UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS: UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:

CARLOS MARIO GARCÍA ARANGO
DARLING ENITH AGUALIMPIA OREJUELA

TRABAJO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS
MEDELLÍN
2018

EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS: UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:

CARLOS MARIO GARCÍA ARANGO
DARLING ENITH AGUALIMPIA OREJUELA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACION
CON ENFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dra. MARCELA PARRAGUEZ GONZÁLEZ

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS
MEDELLÍN,
MAYO DE 2018

DEDICATORIA

A mis hijos, Jhon Alexis y Darcy Nathaly, quienes han sido mi motor y fuente de inspiración para alcanzar este objetivo.

A mi madre, por el gran apoyo y paciencia que tuvo conmigo en el transcurso de la investigación. Darling.

A mi familia, quienes contaron con mis continuas ausencias y por depositar en mí su voto de confianza en este proceso, en especial, a mi Padre, Luis Javier, quien se convirtió en mi referente de vida. Carlos

A Dios, por premiarnos con el privilegio de la vida y por brindarnos la fortaleza para llevar a feliz término nuestro proyecto, pese a las adversidades que se nos presentaron en el camino.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi compañero y amigo Carlos Mario García Arango, por ayudarme a retomar el camino en momentos difíciles. Darling

A nuestros asesores, Doctor Luis Albeiro Zabala Jaramillo y Doctora Marcela Parraguez González, por su apoyo incondicional, su infinita paciencia y por sembrar en nosotros la motivación necesaria para la consecución de este importante logro.

A la Institución Educativa Juan de Dios Cock, directivos, docentes y estudiantes que apoyaron y participaron de manera directa o indirecta este proceso investigativo.

RESUMEN

En la realización de esta tesis de maestría se analizan las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del concepto de Área de figuras planas al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento, Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estructural para el desarrollo de competencias matemáticas, en el grado Tercero y Octavo de la Institución Educativa Juan de Dios Cock de la ciudad de Medellín. La problemática surge al verificar los resultados, tanto en pruebas internas como en pruebas externas (Pruebas Saber), donde se detectaron debilidades en sus diferentes componentes, destacando las habilidades geométrico-métrico y numérico-variacional como puntos álgidos.

Como conjunto experimental se seleccionaron 15 estudiantes del grado Tercero, mientras que en el grado Octavo se seleccionaron 14 estudiantes. Todos ellos abordaron el concepto de Área en las clases regulares de geometría a través de actividades de aula planeadas previamente. Para el grado Octavo los estudiantes del grupo experimental se repartieron en dos casos; los del primer caso participaron de las clases regulares y los 5 estudiantes del segundo caso recibieron adicionalmente un curso de tres clases sobre el software Cabri II plus. Los estudiantes fueron escogidos bajo parámetros de buen desempeño que favorecieran el desarrollo de la investigación, disminuyendo así la interacción de variables externas.

Para cada grado se aplicó un cuestionario compuesto por cinco actividades. Con base en la teoría, a cada cuestionario se le realizó un análisis a priori y a posteriori por pregunta, donde se pretendió mostrar un paralelo entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió en cuanto al tránsito del concepto de Área a través de los tres Modos mediante el uso de elementos Articuladores hipotéticos considerados en el capítulo 3 del presente escrito. Durante la implementación se realizó registro de audio y video para evidenciar los avances, mientras que las dudas planteadas por los estudiantes se documentaron en diario de campo. Se estableció una metodología con enfoque cualitativo con estudio de casos, según Stake (2010).

Con base en el análisis de la información y desde una perspectiva histórico-epistemológica, se diseñó una Unidad Didáctica para cada grado fundamentadas en la teoría Modos de Pensamiento (Sierpinska 2000). Cada Unidad busca promover paulatinamente el tránsito entre los tres Modos de Pensamiento para la comprensión profunda del objeto matemático de estudio. Para el grado Octavo, se implementaron actividades con el software Cabri para la construcción de elementos geométricos desde sus propiedades, lo cual promueve el pensamiento estructural. En el grado tercero se implementaron actividades donde se promovió el uso de material didáctico como el tangram y el recorte de papel, herramientas que permiten identificar las propiedades del Área, además, fortalecen el razonamiento.

SUMMARY

In this master's thesis, we try to analyze the implications of teaching and learning the concept of Area of flat shapes are analyzed when implementing a Didactic Unit based on the theory of Thinking Modes, Geometric Synthetic, Arithmetic Analytical and Structural Analytical for the development of mathematical competences in Third and Eighth grade in the Educational Institution Juan de Dios Cock, in the city of Medellín. The problem arises when verifying the results, both in internal tests and in external tests (Pruebas Saber), where weaknesses were detected in its different components, highlighting the geometric-metric and numerical-variational skills as high points.

As an experimental group, 15 students of the Third grade were selected, while in the Eighth grade, 14 students were selected. All of them addressed the concept of Area in regular geometry classes through previously planned classroom activities. For the Eighth grade the students of the experimental group were divided into two cases; those in the first case participated in the regular classes and the 5 students in the second case received a three-class course on the Cabri II plus software. The students were chosen under parameters of good performance that favored the development of research, thus decreasing the interaction of external variables.

For each grade a questionnaire composed of five activities was applied. Based on the theory, each questionnaire was analyzed a priori and posteriori by question, where it was intended to show a parallel between what was expected and what actually happened in terms of the transit of the concept of Area through the three Modes through the use of elements hypothetical Articulators considered in chapter 3 of this writing. During the implementation, audio and video recordings were made to show progress, while the questions raised by the students were documented in the field diary. A methodology with a qualitative approach was established with case studies, according to Stake (2010).

Based on the analysis of the information and from a historical-epistemological perspective, a Didactic Unit was designed for each degree based on the theory of Thinking Modes (Sierpinska 2000). Each Unit seeks to gradually promote the transition between the three Modes of thought for the deep understanding of the mathematical object of study. For the Eighth grade, activities were implemented with the Cabri software for the construction of geometric elements from their properties, which promotes structural thinking. In the third grade, activities were implemented to promote the use of teaching materials such as tangram and paper cutting, tools that allow identifying the properties of the Area, as well as strengthening the reasoning.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tiene como objeto documentar la experiencia que surgió a raíz de las dificultades en la concepción del Área de figuras planas presentadas por los estudiantes de los grados Tercero y Octavo y evidenciadas en los bajos resultados de pruebas internas y pruebas externas en la Institución Educativa Juan de Dios Cock de la ciudad de Medellín.

En el capítulo 1 se realiza el planteamiento de la problemática que dio lugar al diseño de la presente tesis de maestría. Así también, se referencian los factores, desde la perspectiva de la enseñanza y que repercuten en aprendizajes memorísticos, con pocos fundamentos teóricos y desligados del contexto real. Seguidamente, se presentan algunos trabajos de investigación relacionados con el concepto del Área, obteniendo resultados satisfactorios y que representan para nosotros un punto de partida. Finalmente se presentan también en este capítulo la hipótesis y los objetivos de la investigación.

En el capítulo 2 se presenta un recorrido histórico y epistemológico que dio lugar al desarrollo y consolidación del concepto de Área. Luego, se concluye con un desarrollo teórico del concepto de Área tratado desde su definición axiomática, el que permitió establecer sus propiedades.

En el tercer capítulo se hace referencia al marco teórico que conduce los lineamientos de nuestra investigación. Los Modos de Pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000) enmarcan la interpretación de los objetos matemáticos en tres tipos de pensamiento: Sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural. Desde estos Modos de Pensamiento se quiere promover el tránsito del concepto de Área para lograr la concepción profunda del mismo. Al final de este capítulo se presentan los elementos Articuladores hipotéticos, los cuales emergen después de un análisis de los aspectos históricos y epistemológicos que se exhibieron en el capítulo 2.

El diseño metodológico se presenta en el cuarto capítulo y es aquí donde se expone el procedimiento que da validez científica a la investigación, la cual se desarrolla con corte empírico experimental, con un enfoque cualitativo y mediante un estudio de casos. Se comienza con la realización de pruebas diagnósticas que permitieron la detección y confirmación de la problemática. En este capítulo se define también la manera en que se diseñaron los cuestionarios de aplicación a los estudiantes y los instrumentos utilizados para el posterior análisis de la información.

En el capítulo 5 se hace análisis de datos, es decir, con la información recogida durante la aplicación de los Cuestionarios, se verifica el cumplimiento de los objetivos trazados. Para esto se hizo necesario realizar un análisis a priori y a posteriori, es decir, un paralelo entre lo que se esperaba de los estudiantes y lo obtenido. El análisis se enmarca en la teoría Modos de pensamiento y el uso de los elementos Articuladores que propiciaron el tránsito por los tres Modos de Pensamiento. El análisis de la información se sintetiza en tablas donde se detalla por pregunta lo conseguido después de la aplicación de los Cuestionarios. Durante el análisis de la información se exponen algunas evidencias que sustentan la investigación. Finalmente se presentan algunas conclusiones con respecto a los hallazgos encontrados.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones inherentes al desarrollo de la investigación en cuanto a la comprensión del Área de figuras planas. Se presentan, además, algunas sugerencias para la construcción de Unidades Didácticas y para la comunidad educativa interesada en enseñar este objeto matemático.

Índice

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la problemática, allí se muestran algunas de las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del concepto de Área, comenzando por un análisis histórico y continuando con las problemáticas actuales en la Institución, en donde, según resultados en pruebas internas y externas, se han obtenido bajos desempeños en los estudiantes. Seguidamente se exhiben algunos antecedentes que permitieron analizar el contexto actual de la problemática y que sirvieron de orientación y punto de partida para conocer los avances investigativos en torno al concepto de Área. Para finalizar, se formulan los objetivos para esta investigación.

1.1 PROBLEMÁTICA

Muchos siglos han tenido que transcurrir antes de que el mundo científico reflexionara acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje que se imparte en la escuela, el cual es necesario para que las nuevas generaciones hereden el saber matemático que impacta directamente en el desarrollo de las diferentes ciencias y, por ende, en la evolución de los pueblos. Al respecto, Brousseau (1986) sostiene que durante mucho tiempo el docente fue el centro del proceso y se desconoció al estudiante como el eslabón que propicia la continuidad del saber. Esto desencadenó una problemática en el aprendizaje.

Desde la perspectiva de Turégano (1998), los obstáculos y retos que la misma matemática ha trazado a través de su evolución histórica coinciden con algunas de las vivencias actuales en las aulas de clase.

En esta investigación se quiere resaltar la importancia histórica y epistemológica que dieron lugar a la consolidación de la geometría y en particular al concepto de Área de figuras planas.

> La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. (Ministerio de Educación nacional [MEN], 2004, p.1)

Por otra parte, Godino (2010) afirma que el discurso matemático que se practica en la escuela ha desconocido el hecho epistemológico y didáctico, lo que ha desencadenado en saberes abstractos, generalizados y fuera de contexto.

Desde un ángulo más preciso, se puede analizar la problemática situándonos en el fenómeno del aprendizaje. Desde nuestra experiencia en el aula, en lo que respecta a figuras planas, es común que los estudiantes confundan los conceptos de Área y perímetro o que simplemente no tengan una idea mental sobre los mismos. Es habitual que creen una estrecha dependencia entre ambos conceptos y que no consideren el carácter unidimensional del perímetro y el bidimensional del Área.

Godino (2010) también hace alusión sobre la memorización de fórmulas matemáticas, lo que no es ajeno al cálculo de Áreas, por lo tanto, el Estudiante se limita a aprender y seguir procesos mecánicos sin razonamiento, lo cual no le permite extender los conceptos a otros campos. Expresado lo anterior desde otra perspectiva, el Estudiante privilegia en su forma de pensar un trabajo numérico, desconociendo en muchas ocasiones una forma de pensar donde la representación semiótica le otorgue validez.

Cuando revisamos con mayor profundidad el problema del aprendizaje del concepto de Área, encontramos que muchas de las dificultades resultan como consecuencia de la enseñanza, como lo hace ver Brousseau (1986). Durante gran parte de nuestra historia este aspecto fue ignorado ya que el docente era el centro del proceso. De esta manera un docente no puede transferir conocimiento sin la didáctica incluida y al mismo tiempo esta no funciona por sí sola. Chevallard (1997) sugiere al respecto que debe haber una transposición didáctica desde el saber sabio al saber enseñado. En lo referente al Área de figuras planas, se hace necesario que el docente use los elementos didácticos apropiados para que el estudiante logre comprender el concepto.

Durante la década de los años 70, la enseñanza de las matemáticas pasó de ser tratada de arte a ciencia, debido a esto era muy poco lo que se podía contribuir para mejorar o reglamentar esta disciplina. En consecuencia, la transferencia del conocimiento matemático dependía del dominio teórico del profesor y de la capacidad del Estudiante para permitir que el profesor controlara a voluntad sus conocimientos. La evolución de la matemática trajo consigo el problema del aprendizaje, ya que al evaluar los diferentes estudiantes se logran observar procedimientos mecánicos, memorísticos y que poco aportan al desarrollo del Estudiante, esto da cuenta de la problemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje. (Chevallard, 1997). El análisis y cálculo de Áreas de figuras planas no dista de esta problemática ya que los estudiantes recurren frecuentemente a fórmulas manteniendo una forma de pensar que favorece lo numérico, sin entender en esencia el concepto bidimensional de Área.

En el ejercicio docente no hemos estado ajenos a esta problemática debido en parte a deficiencias en las prácticas pedagógicas para enseñar el concepto de Área, muchas veces por contenidos mal estructurados, descontextualización de situaciones reales para los estudiantes, etc. En ocasiones se suele dejar para el final del año académico los tópicos de geometría, dedican poco tiempo a la enseñanza de ella y centran su estudio en una memorización de fórmulas. Muchos docentes se preocupan por "…dar a conocer las figuras o relaciones geométricas con dibujos, su nombre y su definición, reduciendo las clases a una especie de glosario geométrico ilustrado" (García y López, 2008, p.27). Así también, hemos encontrado desde nuestra experiencia que los estudiantes asocian empíricamente el perímetro a la operación de suma y el Área a la multiplicación sin tener un fundamento claro para ello. No existe un asocio mental entre las figuras geométricas planas, sus propiedades y las relaciones matemáticas para la estimación de sus Áreas y perímetros. Speranza (1987, citado por Fandiño y D'Amore, 2007), plantea que las falencias que presentan los estudiantes frente a los conceptos de Área se da incluso en estudiantes avanzados y de nivel universitario, razón por la cual se debe reflexionar sobre la manera en que se debe enseñar la geometría en la educación básica, y es precisamente en esto último donde se direcciona la presente investigación.

La enseñanza de la matemática ha situado nuevos retos para los docentes del siglo XXI de esta área, debido a que los estudiantes no logran comprender adecuadamente los conceptos desarrollados en la escuela. Con esta visión, el Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN) propone una reestructuración al Proyecto Educativo Institucional (en adelante, PEI) para que se implementen ambientes y entornos pedagógicos apropiados, en donde los estudiantes logren articular el aprendizaje del aula con el quehacer cotidiano, desde los aspectos sociocultural, familiar y laboral.

Actualmente en Colombia, el MEN realiza anualmente a través del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (en adelante, ICFES) las llamadas Pruebas Saber, que no son otra cosa que las evaluaciones nacionales para medir la calidad de la educación primaria, secundaria y media, aplicada a los estudiantes de los grados 3°, 5°, 9° y 11° de todas las Instituciones Educativas del país, con el fin de monitorear el desarrollo de las competencias y así contribuir al mejoramiento de la calidad educativa. Existen también otros programas como el Programa Todos a Aprender (en adelante, PTA) que busca mejorar la educación de los niños de primaria de Instituciones con limitados recursos, a través de capacitaciones constantes a profesores de primaria y con la realización de pruebas continuas para medir el desempeño y avance de los estudiantes de Tercero y Quinto.

A la luz de los resultados de Pruebas Saber del año 2015 en la Institución Educativa Juan de Dios Cock, se logra evidenciar el bajo nivel en el componente numérico y aleatorio y en la competencia de razonamiento y argumentación. En el grado Tercero se observa que el 35% de los estudiantes se encuentran en nivel mínimo y sólo el 10% se encuentra en nivel avanzado para el Área de matemáticas. Las Pruebas Saber del grado séptimo aún están en etapa de exploración. En lo referente al componente espacial y métrico no se observa debilidad en relación con Instituciones de similar desempeño. Pese a que la Institución ya detectó esta problemática y se han hecho esfuerzos a través de diferentes estrategias como el PTA, entre otras, los resultados esperados no han sido significativos.

La importancia de la geometría es innegable, además es notorio su aporte en la evolución y desarrollo de otras disciplinas, tales como la ingeniería, la física, la astronomía, la arquitectura, entre otras. Se puede ver la geometría como una matemática tangible, capaz de transformar el pensamiento aleatorio y el numérico en conceptos gráficos, razón por la cual trabajaremos el Área potenciando la forma de pensar de los estudiantes.

En consecuencia, se hace necesario realizar una investigación en profundidad que permita diseñar e interpretar una Unidad Didáctica para contribuir al desarrollo de los procesos matemáticos, resolver problemas y comunicarlos, asociados a la enseñanza y aprendizaje del Área de figuras geométricas en las prácticas de aula. Esta investigación enfatiza en privilegiar diferentes formas de pensar en el estudiante, y aunque el trabajo con números es importante, su foco está en formas de pensamiento que apunten al razonamiento y que permitan la generalización de situaciones matemáticas, más precisamente, en torno al concepto del Área de figuras planas.

1.2 ANTECEDENTES

Es curioso y al mismo tiempo contradictorio pensar que en tantos siglos de educación matemática se hubiera despreciado la didáctica como disciplina científica y que ésta se haya desarrollado principalmente sobre las últimas décadas de la historia. Pese a que la didáctica de la matemática se ha consolidado como disciplina científica, sus fundamentos aún se encuentran en proceso de construcción. Al respecto Godino (2010) plantea que:

> Del estudio de las corrientes epistemológicas se desprende que las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales ni hechos aislados; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables de plantearlos y resolverlos. (P.4)

De esta manera, se hace importante comprender que el proceso de enseñanza y aprendizaje se ha fortalecido con la consolidación y evolución de la didáctica de la matemática, en este orden de ideas, es necesario considerar algunos resultados de investigaciones realizadas en torno al objeto matemático como eje central de este estudio.

El concepto de Área no se aparta de este contexto, es por esto que a continuación presentaremos algunas investigaciones con resultados exitosos y que representan un punto de partida para este estudio.

Comenzamos por mencionar algunos estudios importantes y generales que se han dado en países que han incursionado primero que el nuestro en lo referente a la didáctica de la geometría, y en particular, a la enseñanza del concepto de Área.

En Corberán (1996) se presenta un estudio sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de Área basado en resultados de las investigaciones de Freudenthal (1983), Héraud (1989) y Perrin Glorian (1992). En su investigación, la autora explica cómo los estudiantes confunden los conceptos de Área y sus fórmulas, además, de no tener claridad sobre el carácter bidimensional del Área. Asegura la autora que estos problemas comienzan desde la niñez en la escuela primaria y se continúan en la secundaria, transfiriendo esta problemática a la universidad. Todo esto debido a deficiencias en la enseñanza misma de estos tópicos, carentes de procesos didácticos efectivos (Corberán, 1996). Dicha investigación muestra un potencial entre el pensamiento numérico, sin embargo, se hace de forma aislada con otros pensamientos matemáticos. Para la consecución de los objetivos se diseñó e implementó una unidad de enseñanza dirigida a estudiantes de secundaria, desarrollada con actividades secuenciales con objetivos muy claros en cada etapa. Inicia con actividades de tangram, estimación de Áreas, descomposición de figuras, y finalmente se trabajó con figuras compuestas mediante el reagrupamiento de figuras básicas para el cálculo del Área total. La autora asegura haber logrado que los estudiantes comprendieran correctamente el concepto de Área y su carácter bidimensional, además de diferenciar el Área de la forma que tiene la superficie y del número que la mide.

En otro estudio sobre este tópico que realizaron D'Amore y Fandiño (2007), se presenta una investigación en la cual observan las convicciones de maestros y de estudiantes en lo que respecta a las relaciones existentes entre perímetro y Área de una figura plana. La investigación se desarrolló bajo los parámetros de la corriente clásica, usando como marco conceptual el modelo constructivista de Jean Piaget. En este estudio se examina el cambio de las convicciones y del lenguaje utilizado por parte de los estudiantes, además, la falta de criterio en el análisis de las relaciones entre perímetro y Área quienes consideran la existencia de una relación de dependencia entre estos conceptos. La investigación consideró cuestionarios como instrumentos de recolección de datos, aplicados tanto a docentes como estudiantes. Hacia el final se concluye que los problemas de la enseñanza no son sólo de tipo epistemológico, sino que también didáctico. Dichas convicciones surgen por las limitaciones en las formas de pensar que no permiten el uso de propiedades ni de la combinación entre varios tipos del pensamiento matemático (D'Amore y Fandiño 2007).

En relación al trabajo en el aula con figuras de igual Área, Popocoa (2009) presenta una propuesta usando como referente los niveles de pensamiento de Van Hiele. En esta investigación se estudia la manera como los estudiantes de bachillerato enfrentan situaciones donde se cambia la forma, la posición y la reconfiguración de figuras geométricas conservando el Área entre ellas. Indiscutiblemente, esta forma de pensar con las figuras desde sus propiedades permitió el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento matemático. El estudio nace de la dificultad que presentan los estudiantes para pensar el Área de figuras planas cuando se comienzan a variar estas propiedades. En lo que respecta al Área, afirma la autora, se dificulta su estimación conforme crece el número de cortes y el perímetro se calcula de manera global. En esta investigación se trabaja con un grupo focal de 25 estudiantes de primer semestre (de 15 años de edad) y 25 estudiantes de tercer semestre (de 16 años de edad), con el propósito de comparar sus niveles de razonamiento. Se implementaron actividades con manipulables y recorte de papel. Finalmente concluye la autora que el trabajo con doblado y recorte de papel le permitió ratificar la problemática en tanto que a medida que se aumentan los dobleces o los recortes, el Estudiante va perdiendo seguridad y certeza en cuanto a los conceptos de Área.

En Colombia, en los últimos años se han realizado importantes investigaciones en diferentes universidades, como la Universidad Nacional, Universidad de Medellín, Universidad de Antioquia, entre otras, donde se estudia la problemática en torno a las concepciones de perímetro y Área, a través de distintas metodologías de trabajo implementan actividades en poblaciones de estudiantes de primaria y bachillerato de algunas Instituciones educativas del país.

A continuación, presentaremos algunos de los trabajos de investigación específicos en el Área de la Matemática Educativa, que mayor contribución aportan al desarrollo de este estudio.

Arenas (2012) propone el diseño de una estrategia didáctica para mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes de grado sexto de una Institución educativa en la Ciudad de Medellín. Para el logro de su meta, el autor opta por el uso de la herramienta informática Moodle y el uso de material concreto como el Tangram. Esta investigación es fundamentada en la teoría sociocultural de Vygotsky (1979) y la teoría sociológica de David Ausubel (1976) para la construcción de aprendizajes significativos. Afirma el autor que mediante la realización de esta propuesta investigativa logró identificar las formas de pensar de los estudiantes en torno al Área de figuras planas y que mediante la participación activa se generaron espacios de trabajo colaborativo en distintas situaciones problema, además de adquirir conocimiento científico al involucrar en las actividades el uso de herramientas informáticas y material concreto. El autor recomienda reflexionar sobre las prácticas educativas tradicionales, las cuales son abstractas y no promueven el uso de diferentes formas de pensar la matemática, para lo cual sugiere optar por un método más lúdico que motive al Estudiante y repercuta positivamente sobre sus procesos de aprendizaje.

