor del seno del ángulo recto igual a uno, se generalizan y se convierten en la razón entre el valor de la semicuerda y el radio de la circunferencia. Sin embargo adquieren un valor de números trascendentes cuando Euler las introduce con el carácter de función, dejando atrás la creencia de que la trigonometría era una rama independiente de la matemática como lo había hecho parecer Vieta, considerado el mejor matemático del renacimiento. Aunque fue primero Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) quien consideró los valores del seno como formando una curva, luego Abraham de Moivre (1667 – 1754) con las fórmulas que llevan su nombre y finalmente es Euler con una formalización de las funciones trigonométricas en la *Introductio* (1748), quien las integra al análisis y es cuando se convierte en trigonometría analítica.

Entre las múltiples fórmulas que surgen en esta época para abordar las funciones trigonométricas, se encuentran:

$$cos.z = sen.\left(\frac{1}{2}\pi - z\right); sen.z = cos.\left(\frac{1}{2}\pi - z\right); (sen.z)^2 + (cos.z)^2 = 1$$

$$tan.z = \frac{sen.z}{cos.z}; cot.z = \frac{cos.z}{sen.z} = \frac{1}{tan.z}$$

Aunque hay también muchas otras que buscan cambiar productos por sumas y determinar senos de arcos compuestos, que no vienen al caso en este trabajo.

Veamos como surgen las ecuaciones de Moivre, que darán origen a las formas de seno y coseno como series infinitas:

$(sen.z)^2 + (cos.z)^2 = 1$	Identidad trigonométrica
$(cos.z)^2 - (-1)(sen.z)^2 = 1$	Cambiando + por –(–1)

$\left(cos.z+\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)\left(cos.z-\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)=1$ Factorizando en los complejos

Pero de acuerdo con la proposición 133 de Euler, se tiene que:

$$\left(cos.z\pm\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2=(cos.z)^2\pm 2\cdot cos.z\sqrt{-1}\cdot sen.z+\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2$$

Por el binomio al cuadrado $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$$\left(cos.z\pm\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2=(cos.z)^2\pm\sqrt{-1}(2\cdot cos.z\cdot sen.z)-(sen.z)^2$$

Ya que $cos.2z=(cos.z)^2-(sen.z)^2$ y $sen.2z=2\cdot cos.z\cdot sen.z$

$$\left(cos.z\pm\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2=cos.2z\pm\sqrt{-1}(sen.2z)$$

Como se podría verificar de forma análoga que

$$\left(cos.z\pm\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^3=cos.3z\pm\sqrt{-1}(sen.3z)$$

Entonces Euler muestra que de forma general,

$$\left(cos.z\pm\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n=cos.nz\pm\sqrt{-1}(sen.nz)$$

Debido a la ambigüedad de los signos

$$\left(cos.z+\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n=cos.nz+\sqrt{-1}(sen.nz)$$

$$\left(cos.z-\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n=cos.nz-\sqrt{-1}(sen.nz)$$

De donde al sumar ambas igualdades se tiene que:

$$2cos.nz=\left(cos.z+\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n+\left(cos.z-\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n$$

Y al restarlas se obtiene

$$2\sqrt{-1}\cdot sen.z = \left(cos.z + \sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n - \left(cos.z - \sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n$$

Recordando la expansión del binomio de Newton y usando el Teorema de Pascal

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

$2cos.nz = \left(cos.z + \sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n + \left(cos.z - \sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^n$

$$2cos.nz = \left[(cos.z)^n + \frac{n}{1}(cos.z)^{n-1}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(cos.z)^{n-2}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(cos.z)^{n-3}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^3 + \cdots\right]$$

$+\left[(cos.z)^n - \frac{n}{1}(cos.z)^{n-1}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(cos.z)^{n-2}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2 - \right.$

$\left.\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(cos.z)^{n-3}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^3 + \cdots\right]$

$$2cos.nz = 2\left[(cos.z)^n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(cos.z)^{n-2}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(cos.z)^{n-4}\left(\sqrt{-1}\cdot sen.z\right)^4 + \cdots\right]$$

Haciendo $z = \frac{x}{n}$

$$cos.n\left(\frac{x}{n}\right) = \left(cos.\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(cos.\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2}\left(sen.\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(cos.\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-4}\left(sen.\left(\frac{x}{n}\right)\right)^4 + \cdots$$

Cuando $n \to \infty entonces \frac{x}{n} \to 0$ y, además, cuando z es muy pequeño se tiene que $sen.z = z$ luego,

$$cos. x = 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{n}\right)^4 \mp \cdots$$

Y finalmente, Euler afirma que si $n \to \infty entonces \frac{(n-1)}{n} = 1$ así que

$$cos. x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Y de forma similar se obtiene para

$$sin. x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Si luego se evalúa para un ángulo en particular por ejemplo para

$x = \frac{\pi}{4} rad$ el coseno sería

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^8}{8!} - \cdots$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{4^2}}{\frac{2}{1}} + \frac{\frac{\pi^4}{4^4}}{\frac{24}{1}} - \frac{\frac{\pi^6}{4^6}}{\frac{720}{1}} + \frac{\frac{\pi^8}{4^8}}{\frac{40320}{1}} - \cdots$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} - \frac{\pi^6}{2949120} + \frac{\pi^8}{2642411520} - \cdots$$

Donde se puede observar que la convergencia es rápida, veamos:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} = 0{,}69157 \ldots$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} = 0{,}707429 \ldots$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} = 0{,}7071032\ldots$$

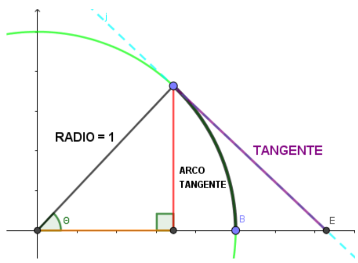
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^8}{8!} = 0{,}7070106805\ldots$$

Es esta pues, una manera de expresar algunas funciones trigonométricas, que corresponden a números irracionales, como una serie infinita que converge en dicho número. De forma similar que se hizo para el ejemplo con el coseno, se podría representar para otro ángulo y otra función, y así mismo obtener series que convergen en un número irracional.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

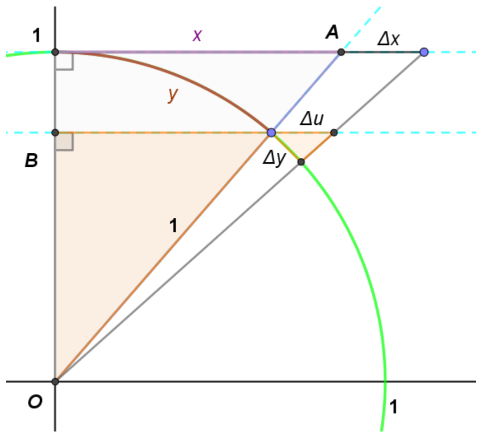
De acuerdo con Euler en su *Introducción al análisis de los infinitos*, donde se verifica una definición que introduce la función arcotangente, aunque con una notación diferente a la que usamos en la actualidad:

"Si ponemos entones $tang.z = t$, de modo que z sea el arco cuya tangente es t, lo cual indicaremos $A.tang.t$ será por tanto $A.tang.t = z$" (Euler, 1748, p. 137)



Las funciones inversas se pueden también escribir como series infinitas, permitiendo con ello que se pueda encontrar una expresión para determinar ciertos ángulos que expresados en radianes involucran el número π de manera que se puede establecer un acercamiento a dicho número a través de una serie infinita. Para ello es primordial primero mostrar la deducción que se hace para la serie de una función inversa, para nuestro ejemplo la función arctan(x). Aunque el primero que presenta esta series es James Gregory (1638 - 1675), Leibniz es quien la redescubre y la publica, sin embargo no muestra cómo la obtiene, por lo que se mostrará una deducción presentada en Análisis por su historia que se inspiró en el método que usa Newton para las funciones inversas utilizando elementos del cálculo diferencial.

La deducción parte utilizando la relación que hay entre el área del sector circular y su respectivo arco, que servirá para que conociendo la derivada de la función, se encuentre, a través del teorema de Fermat el área bajo la curva y con ello la función inversa, veamos:



Del gráfico se puede observar que

$tany = x$ es decir, $y = arctanx$

Se puede ver también, por el Teorema de Pitágoras que $OA = \sqrt{1+x^2}$

Aplicando proporcionalidad en los triángulos semejantes y sustitución, se tiene que $\frac{OB}{1} = \frac{1}{OA} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y además,

$\frac{\Delta u}{1} = \frac{\Delta x}{OA} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1+x^2}}$ y como el triángulo pequeño es también semejante al grande,

$\frac{\Delta y}{1} = \frac{\Delta u}{\sqrt{1+x^2}}$ de manera que $\Delta y = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}} = \frac{\Delta x}{1+x^2}$ de donde finalmente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-1}$$

Pero como ya se mostró, el binomio de Newton se escribe como

$$(1 + x)^a = 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

De manera que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{(-1)}{1} \cdot x^2 + \frac{(-1)(-1-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^4 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^6 + \cdots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$$

Y aplicando el teorema de Fermat (a lo que hoy le llamamos integrar) se obtiene

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots = arctanx$$

Luego, se sabe que $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ o lo que es igual, $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ de donde al aplicar la serie de arcotangente, reeplazando x por 1 se obtiene:

$$arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Evaluando para los diferentes términos se puede revisar la rapidez con la que se acerca al valor de π,

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \to \pi \approx \frac{8}{3} \approx 2{,}66667$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} \to \pi \approx \frac{52}{15} \approx 3{,}46667$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105} \rightarrow \pi \approx \frac{304}{105} \approx 2{,}89524$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{789}{945} = \frac{263}{315} \rightarrow \pi \approx \frac{1052}{315} \approx 3{,}33968$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{2578}{3465} \rightarrow \pi \approx \frac{10312}{3465} \approx 2{,}97605$$

Otra manera sería tomar $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o lo que es igual, $arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4}{5} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6}{7} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8}{9} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10}}{11} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\frac{\frac{1}{3}}{3}}{1} + \frac{\frac{\frac{1}{3^2}}{5}}{1} - \frac{\frac{\frac{1}{3^3}}{7}}{1} + \frac{\frac{\frac{1}{3^4}}{9}}{1} - \frac{\frac{\frac{1}{3^5}}{11}}{1} + \cdots\right)$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \cdots\right)$$

Se puede verificar un ritmo de convergencia más rápido operando los términos

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 3{,}07920$$

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{41}{45}\right) \approx 3{,}15618$$

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{856}{945}\right) \approx 3{,}13785$$

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{23147}{25515}\right)\approx 3{,}14260$$

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\frac{1}{11\cdot 3^5}+\cdots\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{254512}{280665}\right)\approx 3{,}14130$$

FRACCIONES CONTINUAS

Antes de empezar a hablar sobre las fracciones continuas y sobre su importancia para este trabajo, es importante mencionar algunos aspectos históricos sobre su evolución, para ello es importante recordar el procedimiento conocido como *anthyphairesis*, que quiere decir substraer repetidamente un número o segmento pequeño de un segmento grande hasta que lo que quede no se pueda medir con el pequeño. Tema trabajado en el capítulo 1 y que está relacionado con el método conocido como Algoritmo de Euclides, para determinar el máximo común divisor de dos números enteros positivos y el cual es quizás una de las bases de lo que hoy se conoce como fracciones continuas.

Este proceso se puede observar en la figura 3.11 y de la cual se puede hacer dos conclusiones mencionadas por Euclides en las proposiciones I y II del libro VII, después de aplicar el algoritmo a dos enteros positivos $a\ y\ b$ donde se tenga la relación de orden $a > b$, la primera es que sí $c = rd + 1$ los número relacionados a y b son primos relativos entre sí, es decir su mayor divisor común será el uno, y la segunda que si $c = rd$ entonces habrá un mayor divisor común entre los dos, diferente de uno y este será el residuo anterior relacionado con c.

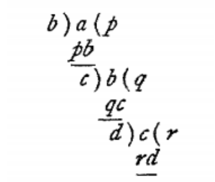


Figura 3.11: Algoritmo de Euclides. Imagen tomada de Heath. (1908, Vol. 2, p.299).

A continuación se dará un ejemplo usando la notación de Heath (1908, Vol. 2) y la que actualmente se encuentra en los libros de texto.

$42y226$ 42) 226 (5 → 5 es el número de veces del 42 en el 226 5*42 → se resta 210 de 226 igual 16 16) 42 (2 → 2 es el número de veces del 16 en el 42 2*16 → se resta 32 de 42 igual 10 10) 16 (1 1*10 6) 10 (1 1*6 4) 6 (1 1*4 **2)** 4 (2 2*2 0→ si el residuo es cero entonces el mayor divisor es **2**	**42 y 226** $a = bp + c$ a>b, p es el número de veces de b en a y c es el residuo de restar bp de a. 226 = 42(5) + 16 42 = 16 (2) + 10 16 = 10 (1) + 6 10 = 6 (1) + 4 6 = 4 (1) + **2** 4 = 2 (2) +0 → si el residuo es cero entonces el mayor divisor es **2**

Antes de mencionar la relación de este algoritmo con el tema en cuestión se mostraran algunas notaciones que se han ido empleando con el pasar de los años, teniendo en cuenta, según Brezinski (1941), la definición realizada por Cataldi en 1606 sobre fracción continua ascendente *"a quantity written or proposed in the form of a fraction of a fraction"*(p. 58), para ello se ha empleado el siguiente recuadro, donde se puede observar las notaciones usadas por algunos matemáticos de diferentes épocas para el trabajo con fracciones continuas.

<table>
<tr>
<td>$4\ .\ \&\frac{2}{8.}\ \&\frac{2}{8.}$</td>
<td>$4\cdot\&\frac{2}{8.}\&\frac{2}{8.},$</td>
<td>$\cfrac{a}{\alpha\cfrac{b}{\beta\cfrac{c}{\gamma\cfrac{d}{\delta\cfrac{e}{\varepsilon}}}}}\ \text{etc.}$</td>
<td>$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\dots$</td>
<td>$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Figura 2: Notación introducida por italiano Pietro Antonio CATALDI en 1613. (Brezinski, 1941, p.44).</td>
<td>Figura 3: Notación de John WALLIS en 1655. (2004, p.175).</td>
<td colspan="2">Figura 4: Notación introducida por Alfred PRINGSHEIM en 1898. (Brezinski, 1941, p.44).</td>
</tr>
</table>

Ahora, teniendo en cuenta los ejemplos anteriores y las notaciones establecidas se utilizará la notación proporcionada por Leibniz (1698) en su libro póstumo *Descriptio automati planerarii*, luego utilizada por Euler (1748) en su texto *Introducción al análisis de los infinitos* en el capítulo XVIII y posteriormente utilizado por Lagrange (1877) en su texto *Oeuvres* tomo VII donde explica una de las formas que puede tener una fracción continua las cuales ocurren según Lagrange (1877) “cada vez que se trata de expresar en números cantidades fraccionarias o irracionales” (p.12). Dado que este método es uno de los más apropiados para dar aproximaciones a estos números, sobre todo para los irracionales los cuales por mucho tiempo hicieron ruido en diferentes culturas y matemáticos, quienes a su vez no solo debían aceptarlos sino que además buscaban la forma de llegar a ellos mediante aproximaciones algunas de las cuales serán expuestas más adelante.

Dichas notaciones son las siguientes: $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{\ddots}}}}$ ó $a+\frac{\alpha}{b+\frac{\beta}{c+\frac{\gamma}{d+\frac{\delta}{\ddots}}}}$ de las cuales la primera es la más utilizada por Euler debido a que su convergencia al número racional implicado, es más rápida que la segunda.

Retomando el primer ejemplo y utilizando la notación de fracción continua se podrá observar la relación del Algoritmo de Euclides con este tema. Se tenía entonces los siguientes números enteros 226 y 42.

$42y226$ 42) 226 (5 **5*42** →	$\frac{5*42}{16}\rightarrow$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{\frac{42}{16}}\rightarrow$
16) 42 (2 **2*16** →	$\frac{2*16}{10}\rightarrow$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{16}{10}}}$
10) 16 (1 **1*10** →	$\frac{1*10}{6}\rightarrow$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{10}{6}}}}$
6) 10 (1 **1*6** →	$\frac{1*6}{4}\rightarrow$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{6}{4}}}}}$
4) 6 (1 **1*4**→	$\frac{1*4}{2}\rightarrow$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{2}}}}}$
2) 4 (2 2*2 0→	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{226}{42}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{4}}}}}}$

En este recuadro se observan tres columnas, una con el algoritmo de Euclides, la segunda en fracciones sacadas del algoritmo donde: el número entero (p) representa las veces que esta el número menor (b) en el mayor (a) y la fracción siempre tiene en su numerador el número menor (b) relacionado y en su denominador la diferencia (a-pb). La tercera relaciona las fracciones de la columna dos con la notación de fracción continua, entre los números iniciales 42 y 226. Este proceso es repetitivo hasta llegar a una diferencia de cero (0) o de uno (1).

$$\frac{226}{42} = 5 + \frac{16}{42} ó 226 = (5)(42) + 16$$

$$\frac{226}{42} = 5 + \frac{1}{\frac{42}{16}} \rightarrow \textit{Aplicando la propiedad del inverso multiplicativo se tiene } \frac{16}{42} = \frac{1}{\frac{42}{16}}$$

$$\frac{226}{42} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{16}{10}}} \rightarrow \textit{aplicando la propiedad anterior y debido a que } \frac{42}{16} = 2 + \frac{10}{16}$$

Como se puede observar el algoritmo proporciona los números enteros mencionados por Wallis como $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ pero para la notación de Euler serían a, b, c, d, e… que para el ejemplo anterior serían 5, 2, 1, 1, 1. Y a su vez, las fracciones relacionadas ya implícitamente aplicado la propiedad del inverso, para así obtener la notación utilizada por Euler donde se puede concluir que toda fracción continua finita "…ocurrirá siempre que la cantidad sea conmensurable, es decir, será expresada por una fracción racional" (Lagrange 1877, p. 11)

Este método de representar y dar una aproximación a los números racionales se puede generalizar de la siguiente forma:

Sean $q_0 \; y \; q_1$ dos números enteros tal que; $\frac{q_{k+1}}{q_k}$ con $q_{k+1} > q_k, q_k \neq 0 \; y \; con$

$k = \{0,1,2 \ldots\}$ siguiendo el algoritmo de Euclides se tiene que:

$$q_k = a_k * q_{k+1} + q_{k+2}; con\ a_k \in N$$

$$\rightarrow \frac{q_k}{q_{k+1}} = a_k + \frac{q_{k+2}}{q_{k+1}} \rightarrow \frac{q_k}{q_{k+1}} = a_k + \frac{1}{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}}$$

Ahora bien, este método de las fracciones continuas también fue utilizado para dar aproximaciones de aquellos números "los irracionales" que fueron un dolor de cabeza para grandes matemáticos como Diofanto, el cual no concebía en la solución de sus ecuaciones no solo estos números sino también números negativos e imaginarios. Más tarde con el estudio de los hindúes, tema abordado en el capítulo anterior, se pudo ver el avance en el manejo de los números irracionales y como sus aproximaciones fueron de gran ayuda para el desarrollo de las matemáticas en estos tiempos.