Roldán y Rendón (2014) implementan una propuesta para promover el estudio de las áreas y los perímetros basando su marco teórico en el modelo socio crítico, este a su vez surgió al aplicar los principios de la teoría crítica de Frankfurt (1960 – 1970). Este es el modelo implementado en la política de la Institución objeto de la investigación. En este estudio los autores se inquietan por los bajos resultados en Pruebas Saber del año 2012, básicamente por las deficiencias en el pensamiento métrico y geométrico, por lo que intentan promover el trabajo colaborativo y cooperativo, el cual los autores consideran como indispensable para promover el desarrollo en estos tipos de pensamiento, además de estimular el aprendizaje y potenciar el espíritu investigativo. Se procede mediante una investigación de tipo cualitativo, usando métodos como la observación, la entrevista semiestructurada y el diálogo. Finalmente concluyen los autores que gracias a este trabajo lograron evidenciar las dificultades de los estudiantes en cuanto a su forma de pensar el Área y el perímetro, además recomiendan realizar acciones como capacitación docente, aplicación de pruebas que faciliten retroalimentar los procesos cognitivos, permitir que los estudiantes construyan e incluirlos en proyectos de investigación.

Una propuesta muy interesante la encontramos en el trabajo de Garrido (2015) ya que usa el geoplano como herramienta de enseñanza para diferenciar los conceptos de perímetro y Área. Esta tesis fue diseñada bajo la teoría constructivista de Piaget y los aprendizajes significativos de David Ausubel. En esta investigación se utiliza un enfoque cualitativo con corte etnográfico, el cual, según el autor, permitió a los estudiantes establecer relaciones entre varias formas de pensar, lo cual permite explicar con mayor argumentación las relaciones entre Área y perímetro.

Por otra parte, en la investigación de Salazar (2016) se reporta la implementación de una Unidad Didáctica que permita la apropiación del concepto de Área de los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Santa Juana de Arco del Municipio de Santa María (Huila). Esta tesis basa su marco teórico en el desarrollo de habilidades de Hoffer (1991) y el modelo de Van Hiele (1957) sobre niveles de razonamiento. En concordancia con lo anterior, el autor de este trabajo investigativo propone la construcción de la maqueta de una casa donde se pongan en práctica los conceptos geométricos básicos, con respecto a lo cual, afirma que las experiencias con contexto y el uso de material concreto que mediante el uso de diferentes formas de pensar contribuye aprendizajes significativos. El autor concluye que, al finalizar su investigación se detectaron mejoras en los resultados de pruebas externas por parte de los estudiantes en donde se involucran los conceptos de Área.

Es importante resaltar que según el rastreo bibliográfico que se realizó, no se evidenció trabajos referentes al Área desde el marco teórico usado en esta investigación, sin embargo, estas propuestas nos han parecido interesantes porque ponen de manifiesto las formas de pensar que los estudiantes favorecen en sus procesos y, de esta manera, encontrar las mejores estrategias didácticas para la aprehensión del concepto de Área.

Con esta investigación se desea realizar un aporte en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de Área, enfatizando en las formas de pensar que proponen los estudiantes para dar solución a los problemas planteados en la asignatura de geometría y en donde se pueda evidenciar la manera en que los estudiantes asocian figuras geométricas con el cálculo de sus Áreas y las propiedades inherentes que le permiten hacer generalizaciones.

El marco teórico con el cual se fundamentará la presente investigación es la teoría de Los Modos de Pensamiento, propuestos por Anna Sierpinka (2000). Esta teoría se abordará con mayor profundidad en el capítulo 3. El producto final de la investigación es la construcción de una Unidad Didáctica que facilite la aprehensión del concepto del Área por parte de los estudiantes de Tercero y Octavo grado. Desde la mirada de Sanmartí, (2000), se define la

Unidad Didáctica como un conjunto de actividades estructuradas y articuladas en torno a unos ejes, para lograr los objetivos establecidos.

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde Modos de Pensamiento la implementación y desarrollo del concepto de Área de figuras planas, entendido este en su complejidad de interpretaciones.

1.4 OBJETIVO

Diseñar e interpretar una Unidad Didáctica para contribuir al desarrollo de los procesos matemáticos, resolver problemas y comunicarlos, asociados a la enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas desde la perspectiva de Modos de Pensamiento, en las prácticas de aula.

1.5 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas, en los grados, Tercero y Octavo al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en los Modos de Pensamiento, para el desarrollo de competencias matemáticas?

1.6 OBJETIVO GENERAL

Analizar el tránsito que propicia un modelo de enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en los Modos de Pensamiento (Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural), en las prácticas de aula.

1.7 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar los Modos de Pensamiento para la enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas para estudiantes del grado Tercero y Octavo.

- Implementar actividades de aula para los estudiantes de los grados Tercero y Octavo que propicien el tránsito entre los Modos de Pensamiento en la práctica del Área de figuras planas.

- Diseñar Unidades Didácticas para Tercero y Octavo que promuevan el tránsito entre los Modos de pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas.

1.8 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El bajo rendimiento académico por parte de los estudiantes de grado Tercero y Octavo de la I. E. Juan de Dios Cock, los bajos resultados en pruebas, tanto internas como externas, nos motivó a indagar sobre las posibles causas y la base del problema. La comprensión equivocada que algunos estudiantes tienen sobre el Área se convirtió en el problema central, problemática que representó el punto de partida para dar inicio a esta investigación.

A partir de este punto fue necesario plantear la pregunta problematizadora y los objetivos, que en lo sucesivo se convertirán en la carta de navegación.

Para iniciar esta investigación se hizo necesario realizar un rastreo bibliográfico de estudios donde se trataron problemáticas similares con relación al Área, y se indagó en cada uno de ellos, la metodología y estrategias implementadas. En las conclusiones de cada estudio se reflejó la pertinencia de la metodología, las cuales proporcionaron un valioso insumo en esta investigación y de esta manera se referenció un punto de partida y así, se logró propiciar una perspectiva que desencadenó un aporte significativo en relación a las concepciones del Área por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICOS-EPISTEMOLÓGICOS-DEL ÁREA

A continuación, presentaremos algunos hallazgos que permitieron evidenciar la evolución del concepto de Área de figuras planas a través de los tiempos y su incidencia en la enseñanza y aprendizaje en la escuela actual. Las formas de pensar la matemática que cada cultura utilizó marcó un legado a lo largo de la historia y muchas de sus contribuciones aún permanecen vigentes. Desde este punto de vista se hizo importante comenzar por describir las culturas que trabajaron el concepto por primera vez y las razones de tipo socio culturales que dieron origen al mismo.

2.1 LOS PRIMEROS TRABAJOS EN GEOMETRÍA

Según Boyer (1999) no se sabe con precisión cuándo y dónde nació la geometría y su origen probablemente es más antiguo que el arte de la escritura. Los conceptos de Área se han trabajado desde tiempos muy remotos y, en consecuencia, surgió la necesidad de cuantificar las medidas de superficie y contorno de figuras planas.

Para que la geometría se convirtiera en una rama de las matemáticas fue necesario atravesar por una serie de conceptualizaciones empíricas que surgieron de la necesidad de dar respuesta a planteamientos que la misma naturaleza establecía. El nexo indiscutible que existe entre la naturaleza y la geometría impuso al hombre la necesidad de fundamentarla. El comercio y las comunicaciones dieron origen a problemáticas y retos que produjeron una reacción dialéctica en torno a la evolución de la geometría misma.

La necesidad práctica de medir el Área y el perímetro dio surgimiento a la geometría y es evidente el papel fundamental que ésta ha desempeñado a través de la historia en el desarrollo de la sociedad. El progresivo crecimiento urbano de antiguas civilizaciones así lo ratifican. Así lo hace ver Boyer (1999)

Por otra parte, Anacona (2003) afirma que “un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que trasciende los meros procesos algorítmicos” (p.42).

2.1.1 La Cultura Babilónica

Peña (2000) cita el historiador griego Heródoto y afirma que la cultura Babilónica desde la conformación de sus pueblos hace alrededor de 5000 años a.C. realizó grandes aportes al estudio de la geometría ya que tenían fórmulas para calcular Áreas y perímetros de algunas figuras como triángulos, círculos, etc., aunque lo hacían con métodos empíricos y con aproximaciones.

Los babilonios fueron unos grandes matemáticos y se caracterizaban por tener una forma de pensar que enfatizaba en lo numérico. Todos sus escritos eran plasmados en tablillas. Quizá uno de los trabajos más importantes realizado por esta cultura se trata de las ternas pitagóricas plasmadas en la tablilla de Plimptom 322, (Ver figura 1). Aunque en la tablilla aparece solo la parte numérica, genera curiosidad pensar que los Babilonios conocían algunas relaciones obtenidas del teorema de Pitágoras quien existiera un milenio después. Este aspecto es importante porque en este teorema se muestra la relación que existe entre los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. No existe evidencia si estas ternas pitagóricas hayan nacido de un trabajo con áreas o tal vez haya sido de teoría de números simplemente. Es importante destacar la forma de pensar con los números por parte de los babilonios ya que esta característica les permitió realizar valiosos aportes. Al parecer para esta cultura fue más importante el pensamiento numérico que el geométrico, sin embargo, es incorrecto afirmar que sus contribuciones para el desarrollo del Área fueran pocas. Según Boyer (1999), en 1936 se extrajeron unas tablillas en donde se comparan las Área y los cuadrados de los lados de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 7 lados. La razón entre el Área del pentágono regular y el cuadrado de lado equivalente al del pentágono es de 1,40, este valor resultó ser muy aproximado para dos cifras decimales. En estas tablillas también se muestra un hexágono inscrito en la circunferencia lo que muestra una relación de $3\frac{1}{8}$ comparada con el cuadrado del radio. Esta aproximación representa para nosotros el valor de π, es incluso mejor que la egipcia.

Figura 1: Tablilla de Plimptom 322
https://es.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

2.1.2 La Cultura Egipcia

No existe evidencia de que la cultura Babilónica haya influenciado la egipcia, y aunque sus contribuciones a la geometría fueron desarrolladas con trabajos muy similares, sus arquitecturas y otras aplicaciones prácticas muestran grandes diferencias. La forma de pensar la matemática por parte de los egipcios fue más enfocada a la geometría y a los números y este pensamiento les permitió que su cultura fuese destacada históricamente.

Boyer (1999) cita a Heródoto y nos dice que alrededor de 1650 años antes de Cristo, en el antiguo Egipto ya se tenía una idea empírica del concepto de Área, al respecto, cuando el río Nilo se crecía cubría una superficie que luego se convertía en un terreno fértil por sedimentación en sus orillas, apto para la agricultura. Estas inundaciones al mismo tiempo borraban los linderos de los campos. Los campesinos egipcios pagaban un tributo por la parcela que cultivaban y en consecuencia era necesario realizar un cálculo de la proporción que debían pagar. Para la delimitación de los terrenos fue necesario el uso de figuras geométricas simples, tales como el círculo, el triángulo, el cuadrado y el rectángulo. Métodos antiguos para medir el Área de un objeto irregular mediante la subdivisión de figuras básicas como una especie de rompecabezas, hoy continúan vigentes.

Evidencia de los trabajos realizados por los egipcios como aporte a la matemática son el papiro de Ahmes y el papiro de Moscú. En estos papiros consignaron problemas matemáticos donde se evidencia la forma de pensar la geometría por parte de los egipcios, aunque, también aparecen algunos problemas propios del pensamiento numérico.

El papiro de Ahmes, en honor al escriba que lo copió hacia 1650 a.C., llamado también el papiro de Rhind, en honor al abogado escocés Henry Rhind que lo encontró en 1858, fue redactado en escritura hierática bajo el reinado de Apofis I (1585 – 1542 a.C.). Este papiro mide más de 5 metros de largo y solo 33 centímetros de ancho. (Ver figura 2)

Pérez (2013) afirma que el papiro contiene 87 problemas resueltos entre operaciones aritméticas, fraccionarios, cálculos de áreas y volúmenes, etc. Destacamos los problemas de áreas que corresponden del 48 al 55.

Figura 2: Papiro de Ahmes
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas

Gillings (1972) sostiene que en el problema 49 del papiro se calcula el Área de un rectángulo de 1000 codos de ancho y 100 de alto. Acá se multiplicaron ambas medidas, lo que indica que ya se usaba la fórmula actual, $A = bh$. El problema 51 pide calcular el Área de un triángulo de lado 10 jet y base 4 jet. En este problema al parecer asumen el triángulo como isósceles y el lado corresponde a lo que conocemos como altura. Ahmes divide la base entre 2 y la multiplica por 10, obteniendo un Área de 20. Este proceso sugiere que la fórmula corresponde con la actual, $A = \frac{bh}{2}$. Es evidente que en esta parte de la historia la forma de pensar la geometría ya era muy avanzada. Algunas relaciones aún permanecen vigentes.

También sostiene Gillings (1972) que el papiro de Moscú es el segundo documento matemático más importante del antiguo Egipto. Fue escrito hacia el año 1890 a.C. Con 5 metros de longitud y 8 centímetros de altura posee 25 problemas sobre volúmenes, Áreas de triángulos, rectángulos entre otros. El problema 10 por ejemplo busca calcular el Área de una superficie curva al parecer de diámetro 4,5. Parece emplearse la fórmula $S = \left(1 - \frac{1}{9}\right) * 2 * (2x) * x$, con $x = 4{,}5$. Los historiadores tienen dudas si este cálculo corresponde al Área de un hemisferio o al de un tejado semicilíndrico. En conclusión, es uno de los primeros intentos de hallar el Área de una superficie curva. (Ver figura 3)

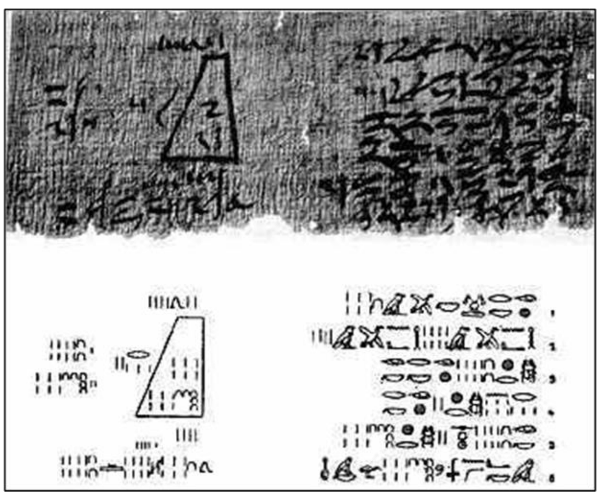


Figura 3: Papiro de Moscú
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas

Boyer (1999) aclara que los egipcios aplicaban procedimientos matemáticos para el cálculo de Áreas de figuras básicas como el rectángulo, el triángulo y polígonos descompuestos a base de triángulos, tal como se usan hoy en día, sin embargo, en superficies curvas y en el Área del círculo lo hicieron de forma empírica y aproximada. Para el Área del círculo, los egipcios dividían el diámetro entre 9, este valor lo multiplicaban por 8 y luego elevaban al cuadrado, lo que sugiere un uso del número $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$. Aunque ellos desconocían la existencia de esta relación numérica.

Tanto la cultura babilónica como la egipcia contaban con procesos exactos para calcular Áreas de figuras rectilíneas como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo y otros polígonos. Usaron la descomposición de figuras geométricas para tratar de extender el concepto a otras figuras, sin embargo, Áreas como la del círculo que, aunque fue trabajada en ambas culturas, es de aclarar que solo lo hicieron de forma aproximada.

2.1.3 La Cultura Griega

Las civilizaciones de Mesopotamia y Egipto ya habían perdido mucho vigor algunos siglos antes de la era cristiana. Boyer (1999) afirma que fueron los griegos quienes retomaron el trabajo con la geometría de los egipcios con un carácter formal. Thales de Mileto (624 – 548 a.C.) viajó hasta Egipto para estudiar geometría y posteriormente en Grecia esta disciplina pasó de ser empírica para convertirse en científica. Le agregaron fundamentación y razonamientos deductivos y se apropiaron de la geometría. Es necesario aclarar que los griegos se caracterizaron por combinar el pensamiento geométrico de los egipcios y el pensamiento numérico de los babilonios, fue tal vez este aspecto el que permitió que esta ciencia se desarrollara con más rapidez en esta cultura. En este proceso fueron muchos los filósofos y matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la geometría. Sería injusto dejar de mencionar algunos de ellos y sus obras debido a su importancia epistemológica en la evolución de la geometría y en particular para el Área.

Pitágoras de Samos (569 – 475 a.C.) estableció la relación entre los lados de un triángulo rectángulo ($h^2 = c_1^2 + c_2^2$). Esta relación muestra que el Área determinada por los cuadrados de los catetos equivale a Área representada por el cuadrado de la hipotenusa.

Muchos trabajos fueron realizados por los griegos en torno al Área logrando mostrar que toda figura poligonal se podía subdividir en triángulos y se podría calcular su Área por sumatoria de partes. Este hecho fue consolidado en el libro I y II de Los Elementos de Euclides. De esta manera, el Área de superficies poligonales ya quedaba resuelta.

En lo que al Área del círculo concierne, hubo varios trabajos importantes de considerar. Euclides (325 – 265 a.C.) estudió las figuras planas y estableció que el Área de un círculo era proporcional al cuadrado de su radio ($A = kr^2$). Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) estudió las secciones cónicas y la circunscripción de polígonos en circunferencia y estableció que el Área de un círculo estaba dada por $A = \pi r^2$. El problema que se presentó acá fue que los cálculos del Área y el perímetro de un círculo no podía ser preciso ya que π resultó ser un número irracional y por lo tanto no se tenía su valor exacto. El mismo Arquímedes circunscribió un polígono regular de 96 lados en un círculo para aproximar el Área del círculo a la del polígono y así pudo establecer que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$. Con esta aproximación y conociendo la existencia del número π.

Pérez (2013) sostiene que Arquímedes también trabajó sobre el Área de cuerpos redondos como el cilindro y el cono (Ver figura 4).

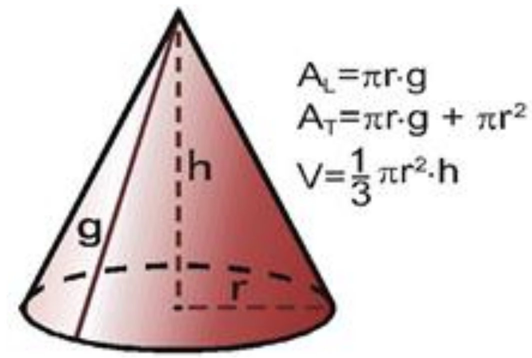


Figura 4: Ejemplo de contornos redondos
http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-24397_recurso_jpg.jpg

El matemático griego Zenodoro (200 – 140 a.C.) trabajó las figuras Isoperimétricas y realizó varias afirmaciones importantes como:

- De todos los polígonos regulares el de mayor Área es aquel que tiene mayor número de lados.
- El círculo tiene mayor Área que cualquier polígono regular que tenga el mismo perímetro.

Sin lugar a dudas los griegos gozaron de un pensamiento más estructurado que pudo combinar lo numérico con lo geométrico y lo algebraico para catapultar la matemática en nuevos rumbos. Es por esta razón que se hace importante mencionar los acontecimientos que derivaron avances más importantes.

2.2 EL PROBLEMA DE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

Los griegos intentaron construir con regla y compás un cuadrado cuya Área fuera equivalente a la de otras figuras y así simplificar su cálculo. En este proceso de pensamiento numérico y geométrico permitió cuadrar las superficies rectilíneas como el rectángulo y otros polígonos, sin embargo, para el caso del círculo representó un problema histórico.

Resolver este problema significa describir un procedimiento mediante el cual sea posible trazar, con regla y compás euclidiano, un cuadrado que tenga la misma Área que el círculo dado. Esto es, si r es el radio, su Área es $A = \pi r^2$. Entonces si el cuadrado del lado l ha de tener la misma Área, $A = l^2 = \pi r^2 \Rightarrow l = r\sqrt{\pi}$. Por lo tanto la solución con regla y compás implica el trazo del número $\sqrt{\pi}$.

> Este problema permaneció sin solución durante más de 22 siglos, hasta que Evariste Galois, matemático francés de principios del siglo XIX, proporcionó elementos teóricos que se ubican en el álgebra moderna, los cuales permiten probar por qué no es posible resolver el antiguo problema; es decir, la teoría de Galois permite justificar por qué no es posible construir, con regla y compás, un segmento de lado $\sqrt{\pi}$. (Arcos y Sepúlveda, 2011, p.7).

Así como lo muestra Sepúlveda (2011), el problema de la cuadratura resultó ser un reto imposible, no obstante, sus repercusiones permitieron encontrar nuevos caminos en el desarrollo del Área de otras figuras con formas curvilíneas.

Tal como lo afirma Gillings (1972), el procedimiento encontrado en el problema 50 del papiro de Ahmes pide calcular el Área de un círculo de 9 jet. Ahmes aproxima el Área del círculo a la de un cuadrado de lado 8 jet y obtiene 64 setats (jets cuadrados). Este procedimiento sugiere que el escriba utilizó el siguiente proceso: $\mathrm{A} = (\frac{8}{9}\mathrm{d})^2$, con $\mathrm{d} = 2\mathrm{r}$ y comparada con la fórmula actual se deduce que aproximaron $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1605$. Aunque no se conoce proceso para esta aproximación. Este hallazgo muestra un intento de los egipcios por cuadrar el círculo de forma empírica y numérica.

Boyer (1999) sostiene que hacia el año 430 a.C., Hipócrates en un intento por cuadrar el círculo encontró la forma de cuadrar la lúnula mediante la inscripción de un triángulo rectángulo en un semicírculo. Este trabajo se convirtió en el primero de la cuadratura de superficies curvilíneas. Este importante hallazgo les dio a los matemáticos de la época una equivocada esperanza con respecto a la cuadratura del círculo.

2.3 EL MÉTODO EXHAUSTIVO DE EUDOXO PARA EL CÍRCULO

Definitivamente el reto mayor en lo que respecta a Áreas y perímetros lo representaron las figuras con contornos curvos.

Afirma Boyer (1999) que mientras Hipócrates e Hippias continuaron en la búsqueda de cuadrar el círculo, Antifonte se interesó en este mismo hecho utilizando el método de aproximación por polígonos inscritos en el círculo. Bryston aprovechó este hecho e intentó lo mismo, en este caso agregó la circunscripción de polígonos al círculo aumentando la aproximación.

Gracias a la gran imaginación de Eudoxo se pudo resolver la crisis provocada por los inconmensurables. En este aspecto Eudoxo propuso inscribir y circunscribir polígonos en figuras curvilíneas e ir duplicando los lados indefinidamente hasta que el Área de la figura poligonal se acercara cada vez más al Área de la figura curvilínea. Fue a través de este método que luego Arquímedes inscribió ý circunscribió un polígono regular de 96 lados y aproximar el Área de un círculo y el valor de π, tal como se mencionó anteriormente. Tal vez fue esta la primera aproximación formal del número. Estos valores iban a resultar trascendentales para el cálculo de superficies rectilíneas. Este método además le permitió a Arquímedes encontrar relaciones para calcular el Área de la elipse y de parábolas limitadas por cuerdas.

En lo que siguió de la historia, el método exhaustivo permitió la evolución del concepto de Área de figuras curvilíneas. Este método de agotamiento es el equivalente del cálculo diferencial el cual se desarrolló un milenio más tarde.

2.4 EL DESARROLLO DEL CÁLCULO

El método exhaustivo propuesto por Eudoxo y retomado por Arquímedes en la antigua Grecia aportó a los matemáticos de la época una manera de pensar que une lo geométrico con lo numérico en un tipo de pensamiento más enfático en lo analítico. Esto fue fundamental para el desarrollo del concepto de límite. Boyer (1999) afirma que en la época del Renacimiento se desarrollaron nuevas formas de estudiar la geometría. René Descartes (1596 – 1650) diseñó el plano cartesiano para el estudio de la geometría y fue considerado como el Padre de la geometría analítica. Sin lugar a dudas la propuesta de Descartes permitió trabajar simultáneamente el pensamiento numérico y geométrico. El matemático Fermat (1601 – 1665) descubrió el cálculo diferencial y en trabajos independientes a Descartes aportó bases para el desarrollo de la geometría analítica. Con los trabajos realizados por Fermat, Leibniz y Newton se da paso a la geometría diferencial. En 1854 el matemático alemán Bernhard Riemann utiliza la teoría del cálculo diferencial e integral y establece de manera formal el Área bajo una curva f(x) dada por: $S = \int_a^b f(x)dx$, (Ver figura 5).

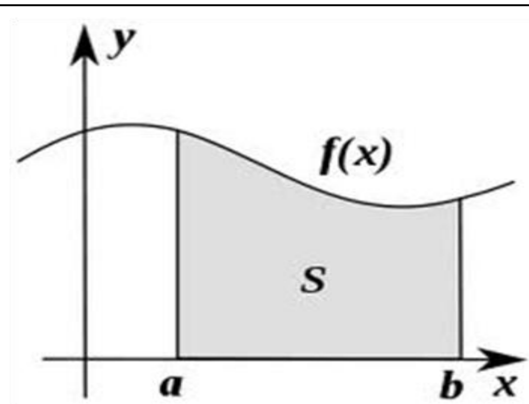


Figura 5: Área bajo la curva f(x) en el intervalo [a, b]
http://calculointegral44.blogspot.com.co/2015/02/figuras-amorfas.html

Para establecer de manera general esta expresión, Riemann inscribió bajo la curva un conjunto infinito de rectángulos de ancho despreciable o diferencial, desde la teoría del cálculo. Esto permitió acercar el Área por sumatoria de una manera muy similar a los procesos de agotamiento de Eudoxo y Arquímedes. Boyer (1999). (Ver figura 6)

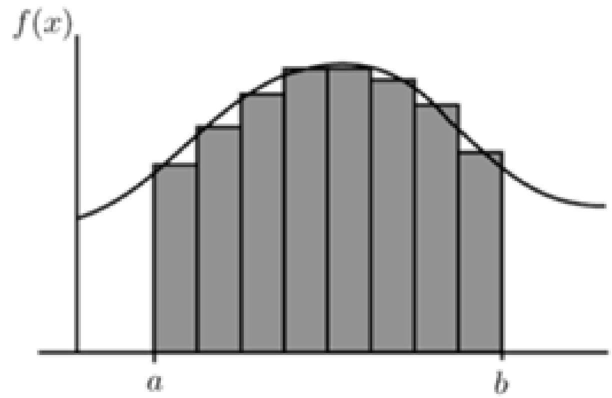


Figura 6: Integral de Riemann
https://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_de_Riemann

2.5 LA MEDICIÓN DEL ÁREA

Desde la antigüedad ha existido la necesidad de medir como una forma de cuantificar la extensión de los terrenos, principalmente en labores de agricultura. Inicialmente para medir la distancia se utilizaron medidas como el codo y el pie, aunque fueron empíricas ya que sus dimensiones podrían variar según la persona. Estas unidades se utilizaron tanto en Egipto como en Grecia.

Argumenta Fuentes (2000) que en el año 280 a.C. Eratóstenes sospechaba acerca de la redondez terrestre al notar que la sombra proyectada por el sol era de diferente longitud en las Ciudades de Siena (hoy Asuán, Egipto) y Alejandría. Utilizando la teoría de proporciones y asumiendo que la tierra era redonda relacionó los 360° de la circunferencia con el ángulo entre las sombras, el cual encontró que era de 7°. Este valor lo multiplicó por la distancia entre las Ciudades que era de 5000 estadios, obteniendo que la curvatura terrestre era de aproximadamente 250.000 estadios. Llevado a unidades actuales sería de 40.000 Km. Debido a que las unidades de longitud de la época podrían variar entre las Ciudades, no existe certeza de la equivalencia real del estadio utilizada por Eratóstenes. Algunos afirman que utilizó 1 estadio = 184.8 m actuales y otros afirman que utilizó 1 estadio egipcio = 300 codos de 54,2 cm actuales.

A través de la historia se realizaron varios intentos de unificar las medidas ante la necesidad del intercambio comercial. La Revolución francesa de 1789 impulsó a varios científicos a encontrar solución a estos desafíos. En 1795 se definió por primera vez el metro como la diezmillonésima parte de la distancia desde el polo hasta el ecuador terrestre. En 1789 la Comisión internacional de pesos y medidas materializaron esta medida con una varilla de platino e iridio. En búsqueda de buscar mayor precisión, en 1960 se redefinió el metro como 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación naranja del átomo del criptón 86. En el sistema internacional de medidas creado en 1960 se usa actualmente el metro (m) como unidad estándar para la longitud y el metro cuadrado (m^2) como unidad estándar para el Área.

En la actualidad se define el metro cuadrado como la superficie de un cuadrado cuyo lado mide 1 m.

2.6 DESARROLLO TEÓRICO DEL CONCEPTO DE ÁREA

Ya se ha visto como el concepto de Área ha tenido un desarrollo histórico. La evolución del concepto ha permitido tener solo una noción del concepto y no una consolidación del mismo a través de su definición.

En la antigüedad, Euclides, en su libro *Los Elementos*, definió una superficie como aquello que solo tiene largo y anchura. Sin duda alguna se acerca bastante al concepto que se tiene en la actualidad, sin embargo, carece del rigor matemático que caracteriza las definiciones actuales.

Según Turégano (1993), en 1887, Peano imparte la primera definición formal de Área, más adelante, en 1898, Borel reconoce las imperfecciones de esta definición e intenta corregirlas. Establece la teoría de la medida en la que no hay distingo entre medida interior y exterior. Borel propone, como medida de un conjunto abierto acotado, la sumatoria de longitudes de los intervalos abiertos. A partir de allí establece los siguientes criterios:

- La medida de la reunión de una sucesión de conjuntos medibles es la suma finita o infinita de las medidas de cada uno de estos. Este pasa a ser el postulado de aditividad que conlleva a la noción de límite.
- Si $A \subset B \implies m(A-B) = m(A) - m(B)$

De esta manera, según Borel, el área de una región está dada por la suma de las subregiones que la conforman, así, $A = \lim_{k \to \infty} m(A_K)$.

El trabajo realizado por Borel muestra que es conveniente definir el Área de una superficie a través de axiomas y propiedades. Actualmente se reconoce el Área como el número que da cuenta de la medida de una superficie.

Según Freudenthal (1983), El Área es un objeto mental, y es preciso formar su concepto de una forma gradual. Desde esta perspectiva la búsqueda de una definición podría acarrear dificultades en la enseñanza. Por esta razón resulta más conveniente tratar el Área a través de axiomas y propiedades.

En el texto de Apostol (1967) se realiza una definición axiomática y contemporánea del Área. En ella supone que existe una clase $\mathscr{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es $\mathscr{M}$, con las propiedades siguientes:

- Propiedad de no negatividad. Para cada conjunto S de $\mathscr{M}$, se tiene $a(S) \geq 0$.
- Propiedad aditiva. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$, también pertenecen a $\mathscr{M}$, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$.
- Propiedad de la diferencia. Si S y T pertenecen a $\mathscr{M}$ siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ está en $\mathscr{M}$, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$.
- Invariancia por congruencia. Si un conjunto S pertenece a $\mathscr{M}$ y T es congruente a S, también T pertenece a $\mathscr{M}$ y tenemos $a(S) = a(T)$.
- Elección de escala. Todo rectángulo R pertenece a $\mathscr{M}$. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces $a(R) = hk$.
- Propiedad de exhaución. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que $S \subseteq Q \subseteq T$. Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades $a(S) \leq c \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan $S \subseteq Q \subseteq T$, entonces Q es medible y $a(Q) = c$. (p. 72)

Corberán (1996) menciona algunas de estas propiedades que permiten comprender más claramente el concepto de Área.

- Propiedad de la inclusión: Si una superficie S se encuentra dentro de una superficie T, es decir, S $\subset$ T, entonces el Área de S es menor que el Área de T; $A(S) < A(T)$.
- Propiedad aditiva: Si la superficie S se compone de una superficie Z y una superficie K, entonces: $A(S) = A(Z) + A(K)$.
- Propiedad de la invarianza: Si la superficie S es congruente con la superficie T, entonces $A(S) = A(T)$.
- Propiedad de la unidad: El Área de la superficie unidad es 1.
- Propiedad de la disección: Si una región se corta y los fragmentos se unen para formar una nueva región, entonces ambas regiones tienen igual Área.

Estas propiedades permiten diferenciar el concepto de Área de otros conceptos como el de perímetro ya que este no cumple por ejemplo la propiedad aditiva dentro de una región, es decir, no podemos afirmar que el perímetro de una región es equivalente a la suma de los perímetros de las regiones que la componen.

Una forma más general de la propiedad aditiva citada por Corberán consiste en subdividir una región en un conjunto finito o infinito de regiones y calcular el Área de la región como una suma de las subregiones. (Ver figura 11).

Si retomamos el desarrollo histórico y epistemología planteado para el Área podemos extraer de él algunos elementos de tipo estructural que trascendieron a través de la historia. Tal es el caso del método exhaustivo trabajado por los griegos, el cual constituye un caso particular de la propiedad aditiva del Área.

En la actualidad el trabajo con el Área en clases de geometría responde a una planeación previamente establecida en los textos escolares, muchos de ellos recogen en forma resumida todo el trabajo de Área a través de los tiempos. Inicialmente comienzan a caracterizar las regiones según su forma y mediante la aplicación de los axiomas reducen el cálculo de Áreas a través de fórmulas, lo cual obliga a los estudiantes a centrarse en lo numérico, descuidando así el análisis geométrico de las situaciones.

A manera de ejemplo, en el texto de Aritmética y Geometría de la Editorial Santillana para grado 7, definen el Área como la magnitud que indica que tanta superficie tiene una figura u objeto. En este texto se trabajan diferentes polígonos como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, etc. Para cada uno de ellos se asocia una fórmula matemática para calcular su Área a partir de los elementos básicos descritos para cada figura. Así, por ejemplo, para un cuadrado cuyo lado mide l, su área es $A = l^2$, para un rectángulo de base b y altura h, su área está dada por $A = bh$, al igual que para un paralelogramo.

De forma muy similar se trabaja en la mayoría de textos escolares, impidiendo así que el docente pueda presentar al estudiante nuevos procedimientos para comprender mejor el concepto de Área.

Basados en la evolución del concepto de Área, en las dificultades que se ha tenido a través de la historia para su desarrollo y en la presentación axiomática y contemporánea del concepto, se hace importante implementar una estrategia didáctica que permita al estudiante comprender el Área a través de situaciones concretas diversas en donde pueda corroborar el cumplimiento de cada axioma, poniendo a prueba su capacidad para razonar a través de sus diferentes formas de pensar la geometría. De esta manera puede profundizar y generalizar el concepto. Esta es la propuesta de investigación que se presenta en este escrito.

2.7 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Entender la importancia que proporciona el rastreo histórico y epistemológico de los conceptos de Área, sin duda alguna podría contribuir a los estudiantes a tener una nueva visión, no solo del concepto, sino de la matemática como ciencia, en tanto que la problemática inherente a través de la historia para su construcción se asemeja en gran medida a la que poseemos hoy en día en las aulas de clase, y por tanto, la forma en que estos problemas fueron resueltos podrían alimentar las estrategias de enseñanza en la escuela.

El método exhaustivo desarrollado por Eudoxo y Arquímedes permitió el desarrollo del cálculo y con éste último más tarde se pudo definir el Área de una forma más general.

Mientras tanto el problema de la cuadratura del círculo, aunque se haya convertido en una obsesión para matemáticos y aficionados a través de la historia, rescata la intención de pretender simplificar el cálculo de Áreas de figuras mediante la modelación de las mismas a través de un cuadrado de Área igual. Este hecho parece no ser trascendente, sin embargo, es importante aclarar que en la actualidad el Área se mide en unidades cuadradas y es sin duda la cuadratura quien impulsó este hecho.

Es importante que el docente actual trascienda más allá de los textos escolares y rescate la esencia del análisis geométrico del concepto de área para coadyuvar a una mejor comprensión. Este es uno de los retos que los docentes tienen para este siglo.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

En la presentación de este capítulo se pretende mostrar la fortaleza que proporciona un marco teórico de tipo cognitivo para el fortalecimiento de las competencias matemáticas, específicamente en lo que concierne al Área de figuras planas, en los estudiantes de Tercero y Octavo. Los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska (2000) se ajustan plenamente a los intereses de la investigación propuesta, puesto que la estructura de este marco guarda estrecha relación con la respuesta a nuestra problemática. Partiendo del hecho de que los estudiantes de la Institución presentaron dificultades para diferenciar el Área de figuras planas del concepto de perímetro y, que en los resultados de pruebas nacionales como en las Pruebas Saber se reconocieron dificultades en el componente geométrico y numérico, y en la competencia de razonamiento y argumentación, es apropiado considerar este marco teórico como una excelente alternativa de estudio ya que combina el pensamiento geométrico, el aritmético y el estructural, además del tránsito que se genera entre los mismos. Cabe destacar que el éxito depende en gran medida del diseño de actividades para que emerjan elementos Articuladores y que éstas realmente propicien el tránsito entre los Modos de pensar el Área de figuras planas.

3.1 GENERALIDADES DE LA TEORÍA

Teniendo como referente el objeto matemático a abordar dentro de la investigación, y después de hacer un análisis de cómo los estudiantes de los niveles de Básica Primaria, Básica Secundaria y Media logran una aprehensión del mismo, se realiza la elección del marco teórico para abordar la problemática de investigación planteada. Como referente teórico de la Didáctica de la Matemática se han considerado los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), porque provee de elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos, que, en este caso, corresponden al Área de figuras planas. Además, estos Modos de pensar permiten describir e interpretar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Es importante destacar que cuando se hace referencia a los Modos de Pensamiento, se alude a la comprensión de un concepto matemático, el cual requiere un significado para el Estudiante dependiendo del modo como se esté trabajando, lo que podría ser la causa de las dificultades que se presentan en el aula cuando el docente le plantea un interrogante en el Modo sintético y le pide interpretarla de una manera analítica (Parraguez, 2012), aspecto que favorece notoriamente el trabajo en contextos educativos en cuanto que el docente podrá tomar conciencia de la importancia de saber direccionar la pregunta dependiendo del objetivo interpretativo que esté buscando.

Sierpinska (2000) identifica tres Modos de Pensamiento que implican maneras de análisis diferentes, clasificándolos de la siguiente forma: el Sintético–Geométrico que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural, que se relacionan con el pensamiento teórico, los que serían detallados a continuación.

3.2 LOS MODOS DE PENSAMIENTO

3.2.1 El Modo Sintético–Geométrico

El Modo Sintético–Geométrico del Área de figuras planas (en adelante, SG–AFP), permite que el objeto matemático se pueda analizar desde una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc., resaltando que en este Modo de Pensamiento es fundamental la visualización (Cifuentes, 2011). Este Modo de Pensamiento va de la mano con el modelo cognitivo de razonamiento geométrico, donde se plantea que los procesos de razonamiento son posibles gracias a la interacción de tres procesos: visualización, construcción y razonamiento (Duval, 1998).

A continuación, las figuras 7 y 8 presentan un ejemplo de cómo se puede pensar desde el Modo SG el Área de figuras planas tanto para la educación básica primaria como para la básica secundaria.

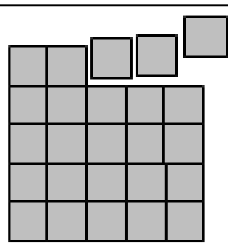


Figura 7. Forma de pensar el área de un cuadrado para Estudiantes de grado Tercero en el Modo SG.

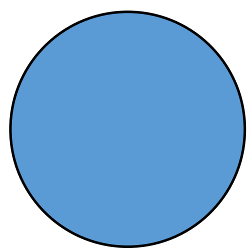


Figura 8. Forma de pensar el área de un círculo para Estudiantes de grado Octavo en el Modo SG.

3.2.2 El Modo Analítico–Aritmético

El Modo Analítico–Aritmético del Área de figuras planas (en adelante, AA–AFP) presenta la posibilidad de pensar el objeto matemático por medio de relaciones numéricas, donde, el Área ya se puede ver a través de operaciones con números reales o fórmulas matemáticas. (Parraguez, 2012). Este Modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el Modo SG por considerar otras relaciones que no son de tipo espacial.

Es importante resaltar la principal diferencia entre los Modos Sintético y Analítico, la cual radica en que, desde el Modo sintético, la mente puede acceder directamente a los objetos para describirlos, mientras que, en el Modo analítico, éstos se presentan de manera indirecta (Sierpinska, 2000).

De este modo, en las figuras 9 y 10 se presenta un ejemplo de cómo se puede pensar desde el Modo AA el Área de figuras geométricas.

$$A = \pi r^2$$

Figura 9. Forma de pensar el área de un círculo para Estudiantes de grado Octavo en el Modo AA.

$$\frac{\textit{Lado x Lado}}{\textit{Área}}$$

Figura 10. Forma de pensar el área de un cuadrado para Estudiantes de grado Tercero en el Modo AA.

3.2.3 El Modo Analítico–Estructural

El Modo Analítico–Estructural del Área de figuras planas (en adelante, AE–AFP), apunta a la interpretación por medio de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos (Cifuentes, 2011), lo que llevaría a plantear que es un Modo de pensar más avanzado donde se exigen otras relaciones, buscando generalizar elementos que ya se habían considerado en los Modos SG y AA.

La figura 11 ejemplifica cómo se puede pensar desde el Modo AE el Área de figuras planas.

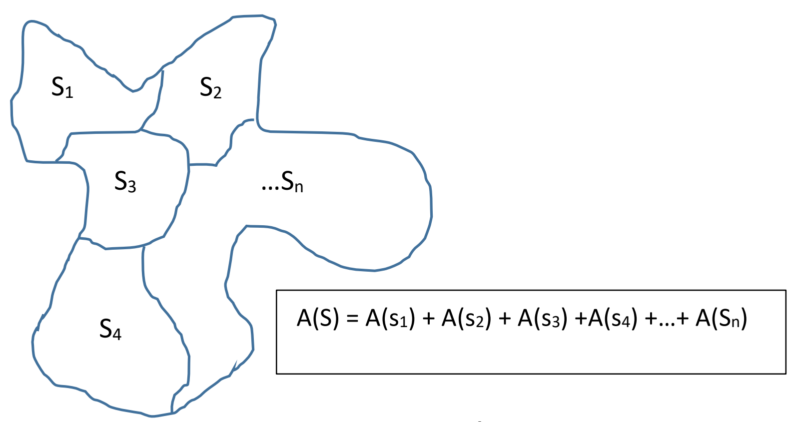


Figura 11. Forma de pensar el área en el Modo AE.

Al tratar de interpretar la propiedad de la disección, vista en el capítulo anterior, se puede afirmar que el Área es una cantidad que no depende de la posición de la figura y, en consecuencia, podemos reconfigurar subregiones dando lugar a nuevas regiones con otras formas, conservando el Área total.

De acuerdo con Duval (1999 y 2006), es importante no reducir el objeto matemático a sus representaciones semióticas. Por eso se hace necesario un cambio de forma y posición ya que esto permite que el Estudiante reconozca mejor la figura desligándola de las formas y posiciones convencionales.

Desde la perspectiva de esta investigación, se hace totalmente conveniente abordar el concepto de Área desde la teoría de Modos de Pensamiento, resaltando que es importante tener en cuenta la mirada que tiene el docente en el aula a partir de los Modos, porque sólo en esa medida podrá poner al estudiante en contacto con situaciones que fortalezcan cada forma de pensar, esto para minimizar el hecho de que funcionen mejor en unos que en otros, "por otra parte también se debe tener en cuenta que por los enfoques que habitualmente se realizan en los niveles educativos, los estudiantes funcionan más bien en SG y AA" (Parraguez, 2012, p. 22).

3.3 FORMAS DE PENSAR EL ÁREA DE FIGURAS PLANAS

En las figuras 12 y 13 sintetizamos algunas formas de pensar el Área de figuras planas básicas en los tres Modos de Pensamiento para los grados Tercero y Octavo. Aclaramos que en el Modo AE se puede proponer de varias maneras diferentes, dependiendo de las descomposiciones y composiciones que realice el estudiante y de los cambios de posición. También es importante mencionar que el tratamiento de Áreas que se pretende en esta investigación no se reduce a sus formas básicas, sin embargo, sí se desea que el estudiante comience por lo particular para que de esta manera pueda generalizar el concepto.

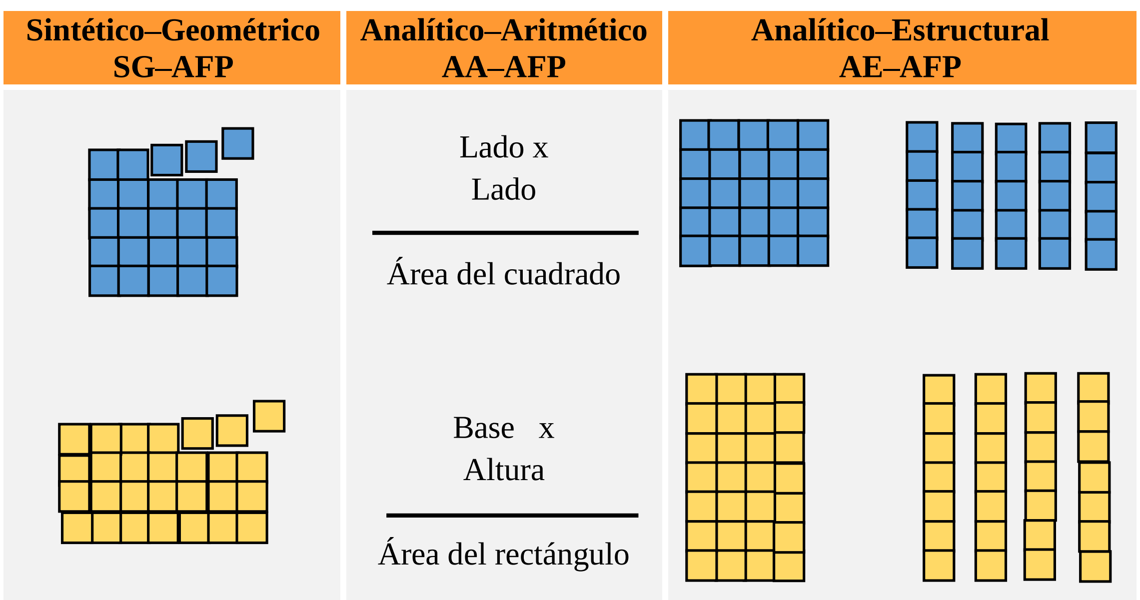


Figura 12: Los Modos de comprender el Área del cuadrado y el rectángulo para el grado Tercero.

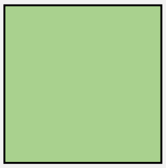
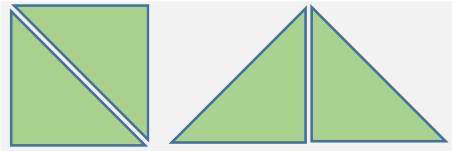
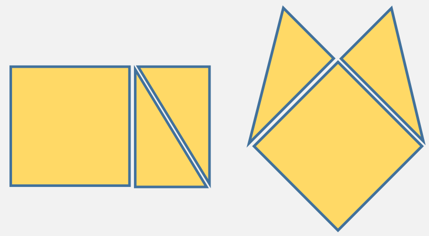
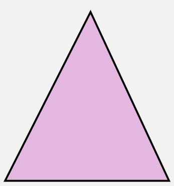
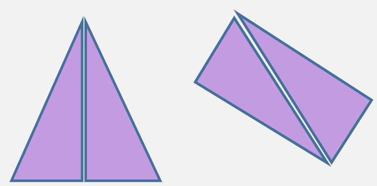
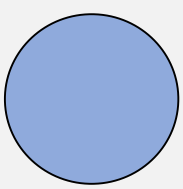
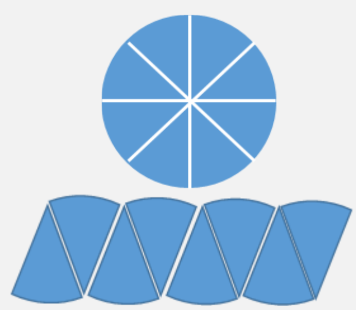
Sintético–Geométrico SG–AFP	**Analítico–Aritmético AA–AFP**	**Analítico–Estructural AE–AFP**
	$A = l^2$	
	$A = bh$	
	$A = \frac{bh}{2}$	
	$A = \pi r^2$	

Figura 13: Los Modos de comprender el Área de figuras planas básicas para el grado Octavo.