Aproximaciones de números irracionales con fracciones continúas

Cuando una cantidad es irracional o trascendente se puede representar en una fracción continua infinita (Lagrange, 1877). A continuación se explicaran algunos métodos abordados por diferentes matemáticos como Cataldi, Pringsheim, Euler, Wallis, Lagrange, entre otros, para la aproximación cuando sea una de estas cantidades, como es el caso de: las raíces cuadradas de la forma $\sqrt{K}$, donde K es un número entero no cuadrado, también aquellos que fueron y seguirán siendo especiales por lo que representan y que tienen una forma estándar reconocida por todo matemático, es el caso de $\pi, \varphi\ y\ e$. Y otros que se han venido mencionando durante todo el trabajo como es el caso de los logaritmos y funciones trigonométricas.

En primera instancia se aplicará el método anterior para representar algunos números irracionales siempre y cuando sea previamente expresado en decimales.

Pi (π)

La aproximación en decimales que hace Vieta (Lagrange, 1877). A la relación entre el diámetro de una circunferencia y su diámetro es 3,1415926535… lo cual se puede aproximar al siguiente número racional $\frac{31415926535}{10000000000}$ para así poder aplicar el método anterior obteniendo lo siguiente:

$$\frac{31415926535}{10000000000} = 3 + \frac{1}{\frac{10000000000}{1415926535}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1415926535}{88514255}}} =$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\frac{88514255}{88212710}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{88212710}{301545}}}}}$$

Siguiendo el procedimiento y teniendo en cuenta que los decimales eran infinitos se puede escribir la fracción continua infinita para Pi (π):

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \ddots}}}}$$

Raíz cuadrada de dos ($\sqrt{2}$)

Ahora, usamos el mismo método para el número $\sqrt{2}$ con el cual quizás inició todo este desarrollo de los irracionales. Como se trabajó en el capítulo 1, este número surge de la relación entre la diagonal de un cuadrado de lado 1 y su lado cuya aproximación en decimales es 1,41421356…, el cual se puede aproximar al siguiente número racional $\frac{141421356}{100000000}$ para luego dar una aproximación a la fracción continua infinita presentada por Bombelli en sus desarrollos presentados en *L'Algebra* parte *maggiore dell' aritmetica in tre libri* (1572) y en la segunda edición denominada *L'Algebra Opera* (1579). Cuyo método se explicará más adelante pero que conlleva la siguiente representación en fracción continua de $\sqrt{2}$: como se muestra a continuación:

$$\frac{141421356}{100000000} = 1 + \frac{1}{\frac{100000000}{41421356}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{41421356}{17157288}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{17157288}{7106780}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ddots}}}$$

Logaritmo natural de dos ($\boldsymbol{ln2}$)

Este número trascendental tiene una aproximación decimal de 0.69311471 por lo que tiene una aproximación racional $\frac{69311471}{100000000}$ con la que podemos dar una aproximación en fracción continua infinita de la siguiente forma siguiendo el modelo anterior:

$$\frac{6931471}{10000000} = 0 + \frac{1}{\frac{69314710}{10000000}} = 0 + \frac{1}{6+\frac{1}{\frac{93147100}{10000000}}} = 0 + \frac{1}{6+\frac{1}{9+\ddots}}$$

Siguiendo este modelo se podría aproximar todo número irracional siempre y cuando sepamos cuál es su aproximación decimal.

Ahora se procederá a explicar un método el cual permite dar una aproximación de fracción continua infinita de un número de la forma $\sqrt{k}$, utilizando $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$una de las expresiones dadas por Abu Al-hasan Ahmad Ibn Ibrahim Al-Uqlidisi para dar aproximaciones de la raíz cuadrada por exceso en su libro *Kitab al-fusul fi Hisab al-Hindi*, escrito en 952 y traducido por A. S. Saidan (1978, p.441) y el método de Bombelli (1579) expresado en su texto *L'Algebra parte maggiore dell' aritmética in tre-libri* para dar la aproximación de la raíz cuadrada de trece (p.22):

Sea K un número entero no cuadrado al cual se le desea sacar la raíz cuadrada, luego $\sqrt{K} = \sqrt{a^2+r}(E_1)$, también tenemos que $\sqrt{K}$ por ser K entero va a ser igual a un número entero a más una cantidad x mucho más que pequeña $\sqrt{K} = a + x(E_2)$. Ahora igualando $(E_1) = (E_2)$se tiene que:

$\sqrt{a^2+r} = a + x(E_3)$ Elevando al cuadrado a ambos lados $\left(\sqrt{a^2+r}\right)^2 = (a+x)^2$, ahora desarrollando obenemos $a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$ y simplificando $r = 2ax + x^2 \quad (E_4)$. Pero como $x \ll a$ se puede despreciar esta cantidad, quedando que $r = 2ax$, para luego despejar y obtener $\frac{r}{2a} = x(E_5)$. Sustituyendo $(E_5)\, en\, (E_3)$ obtenemos la expresión de Al-Uqlidisi $\sqrt{K} = \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$.

Ahora, multiplicando por x a ambos lados la (E_5) tenemos $\frac{rx}{2a} = x^2(E_6)$, sustituyendo $(E_6)\, en\, (E_4)$ se tiene que $r = 2ax + \frac{rx}{2a}$ organizando $r = \left(2a + \frac{r}{2a}\right)x$

(E_7). Para finalizar se despeja x de $(E_7) \to \frac{r}{\left(2a+\frac{r}{2a}\right)} = x(E_8)$, sustituyendo (E_8) en $(E_3) \to \sqrt{K} = \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+\frac{r}{2a}}$, análogamente se puede obtener que:

$$\sqrt{K} = \sqrt{a^2+r} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a+\ddots}}}$$

Mediante el proceso anterior se realiza el siguiente ejemplo para $\sqrt{3}$ teniendo en cuenta que $a = 1$ y $r = 2$:

$\sqrt{3} = \sqrt{1^2+2} = (1) + \cfrac{2}{2(1)+\cfrac{2}{2(1)+\cfrac{2}{2(1)+\ddots}}}$ Obteniendo algunas aproximaciones se puede observar el ritmo de convergencia de la fracción continua:

I. $\sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{2(1)} = 2$

II. $\sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{2}{2(1)}} = 1 + \frac{2}{2(1)+1} = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}6666$

III. $\sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{2}{2(1)+1}} = 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{\frac{8}{3}} = 1 + \frac{6}{8} = 1{,}75$

IV. $\sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{2}{2(1)+\frac{2}{2(1)+1}}} = 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{2}{2(1)+\frac{2}{3}}} = 1 + \frac{2}{2(1)+\frac{6}{8}} = 1 + \frac{8}{11} = 1{,}7272\ldots$

El siguiente método es muy parecido al anterior pero más sencillo: sea $\sqrt{k} = x$, donde x representa la aproximación de la raíz cuadrada de K, ahora elevando al cuadrado a ambos lados se obtiene $\left(\sqrt{k}\right)^2 = x^2 \to k = x^2$ igualando a cero se tiene $x^2 - k = 0 \to x^2 - (k-1) - 1 = 0 \to x^2 - 1 = (k-1)$realizado una diferencia de cuadrados tenemos que $(x-1)(x+1) = (k-1) \to$

$(x-1) = \frac{(k-1)}{(x+1)} \to x = 1 + \frac{(k-1)}{(x+1)}$ Obteniendo así nuestra ecuación de recurrencia que al remplazar en la ecuación inicial $\sqrt{k} = x \to \sqrt{k} = 1 + \frac{(k-1)}{(x+1)}$

$$\rightarrow \sqrt{k} = 1 + \cfrac{(k-1)}{2 + \cfrac{(k-1)}{2 + \cfrac{(k-1)}{2+\ddots}}}$$

Prosigamos a hacer un ejemplo para $\sqrt{5} = 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2+\frac{4}{2+\ddots}}}$, observemos su convergencia cuando $k = 5$:

I. $\sqrt{5} \approx 1 + \frac{4}{2} = 3$

II. $\sqrt{5} \approx 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2}} = 1 + \frac{4}{4} = 1 + 1 = 2$

III. $\sqrt{5} \approx 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2+\frac{4}{2}}} = 1 + \frac{4}{2+1} = 1 + \frac{4}{3} = 2{,}3333\ldots$

IV. $\sqrt{5} \approx 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2+\frac{4}{2+\frac{4}{2}}}} = 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{2+1}} = 1 + \frac{4}{2+\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{\frac{10}{3}} = 1 + \frac{12}{10} = 2{,}2$

El siguiente método tiene que ver con la solución de las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 - nx - 1 = 0$; donde $n \in N$. Y donde se puede obtener uno de los números más fascinantes de la historia debido a que se puede encontrar fácilmente en la naturaleza, la arquitectura y en nuestro cuerpo humano, estamos hablando de Fi (φ).

$x^2 - nx - 1 = 0 \rightarrow x^2 - nx = 1 \rightarrow x - n = \frac{1}{x}$ Obteniendo así nuestra expresión de recurrencia $x = n + \frac{1}{x}$.

Luego cuando $n = 1$ se tiene que $x = 1 + \frac{1}{x}$ (E_1) y solucionando la ecuación cuadrática se tiene que $x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1^2+4}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi(E_2)$

igualando $(E_1) = (E_2)$ se obtiene $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}$, observemos ahora su convergencia:

I. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1} = 2$

II. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

III. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}66666 \ldots.$

IV. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

Fracciones continúas y series

Una vez estudiada la idea de fracción continua infinita por diferentes métodos, se procede a continuación a la verificación de su relación directa con las series infinitas y de esta manera poder escribir un número irracional del cual ya se conoce su representación como serie infinita, como una fracción continua, de hecho ya lo advertía Euler (1748): "…se podrá convertir una serie cualquiera de términos alternados en una fracción continua" (p. 356). Para ello se mostraran varios ejemplos usando algunas de las series trabajadas anteriormente.