El Estudiante alcanza una comprensión profunda del concepto matemático de Área cuando logra transitar entre los Modos de Pensamiento AA, SG y AE. Para la enseñanza, la pregunta no es cuál Modo de pensamiento vale más para fomentar en el Estudiante, sino cómo llevar a los estudiantes al uso flexible y consciente de ellos. (Esta idea se sintetiza en el esquema de la figura 14).

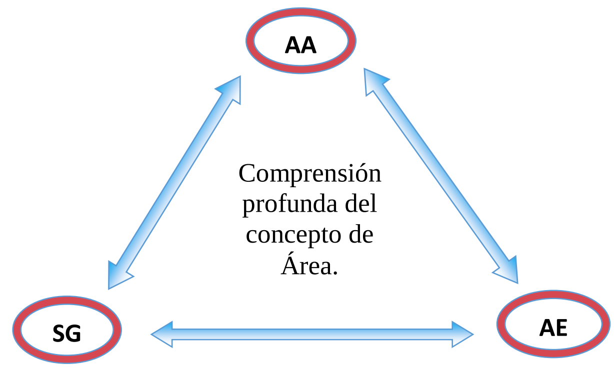


Figura 14: Esquema del tránsito entre los Modos de Pensamiento.

Abordar el estudio de un objeto matemático desde la teoría de Modos de Pensamiento, permite que el aprendiz interprete las situaciones de diferentes maneras dependiendo de la construcción cognitiva presente en ella, es decir, cada Estudiante encuentra útil uno u otro Modo de pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando. Al respecto, Parraguez (2012) plantea que "estos Modos de Pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno es su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando" (p.15)

Lo anterior se puede sintetizar en que los Modos de Pensamiento hacen alusión a que el estudiante referencia el objeto de estudio con las estructuras adquiridas por experiencias anteriores (Modo SG). Una vez incorporado al imaginario del estudiante, se pasa a un segundo momento, que es cuando se logra la aritmetización del objeto matemático (Modo AA). Es aquí cuando se generan las relaciones entre lo aritmético y lo geométrico, llevando el objeto matemático a una relación con diversos conceptos, logrando así una transversalización de conocimientos y se obtención de interconexiones procesuales y conceptuales entre los objetos matemáticos y sus relaciones (Modo AE), (ver figuras 12 y 13).

3.4 ELEMENTOS ARTICULADORES HIPOTÉTICOS

Como ya se mencionó anteriormente, el estudiante alcanza una comprensión profunda del concepto matemático de Área de figuras planas cuando logra transitar entre los Modos de Pensamiento AA, SG y AE. Desde esta perspectiva se hace necesario identificar y caracterizar aquellos elementos Articuladores que propicien este tránsito. Para tal fin, partimos de la hipótesis planteada por Turégano (1998) en donde se afirma que

> los problemas que ha tenido que resolver la humanidad para llegar al conocimiento que tenemos hoy de un concepto determinado son paralelos a los problemas que tiene que superar un estudiante actual para comprender correctamente ese concepto. Se trata, por tanto, de emparejar el proceso de aprendizaje con ese desarrollo histórico, evitando el error de creer que los estudiantes recorren los mismos caminos por los que se ha desarrollado la historia o que hay que conducirlos paso a paso, pues las condiciones actuales son muy diferentes de las anteriores. (p.234)

Esta hipótesis sugiere indagar nuevamente en los aspectos históricos y epistemológicos que dieron origen y permitieron la consolidación del concepto de Área. Caracterizar los Modos de Pensamiento e identificar los elementos Articuladores que se dieron a lo largo de la historia se convertirán en nuestros Articuladores hipotéticos, y del uso de éstos probablemente pueden emerger los procesos que cada estudiante utilice a la luz del desarrollo de los cuestionarios. Cabe anotar que el uso de un Articulador facilita la movilización entre dos Modos de Pensamiento, pero no necesariamente el uso de éste certifica la apropiación del concepto.

Para los egipcios fue necesaria la creación de una unidad de medida, tanto para medir el perímetro de sus terrenos como su extensión, en un proceso que les permitió tener un registro con el cual podían calcular el impuesto. Debido a que sus terrenos tenían formas geométricas, es indudablemente la prueba de una Articulación del Pensamiento Geométrico con el Aritmético. Este hecho sugiere el uso de Articuladores que permitieron la medición, el uso de unidades lineales y cuadradas y el conteo de las mismas. De igual manera se piensa hipotéticamente que los estudiantes realizarán estas mismas acciones, por tanto, se consideran los Articuladores $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$, $\xrightarrow[\text{Unidad}-\text{cuadrada}]{}$ y $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$**.** El sentido de la flecha indicará la dirección en que fueron usados estos elementos, es decir, se pasó de lo geométrico a lo numérico (SG→AA). El conteo por ser una actividad básica se consideró en doble vía.

Por otra parte, los griegos contribuyeron al desarrollo del álgebra. Para algunas figuras básicas se establecieron fórmulas y expresiones que posibilitaron la generalización de los cálculos. Este hecho muestra como los griegos usaron el razonamiento en donde se verifica el tránsito desde un Pensamiento Estructural hacia el Aritmético y el Geométrico. Este hecho sugiere el uso de elementos Articuladores como el uso de fórmulas ($\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$), operaciones Aritméticas ($\xrightarrow[\text{Operación}]{}$) y expresiones algebraicas ($\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$) para la realización de los cálculos, transitando entre lo Estructural a lo Aritmético.

Los griegos también, al trabajar el problema de la cuadratura del círculo, realizaron construcciones auxiliares ($\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$) para tratar de encontrar el área del círculo. Una clara muestra del razonamiento que les posibilitó movilizarse entre el pensamiento Estructural y Geométrico. El sentido inverso de la flecha indica que se da un tránsito del AE al SG. (Ver figura 15)

El triángulo de Sierpinski aborda el concepto del Área aplicado a los fractales, en donde el uso de patrones facilita el cálculo del Área total sombreada. Algunas situaciones cotidianas pueden resultar mediante el uso de patrones. Esto también podría evidenciar un tránsito desde lo Estructural hasta lo geométrico. Se sugiere el Articulador $\underset{\text{Patrón}}{\longleftarrow}$.

La comparación de figuras con el cuadrado y el rectángulo produjo que estas pudieran ser descompuestas como si fueran rompecabezas y armadas nuevamente, a esto se le llama la propiedad de la disección. Esto también da fe del uso de un pensamiento Estructural y Geométrico. Los elementos Articuladores hipotéticos que emergen de este hecho son $\underset{\text{Unidad no estándar}}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}}$ y $\underset{\text{Recomposición}}{\xrightarrow{\hspace{2.5cm}}}$ en donde se cree que los estudiantes pueden descomponer las figuras para lograr nuevas formas y garantizando la conservación del Área.

Dadas las tres formas de Pensamiento (SG, AA y AE) se sugiere clasificar los Articuladores en 3 tipos. Los Articuladores tipo 1 ($\underset{\text{Medida}}{\longrightarrow}$, $\underset{\text{Unidad−cuadrada}}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}}$ y $\underset{\text{Conteo}}{\longleftrightarrow}$) permiten la movilización entre el Modo SG y AA. Los Articuladores tipo 2 ($\underset{\text{Fórmula}}{\longrightarrow}$, $\underset{\text{Expresión}}{\longrightarrow}$ y $\underset{\text{Operación}}{\longrightarrow}$) facilitan el tránsito entre los Modos AA y AE. Por su parte, los Articuladores tipo 3 ($\underset{\text{Construcción aux}}{\xleftarrow{\hspace{3cm}}}$, $\underset{\text{Patrón}}{\longleftarrow}$, $\underset{\text{Unidad no estándar}}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}}$ y $\underset{\text{Recomposición}}{\xrightarrow{\hspace{2.5cm}}}$) dan cuenta del paso del Modo AE al SG. Los Articuladores hipotéticos sugeridos los presentamos sintetizados en el gráfico. (Ver figura 15)

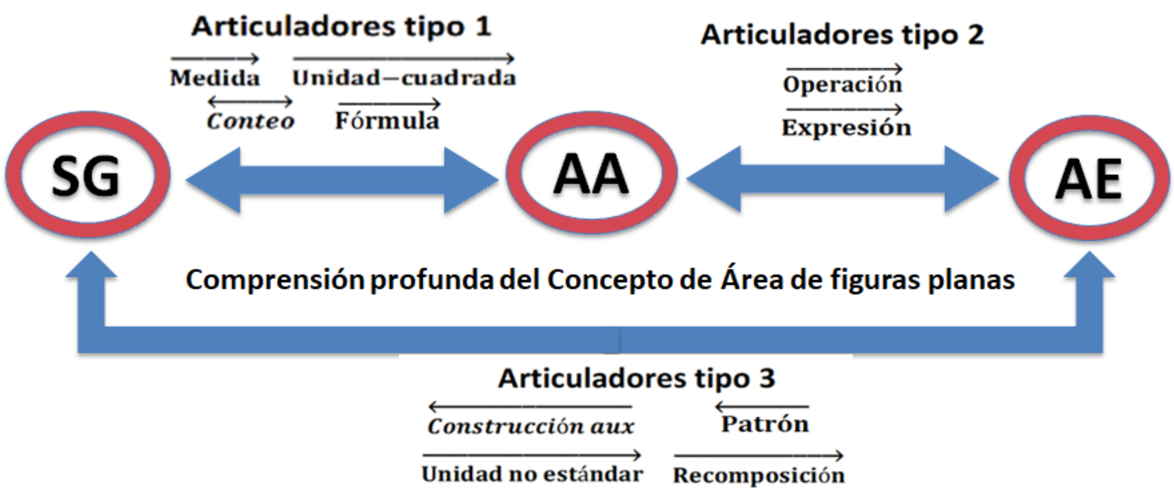


Figura 15: Esquema de Articuladores para la comprensión profunda del concepto de Área de figuras planas.

3.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Es importante aclarar que la teoría de los Modos de Pensamiento fue diseñada por Anna Sierpinska para tratar de dar solución a las dificultades conceptuales de los estudiantes en torno al álgebra lineal y es por esta razón que su adaptabilidad a otros objetos matemáticos podría presentar ciertas dificultades, sin embargo, estos resultados los aportará la investigación. No se recomienda forzar la comprensión del concepto del Área desde Modo AE, ya que el Área no es fácil de definir estructuralmente debido a la infinidad de contornos que podemos trabajar con los estudiantes, tanto de la educación básica primaria como en la básica secundaria.

Es posible que durante la aplicación del Cuestionario puedan emerger otros Articuladores no considerados en este capítulo.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

Es necesario fundamentar la base que genera la problemática en torno a la concepción del Área en contraposición con la de perímetro en los estudiantes de los grados Tercero y Octavo de la Institución, además, a través de un análisis didáctico pertinente se pretende diseñar e implementar un conjunto de estrategias y tareas plasmadas en Unidades Didácticas, las cuales permitirán abordar la problemática.

La apropiación del concepto por parte de los estudiantes se evidenciará luego de un minucioso análisis de resultados cuyo insumo principal será un comparativo entre el análisis a priori y a posteriori del Cuestionario. Es de anotar que a mediano y largo plazo también se podría evidenciar el éxito en la aplicación de la Unidad Didáctica, de una manera indirecta, si logramos mejorar los resultados en pruebas Saber e Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE). Lo anterior sugiere centrar la investigación en un corte empírico experimental, el cual se mantendrá durante todo el proceso de la investigación.

Es evidente que el desarrollo de este tipo de investigación es subjetivo e interpretativo y se basa en resultados de investigaciones anteriores y de la experiencia como docentes en el actual contexto, en consecuencia, el enfoque a desarrollar en la metodología es de índole cualitativa. Dado el hecho de que se busca en el Estudiante favorecer la participación activa y aplicar los aprendizajes teóricos a contextos reales, haciendo énfasis en la capacidad de argumentación, desarrollaremos un tipo de investigación con estudio de caso tal como lo propone Stake (2010).

4.1 CONTEXTO Y POBLACIÓN

Esta investigación se llevará a cabo en la Institución Educativa Juan de Dios Cock, ubicada en el Barrio Manrique Las Esmeraldas, comuna 4 de la Ciudad de Medellín. La Institución es de carácter oficial y presta los servicios desde transición hasta el grado once. El estrato socioeconómico de las familias de la comunidad es 1, 2 y 3. La misión de la Institución está orientada a formar Seres humanos de manera integral desde el ser, el saber y el hacer enmarcados bajo los principios de respeto, responsabilidad, sentido de pertenencia, disciplina, solidaridad y tolerancia, como lo plantea su PEI.

La población en la cual se implementará la investigación se centra en los grados Tercero y Octavo. A la totalidad de estudiantes de ambos grados se les implementaron actividades de aula basadas en el Área de figuras planas, las cuales fueron diseñadas con base en la Teoría de Modos de Pensamiento e incluidas en los planes de área de estos grados.

El grado Tercero se compone de tres grupos de 37 estudiantes cada uno y un total de 111, cuyas edades oscilan entre los 8 y 10 años. Los instrumentos de investigación se aplicarán a 15 estudiantes de buen desempeño, cada uno será etiquetado desde el ET–01 hasta el ET–15.

El grado Octavo de la Institución dispone de tres grupos de 36 estudiantes en promedio, para un total de 108, cuyas edades oscilan entre los 13 y 15 años. Los instrumentos de investigación se aplicarán a 14 estudiantes de buen desempeño, quienes serán divididos en dos categorías como se muestra en la tabla a continuación:

Tabla 1. Casos de estudio para el grado Octavo

	Descripción del caso	**Etiqueta**
Caso 1	Estudiantes de buen desempeño que trabajaron el concepto de Área durante las clases regulares en el aula.	EO–16 hasta EO–24
Caso 2	Estudiantes de buen desempeño que participaron de las clases regulares y adicionalmente recibieron una capacitación extra de 3 clases de geometría usando el software Cabri Geometric II Plus.	EO–25 hasta EO–29

4.2 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

Como se puede observar en el esquema de la figura 16, la investigación inicia con el diseño y aplicación de un cuestionario a priori basado en la teoría de los Modos de Pensamiento y tomando como insumo los resultados de Pruebas Saber de años anteriores y que permitan identificar con mayor claridad las dificultades de los estudiantes en cuanto a la concepción del Área. De ser necesario se realizarán entrevistas, a los estudiantes para fortalecer los resultados que el análisis a priori nos brinda, y durante la fase de implementación se realizará un registro fotográfico, de audio y video, para así seleccionar la información más relevante para la investigación. Finalmente, realizaremos un minucioso análisis de la información con el cual construiremos las unidades didácticas.

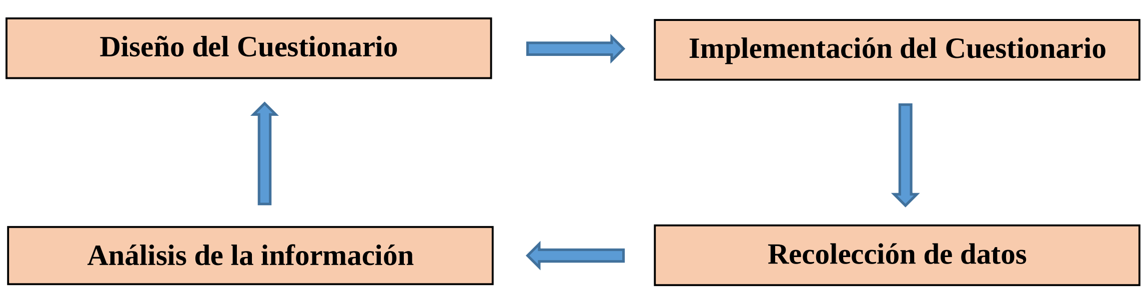


Figura 16: Esquema para las etapas de la investigación

4.2.1 Diseño del Cuestionario.

Los cuestionarios, tanto para Tercero como para Octavo, constan de 5 preguntas basadas en la teoría de los Modos de Pensamiento, considerando el Área como objeto matemático. En el desarrollo de los cuestionarios se espera que los estudiantes transiten entre los Modos SG-AFP, AA-AFP y AE-AFP.

Las preguntas del cuestionario se diseñaron en varios niveles de comprensión, comenzando desde los elementos básicos del Área hasta los elementos de mayor complejidad. Esto, con el fin de poder detectar con más claridad aquellos Pensamientos de la geometría que más priorizan los estudiantes y que propician el tránsito entre los diferentes Modos. Lo anterior aplica tanto para el grado Tercero como Octavo.

4.2.2 Implementación del Cuestionario.

La implementación de los Cuestionarios se pretende realizar en dos sesiones extra clase, tanto para el grado Tercero como para Octavo, tomando registro fotográfico y de video.

4.2.3 Recolección y selección de datos.

Una vez realizada la implementación, recolectaremos todo el material audio visual y seleccionaremos todo aquello que permita hacer un análisis más concreto, teniendo como base el análisis a priori que se realizó de cada cuestionario. Para el análisis de la información se tendrán en cuenta la totalidad de las respuestas de los estudiantes, ya que nuestro objetivo es analizar el impacto de las preguntas formuladas en los cuestionarios para cada uno de ellos en paralelo con el análisis a priori.

4.2.4 Análisis de datos

4.2.4.1 Análisis a priori

Este análisis se realiza con base en el marco teórico Los Modos de Pensamiento y desde lo que se espera que los estudiantes respondan durante la aplicación del cuestionario.

Los estudiantes de grado Tercero y Octavo recibieron unos conocimientos algorítmicos previos para poder abordar el cuestionario. En relación al aspecto matemático, se abordaron las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división en el sistema de los números naturales. Con respecto al grado Octavo, se procedió de igual forma, enfatizando en el sistema de los números reales y en el manejo de expresiones algebraicas.

Con respecto al ámbito geométrico, los estudiantes de los grados Tercero y Octavo se capacitaron durante las clases en el reconocimiento de figuras geométricas básicas como cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo, además de los elementos básicos de la geometría tales como: recta, segmento, punto, semirrecta, vértice, lado, ángulo, etc. Del mismo modo se consideraron las unidades de medida elementales, tanto para la longitud como para el Área en el sistema métrico decimal. En ambos grados se realizó un acercamiento al concepto de Área tal como estipulan en los planes de estudio. Un grupo de 5 estudiantes de grado Octavo recibieron una capacitación extra de tres clases con el software Cabri.

Es de aclarar que las relaciones matemáticas para calcular el Área de figuras geométricas por parte del estudiante de grado Tercero, se resumen en el cuadrado y el rectángulo, sin embargo, se espera que sea capaz de extender el concepto y considerar el Área de otras figuras.

El análisis a priori del cuestionario se presenta con profundidad en el capítulo 5.

4.2.4.2 Análisis a posteriori

Aunque este análisis lo detallaremos con profundidad en el siguiente capítulo, mostraremos un ejemplo de la plantilla que utilizaremos para realizar el análisis por pregunta. Iniciamos con el grado Tercero y culminamos con el grado octavo.

Estudiante	**SG**	**AA**	**AE**	**Articuladores tipo 1**	**Articuladores tipo 2**	**Articuladores tipo 3**
E–01						
E–02						

Figura 17: Plantilla para el análisis a posteriori de los cuestionarios por pregunta.

En la figura 17 se muestra una plantilla para facilitar el análisis por pregunta en cuanto a los Modos de Pensamiento y Articuladores que más usaron los estudiantes para solucionar la pregunta. Cuando un estudiante no logre responder correctamente una pregunta, se entenderá en su procedimiento que éste podría ubicarse en uno o varios Modos Pensamiento, sin embargo, lo realiza de forma aislada, es decir, sin el uso de Articuladores.

Después de realizar el análisis y verificar cuáles fueron los Modos Pensamiento que más utilizaron los estudiantes, se considera la posibilidad de hacer una entrevista semiestructurada que permita aportar información adicional sobre aquellos hallazgos que no quedaron claros en los cuestionarios.

4.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS.

Tabla 2. Técnicas e instrumentos utilizados para el análisis de la información

TÉCNICA	INSTRUMENTO
Encuesta	Cuestionario de pregunta semi abierta.
Observación	Cámara de audio y video
Registro	Plantilla para análisis

Cuestionario: Se diseñarán dos cuestionarios de pregunta semi abierta, uno para grado Tercero y otro para grado Octavo. Estos se aplicarán a la totalidad de la población, es decir, a los 29 estudiantes. Con el cuestionario se pretende observar y confirmar aspectos de la problemática que dieron origen a esta investigación y que finalmente será pieza clave para el análisis de resultados.

Documentación Audio visual: Durante la implementación de los cuestionarios se realizará un registro de video, fotografía y audio donde se pueda observar los procesos que usan los estudiantes para resolver los cuestionarios. Además, se grabarán las preguntas que ellos realizan durante la resolución. Lo anterior con el fin de encontrar con mayor facilidad aquellos elementos relevantes que favorezcan el cumplimiento de los objetivos de la investigación y así propiciar la reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Registro: Después de la implementación de los cuestionarios se tomarán datos de la información obtenida en los procesos y se tabularán en las plantillas de registro (ver figura 17). De esta manera tendremos una base para analizar la forma en que los estudiantes realizan el tránsito por los diferentes Modos de Pensamiento.

4.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Para el grado Tercero se unificó el grupo exploratorio ya que la pretensión de la investigación es detectar las debilidades y fortalezas en la comprensión del concepto de Área en los primeros niveles de la educación básica primaria.

En el grado Octavo se quiso trabajar con 2 casos de investigación, el primero, compuesto por los estudiantes que vieron el curso de geometría durante las clases regulares en el aula. El segundo caso compuesto por 5 estudiantes que participaron de tres clases extras sobre el uso del software Cabri, donde se trabajaron diferentes situaciones geométricas. La finalidad del segundo caso de investigación fue analizar el impacto de la implementación de esta estrategia didáctica en el tránsito a través de los diferentes Modos de Pensamiento para la concepción del Área, lo anterior, mediante el uso de los Articuladores definidos en el capítulo 3.

Finalmente, se quiso trabajar con los dos grados ya que esto permite identificar aquellos procesos que emergen o desaparecen con el cambio de ciclo.

CAPÍTULO 5

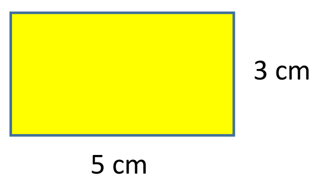
ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se realiza el análisis a priori y a posteriori del cuestionario iniciando con el grado Tercero y finalizando con el grado Octavo. En el análisis a priori, el cual se hace por pregunta, se usa el marco teórico como sustento para detallar lo que se espera del estudiante al enfrentarse a cada una de las preguntas y así validar los aprendizajes adquiridos en el aula. Seguidamente, se presenta el análisis a posteriori de acuerdo a los hallazgos obtenidos de la aplicación del cuestionario a cada estudiante, tanto de Tercero como de Octavo grado, en función de Los Modos de Pensamiento y de los elementos Articuladores que más privilegiaron en sus respuestas. Cabe recordar que el análisis se hace por pregunta y que sus resultados se tabulan para su presentación.

5.1 ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO

5.1.1 Análisis a priori del cuestionario para el grado Tercero de la básica primaria

Pregunta 1: ¿Cómo podrías calcular el Área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.



Esta pregunta tiene como intención verificar que tanto el estudiante conoce el concepto de Área y de las estrategias que utiliza para cuantificarla.

Lo que se espera del estudiante desde cada Modo de Pensamiento es:

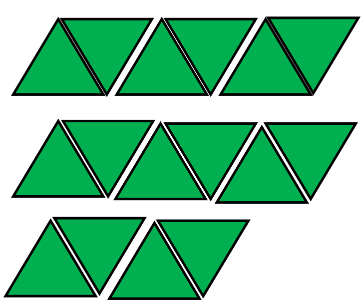
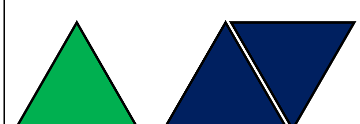
<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 3. Análisis a priori de la pregunta 1 para grado Tercero</th></tr>
<tr><th>SG–AFP</th><th>AA–AFP</th><th>AE–AFP</th></tr>
<tr>
<td>En el Modo SG se pretende que el estudiante sea capaz de descomponer la figura usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ en cuadrículas y contabilizarlas a través del Articulador $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$, así, por medio del tránsito hasta el AA calcularía el Área.
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
</table></td>
<td>Aplicar las relaciones numéricas asociadas al Área del rectángulo, transitando desde el AE hasta el AA y realizando la multiplicación de los segmentos. Para esto es necesario el Articulador $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$
$$Área = 5cm \ x \ 3cm = 15cm^2$$</td>
<td>En el Modo AE el estudiante tendría podría visualizar que hay 5 columnas de 3 cuadraditos de 1 cm^2 cada uno y multiplicar transitando hasta el AA. Además puede generalizar afirmando que esto se cumpliría para cualquier rectángulo.</td>
</tr>
</table>

Pregunta 2: Se requieren 16 triángulos como el de la figura para rellenar una superficie. ¿Cuántos paralelogramos necesitaremos para cubrir la misma superficie? Explica con detalle tu procedimiento.