Aunque Euler describe un proceso de forma generalizada, para efectos prácticos, mostraremos los pasos aplicados en un ejemplo puntual. Se tiene en cuenta que Euler también afirma que si en la fracción continua

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{\ddots}}}}$$

los valores de α, β, γ, δ … son no crecientes, en particular iguales a 1 y los valores de a, b, c, d… números enteros positivos, por lo que "la fracción continua se expresaría mediante una serie de términos máximamente convergente" (Euler 1748. p. 356).

Así pues, si el objetivo es expresar esta serie infinita como una fracción continua, se tiene que:

$$si\ \ x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}\mp\cdots$$

Entonces se tendrá los siguientes valores para α, β, γ, δ …

$$\alpha=\frac{b}{A},\beta=\frac{Abc}{B-A},\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)},\varepsilon=\frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}\cdots$$

Y si se tiene que $b=A;c=B-A;d=C-B;e=D-C$ entonces se obtiene,

$$\alpha=\frac{b}{A}=\frac{A}{A}=1;\beta=\frac{Abc}{B-A}=\frac{Ab(B-A)}{B-A}=Ab=AA$$

$$\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)}=\frac{B^2(C-B)}{(C-B)}=BB;\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)}=CC$$

De esta manera la fracción continua corresponde a

$$x = a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{\ddots}}}} \qquad x = \cfrac{1}{A + \cfrac{AA}{B - A + \cfrac{BB}{C - B + \cfrac{CC}{D - C + \cfrac{DD}{\ddots}}}}}$$

Tomemos como ejemplo la serie infinita trabajada anteriormente

$$ln(2) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

Así, $A = 1; B = 2; C = 3; D = 4 \ldots$ entonces queda que

$$ln(2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{\ddots}}}}}$$

De manera similar se puede obtener una fracción continua para las series estudiadas anteriormente, veamos por ejemplo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Así, $A = 1; B = 3; C = 5; D = 7; E = 9 \ldots$ entonces queda que

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{\ddots}}}}}$$

Si revisamos la rapidez de convergencia a $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$ de esta fracción continua encontramos que

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0{,}666$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{9}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{13}} = \frac{13}{15} = 0{,}866$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{18}{29}}} = \frac{1}{1+\frac{29}{76}} = \frac{76}{105} = 0{,}723$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{2}}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{477}{156}}} = \frac{1}{1+\frac{156}{789}} = \frac{789}{945} = 0{,}834$$

Otro ejemplo interesante es encontrar la fracción continua correspondiente al número e , para lo cual usaremos la serie infinita ya mencionada,

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + - \cdots$$

Donde $A = 2! = 2; B = 3! = 6; C = 4! = 24; D = 5! = 120 \ldots$

Recordando que $x = \frac{1}{A+\frac{AA}{B-A+\frac{BB}{C-B+\frac{CC}{D-C+\frac{DD}{\ddots}}}}}$ Se tiene entonces para $\frac{1}{e}$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2+\frac{4}{4+\frac{36}{18+\frac{576}{96+\frac{14400}{\ddots}}}}} \rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{9}{18+\frac{576}{96+\frac{14400}{\ddots}}}}}$$

$$\frac{1}{e}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{64}{96+\cfrac{14400}{\ddots}}}}}\rightarrow\frac{1}{e}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{450}{\ddots}}}}}$$

$$1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{450}{\ddots}}}}}\cdot e\rightarrow e=\cfrac{1}{\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{450}{\ddots}}}}}}$$

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{450}{\ddots}}}}$$

Las primeras aproximaciones que se obtienen son:

$$3-2{,}6666-2{,}7272-2{,}7169$$

Y finalmente, un ejemplo con series para funciones trigonométricas teniendo en cuenta las que se mencionaron más arriba

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

Podríamos plantear una fracción continua para $cos\frac{\pi}{6}$ como ejemplo particular: $cos\frac{\pi}{6}=1-\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{6!}+\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^8}{8!}-\cdots$

$$cos\frac{\pi}{6}=1-\frac{\pi^2}{2!\cdot6^2}+\frac{\pi^4}{4!\cdot6^4}-\frac{\pi^6}{6!\cdot6^6}+\frac{\pi^8}{8!\cdot6^8}-\cdots$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\frac{2\cdot 6^2}{\pi^2}} + \frac{1}{\frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4}} - \frac{1}{\frac{6!\cdot 6^6}{\pi^6}} + \frac{1}{\frac{8!\cdot 6^8}{\pi^8}} - \cdots$$

Donde $A = 1; B = \frac{2\cdot 6^2}{\pi^2}; C = \frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4}; D = \frac{6!\cdot 6^6}{\pi^6}; E = \frac{8!\cdot 6^8}{\pi^8} \ldots$ y así se tiene que la fracción continua queda de esta manera:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{2\cdot 6^2}{\pi^2} - 1 + \cfrac{\left(\frac{2\cdot 6^2}{\pi^2}\right)^2}{\frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4} - \frac{2\cdot 6^2}{\pi^2} + \cfrac{\left(\frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4}\right)^2}{\frac{6!\cdot 6^6}{\pi^6} - \frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4} + \cfrac{\left(\frac{6!\cdot 6^6}{\pi^6}\right)^2}{\ddots}}}}}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{72-\pi^2}{\pi^2} + \cfrac{\left(\frac{2\cdot 6^2}{\pi^2}\right)^2}{\frac{4!\cdot 6^4 - 2\cdot 6^2\pi^2}{\pi^4} + \cfrac{\left(\frac{4!\cdot 6^4}{\pi^4}\right)^2}{\frac{6!\cdot 6^6 - 4!\cdot 6^4\pi^2}{\pi^6} + \cfrac{\left(\frac{6!\cdot 6^6}{\pi^6}\right)^2}{\ddots}}}}}$$

Se puede revisar también una expresión para $tanx$ a partir de las series de seno y coseno, veamos:

Sabemos que $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ y que además ya tenemos las series para seno y coseno,

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Así que sustituyendo se obtiene

$$tanx = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}$$

Al sacar factor común en el numerador

$$tanx = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots\right)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}$$

Dividiendo numerador y denominador por el factor obtenido

$$tanx = \frac{\dfrac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots\right)}}{\dfrac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}}$$

$$tanx = \frac{x}{\dfrac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}}$$

Y al efectuar la división que se presenta en el denominador podemos ver que da 1 más un residuo es decir como es una fracción impropia (dado que el numerador es mayor que el denominador) se puede escribir como 1 más una fracción, veamos:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots\right) =$$

$$\frac{-x^2}{3} + \frac{x^4}{30} - \frac{x^6}{840} + \frac{x^8}{45360} - \cdots$$

$$tanx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \frac{x^6}{840} - \frac{x^8}{45360} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}}$$

$$tanx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} + \frac{x^4}{840} - \frac{x^6}{45360} + \cdots\right)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}}$$

Y nuevamente al dividir por el factor obtenido y realizar la división del denominador se tiene que

$$tanx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{\cfrac{3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)}{1 - \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{280} - \frac{x^6}{15120} + \cdots}}}$$

$$tanx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{\frac{x^2}{15} + \frac{x^4}{210} - \frac{x^6}{7560} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{10} + \frac{x^4}{280} - \frac{x^6}{15120} + \cdots}}}$$

Continuando con el mismo procedimiento se obtiene

$$tanx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}}$$

Luego de haber hecho este recorrido histórico y de observar la influencia que tuvieron los números irracionales en el desarrollo del pensamiento matemático, se pudo observar como los métodos heurísticos en los albores de la modernidad, brindan la posibilidad de acceder a la interpretación de dichos números con un enfoque algebraico e infinitesimal.

A modo de conclusión:

Después de haber hecho todo este recorrido, se pudo observar que el devenir histórico de los irracionales no se realizó en un solo día, sino a través de las distintas épocas y las diferentes aproximaciones, las cuales poco a poco fueron dando vida a este concepto hasta el que hoy por hoy conocemos.

Estas aproximaciones empiezan entonces, como se observó en el primer capítulo, desde la antigua Grecia con los trabajos de los Pitagóricos (500 ANE), los cuales pese a su deficiente sistema numérico y todas las dificultades de la época, notaron que en algunos de sus trabajos de tipo geométrico (gracias al proceso de *antyphairesis)*, aparecían magnitudes que no se podían conmensurar y que luego fueron denominadas inconmensurables.

Luego en el segundo capítulo, con toda la influencia de los árabes en los Europeos (alrededor del 850 NE) al introducir un sistema de numeración que revolucionó el mundo de las matemáticas e incorporando nuevos algoritmos para las operaciones, se logró incluso la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, allí se encontraron varios procesos heurísticos para las aproximaciones de números irracionales, donde estos eran aceptados y trabajados ya no de forma geométrica sino de forma aritmética y algebraica.

Para terminar en el tercer capítulo, se llegó hasta los albores de la modernidad (1700 – 1800 NE, aproximadamente), cuando surgen relevantes descubrimientos para el tratamiento de lo infinito, tal como el renombrado Teorema del Binomio de Newton. Este teorema dio lugar al tratamiento heurístico de algunas expresiones numéricas que permiten calcular, en particular, algunos números irracionales por medio de series infinitas y fracciones continuas.

Algunas reflexiones didácticas

Este trabajo trató, de manera muy particular, de un seguimiento al desarrollo histórico del concepto de los números irracionales, escudriñando en su emergencia y en los episodios que enmarcaron su construcción, mencionando algunos de los desarrollos ocurridos en un amplio periodo de la historia humana.

Ahora bien, esta investigación (sustentada en el rastreo de diferentes episodios históricos) ha surgido con la intención principal de conocer a profundidad el desarrollo del concepto de número irracional y las técnicas para su cálculo aproximado, y así poder incorporar elementos de su historia a la práctica docente. Es decir, este trabajo se levanta sobre la hipótesis de que el conocimiento de la historia brinda elementos significativos que nutren, de manera asertiva, la enseñanza de un concepto. En concreto, los números irracionales.

Por todo esto, es interesante y satisfactorio poder presentar a continuación unas reflexiones didácticas que parten de un discurso desde la historia, las cuales ilustran la manera en que se podría llevar a cabo la enseñanza de los números irracionales, sustentados en los episodios históricos estudiados. Para ello se ofrecen unos anexos que materializan la propuesta, con unas guías de trabajo para el docente, diseñadas para llevar la noción de irracional al aula, en los diferentes grados escolares e incluso en algunos niveles de la universidad.

De esta manera se busca hacer asequible a los estudiantes los componentes históricos de los irracionales, ya sea desde lo aritmético, lo geométrico, lo algebraico o lo infinitesimal-analítico, en procura de despertar interés y curiosidad por el concepto de manera que repercuta de forma positiva en su aprendizaje; mostrando, retomando y adaptando algunos procesos utilizados en otros tiempos para comprender y describir el tema de la irracionalidad.

En este sentido, como se podrá observar en los anexos, las guías propuestas tendrán un mismo formato que consta de una introducción histórica donde se ubique cronológica y espacialmente al estudiante, mencionando los personajes que intervinieron en el episodio particular del cual tratará cada guía junto con los aportes o desarrollos que se llevaron a cabo en su momento. Luego se explica la actividad que se va a desarrollar, se describen los materiales concretos o digitales que se usarán y se plantea claramente el objetivo de la actividad. Finalmente se abre un espacio de reflexión donde se compartan las conclusiones del trabajo y su importancia para el conocimiento de los números irracionales.

En la primera guía se describe un proceso concreto de *anthyphairesis*. Allí se emplean palillos y se materializa la manera cómo, en la antigua Grecia, se buscaba un máximo común divisor, o lo que se pretende específicamente: encontrar la unidad más pequeña que mide simultáneamente a dos segmentos. Queda claro que en el párrafo introductorio se ubica a los estudiantes en la época, el espacio y se menciona el algoritmo de Euclides con cierto detalle, representando gráficamente el proceso. Luego se procede a desarrollar la actividad con material concreto, mostrando así en qué consiste dicho proceso debido a que es un componente esencial para las guías subsiguientes. Ver Anexo 1.

Las guías 2 y 3 se proponen como conjunto o complementos, pues ambas tratan de la inconmensurabilidad. La segunda guía se refiere el pentágono, usando una herramienta digital, el programa GeoGebra, para que al estudiante tenga la oportunidad de descubrir por sí mismo un proceso infinito, explorando el macro-espacio y micro-espacio, en la búsqueda de la unidad que logre medir simultáneamente la diagonal del pentágono y su lado. En la tercera guía se espera un proceso similar pero en esta ocasión con un proceso no dirigido, es decir, se pretende que el estudiante diseñe una estrategia de *anthyphairesis* (trabajada previamente) para descubrir la imposibilidad de encontrar dicho divisor común. Claramente estos procesos deben estar acompañados por el docente, quien deberá dominar ampliamente las ideas de las que se está tratando. Estas guías requieren de un manejo básico del programa Geogebra, lo que implica que previamente se debe realizar una sesión de capacitación. Ver Anexos 2 y 3.

La propuesta de guía número 4 ilustra un proceso algorítmico que se usaba en el siglo X (NE) para la extracción de la raíz cuadrada y que pudo ser un método útil para conocer una cierta cantidad de decimales para las raíces que constituyen números irracionales. Esta guía tiene un mayor grado de dificultad, en el sentido de no poder usar la calculadora. En verdad, el ejercicio tiene más impacto si se experimentan de forma directa los procesos que se usaban en la época. De esta forma, se puede develar con mayor fuerza esos episodios característicos y los obstáculos de los que se habla a lo largo del trabajo. Ver Anexo 4.

La propuesta de guía número 5 es bastante especial, pues muestra un proceso que ha perdido mucha importancia en los currículos de hoy, aun cuando es una forma muy interesante de mostrar los procesos infinitos, como lo es aquel de las fracciones continuas. También se puede usar para representar números racionales cuando se trata de fracciones continuas finitas. En esta guía se mencionan algunos autores que han trabajado dichas fracciones y se presentan ejemplos resueltos que permiten ilustrar los algoritmos utilizados para obtenerlas. Ver Anexo 5.

La guía número 6 trata sobre las series infinitas, las cuales surgen (como ya se explicó en el capítulo 3) con la aplicación directa en diferentes expresiones del Binomio de Newton, evento que fue de crucial importancia para la evolución histórica del concepto de los irracionales. A través de estas expresiones se logra hacer una representación del logaritmo natural de 2 con series infinitas. Esto implica inevitablemente describir tanto el Teorema del Binomio de Newton, como el Teorema de Fermat (para las integrales de una potencia), los que (para efectos de aplicación de la guía) solo se mencionan pero no se presentan con el detalle que se expone en el interior del trabajo. Esta guía requiere un mejor manejo de los procesos algebraicos, y por tanto es recomendada para los primeros semestres de la universidad. Ver Anexo 6.

En síntesis, durante el desarrollo del trabajo se ha podido evidenciar, a través de los diferentes episodios descritos en cada capítulo, cómo un concepto (en este caso los números irracionales) fue evolucionando, superando los obstáculos no solo culturales sino también de índole académico y procedimental como sucedió con el cambio del lenguaje geométrico–aritmético de los griegos, al lenguaje algebraico de los árabes, para avanzar luego al carácter infinitesimal en los albores de la modernidad, logrando así dar respuesta a la pregunta de investigación.

Bibliografía

Al-Uqlidisi, A.I.L. (1978). *The Arithmetic of Al-Uqlidisi. The story of Hindu-Arabic arithmetic as told in "Kitab al-fusul fial-hisab al-Hindi"*. (A. S. Saidan, Trans). Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company. (Trabajo original publicado en Damasco A.D. 952/3).

Beggren, J.L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York, EE. UU: Springer - Verlag.

Breezinski, C. (1941). *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Berlin, Alemania: Springer - Verlag

Crespo, C. (2008). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. Centro de investigaciones en ciencia aplicada y tecnología avanzada. CICATA–IPN. (México).

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid´s elements of geometry, "The Greek text of J. L. Heiberg (1883-1885)"*. Leipzig, Alemania: B.G. Teubner.

Euler, L. (1748). *Introducción al análisis de los infinitos*. (J.L. Arantegui, Trans. 2000). Utrera – Sevilla, España. Grafitres SL.

Escobar, A & Escobar B. (2015). *El error en el uso de los números racionales e irracionales, como evidencia de obstáculo epistemológico, en estudiantes del grado noveno*. (Tesis de maestría). Universidad de

Medellín, Medellín, Colombia.

Fauvel, J., Flood, R., y Wilson, R. (2003). *Music and mathematics*. New York: EEUU. Oxford University Prees.

Fritz, K. V. (1954). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. J. Christianidis (ed.), *Classics in the History of Greek Mathematics* (pp. 210-231). Atenas, Grecia: Kluwer Academic Publishers.

Hairer, E., y Wanner, G. (Ed). (2008). Analysis by Its History. New York, EEUU: Springer Science Business Media, LLC.

Havil, J. (2014). *Jhon Napier; Life, Logarithms and legancy*. Princeton, EEUU: Princeton University Press.

Heath, S.T. (1897). *The works of Arquimedes*. Reino Unido, Cambridge: Oxford University Press.

Heath, T.L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements, Vol 2 (books III-IX).* Trumpington Street, Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T.L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements, Vol 3 (books III-IX).* Trumpington Street, Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T.L. (1921). *A history of Greek mathematics Vol 1*. Reino Unido, Cambridge: Oxford University Press.

Heinemann, W. (Ed). (1957). Greek Mathematical Works: Volume I, Thales to Euclid. (Ivor Thomas, Trans.). Cambridge, Massachttsetts: Harvard University Press

Iamblichus (1818). *Iamblichus´Life of Pythagoras*. (T. Taylor, Trans). Londres: J. M. Watkins.

Kline, M. (1985). *Mathematics: the loss of certainty*. (Siglo XXI Editores, Trans. 2000). New York, EEUU: Oxford University Press.

Lagrange, J.L. (1877*). Oeuvres de Lagrange, publées par les soins de M. J.-A. Serret... [et de M. Gaston Darboux], sou le auspices de M. le Ministre de l'Instruction Publique, Vol. VII*. Paris, Francia: Gauthier - Villars.

Maor, E. (1994).*e The story of a Number*. Princeton, New Jersey: Princenton University Press.

Merzbach, U.C. y Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. Canada: John wiley & sons, Inc.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2011). El número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *Teorías, enfoques y aplicaciones en las ciencias sociales (TEACs), 4(08),* 31-45.

Vieta, F. (1646). *Opera matemática.* Leiden, Holanda: Bonaventure y Abraham Elzevir.

Wallis, J. (1656). *The arithmetic of the infinitesimals*. (J. A. Stendal, Trans. 2004). New York: Springer–Verlag. New York.

Young, L. C (1981). *Mathematicians and their times. History of mathematics and mathematics of History*. Amsterdam, Países bajos: North-Holland Publisching Company.

Anexo 1

Anthypharesis

Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Conocer el proceso de *anthyphairesis* (también conocido como Algoritmo de Euclides) para determinar magnitudes conmensurables.