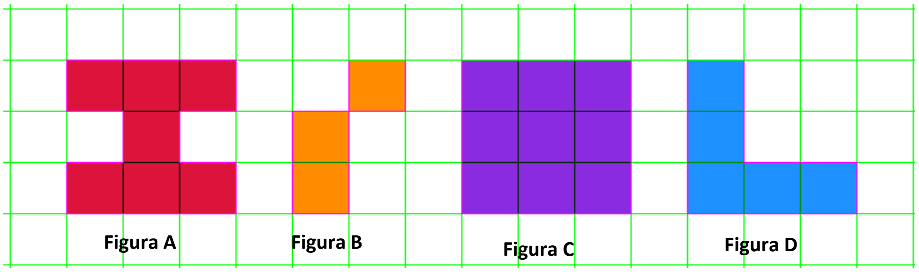
Triángulo Paralelogramo

Esta pregunta tiene como intención que el estudiante reconozca el concepto de Área y su independencia de la forma y de la posición.

Lo que se espera del estudiante desde cada Modo de Pensamiento es:

Tabla 4. Análisis a priori de la pregunta 2 para grado Tercero		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
Se puede suponer una superficie compuesta por 16 triángulos como el de la figura y resaltar los paralelogramos. Puede usar el Articulador de $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ para concluir que son 8. En la figura se muestra el posible procedimiento que realizaría el estudiante. 	El estudiante asigna un valor cualquiera al Área del triángulo, ejemplo, $1\ \boldsymbol{cm^2}$. Por ende el paralelogramo tendrá un Área de 2 $\boldsymbol{cm^2}$. Con el Área del triángulo puede calcular el Área de la superficie a ser llenada, $A = 1x16\ cm^2 = 16\ cm^2$. Y finalmente dividir el Área de la superficie entre el Área del paralelogramo y llegar al mismo resultado. Este proceso será posible si usa los Articuladores de $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$, realizando un tránsito desde el SG al AA.	El estudiante podría ubicarse en el Modo AE y mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$ realizar un tránsito hasta el SG y descubrir que en el paralelogramo caben exactamente 2 triángulos y por consiguiente va a necesitar la mitad para llenar la superficie pedida, es decir, 8 paralelogramos. Este concepto lo puede generalizar a cualquier superficie. 

Pregunta 3: Organiza las siguientes figuras de mayor a menor Área y repite el mismo procedimiento para el perímetro. ¿Es el mismo orden? ¿Qué puedes decir del Área respecto al perímetro?

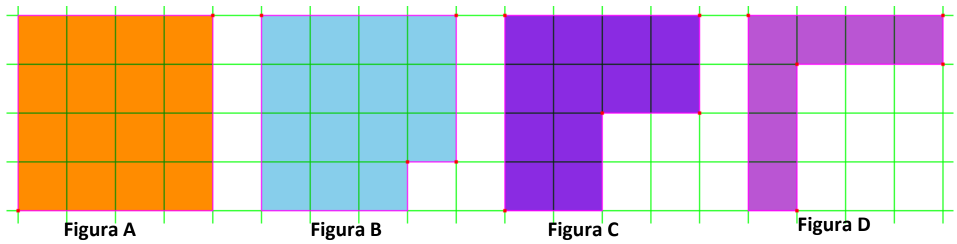


Esta pregunta tiene como intención que el estudiante reconozca los conceptos de Área y de perímetro y la independencia que existe entre ellos.

Lo que se espera del estudiante desde cada Modo de Pensamiento es:

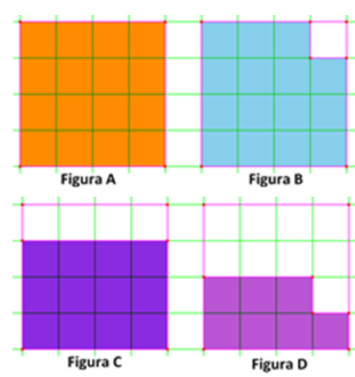
Tabla 5. Análisis a priori de la pregunta 3 para grado Tercero		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
Se puede ubicar en el Modo SG y superponer las figuras para comparar su superficie y establecer el orden jerárquico respecto al Área, sin necesidad de contar cuadrículas, solo por simple comparación. De manera similar se hace para el perímetro y verificar que el orden es diferente. Esto conlleva al Estudiante a desligar la dependencia entre los conceptos. El estudiante deberá concluir entonces que mayor Área no implica mayor perímetro y viceversa.	El estudiante podría realizar un tránsito desde el Modo SG hasta el AA y a través del Articulador $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ puede cuantificar las medidas de las cuadrículas, asignando un valor numérico y calcular el Área de cada figura según el número de cuadrículas que la compone. Así podría clasificar de mayor a menor los resultados obtenidos. De manera similar podría hacerlo para el perímetro y llegar a la misma conclusión.	Desde el Modo AE se podría descomponer cada figura en bloques. Se puede realizar un tránsito hasta el SG si recompone las superficies en otras que se puedan comparar más fácilmente. De esta manera el estudiante puede comparar la cantidad de bloques de cada figura y así establecer el orden correspondiente según su Área. Este último proceso evidenciaría un tránsito desde el AE hasta el AA con el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$. Con un procedimiento similar para el perímetro se llegaría a un orden diferente.  

Pregunta 4: Al observar las figuras ¿Qué puedes afirmar acerca de sus Áreas? ¿Qué puedes afirmar acerca de sus perímetros? ¿Qué puedes concluir?



La intención de esta pregunta es verificar si el estudiante tiene claro que figuras con igual perímetro pueden tener diferente Área.

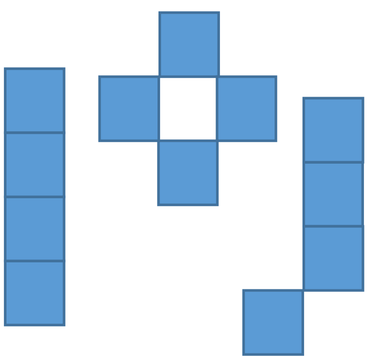
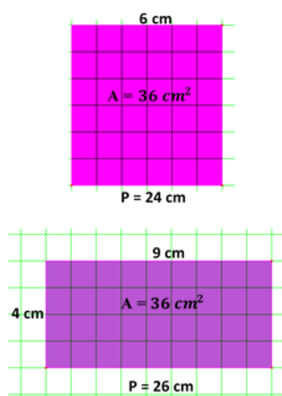
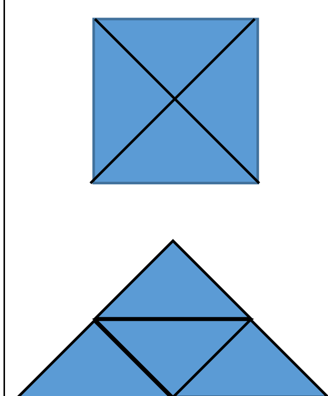
Lo que se espera del estudiante desde cada Modo de Pensamiento es:

Tabla 6. Análisis a priori de la pregunta 4 para grado Tercero		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
El estudiante desde el Modo SG puede identificar por simple visualización que las Áreas van disminuyendo a medida que cambia de figura teniendo en cuenta que todas parten de un mismo contorno cuadrado, mientras tanto el perímetro de cada una es el mismo. En consecuencia, el Estudiante debería concluir que igual perímetro no significa igual Área y que estos conceptos son distintos.	Desde el Modo AA se puede realizar un tránsito hasta el SG usando el Articulador $\xleftrightarrow[Conteo]{}$ y así cuantificar las medidas de las cuadrículas, asignando un valor numérico y calcular el Área de cada una según el número de cuadrículas que la compone, de igual manera que en la pregunta anterior. Figura A: 16 cuadritos Figura B: 15 cuadritos Figura C: 12 cuadritos Figura D: 7 cuadritos De manera similar podría sumar los lados que compone cada figura y comprobar que el perímetro no cambia mientras que el Área disminuye.	Con respecto al Área, el estudiante podría reconfigurar los cuadritos en otras posiciones que le permitan observar con más claridad la disminución del Área. La siguiente figura muestra una de las posibles formas. Este proceso evidenciaría un tránsito desde el AE hasta el SG usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$  Se concluye que el perímetro se mantiene, mientras el área disminuye.

Pregunta 5: ¿De qué manera podrías construir figura con Área igual? Explica mediante ejemplos.

La intención de esta pregunta es verificar si el estudiante es capaz de construir figuras con características dadas usando los conceptos de Área y perímetro. Esta pregunta es muy importante para evaluar las estrategias que cada estudiante implementa, ya que se pone en juego su creatividad y conocimiento de los elementos de la geometría.

Lo que se espera del estudiante desde cada Modo de Pensamiento es:

Tabla 7. Análisis a priori de la pregunta 5 para grado Tercero		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
Se puede partir de la misma cantidad de cuadros y mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ se pueden formar distintas figuras. Esto implicaría un tránsito desde el AE al SG. Es de anotar que dado que el estudiante conoce también los rectángulos podría haber partido de estas figuras como base. 	Desde el Modo AA se podría iniciar con una medida de Área, ejemplo, A = 36 cm^2. Con esta medida el estudiante puede recurrir a 2 multiplicaciones cuyo producto sea 36 y asignar estos valores a la medida de dos rectángulos Esto implica un tránsito desde el AE hasta el AA y SG usando los Articuladores $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$. 	Desde el Modo AE también cabe la opción de descomponer una figura en unidades no estándar y reconfigurarlas para obtener figuras de área igual. Este procedimiento implica un tránsito desde el AE hasta el SG usando los Articuladores $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$. 

5.1.2 Análisis a priori del cuestionario para para el grado Octavo de la básica secundaria

Pregunta 1: ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor Área? Explica con detalle tu respuesta.

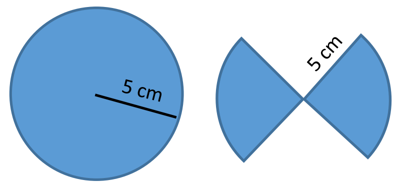


Figura A Figura B

La intención de esta pregunta es verificar en qué medida los estudiantes reconocen los conceptos de Área y las estrategias para cuantificarlo.

Lo que se espera del estudiante desde los diferentes Modos de Pensamiento es:

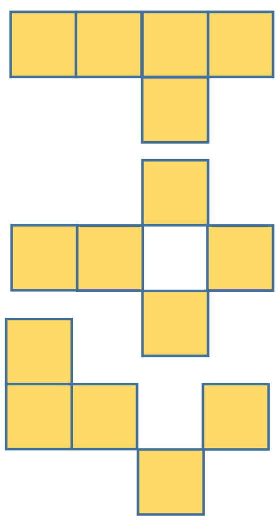
Tabla 8. Análisis a priori de la pregunta 1 para grado Octavo		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
El estudiante podría ubicarse en el Modo SG, y desde allí, superponer las figuras ya que proceden de un mismo contorno y a partir de allí usar el gráfico para concluir que la figura B está incompleta y por ende es de menor Área.	Desde el Modo SG se puede transitar hasta el AA a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$. De esta manera se identifica la figura y se asocia a la expresión que permite calcular su área. Área de la figura A, $A = \pi r^2 \approx 78{,}54\ cm^2$. Mientras tanto el Área de la figura B está compuesta por dos cuartas partes de la figura A, en consecuencia podría escribirse que el Área de la figura $B = \frac{2(78{,}54\ cm^2)}{4} \approx 39.27\ cm^2$ y concluir que el Área de la figura A es mayor.	Se descompone la figura A en 4 porciones como si fuese una pizza y al comparar, es acertado concluir que la figura A tiene el doble del Área de la figura B y por ende es mayor. Esto se cumple para cualquier medida del radio siempre y cuando sean iguales. La generalización implica que el estudiante se ubique en el Modo AE y realice un tránsito hasta el SG a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$.

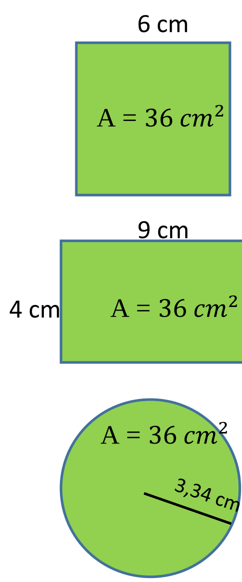
Pregunta 2: ¿De qué manera podrías construir figura con Área igual? Explica mediante ejemplos.

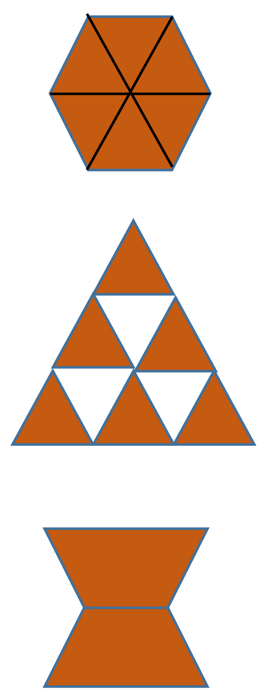
La intención de esta pregunta es verificar en qué medida los estudiantes logran relacionar figuras con diferentes formas con una misma medida del Área.

Al igual que en el grado Tercero, es importante observar los elementos de la geometría que se ponen en juego en los procesos de los estudiantes.

Lo que se espera del estudiante desde los diferentes Modos de Pensamiento es:

<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 9. Análisis a priori de la pregunta 2 para grado Octavo</th></tr>
<tr><th>SG–AFP</th><th>AA–AFP</th><th>AE–AFP</th></tr>
<tr>
<td>Se puede partir de la misma cantidad de cuadros y mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ se pueden formar distintas figuras. Esto implicaría un tránsito desde el AE al SG.
</td>
<td>Usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ se puede partir de un Área dada, ejemplo, A = $36\ cm^2$. Con esta medida se pueden buscar varias formas que cumplan con esta Área. Para esto es procedente seleccionar algunas figuras conocidas y usar el Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$. Este proceso requiere un tránsito desde el SG al AA.

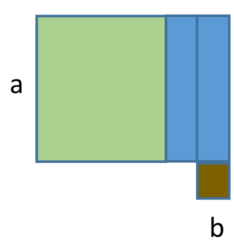
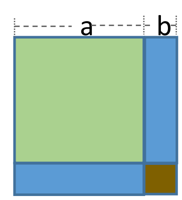
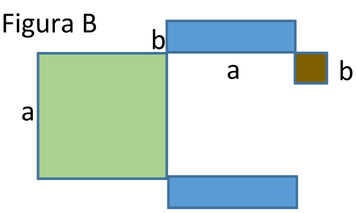
Para el caso de un cuadrado, un rectángulo y un círculo el cálculo de sus elementos se muestran en la figura.
</td>
<td>Se puede partir de un caso particular y luego generalizar el concepto a partir de las propiedades del Área afirmando que al descomponer una figura cualquiera y separar sus partes se conserva el Área.

Este proceso requiere un tránsito desde el Modo AE hasta el SG a través de los Articuladores $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$. y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$
</td>
</tr>
</table>

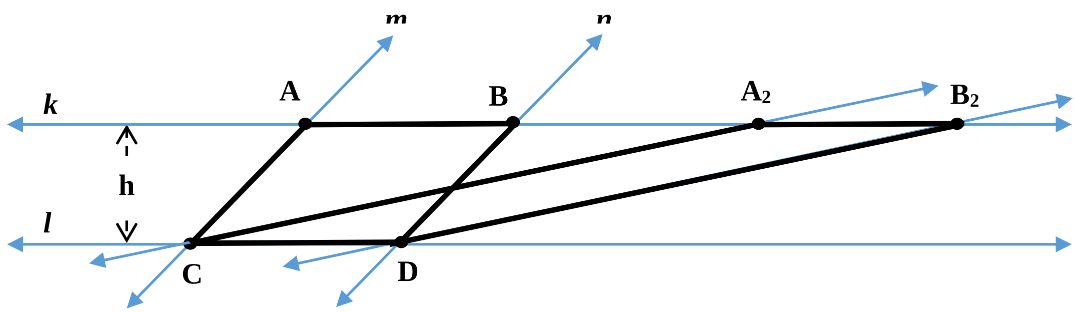
Pregunta 3: El Área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

La intención de esta pregunta es verificar si el estudiante relaciona y explica por medio de Áreas algunos resultados algebraicos del binomio cuadrado.

Lo que se espera del estudiante desde los diferentes Modos de Pensamiento es:

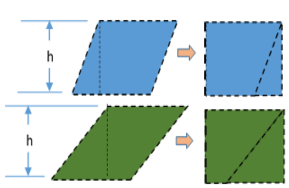
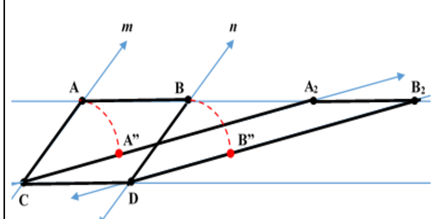
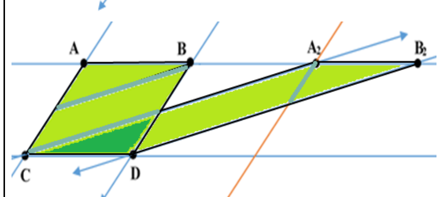
Tabla 10. Análisis a priori de la pregunta 3 para grado Octavo		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
Se puede ubicar en el Modo AA y a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$ verificar que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Luego realizar un tránsito hasta el SG y construir una figura con esta Área y se verifica que su perímetro corresponde a una expresión diferente. Para el caso de la figura: P = 4a + 6b.  	Se pueden asignar valores a a y b y convertir el ejercicio en numérico y al constatar el perímetro en figuras no cuadradas se podrá verificar que la afirmación es incorrecta. Por ejemplo, para un círculo con a = 2 cm y b = 3cm sería: $A = (a+b)^2 = (5cm)^2 = 25\ cm^2$ Para esto r = 2,82cm y en consecuencia el perímetro del círculo es: P = 17,7 cm el cual no corresponde a 4(5cm). Lo anterior evidencia un tránsito desde el Modo AA al SG a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$.	Se construye el cuadrado y se define la longitud **a** y **b**. Luego se subdivide el cuadrado en rectángulos y cuadrados más pequeños como se muestra en la figura A. Seguidamente estas formas se reconfiguran y se verifica que en este caso la nueva expresión para el perímetro es $P = 8a + 8b = 8(a+b)$ que corresponde al doble del perímetro anterior. En consecuencia, la afirmación es incorrecta y solo es posible si la figura tiene forma cuadrada. En este proceso se evidencia un tránsito desde el Modo AE hasta el SG a través de los Articuladores $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$. y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ Figura A  Figura B 

Pregunta 4: Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el Área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

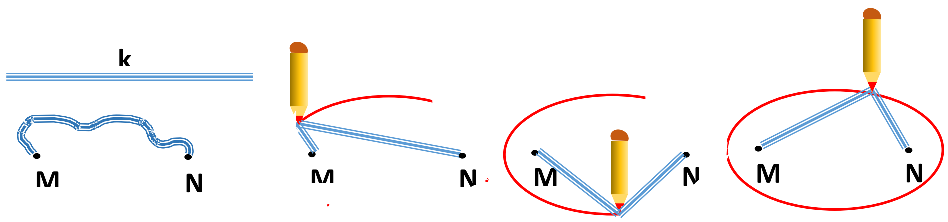


La intención de esta pregunta es comprobar si el estudiante reconoce figuras que conservan el Área al construir paralelogramos de iguales bases y alturas.

Lo que se espera del estudiante desde los diferentes Modos de Pensamiento es:

Tabla 11. Análisis a priori de la pregunta 4 para grado Octavo		
SG–AFP	**AA–AFP**	**AE–AFP**
El estudiante podrá ubicarse en el Modo SG y comprobar que 2 paralelogramos con las mismas bases y alturas tienen la misma Área y estas son equivalentes a las de dos rectángulos con las mismas dimensiones como se observa en la figura. 	Se pueden asignar valores a los segmentos, bien sea usando hojas cuadriculadas o mediante la toma de medidas y así poder comprobar numéricamente los resultados anteriores. Para calcular el Área el estudiante puede transitar desde el Modo SG hasta el AA mediante los Articuladores $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$. Usando la expresión $A = bh$ donde A es el Área y bh es el producto de la base y la altura del paralelogramo. Se concluye que el Área se conserva.	El estudiante desde el Modo AE podría Trazar una paralela por A2 y tratar de reconstruir la superficie del paralelogramo CA_2B_2D dentro del paralelogramo ABCD y comprobar si se ajustan perfectamente. En este proceso se evidenciaría un tránsito desde el Modo AE al SG a través de los Articuladores $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$. y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$  

Pregunta 5: Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras

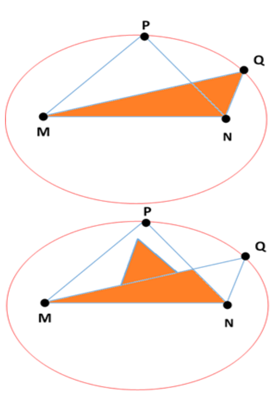
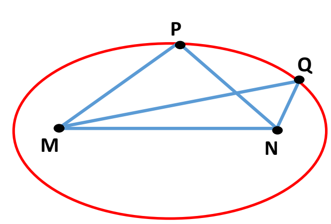


Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al Área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

La intención de esta pregunta es verificar si el estudiante logra identificar la propiedad principal de la elipse y relacionarla con figuras isoperimétricas.

Lo que se espera del estudiante desde los diferentes Modos de Pensamiento es:

Tabla 12. Análisis a priori de la pregunta 5 para grado Octavo

SG–AFP	AA–AFP	AE–AFP
El estudiante podría ubicarse en el Modo SG y por simple comparación notar que el Área del triángulo MQN es menor que el Área del triángulo MPN, mientras su perímetro se conserva ya que k es constante. 	Haciendo un tránsito desde el SG hasta el AA se pueden asignar valores numéricos a cada uno de los segmentos involucrados y a la altura de los triángulos. Esto se puede realizar con la ayuda de una regla con centímetros y el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$. Una vez hecho esto deberá calcular el Área de los triángulos con la expresión A= $\frac{bh}{2}$ y llegar a la misma conclusión. Este proceso evidenciaría el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$	Al observar los triángulos se deduce que su Área va disminuyendo a medida que el punto Q se acerca a uno de los extremos más anchos de la elipse. Este hecho se prueba teniendo en cuenta que todos los triángulos tienen la misma base, pero su altura va disminuyendo. Su perímetro permanece constante ya que $perímetro = k + \overline{MN}$. Lo anterior requiere un tránsito desde el AE hasta el SG a través del Articulador $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$. 

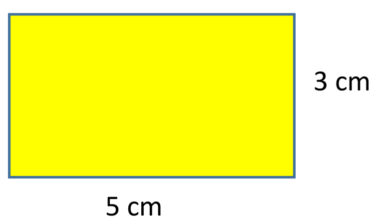
Si bien, un estudiante de grado Octavo no ha tenido contacto con las propiedades de la elipse como lugar geométrico y solo la puede reconocer como un óvalo, se espera que al observar su trazo él pueda inferir que al ser constante el largo de la cuerda entonces $\overline{MQ} + \overline{QN} = k$, es una longitud constante.

5.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO

Es importante resaltar qué para la aplicación de los cuestionarios, se les solicitó a los estudiantes, tanto de grado Tercero como Octavo, realizar varios procedimientos para resolver la pregunta en caso de conocerlos. Lo anterior con el fin de evaluar de manera más objetiva el uso de cada Modo Pensamiento y los Elementos Articuladores asociados. El análisis se realizará por pregunta y sus resultados se presentan en tablas que aparecen después de cada pregunta.