UNA BREVE HISTORIA

La idea de *anthyphairesis* también conocida como algoritmo de Euclides, se remonta a la antigua Grecia, pues ya estaba consignada en los elementos de Euclides, en la primera proposición del libro 10 "Se dice que las magnitudes medidas por la misma medida son conmensurables, pero las magnitudes que no admiten tener una medida común, se dice que son incomensurables" Fitzpatric (2007). Dicho proceso se usó precisamente para determinar y definir la línea asignada a dicha medida, y llamando a las longitudes de dichas líneas conmensurables "racionales" y a las inconmensurables con ella "irracionales".

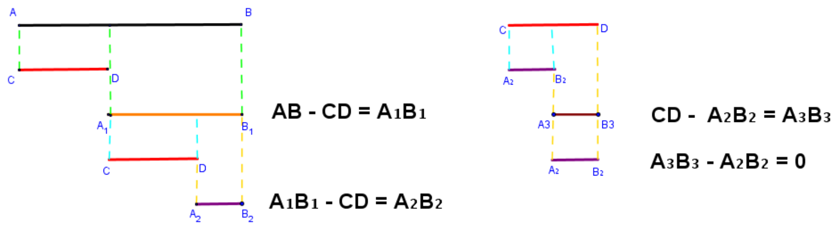
Es aquí pues, donde se puede comenzar a hablar acerca de estos conceptos (racional e irracional) y a partir de este proceso que se describe, se puede determinar más adelante la irracionalidad de algunos números en particular.

Magnitudes conmensurables

Se dice que dos magnitudes son conmensurables si existe una tercera magnitud con la cual se pueden medir simultáneamente.

La *anthyphairesis* es un procedimiento que consiste en encontrar la unidad más grande que mida dos magnitudes diferentes. Para ello se recurre a sustracciones repetidas. Veamos:

Supongamos que tenemos dos magnitudes $AB > CD$



Al sustraer CD de AB, obtenemos A_1B_1. Si $A_1B_1 > CD$ se sustrae CD de A_1B_1, obteniendo A_2B_2. Se repite el proceso. Cuando se llega a un segmento $A_kB_k < CD$, se cumple que

$$AB - k\ CD = A_KB_K$$

1. Si $A_kB_k = 0$, entonces CD es el mayor segmento que mide a AB y a CD.

2. Si $A_kB_k \neq 0$, se compara A_KB_K con CD y se procede a establecer en una segunda etapa el procedimiento anterior. Se pueden presentar dos casos:

i) A través de un número finito de etapas se llega a un segmento nulo. Los dos segmentos iguales de la etapa precedente corresponden al segmento buscado y las magnitudes serán conmensurables.

ii) El proceso sigue infinitamente, y no se logra obtener un segmento nulo. En este caso las magnitudes serán inconmensurables.

Actividad

Determinar la magnitud del segmento que divide a los dos pitillos que te entregarán (se entregan dos de cada uno para que al final se valide que el palito resultante efectivamente mide los dos iniciales).

Materiales: 2 pitillos grandes, 2 pitillos pequeños, tijeras y regla.

El procedimiento que se debe utilizar es igual que el descrito anteriormente (*anthyphairesis*), así que lo primero que se debe hacer es recortar del pitillo grande, una medida igual al pitillo pequeño, las veces que se pueda hacer, luego con la medida resultante se debe repetir el proceso hasta que los trozos queden iguales.

Conclusiones:

Evalúa la actividad

Anexo 2

Inconmensurabilidad - I

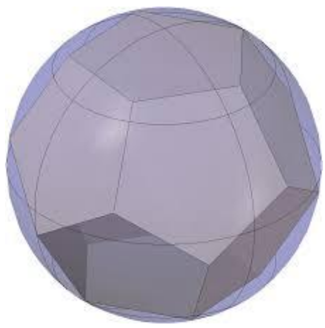
Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

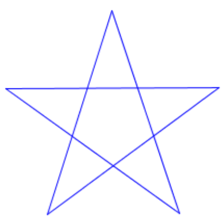
Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Explorar la idea de procesos infinitos y de inconmensurabilidad, usando las propiedades dinámicas del GeoGebra.

UNA BREVE HISTORIA

El descubrimiento de cantidades inconmensurables o como los Pitagóricos las llamaban cantidades no medibles, sucede alrededor de los siglos IV y V a.C. Aún no hay certeza de a quién atribuir tal descubrimiento, pero se cree que éste se le debe a un matemático y miembro de la secta Pitagórica llamado Hipaso de Metaponto, quien recibiría como castigo por revelar semejante secreto, el destierro y una tumba en su nombre simbolizando su muerte. Uno de los trabajos reveladores de este descubrimiento, fue el tratar de inscribir un dodecaedro en una esfera.





Pero quizás el evento de mayor credibilidad que pudiera ser la base para el descubrimiento de la inconmensurabilidad es la aparición de la sección de oro en el símbolo Pitagórico (estrella pentagonal), el cual permite ver la relación que hay entre la diagonal del pentágono regular con su lado.

Así pues, se habla de un hallazgo sin precedentes que daría origen a una idea que aún hoy (alrededor de 2500 años después) podría generar inquietudes o dificultades de comprensión: Los números irracionales.

Una idea de infinito – El pentágono

1. Crear un documento nuevo en GeoGebra con la página en blanco.
2. Dibujar un pentágono regular (lo más grande posible).
3. Dibujar las diagonales del pentágono – (segmento)
4. Repetir el paso anterior en el pentágono que se formó con las diagonales.
5. Usar la herramienta aproximar, para poder trazar diagonales en el nuevo pentágono.
6. Repite los procesos anteriores tres veces más.

¿Cuántas veces crees que se puede hacer? ______________________

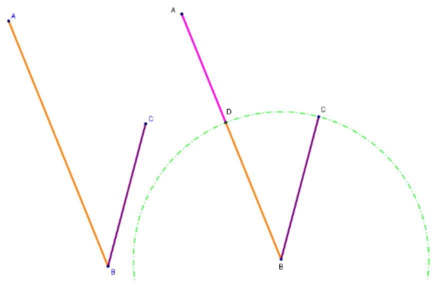
(Ver animación 1)

Inconmensurabilidad en el pentágono

Usar el método de antipharesis para buscar un segmento que pueda medir la diagonal del pentágono, y su lado respectivo.

Tener en cuenta que si se quiere restar un segmento de otro, se puede usar la herramienta compás, para demarcar la diferenci

$$\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AD}$$



(Prestar atención a la socialización)

¿Qué conclusión sacas?

Anexo 3

Inconmensurabilidad - II

Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Explorar la idea de procesos infinitos y de inconmensurabilidad, usando las propiedades dinámicas del GeoGebra.

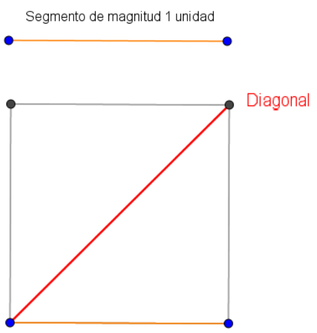
UNA BREVE HISTORIA

Ya se había hablado de Hipasos de Metaponto y su posible revelación acerca de la inconmensurabilidad a través de la relación entre el lado del pentágono y su diagonal, pero otro de los descubrimientos que pudieron dar a luz la idea de inconmensurabilidad, fue encontrarse con la imposibilidad de medir la diagonal de un cuadrado respecto a su lado, lo cual era inaceptable para los Pitagóricos, pues dicho movimiento promulga que "la esencia eterna del número es el principio más providencial del universo, del cielo y de la tierra, y de la naturaleza intermedia…”"(Taylor, 1818, p. 34). Ellos pensaban que todas las medidas se podían expresar en términos de los números enteros, por lo que tal hallazgo sería de naturaleza abrumadora, impensable, “irracional”.

No se sabe cuál fue el primer problema o qué originó el descubrimiento de estas medidas, “pero es cierto que la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado, es decir, la "irracionalidad" de $\sqrt{2}$, fue descubierto en la escuela de Pitágoras” (Heath, 1921, p. 91).

Inconmensurabilidad en el cuadrado

El cuadrado tiene unas características que lo hacen especial, con bondades y simetrías que le han posicionado como un polígono simple y muy útil como unidad de medida básica de las áreas.



Sin embargo, es muy probable que en sí mismo se encontrara uno de los detonantes del problema griego de los inconmensurables al pretender establecer relaciones cuantitativas entre su lado y la diagonal.

Actividad

Usar el método de antipharesis para buscar un segmento que pueda medir la diagonal del cuadrado, y su lado respectivamente.

Describir el procedimiento utilizado.

¿Qué conclusiones sacas?

Expresa en tus palabras qué es inconmensurabilidad.

Evalúa la sesión (lo bueno, lo interesante y lo que se puede mejorar)

(Ver Animación 2)

Anexo 4

Una interesante forma de extraer la raíz cuadrada

Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Conocer el proceso empleado por los musulmanes en el siglo XV para determinar raíces cuadradas.

UNA BREVE HISTORIA

Algoritmos de los grandes maestros musulmanes

En el Islam medieval el concepto de raíz, *jadhr*, significa el origen de cualquier cosa. Al-Shahrazuri menciona una máxima del Profeta: "la honradez está en las raíces de los corazones de los hombres" (Saidan, 1978, p. 437). Los pensadores islámicos tenían diferentes connotaciones para la noción raíz, según el contexto. En los negocios se referían a ella como *jadhr* (la raíz debería ser exacta, pero si no lo era se referían a ella como *asamm*); en geometría le decían *dil´* y en algebra, *shay*.

A diferencia de los griegos antiguos, los maestros musulmanes utilizaban el poderoso sistema decimal, con una muy buena notación algebraica. Con estas herramientas superaron las heurísticas desarrollando algoritmos efectivos para encontrar raíces de cualquier grado entero, prácticamente.