5.2.1 Análisis a posteriori del cuestionario para el grado Tercero de la básica primaria

Pregunta 1: ¿Cómo podrías calcular el Área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

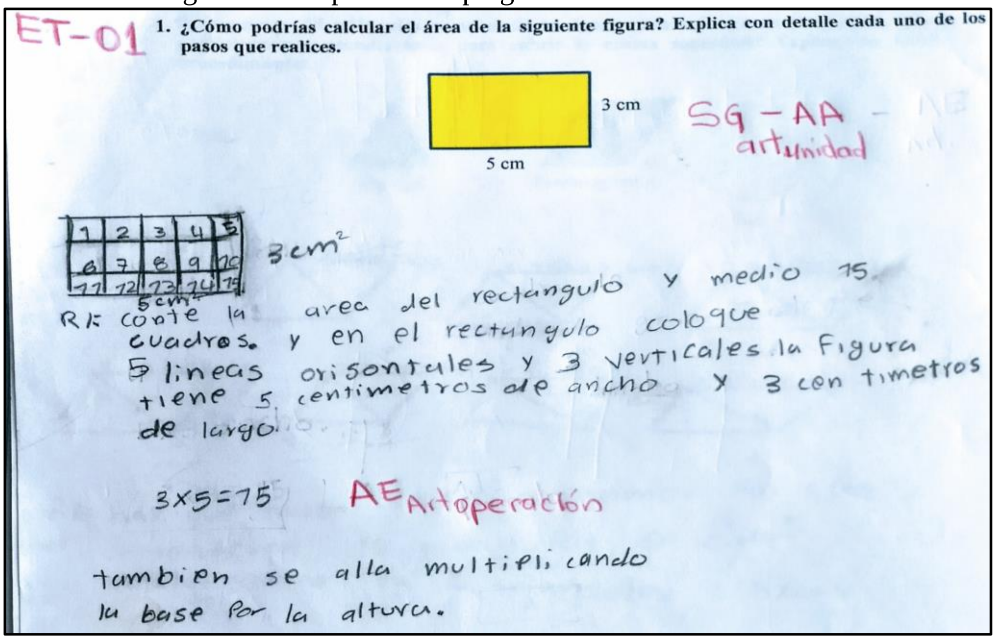


En esta pregunta todos los estudiantes lograron calcular correctamente el Área de la figura dada. Todos ellos se ubicaron en el Modo SG, dibujaron la figura, la dividieron en 15 cuadritos y mediante el uso del Articulador $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ procedieron a calcular su Área, transitando así hasta el Modo AA.

9 estudiantes transitaron del Modo AE al AA a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$, realizando organizaciones por filas y columnas, luego, mediante el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$ procedieron a calcular el Área de una manera más sencilla. Cabe decir que ningún estudiante calculó el Área en cm^2.

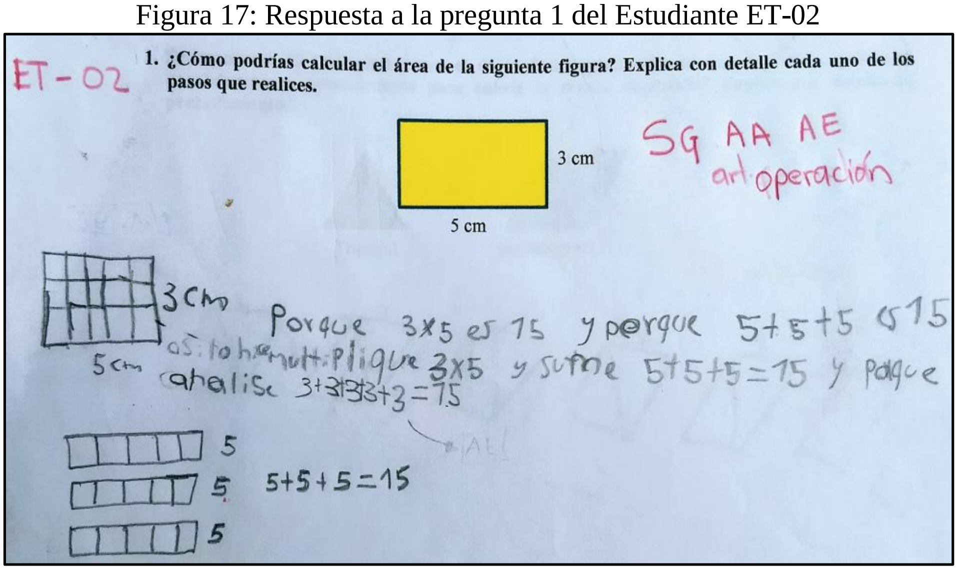
Por ejemplo, el estudiante ET–01, de acuerdo a la pregunta, realiza un tránsito por los tres Modos de Pensamiento. Inicialmente identifica la figura y la descompone en 15 cuadritos y halla el Área usando el Articulador $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$, luego asocia la cantidad de cuadros horizontales y verticales con la operación de 3x5 = 15. Llama mucho la atención el hecho de que el estudiante afirma que el Área del rectángulo también se consigue multiplicando su base por su altura. (Ver figura 16)

Figura 16: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante ET-01



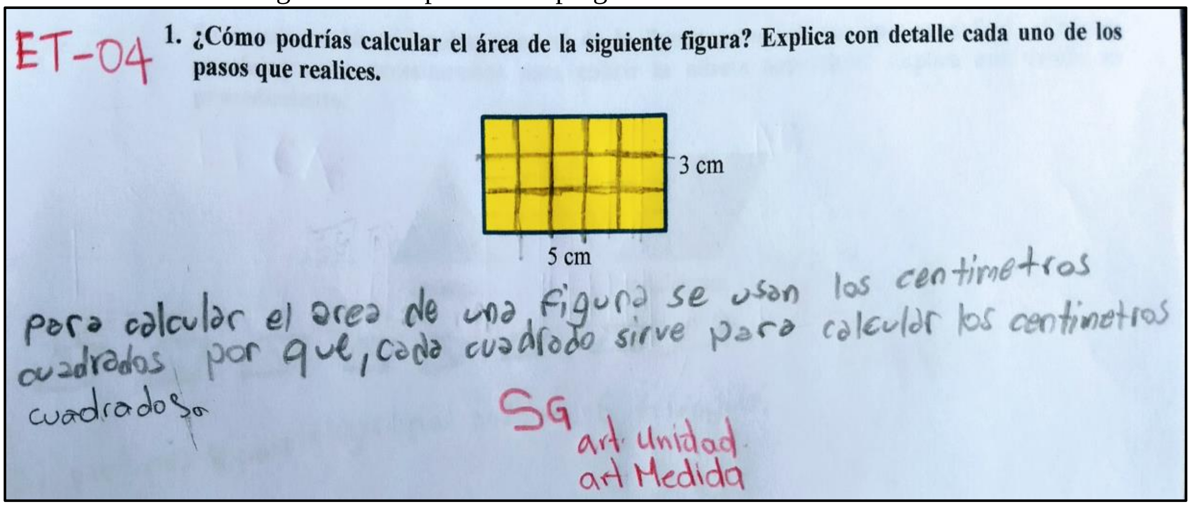
El estudiante ET–02 se ubica en el Modo SG y realiza la descomposición de la figura en cuadrados, luego se ubica en el Modo AE y reorganiza los cuadrados en tres filas horizontales de 5 cuadros, transita hasta el Modo AA a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$ y calcula el Área mediante la suma 5+5+5=15. También utiliza la multiplicación de 3x5=15. (Ver figura 17)

Figura 17: Respuesta a la pregunta 1 del Estudiante ET-02



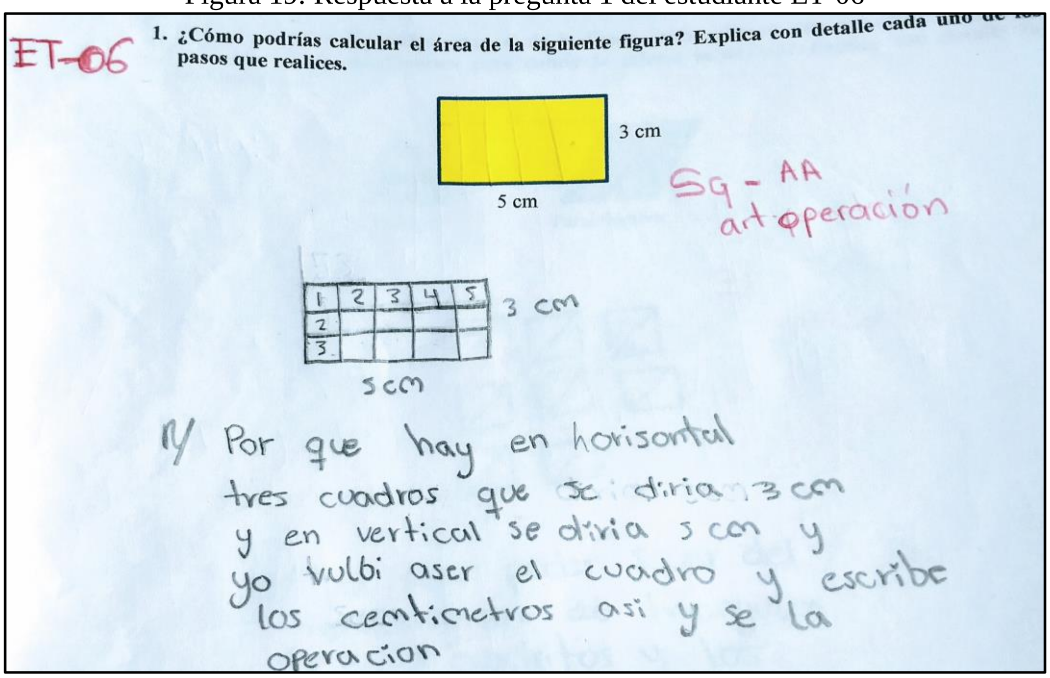
Por otra parte, el estudiante ET–04 hace referencia que para calcular el Área de la figura se usa los centímetros cuadrados, y afirma que "cada cuadrado sirve para calcular los centímetros cuadrados". (Ver figura 18)

Figura 18: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante ET-04



De manera similar, el estudiante ET–06 se ubica en el Modo SG y transita hasta el Modo AA realizando una numeración de las filas y las columnas, luego, realiza la multiplicación de 3x5=15 para finalmente concluir que el Área es de 15 cuadrados. (Ver figura 19)

Figura 19: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante ET-06



En la tabla 13 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 13. Tabulación de resultados de la pregunta 1 para los estudiantes de Tercero

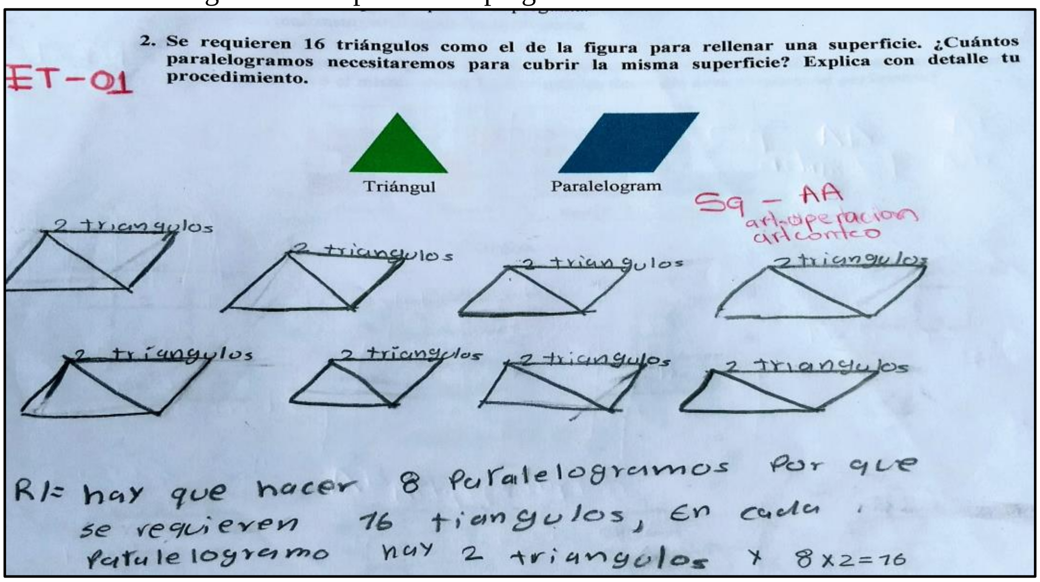
Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
ET–01	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–02	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–03	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–04	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$		
ET–05	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$		
ET–06	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–07	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–08	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–09	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–10	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$		
ET–11	✓		✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–12	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–13	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–14	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–15	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	

Pregunta 2: Se requieren 16 triángulos como el de la figura para rellenar una superficie. ¿Cuántos paralelogramos necesitaremos para cubrir la misma superficie? Explica con detalle tu procedimiento.

En esta pregunta todos los estudiantes lograron identificar que un paralelogramo equivale a dos triángulos, por lo tanto, se ubicaron en el Modo SG, dibujaron 8 paralelogramos y los dividieron a la mitad para mostrar los 16 triángulos. Solo un estudiante realizó un tránsito entre el Modo SG y AA y usó el Articulador $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$ para calcular la cantidad de paralelogramos. 3 estudiantes transitaron del Modo AE al SG mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$, dibujaron una nueva superficie con los 16 triángulos y en ella mostraron los 8 paralelogramos.

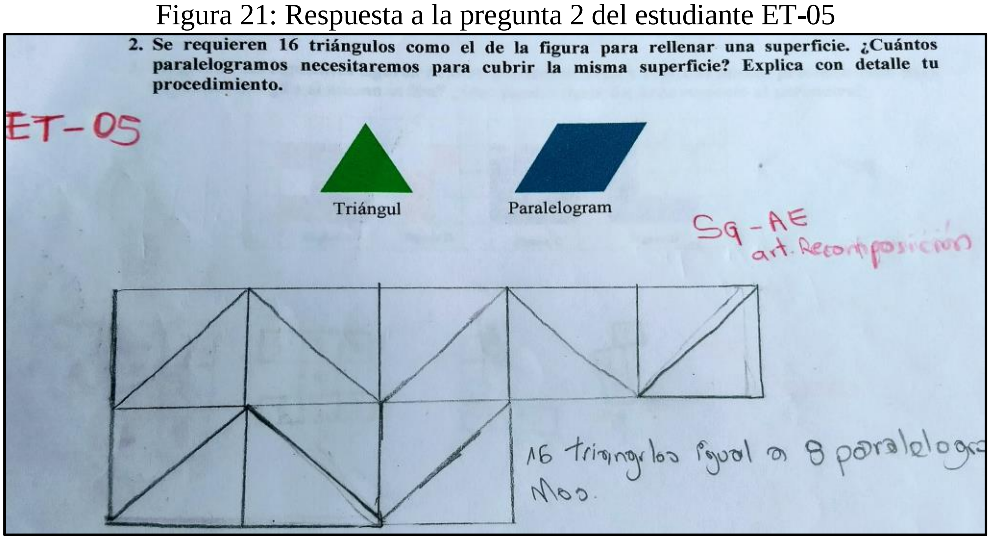
El estudiante ET–01 se ubica en el Modo SG dibujando 8 paralelogramos, y sostiene que, se requieren 16 triángulos y en cada paralelogramo hay 2 triángulos. Mediante el uso de Articuladores como $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$, el estudiante transita hasta el Modo AA al afirmar que la pregunta también se puede resolver usando la operación 8x2=16. (Ver figura 20)

Figura 20: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante ET-01



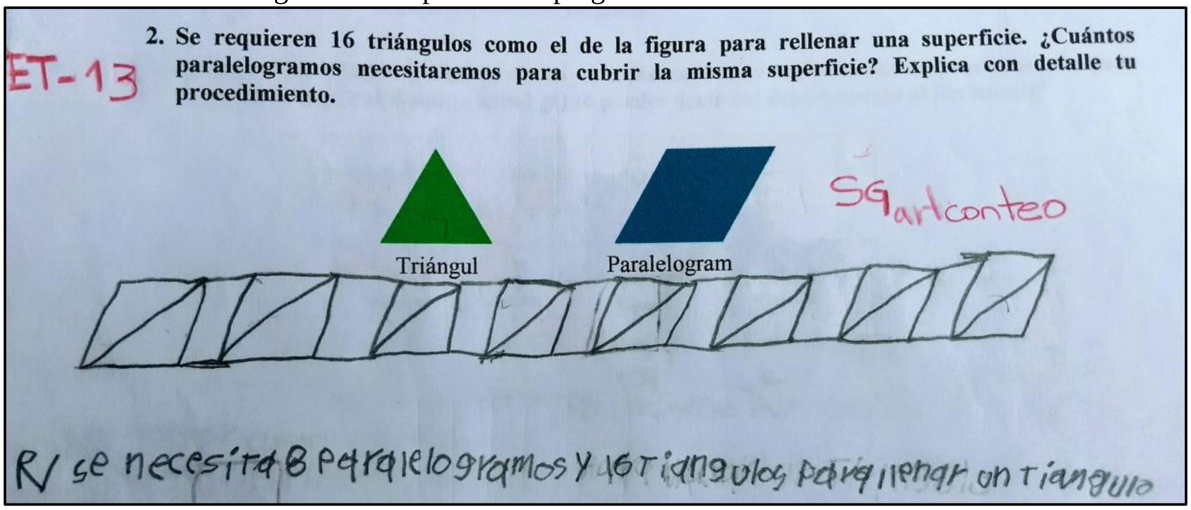
Por otra parte, el Estudiante ET–05 se ubica en el Modo SG y transita hasta el Modo AE usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ y $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$, representando la superficie con 8 cuadrados, divididos en 2 triángulos cada uno. (Ver figura 21)

Figura 21: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante ET-05



El estudiante ET–13 se ubica en el Modo SG dibujando los 16 triángulos y formando 8 paralelogramos con cada par de triángulos, sin embargo, unió con líneas los paralelogramos, mostrando que aún confunde el concepto de Área. (Ver figura 22)

Figura 22: Respuesta a la pregunta 2 del Estudiante ET-13

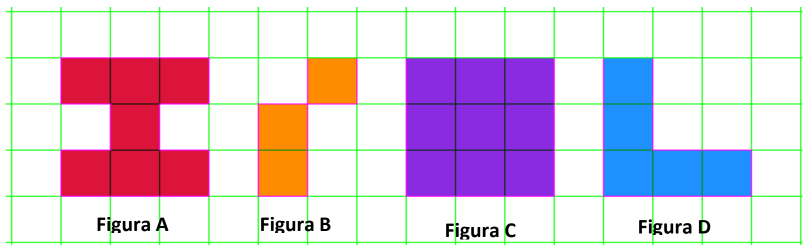


En la tabla 14 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 14. Tabulación de resultados de la pregunta 2 para los estudiantes de Tercero

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
ET–01	✓	✓		$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$	$\overrightarrow{\text{Operación}}$	
ET–02	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–03	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–04	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–05	✓		✓	$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–06	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–07	✓		✓	$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–08	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–09	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–10	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–11	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–12	✓		✓	$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–13	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–14	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–15	✓			$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		

Pregunta 3: Organiza las siguientes figuras de mayor a menor Área y repite el mismo procedimiento para el perímetro. ¿Es el mismo orden? ¿Qué puedes decir del Área respecto al perímetro?

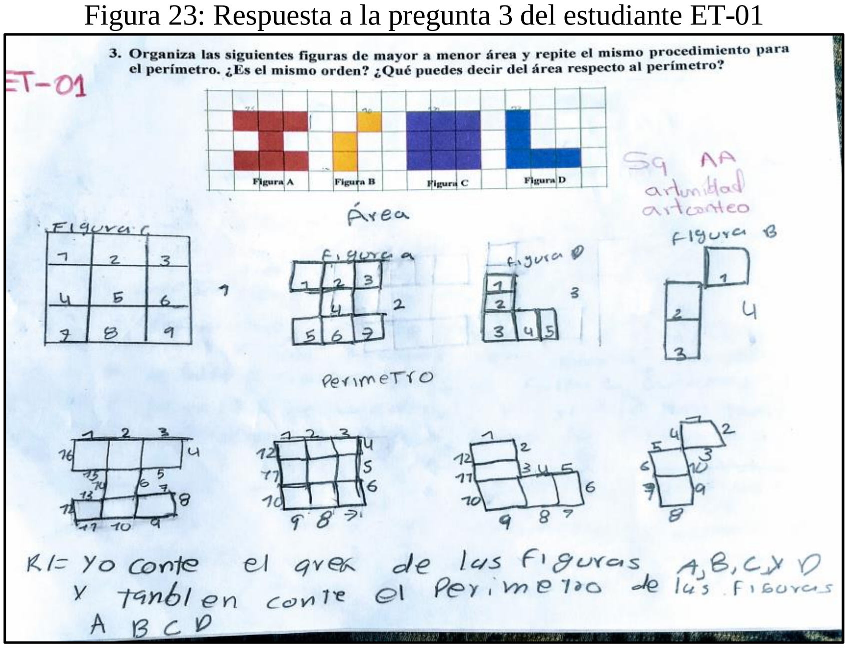


En esta pregunta todos los estudiantes excepto uno se ubicaron en el Modo SG y dibujaron nuevamente las figuras en el orden solicitado. Pese a que 14 estudiantes lograron establecer el orden correcto para el Área, 12 estudiantes no lograron organizar las figuras de mayor a menor perímetro.

Se observó que los estudiantes solamente transitaron entre los Modos SG y AA por medio del Articulador $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$. Dos de los estudiantes establecieron que "el Área es por dentro y el perímetro es por fuera" mostrando así un tránsito entre el Modo SG y el AE.

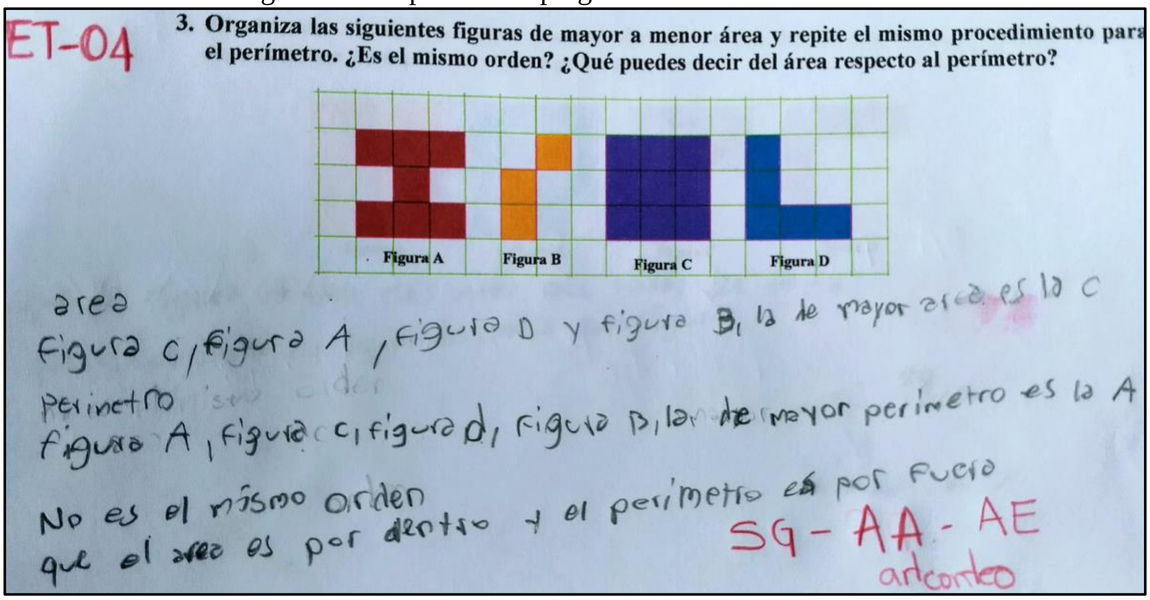
El estudiante ET–01 desde le Modo AE establece correctamente la diferencia entre el Área y el perímetro de las figuras al organizarlas de mayor a menor, tanto para el Área como para el perímetro. En el procedimiento se observa que, para el conteo del Área, realiza una numeración interna, mientras que, para el perímetro, hace la numeración externa. Esto muestra que el estudiante reconoce la diferencia entre el Área y el perímetro de las figuras. (Ver figura 23)

Figura 23: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante ET-01



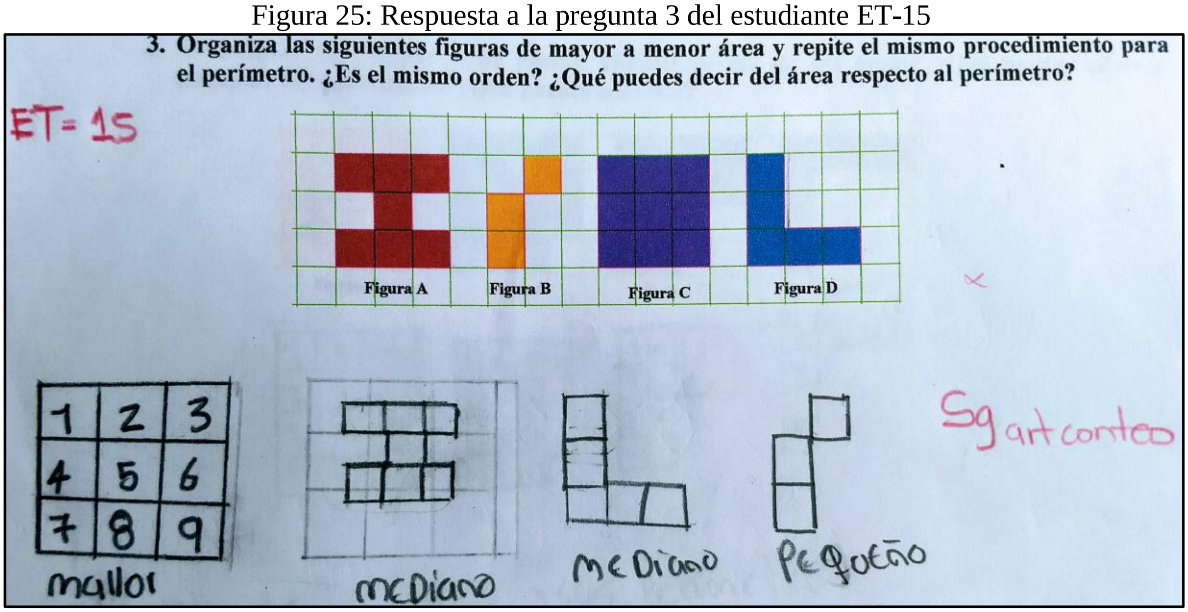
De manera similar, el estudiante ET–04 parte del Modo SG observando las figuras, Usa el Articulador $\underset{Conteo}{\longleftrightarrow}$, tanto para el Área como para el perímetro, aunque no deja evidencia. Realiza acertadamente la organización de las mismas de mayor a menor y afirma que no es el mismo orden. Desde el Modo AE, el Estudiante hace referencia que “el Área es por dentro y el perímetro por fuera”. (Ver figura 24)

Figura 24: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante ET-04



Mientras tanto, el estudiante ET–15 se ubica en el Modo SG y realiza bien la organización según el Área, pero no realizó el procedimiento para el perímetro. El estudiante nombra las figuras según su extensión como “mayor, mediano, mediano, pequeño”. El estudiante clasifica las figuras solo en 3 tamaños. (Ver figura 25)

Figura 25: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante ET-15

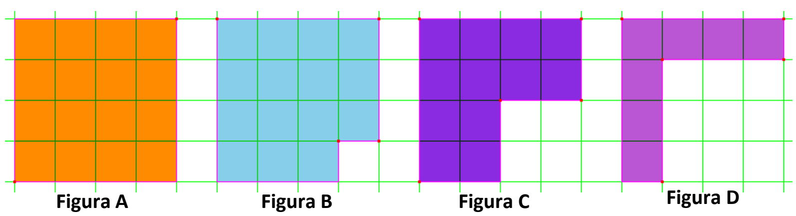


En la tabla 15 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 15. Tabulación de resultados de la pregunta 3 para los estudiantes de Tercero

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
ET–01	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$: $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–02						
ET–03	✓					
ET–04	✓	✓	✓	$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–05	✓					
ET–06	✓					
ET–07	✓					
ET–08	✓					
ET–09	✓					
ET–10	✓					
ET–11	✓	✓	✓	$\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		
ET–12	✓					
ET–13		✓				
ET–14	✓					
ET–15	✓					

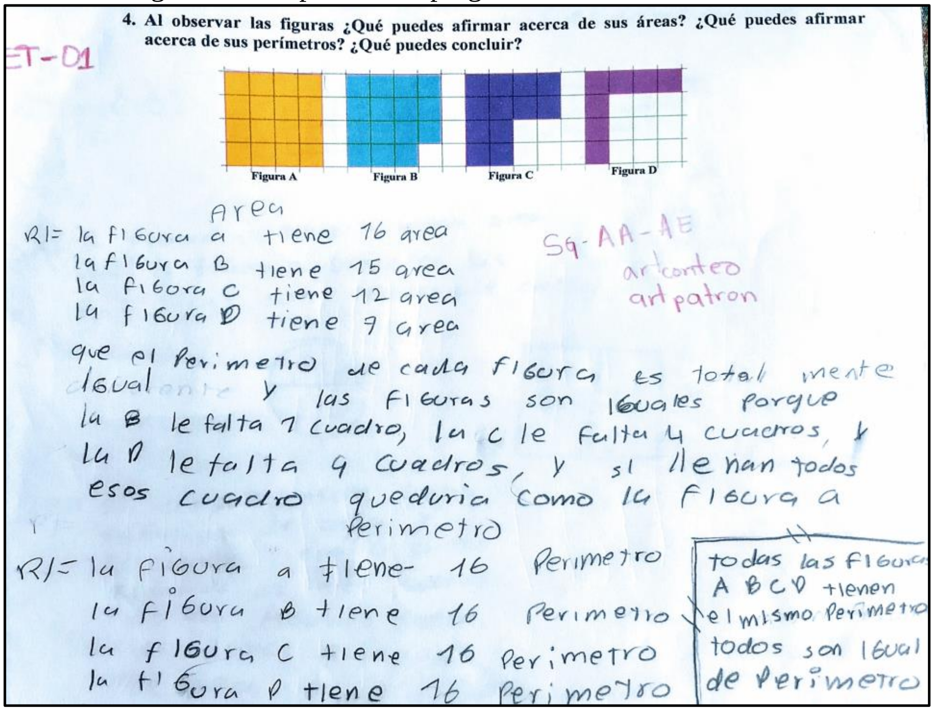
Pregunta 4: Al observar las figuras ¿Qué puedes afirmar acerca de sus Áreas? ¿Qué puedes afirmar acerca de sus perímetros? ¿Qué puedes concluir?



Solo 2 de los 15 estudiantes no lograron establecer conclusiones claras acerca del Área y el perímetro de las figuras, ya que presentaron errores de cálculo. 13 estudiantes hallaron bien el Área de las figuras, sin embargo 4 de ellos no hallaron el perímetro y por tanto no pudieron comparar ambas magnitudes. 7 estudiantes se ubicaron en el Modo AA y mediante el Articulador de $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$ concluyeron acertadamente que el Área cambia, pero el perímetro es el mismo en todas las figuras.

Por ejemplo, el estudiante ET–01 transita desde el Modo SG hasta el AA comparando cada figura con la primera, además, menciona en cada figura los cuadros que faltan para ser igual a la primera. También descubre que las figuras tienen el mismo perímetro. El estudiante se ubica en el Modo AE al notar que los resultados para el Área son diferentes que para el perímetro. (Ver figura 26)

Figura 26: Respuesta a la pregunta 4 del estudiante ET-01


4. Al observar las figuras ¿Qué puedes afirmar acerca de sus áreas? ¿Qué puedes afirmar acerca de sus perímetros? ¿Qué puedes concluir?

ET-01

Figura A Figura B Figura C Figura D

Area
R/= la figura a tiene 16 area
la figura B tiene 15 area
la figora C tiene 12 area
la figura D tiene 7 area

Sq-AA-AE
art conteo
art patron

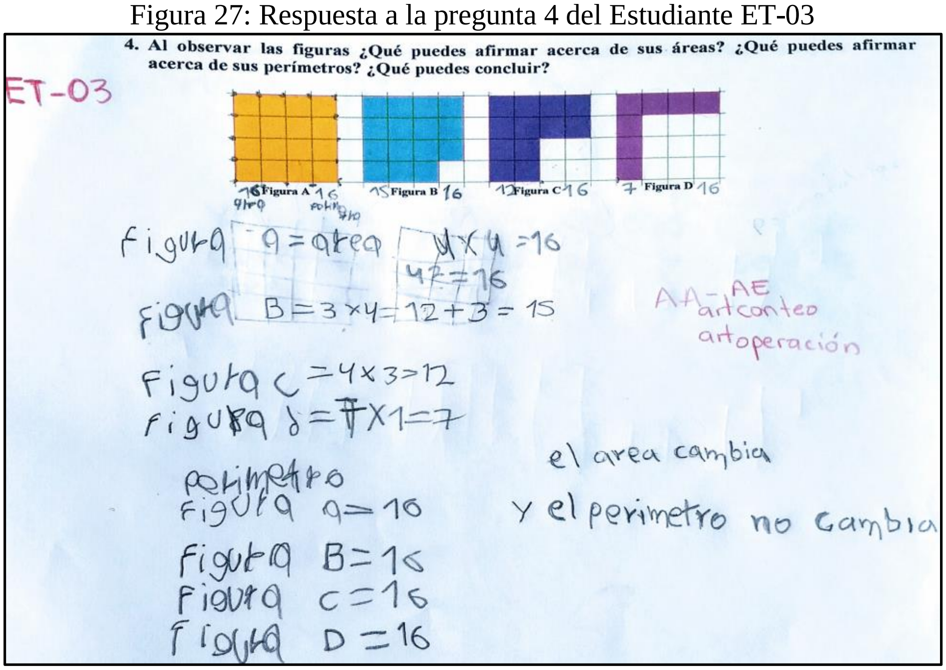
que el Perimetro de cada figura es totalmente igual y las figuras son iguales porque la B le falta 1 cuadro, la C le falta 4 cuadros, y la D le falta 9 cuadros, y si llenan todos esos cuadro quedaria como la figura a

perimetro
R/= la figura a tiene 16 perimetro
la figura B tiene 16 perimetro
la figura C tiene 16 perimetro
la figura D tiene 16 perimetro

todas las figuras A B C D tienen el mismo perimetro todos son igual de perimetro

Por otro lado, el estudiante ET–03 transita entre los Modos AA y AE al asociar la organización de las unidades usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Operación}]{}$. El estudiante afirma que el Área cambia en cada figura, mientras que el perímetro no cambia. (Ver figura 27)

Figura 27: Respuesta a la pregunta 4 del Estudiante ET-03


4. Al observar las figuras ¿Qué puedes afirmar acerca de sus áreas? ¿Qué puedes afirmar acerca de sus perímetros? ¿Qué puedes concluir?

ET-03

16 Figura A 16 Figura B 16 Figura C 16 Figura D 16

figura a = area 4 x 4 = 16
figura B = 3 x 4 = 12 + 3 = 15
Figura C = 4 x 3 = 12
figura D = 7 x 1 = 7

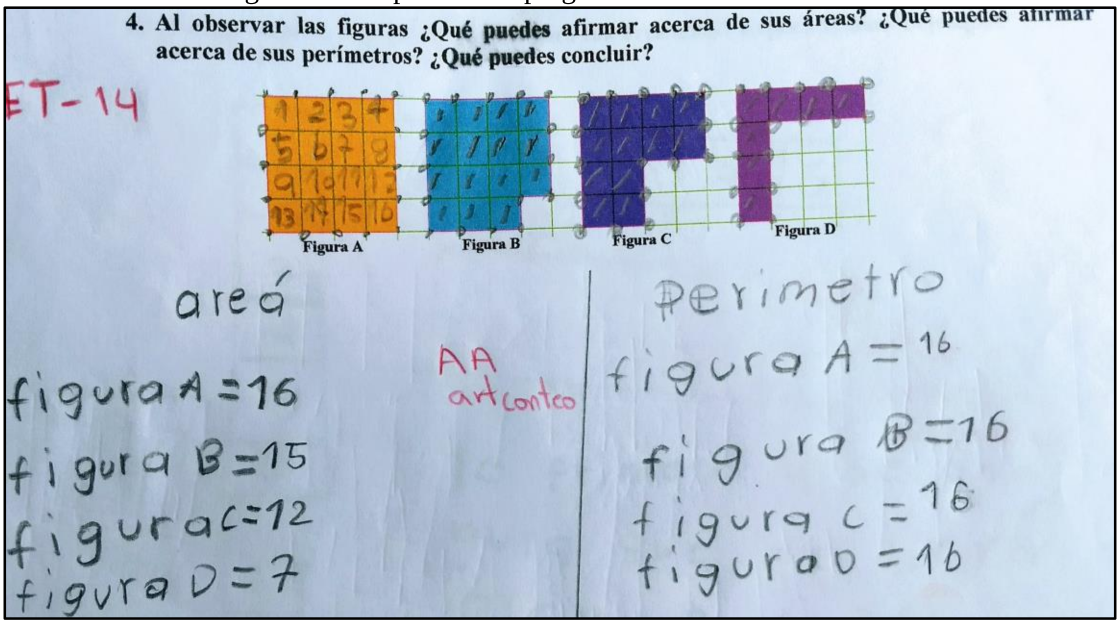
AA-AE
art conteo
art operación

perimetro
figura a = 16
figura B = 16
figura C = 16
figura D = 16

el area cambia y el perimetro no cambia

El estudiante ET–14 usa el Articulador de $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ para el Área marcando con números y rayas al interior de cada cuadrado, en cambio, para el perímetro, utilizó puntos ubicados en los vértices que unen los segmentos. (Ver figura 28)

Figura 28: Respuesta a la pregunta 4 del estudiante ET-14



En la tabla 16 se muestran los Modos de Pensamiento y los Elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 16. Tabulación de resultados de la pregunta 4 para los estudiantes de Tercero

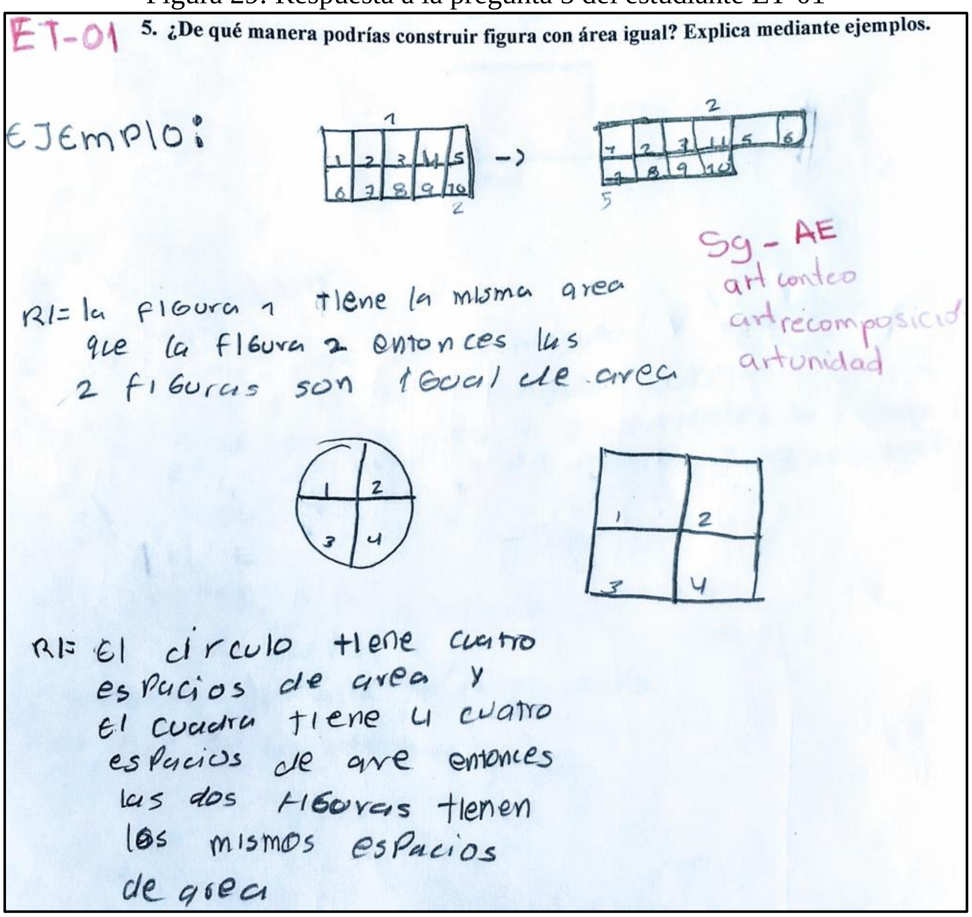
Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
ET–01		✓	✓	$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$	$\xleftarrow[\text{Patrón}]{}$	
ET–02		✓				
ET–03		✓	✓	$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$	$\xrightarrow[\text{Operación}]{}$	
ET–04		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–05						
ET–06	✓			$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–07		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–08		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–09		✓				
ET–10		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–11	✓	✓				
ET–12		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–13		✓				
ET–14		✓		$\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		
ET–15	✓					

Pregunta 5: ¿De qué manera podrías construir figuras con Área igual? Explica mediante ejemplos.

8 de los 15 estudiantes se ubicaron en el Modo SG y construyeron una figura, la cual descompusieron usando el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$, de esta manera transitaron hasta el Modo AE y utilizando el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ formaron una nueva figura con la misma Área. Otros estudiantes intentaron hacer un procedimiento similar, sin embargo, usaron unidades no estándar y equivocadamente concluyeron que las figuras obtenidas eran de igual Área por estar divididas en la misma cantidad de porciones. No compararon el Área de las porciones.

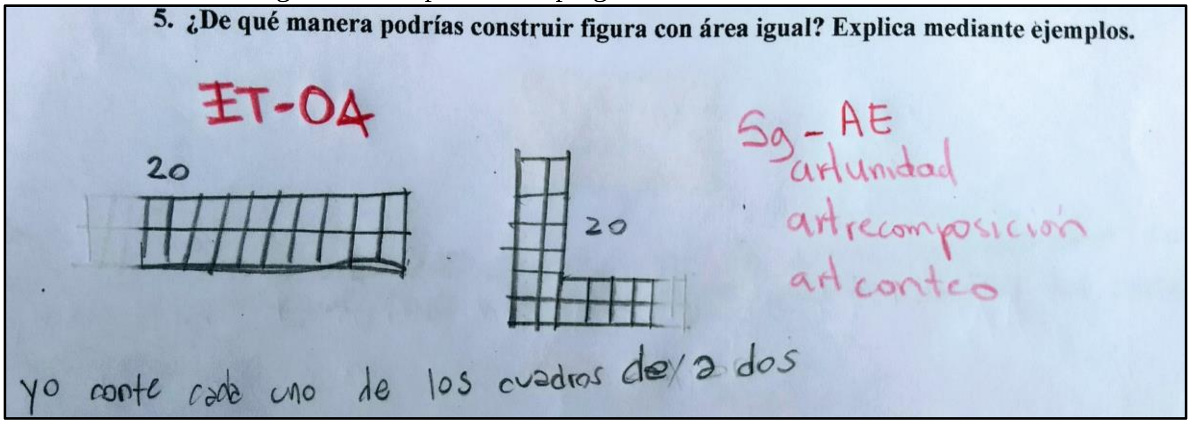
En esta pregunta, el estudiante ET–01 se ubica en el Modo SG y transita hasta el AE al construir una figura de 10 unidades cuadradas, evidenciando el uso de Articuladores como $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$, $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$, luego reconfigura las unidades formando una nueva figura con la misma Área. Sin embargo, trata de mostrar otro ejemplo donde compara el Área de un círculo y un cuadrado descompuestos en 4 porciones, afirmando que estas figuras tienen la misma Área. No tiene en cuenta el Área de la porción. (Ver figura 29)

Figura 29: Respuesta a la pregunta 5 del estudiante ET-01



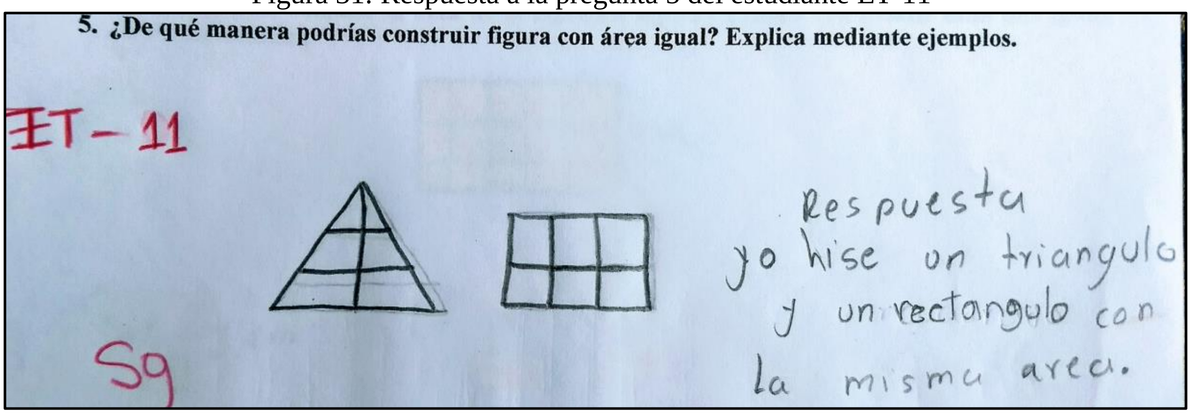
Similarmente, el estudiante ET–04 realiza un tránsito entre el Modo SG y el AE al construir un rectángulo de 20 unidades cuadradas, luego las ubica en otra posición mediante el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ dando lugar a una nueva figura con la misma Área. (Ver figura 30)

Figura 30: Respuesta a la pregunta 5 del estudiante ET-04



Contrariamente, el estudiante ET–11 confunde el Área con la cantidad de porciones de la figura, al afirmar que un triángulo tiene la misma Área que un rectángulo, ya que ambos tienen la misma cantidad de porciones. (Ver figura 31)

Figura 31: Respuesta a la pregunta 5 del estudiante ET-11



En la tabla 17 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 17. Tabulación de resultados de la pregunta 5 para los estudiantes de Tercero

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
ET–01	✓		✓	$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		$\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$
ET–02	✓					
ET–03	✓			$\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$		$\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$

ET–04	✓		✓	$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–05	✓					
ET–06	✓			$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–07	✓					
ET–08	✓					
ET–09	✓			$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–10	✓					
ET–11	✓					
ET–12	✓			$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–13	✓			$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–14	✓			$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overleftrightarrow{\text{Conteo}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
ET–15	✓					

5.2.2 Análisis a posteriori del cuestionario para el grado Octavo de la básica secundaria

Pregunta 1: ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor Área? Explica con detalle tu respuesta.