Y también fueron capaces de dar definiciones más precisas. Al-Uqlidisi define la raíz como "un número que ha de ser multiplicado por sí mismo para dar el número cuya raíz se va a extraer" (Saidan, 1978, p.437). Además, en otros textos que utilizan la misma definición, agregan que la raíz cuadrada x satisface la relación $1{:}\,x :: x : n$. Esto guarda con la relación media y extrema para determinar la cuadratura de un rectángulo de área n cuya raíz es x.

Un ejemplo con raíz cuadrada exacta

El siguiente cuadro describe el paso a paso del proceso que se emplea y para leerlo correctamente es importante seguir el orden que muestra la primera columna donde se nombra el número de fila, pues es así como se procede.

Se verifica el procedimiento para $\sqrt{56.169}$

f2	A	B	C	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento
	2	***3***	***7***	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
f1	**5**	**61**	**69**	Se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda
f4	4			Se coloca el cuadrado de $A^2 = 2^2 = 4$
f5	1	61		Se resta la fila 1 con la 4 $(5-4=1)$ y se baja el 61. será $\Delta 1 = 161$
f8	1	29		Se coloca el producto obtenido en la fila 7
f9		32	69	Se resta la fila 5 con la 8: $161 - 129 = 32$ y se baja el 69. $\Delta 2 = 3269$
f12		32	69	Se coloca el producto obtenido en la fila 11
f13			0	Se resta la fila 9 y la 12
f11		4	74	$(460+x)x \leq 3269 \rightarrow (460+7)7 \leq 3269 \rightarrow 3269 \leq 3269$ Luego ese número $x =$ **7** se coloca en C y en la fila 11 se coloca (F10 + 2C)
f10		4	60	La fila 7 y se multiplica por 10 $\rightarrow 46 \cdot 10 = 460$
f7		46		Se busca un x que cumpla $(40+x)x \leq 161 \rightarrow (40+3)3 \leq 161$ $\mathbf{129} \leq 161$ Luego ese número $x =$ **3** se coloca en B y en la fila 7 se coloca (F6 + 2B)
f6		40		Se coloca $2A \cdot 10 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$
f3	2			Se escoge el 2 porque $2^2 \leq 5$ y se coloca en la casilla de A = ***2***

Luego, el número obtenido 237 corresponde a la raíz cuadrada de 56.169. Usando este método, no solo se pueden encontrar raíces exactas sino que también se puede usar para determinar algunos decimales de números irracionales como por ejemplo raíz de dos, pues, generalizando el ciclo que se repite, se puede utilizar el proceso para encontrar tantos decimales de raíz de dos como se quieran, es decir, se puede continuar con el proceso indefinidamente.

Veamos el proceso completo resuelto, con la intención de que sirva como guía para desarrollar la actividad propuesta más adelante.

f2	A	B	C	D	E	F	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento
	1	***4***	***1***	***4***	***2***	***1***	En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
f1	**2**	**00**	**00**	**00**	**00**	**00**	Se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda (a)
f4	1						Se coloca el cuadrado de A , es decir: $A^2 = 1^2$
f5	1	00					Se resta $2 - 1 = 1$ y se baja el 00. esta fila será $\Delta 1 = 100$
f8		96					Se coloca el producto obtenido en la fila 7 (96)
f9		4	00				Se resta la fila 5 con la 8 y se baja el 00: $100 - 96 = 4$ $\Delta 2 = 400$
f12		2	81				Se coloca el producto obtenido en la fila 11
f13		1	19	00			Se resta la fila 9 y la 12 y se baja el 00 → $400 - 281 = 119$ $\Delta 3 = 11900$
f16		1	12	96			Se coloca el producto obtenido en la fila 15
f17			6	04	00		Se resta la fila 13 y la 16 y se baja el 00 → $11900 - 11296 = 604$ $\Delta 4 = 60400$
f20			5	65	64		Se coloca el producto obtenido en la fila 19
f21				38	36	00	Se resta la fila 17 y la 20 y se baja el 00 → $60400 - 56564 = 3836$ $\Delta 5 = 383600$
f24				28	28	41	Se coloca el producto obtenido en la fila 23
f25				10	07	59	Se resta la fila 21 y la 24 y se baja…→ $\Delta 6 = 383600 - 282841 = 100759$
f23				28	28	41	$(282840 + x)x \leq 383600 \rightarrow (282840 + 1)1 \leq 383600 \rightarrow \mathbf{282841} \leq 383600$
f22				28	28	40	La fila 19 y se multiplica por 10 → $(28282 + 2) \cdot 10 = 282840$
f19			2	82	82		$(28280 + x)x \leq 60400 \rightarrow (28280 + 2)2 \leq 60400 \rightarrow \mathbf{56564} \leq 60400$ Luego ese número $x = \mathbf{2}$ se coloca en E y en la fila 19 se coloca (F18 + 2E)
f18			2	82	80		La fila 15 y se multiplica por 10 → $2828 \cdot 10 = 28280$
f15			28	28			Se busca un x que cumpla que $(2820 + x)x \leq 11900 \rightarrow (2820 + 4)4 \leq 11900$ Luego ese número $x = \mathbf{4}$ se coloca en D y en la fila 15 se coloca (F14 + 2D)
f14			28	20			La fila 11 y se multiplica por 10 → $282 \cdot 10 = 2820$
f11		2	82				Se busca un x que cumpla que $(280 + x)x \leq 400 \rightarrow (280 + 1)1 \leq 400 \rightarrow \mathbf{281}$ Luego ese número $x = \mathbf{1}$ se coloca en C y en la fila 11 se coloca (F10 + 2C)
f10		2	80				La fila 7 y se multiplica por 10 → $28 \cdot 10 = 280$
f7		28					Se busca un x que cumpla que $(20 + x)x \leq 100 \rightarrow (20 + 4)4 \leq 100 \rightarrow \mathbf{96} \leq 100$ Luego ese número $x = \mathbf{4}$ se coloca en B y en la fila 7 se coloca (F6 + 2B)
f6		20					Se coloca $2A \cdot 10$ → $2 \cdot 1 \cdot 10 = 20$
f3	1						Se escoge el uno porque $1^2 \leq 2$ y se coloca en la casilla de A = **1**

De esta manera se observa cómo al multiplicar dos por una potencia de 10, en este caso 10^{10}, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{2\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00}}{\sqrt{10000000000}} \approx \frac{141421}{100000} \approx 1.41421$$

Se puede observar que el ciclo que se repite, lo conforman cuatro pasos:
4,5,6,7 - 8,9,10,11 - 12, 13, 14, 15 - 16, 17, 18, 19 - 20, 21, 22, 23
Entonces, se puede continuar cuantas veces se quiera, agregando dos ceros más cada vez. Se encuentra una dificultad en este proceso, concerniente al tamaño del número que se va obteniendo cada vez, que crece de forma sustancial de manera que las operaciones que se requiere se vuelven cada vez más complejas.

Actividad

Complete la tabla para obtener los primeros cinco decimales de raíz de 3.

f2	A	B	C	D	E	F	Se asigna a cada cifra una letra para efectos del procedimiento
	1						En estas casillas se irán colocando los dígitos de la raíz – el número buscado
f1	3	00	00	00	00	00	Se escribe el número separado de dos cifras de derecha a izquierda (a)
f4	1						Se coloca el cuadrado de $A^2 = 1^2$
f5	2	00					Se resta $3 - 1 = 2$ y se baja el 00. esta fila será $\Delta 1 = 200$
f8							Se coloca el producto obtenido en la fila 7
f9							Se resta la fila 5 con la 8 y se baja el 00 $\to \Delta 2 =$ ________________
f12							Se coloca el producto obtenido en la fila 11
f13							Se resta la fila 9 y la 12 y se baja el 00 $\to$ $\Delta 3 =$ ________________
f16							Se coloca el producto obtenido en la fila 15
f17							Se resta la fila 13 y la 16 y se baja el 00 $\to \Delta 4 =$ ________________
f20							Se coloca el producto obtenido en la fila 19
f21							Se resta la fila 17 y la 20 y se baja el 00 $\to \Delta 5 =$ ________________
f24							Se coloca el producto obtenido en la fila 23
f25							Se resta la fila 21 y la 24 y se baja…$\to \Delta 6 =$ ________________
f23							(________ $+ x)x \le$ ________ $\to x =$ ____(F) $\to$ __________ $\le$ __________ En la fila 23 se coloca (F22 + 2F)
f22							La fila 19 y se multiplica por 10 $\to$ (__________)$\cdot 10 =$ __________
f19							(________ $+ x)x \le$ ________ $\to x =$ ____(E) $\to$ __________ $\le$ __________ En la fila 19 se coloca (F18 + 2E)
f18							La fila 15 y se multiplica por 10 $\to$ (__________)$\cdot 10 =$ __________
f15							(________ $+ x)x \le$ ________ $\to x =$ ____(D) $\to$ __________ $\le$ __________ En la fila 15 se coloca (F14 + 2D)
f14							La fila 11 y se multiplica por 10 $\to$ (__________)$\cdot 10 =$ __________
f11							(________ $+ x)x \le$ ________ $\to x =$ ____(C) $\to$ __________ $\le$ __________ En la fila 11 se coloca (F10 + 2C)
f10							La fila 7 y se multiplica por 10 $\to$ (__________)$\cdot 10 =$ __________
f7							(________ $+ x)x \le$ ________ $\to x =$ ____(B) $\to$ __________ $\le$ __________ En la fila 7 se coloca (F6 + 2B)
f6		20					Se coloca $2A \cdot 10 \to 2 \cdot 1 \cdot 10 = 20$
3	1						Se escoge el uno porque $1^2 \le 2$ y se coloca en la casilla de $A = 1$

Anexo 5

El infinito en las fracciones continuas

Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Conocer el proceso para obtener fracciones continuas, su relación con el algoritmo de Euclides y su aplicación en la representación de números irracionales.

UNA BREVE HISTORIA

Antes que nada es importante anotar que las fracciones continuas tienen una relación directa con el método conocido como Antipheresis (método para encontrar una unidad de medida común) y por tanto también con el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de dos números.

Aunque desde la antigua Grecia se tenía ya un trabajo con las fracciones continuas, es en los siglos XVII y XVIII donde se sistematiza de manera más formal, confluyendo en la notación proporcionada por Leibniz (1698) en su libro póstumo Descriptio automati planerarii, luego utilizada por Euler (1748) en su texto Introducción al análisis de los infinitos en su capítulo XVIII y posteriormente utilizado por Lagrange (1877) en su texto Oeuvres tomo VII donde explica una de las formas que puede tener una fracción continúa las cuales ocurren según Lagrange (1877) “cada vez que se trata de expresar en números cantidades fraccionarias o irracionales”. Dado que este método es uno de los más apropiados para dar aproximaciones a estos números, sobre todo para los irracionales los cuales por mucho tiempo hicieron ruido en diferentes culturas y matemáticos, quienes a su vez no solo debían aceptarlos sino que además buscaban la forma de llegar a ellos mediante aproximaciones.

Fracción Continua

Veremos a continuación un ejemplo de cómo se obtiene una fracción continua que representa una fracción impropia. Dicha fracción continua tiene la forma

$$\boldsymbol{a}+\cfrac{1}{\boldsymbol{b}+\cfrac{1}{\boldsymbol{c}+\cfrac{1}{\boldsymbol{d}+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Se toma como ejemplo la fracción $\frac{226}{42}$ y como primera instancia, se realiza la división indicada obteniendo $\frac{226}{42} = \mathbf{5} + \frac{16}{42}$ luego, Aplicando la propiedad del inverso multiplicativo se tiene que $\frac{226}{42} = \mathbf{5} + \frac{1}{\frac{42}{16}}$ y se continúa de la misma manera con la fracción obtenida $\frac{42}{16}$ así:

$$\frac{226}{42} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\cfrac{42}{16}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{2+\cfrac{10}{16}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{\cfrac{16}{10}}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{10}}}$$

$$\frac{226}{42} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{10}{6}}}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{6}}}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{6}{4}}}}}$$

$$\frac{226}{42} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{4}}}}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{4}{2}}}}}} = \mathbf{5} + \cfrac{1}{\mathbf{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

Actividad 1

1. Encuentra la fracción continua correspondiente a cada fracción impropia:

a) $\frac{54}{13}$ b) $\frac{97}{23}$ c) $\frac{614}{71}$

¿Cómo sabes cuándo termina la fracción continua?

____

____

2. Inventa una fracción continua y averigua a qué fracción corresponde.

Las fracciones continuas también pueden ser infinitas, implicando con ello que representan un número irracional, veamos:

El siguiente método tiene que ver con la solución de las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 - nx - 1 = 0$; donde $n \in N$. Y donde se puede obtener uno de los números más fascinantes de la historia debido a que se puede encontrar fácilmente en la naturaleza, la arquitectura y en nuestro cuerpo humano, estamos hablando de Fi (φ).

$x^2 - nx - 1 = 0 \rightarrow x^2 - nx = 1 \rightarrow x - n = \frac{1}{x}$ Obteniendo así nuestra expresión de recurrencia $x = n + \frac{1}{x}$. En donde lo que se hace es reemplazar la x una y otra vez, hasta que se desee:

$$x = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x}}}}}$$

Luego cuando $n = 1$ se tiene que $x = 1 + \frac{1}{x}$ (E_1) y solucionando la ecuación cuadrática se tiene que $x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1^2+4}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi(E_2)$ igualando $(E_1) = (E_2)$se obtiene $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$, observemos ahora su convergencia:

I. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1} = 2$

II. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

III. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}66666\,\ldots.$

IV. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

Actividad 2

1. Encuentra la fracción continua correspondiente cuando:

a) $n = 2$ b) $n = 5$

2. Encuentra su número (irracional) correspondiente usando la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.

3. Verifica su convergencia.

Anexo 6

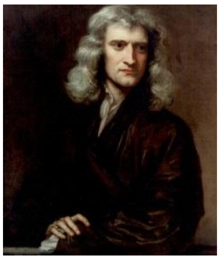
Los irracionales como series infinitas

Episodios de la aventura de los irracionales en los albores de la modernidad

Sirwuendy Cardona Posada sirwendy@gmail.com
Mauricio Muñoz Zapata matemauro@hotmail.com
Asesor: Leonardo Solanilla

OBJETIVO: Conocer el proceso para obtener series que representan números irracionales, a partir de conocido Teorema del Binomio de Newton

UNA BREVE HISTORIA



Sir Isaac Newton (1643-1727) desarrolló un método para interpolar una ecuación a través de diferencias lo que tal vez, pudo ser la base para la formulación del Teorema del Binomio, aunque "incluso Newton descubrió que su argumento de interpolación era peligroso" (*Analisys by Its History*, 2008, p. 24). Casi dos siglos después, en 1826, este famoso teorema sería demostrado rigurosamente por el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802 -1829). La fórmula del binomio, para a racional, es

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}\cdot x + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \cdots$$

Aquí aparece por primera vez la idea de una suma o serie infinita. Este teorema será de gran utilidad para verificar la expresión de algunas funciones en tales series infinitas. En efecto, como menciona Euler en su *Introducción al análisis de los infinitos*, "se suelen buscar expresiones que se prolongan hasta infinito para exponer el valor de cualquier función quebrada o irracional" (Arantegui, 2000, p. 59). El resultado se puede entender y utilizar como un método heurístico para hacer un acercamiento numérico a algunos irracionales en la forma $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$ Esta es una forma "más apta para representar en la mente funciones de toda índole, aun cuando el número de términos sea infinito" (Arantegui, 2000. P. 60). Con esta herramienta se pueden estudiar los números irracionales, así como otros nuevos números desconocidos antes del Renacimiento.

Series Infinitas

Con un minucioso proceso que se desarrolló en el siglo XVII se pudo determinar que el área bajo la gráfica de una función racional como $y = \frac{1}{x+1}$ corresponde a una función logarítmica $ln(x+1)$ por lo que se puede entonces obtener el área, usando la expansión del binomio de Newton y el Teorema de Fermat.

$y = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ Propiedad de la potencia

$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$ Binomio de Newton

Para $a = -1$

$$y = (x+1)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1} \cdot x + \frac{(-1)\big((-1)-1\big)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(-1)\big((-1)-1\big)\big((-1)-2\big)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

$y = 1 - 1 \cdot x + \frac{2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$ Operando.

$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ Simplificando.

Luego, con el Teorema de Fermat que indica que el área bajo la curva $y = x^a$ entre 0 y B está dada por $S = \frac{B^{a+1}}{a+1}$ $si\ a > -1$

Se puede verificar término a término en la serie:

$$y = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Y ya que como se mencionó antes, el área bajo esta curva corresponde a una función logarítmica, entonces queda que:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots$$

De esta manera se puede obtener, al reemplazar x por 1, una expresión para $ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots$ de donde se obtienen las aproximaciones sucesivas

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}83333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{,}583333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0{,}783333$$

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 0{,}616666$$

Que se acercará cada vez más al valor del logaritmo natural de 2 que se conoce actualmente, que es aproximadamente $ln(2) = 0{,}69314718 \dots$ teniendo presente que no es una convergencia muy rápida, es decir, tarda bastante en acercarse al número conocido. Hay otras maneras de encontrar series infinitas que determinen logaritmo natural de dos, de una manera más rápida.

Por ejemplo: al cambiar x por –x se obtiene

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Que de acuerdo con la definición del logaritmo se puede reescribir de la siguiente manera:

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = ln(x+1) - ln(1-x)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots\right)$$

Que sería otra manera de crear una serie para ln2, haciendo $x = \frac{1}{3}$

$$ln\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = ln\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = ln2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} \dots\right)$$

$$ln2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \dots$$

Veamos cómo es la convergencia:

$$ln2 \approx \frac{2}{3} \approx 0.6666666$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} \approx 0.691358$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} \approx 0.693004$$

$$ln2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \approx 0.69313$$

Es evidente que esta serie converge más rápidamente al valor esperado para logaritmo natural de dos. De esta manera se puede también verificar una serie infinita para $ln(3)$:

Se busca primero escribir el 3 en términos de un número al cual ya se conozca la serie para describirlo, por ejemplo el 2,

$3 = \frac{3}{2} \cdot 2$ y luego se busca un x tal que $\frac{(x+1)}{(1-x)} = \frac{3}{2}$

$$2(x+1) = 3(1-x) \rightarrow 2x + 2 = 3 - 3x \rightarrow 5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$ln\frac{(x+1)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots\right)$$

$$ln\frac{\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{5}\right)} = ln\frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = ln\frac{3}{2} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{7} \dots\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} \dots$$

De esta forma se tiene que

$$ln(3) = ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln(2)$$

$$ln(3) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} \dots + \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \dots$$

$$ln(3) = 1{,}098612288 \dots$$

De forma análoga se puede encontrar una serie infinita que converja en un logaritmo natural de algún otro número.

Hasta ahora se verificó el trabajo con logaritmos neperianos o naturales, los cuales no presentan una base explícita para el logaritmo ni muestra una relación directa con las funciones exponenciales, ya que se trabajó como una función que surge, como ya se mencionó, de las relaciones entre las funciones, es decir de razones y proporciones, como lo describe Havil (2014), "Es oportuno recordarnos la tarea que Napier había establecido él mismo: para asignar a cada minuto de cada grado del primer cuadrante un número que inicialmente denominó artificial y, posteriormente, logaritmo, lo que permitió la fácil manipulación de los senos de los ángulos." (p. 97)

Actividad

Determinar una serie infinita que represente el $ln(5)$ y otra para el $ln(7)$