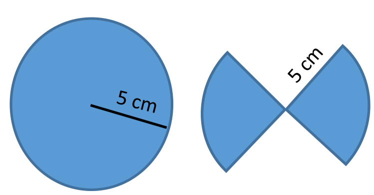
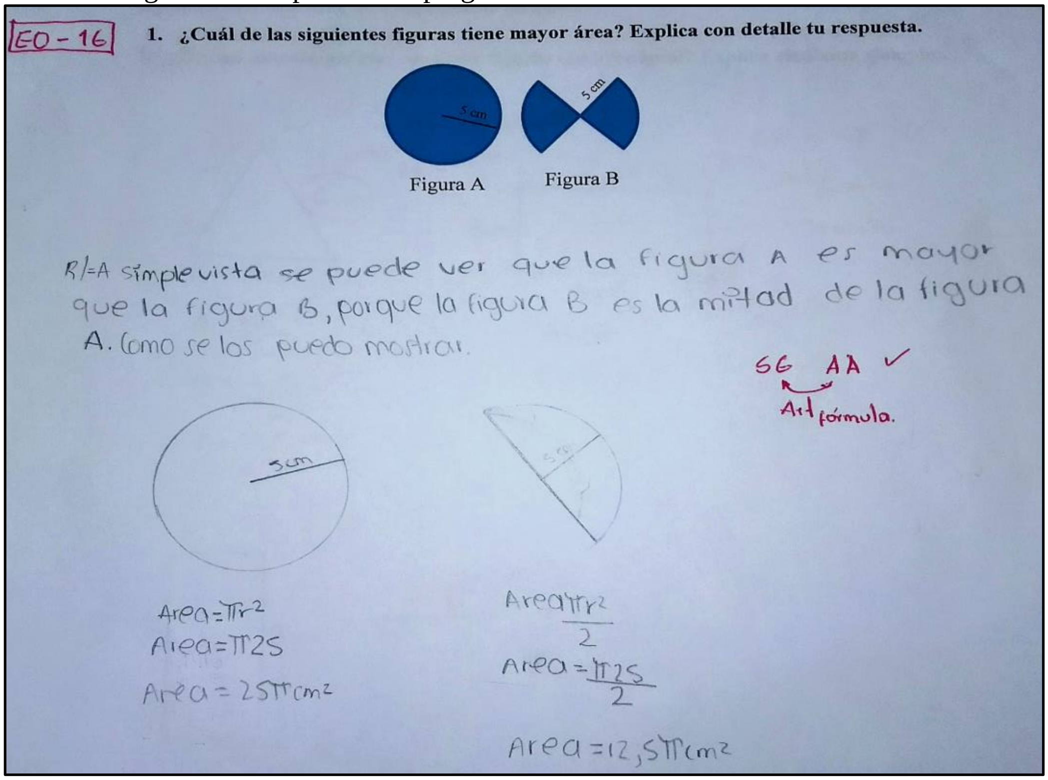


Figura A   Figura B

Los estudiantes del caso 1 (estudiantes de grado Octavo que estuvieron en las clases regulares, pero no vieron el curso de Cabri) se situaron principalmente en el Modo AA y SG y 3 de ellos se situaron en el Modo AE. Es importante resaltar que algunos de ellos lograron transitar entre dos de los Modos mediante el uso del Articulador de $\underset{\text{Fórmula}}{\longrightarrow}$.

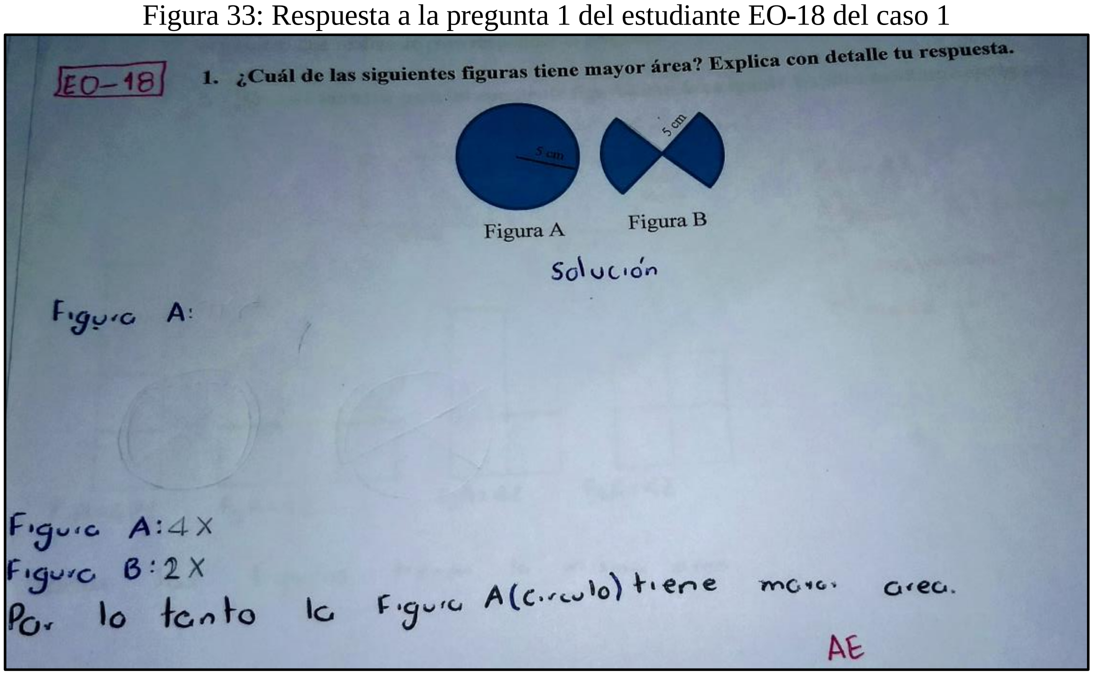
El estudiante EO–16 reconfigura la superficie B para tratar de mostrar desde el Modo SG que el Área es la mitad de la figura A, además, usa el Articulador $\underset{\text{Fórmula}}{\longrightarrow}$ del Área del círculo para comprobar numéricamente este hecho. (Ver figura 32)

Figura 32: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante EO-16 del caso 1



El estudiante EO–18 del caso 1 se sitúa en el Modo AE y descompone las figuras en partes y asigna valores algebraicos para el Área, de 4x y 2x respectivamente a las figuras para finalmente concluir que la figura A tiene mayor Área. (Ver figura 33)

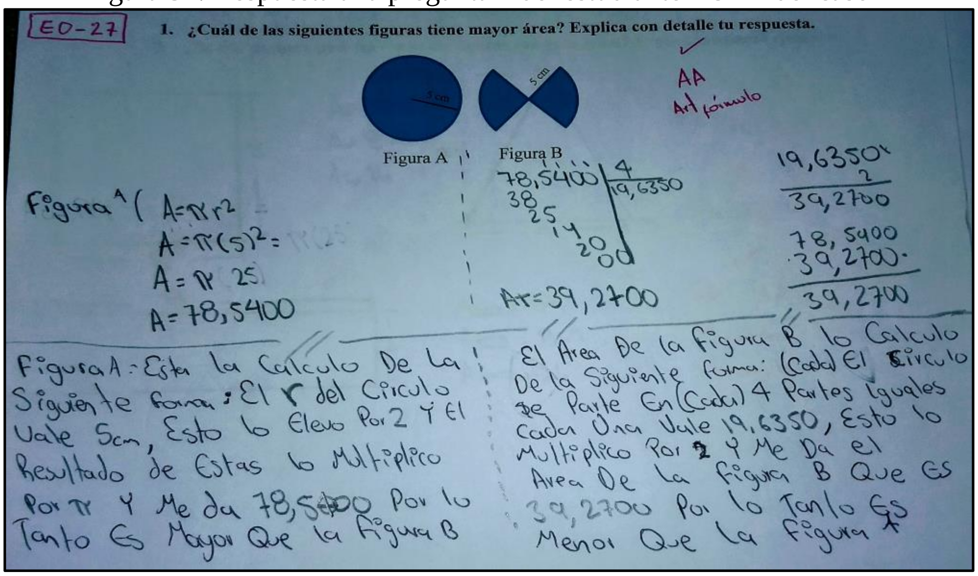
Figura 33: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante EO-18 del caso 1



De la misma manera, los estudiantes del caso 2 (estudiantes que recibieron curso extra de Cabri) se situaron principalmente en el Modo AA y mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ para el Área de un círculo realizaron los cálculos para comprobar que la figura A tiene mayor Área que la figura B.

El estudiante EO–27 del caso 2 usa la fórmula del círculo utilizando a π en su forma decimal. (Ver figura 34)

Figura 34: Respuesta a la pregunta 1 del estudiante EO-27 del caso 2



En las tablas 18 y 19 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que utilizó cada estudiante para tratar de explicar la situación. Cabe mencionar que todos los estudiantes lograron responder correctamente la pregunta.

Tabla 18. Tabulación de resultados de la pregunta 1 para los estudiantes de Octavo del Caso 1

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–16	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–17	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–18			✓			
EO–19	✓		✓			$\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$
EO–20		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–21		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–22	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–23			✓			
EO–24		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		

Tabla 19. Tabulación de resultados de la pregunta 1 para los estudiantes de Octavo del Caso 2

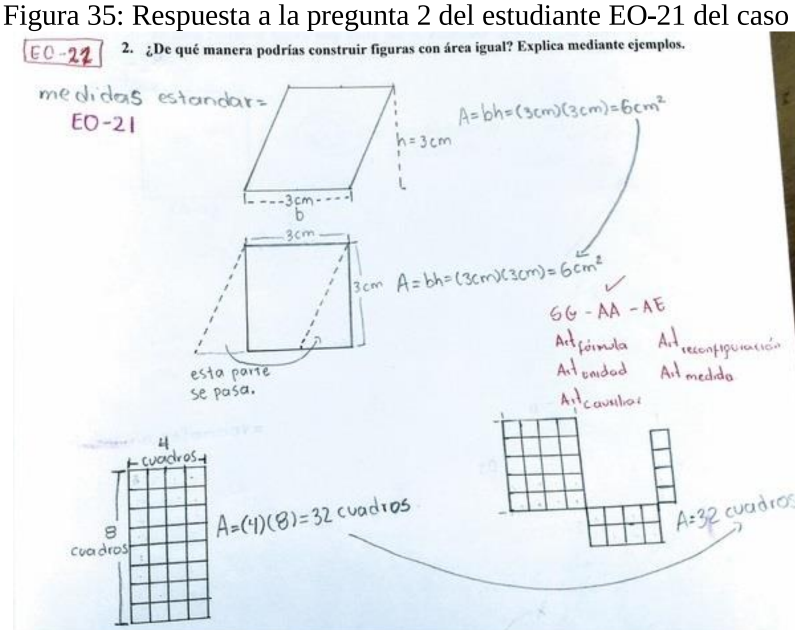
Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–25	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–26	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$	$\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$	
EO–27		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		
EO–28		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$	$\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$	
EO–29		✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		

Pregunta 2: ¿De qué manera podrías construir figura con Área igual? Explica mediante ejemplos.

En esta pregunta los estudiantes del Caso 1 se ubican principalmente en el Modo SG y, a través del Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ tratan de ejemplificar mediante situaciones numéricas, transitando hasta el Modo AA.

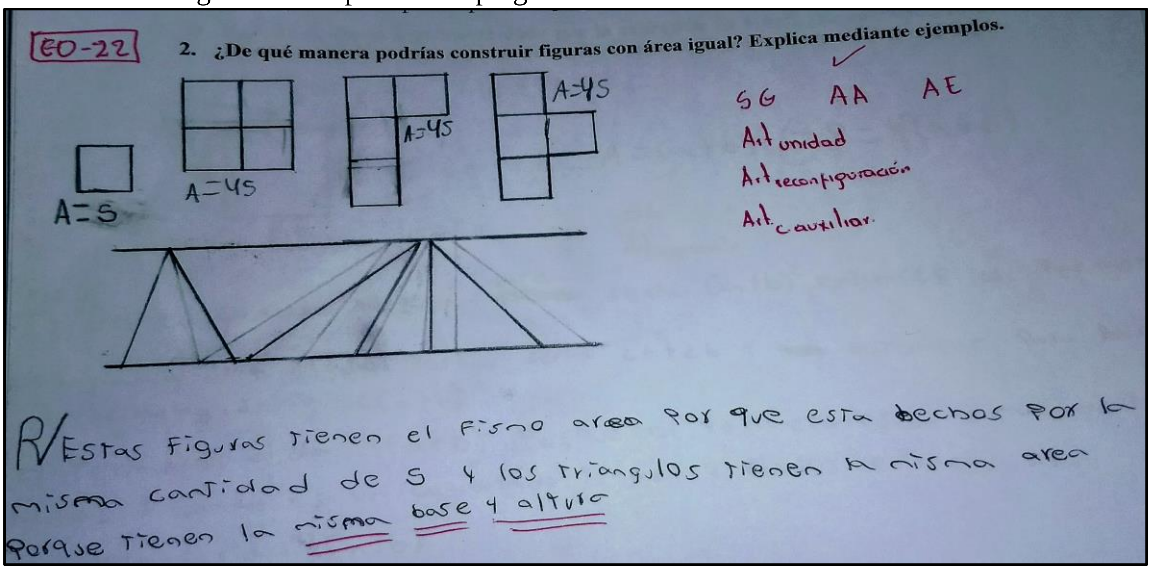
El estudiante EO–21 del caso 1 transita por los Modos SG, AA y AE. Inicialmente pasa del Modo SG al AA recurriendo a 2 cuadriláteros apoyándose en el Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ para observar que sus bases y alturas son iguales. Aunque equivoca el cálculo, comprende el concepto. Posteriormente construye otro cuadrilátero y utiliza el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$ para dividir el rectángulo en cuadraditos, luego reconfigura estas unidades armando con ellas una nueva figura de igual Área. Cabe anotar que el estudiante se ubicó más en el Modo AE que en el AA, ya que equivocó el cálculo numérico. (Ver figura 35)

Figura 35: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EO-21 del caso 1



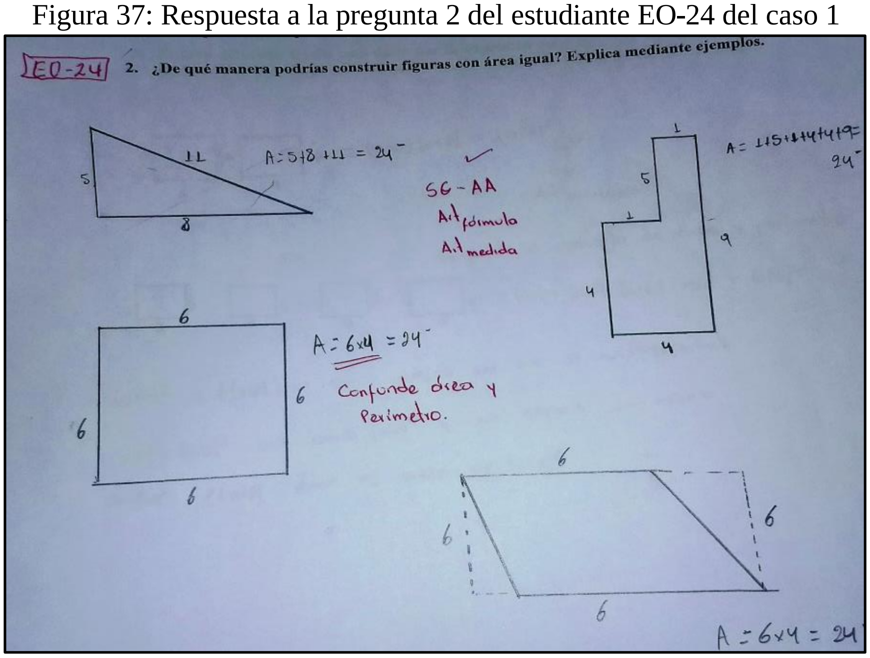
Por otra parte, el estudiante EO–22 del caso 1 realiza un proceso similar al transitar desde el Modo SG al AE mediante el Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ para armar distintas figuras de Área igual. Asigna un valor numérico a cada unidad cuadrada, mostrando así un tránsito por el Modo AA. Posteriormente se ubica en el Modo AE y transitando nuevamente hasta el SG usando el Articulador de $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$ para mostrar triángulos cuyas bases y alturas miden lo mismo, concluyendo finalmente que estos tienen la misma Área. (Ver figura 36)

Figura 36: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EO-22 del caso 1



Es importante mencionar que el Estudiante EO–24 EO–22 construyó figuras con perímetros iguales mostrando que aún confunde los conceptos de Área y perímetro. (Ver figura 37)

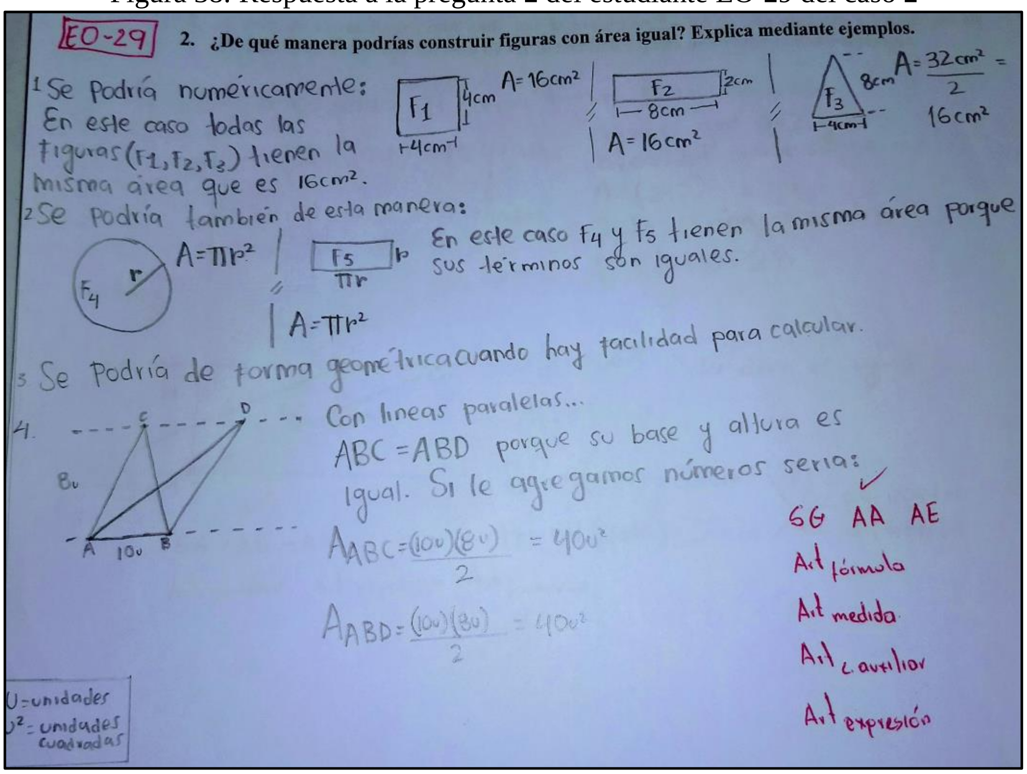
Figura 37: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EO-24 del caso 1



Los estudiantes del caso 2 realizaron procedimientos muy similares a los del primer caso, dando prioridad al Modo SG y AA.

El estudiante EO–29 asignó medidas a varias figuras de tal manera que tuvieran la misma Área, transitando desde el Modo SG al AA con el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$. También ubicó un triángulo entre dos rectas paralelas y le desplazó el vértice superior, evidenciando el uso del Articulador $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$ para llegar a la conclusión que su Área no varía. Un hecho muy importante es que comparó el Área de una círculo πr^2 con el de un rectángulo de medidas πr y r, evidenciando el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$. De esta manera muestra habilidad para ubicarse y movilizarse entre los Modos de Pensamiento SG, AA y AE. (Ver figura 38)

Figura 38: Respuesta a la pregunta 2 del estudiante EO-29 del caso 2



En las tablas 20 y 219 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 20. Tabulación de resultados de la pregunta 2 para los estudiantes de Octavo del Caso 1

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–16	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$		
EO–17	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$		

EO–18	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–19	✓		✓	$\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Unidad no estándar}}$
EO–20	✓		✓		$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–21	✓	✓	✓	$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$ $\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–22	✓	✓	✓	$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$ $\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–23	✓		✓	$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$	$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–24	✓	✓				

Tabla 21. Tabulación de resultados de la pregunta 2 para los estudiantes de Octavo del Caso 2

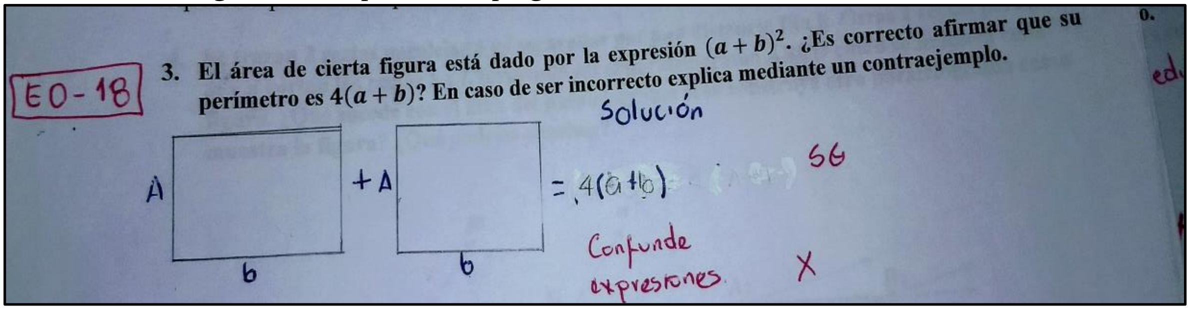
Estudiante	**SG**	**AA**	**AE**	**Articulador1 SG-AA**	**Articulador2 AA-AE**	**Articulador3 AE-SG**
EO–25	✓	✓	✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$	$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–26	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–27	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		
EO–28	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		
EO–29	✓	✓	✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$

Pregunta 3: El Área de cierta figura está dada por la expresión $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

En esta pregunta ningún estudiante del caso 1 logró concluir correctamente lo pedido. Se logra evidenciar en los estudiantes que, aunque comprenden el concepto de Área, presentan dificultades para manipular expresiones algebraicas.

El estudiante EO–18 suma las Áreas de dos rectángulos de medidas a y b y aunque concluye correctamente que el perímetro total es $4(a+b)$ no logra decir nada acerca del Área. (Ver figura 39). Esto evidencia debilidad para usar el Articulador $\overrightarrow{\text{Expresión}}$.

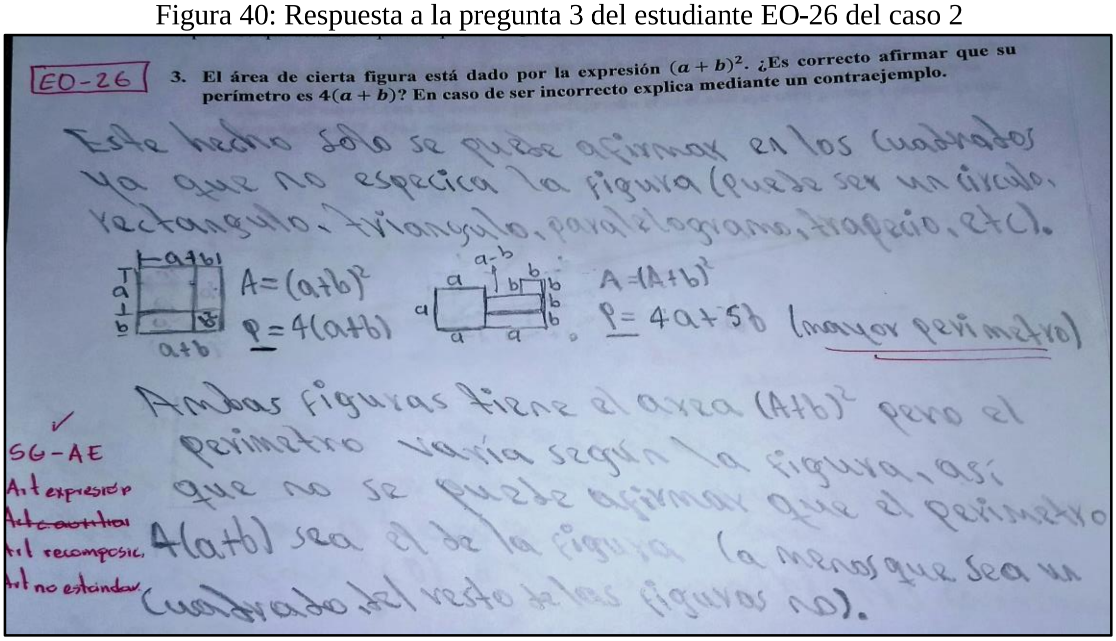
Figura 39: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante EO-18 del caso 1



En contraste de lo anterior, solo un Estudiante del caso 2 presentó inconvenientes para manipular expresiones algebraicas y llegar a la conclusión correcta. El resto de los estudiantes logró concluir acertadamente que el perímetro $4(a+b)$ solo se cumple en un cuadrado cuyas medidas son $a+b$. Esto evidencia un uso adecuado del Articulador $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$.

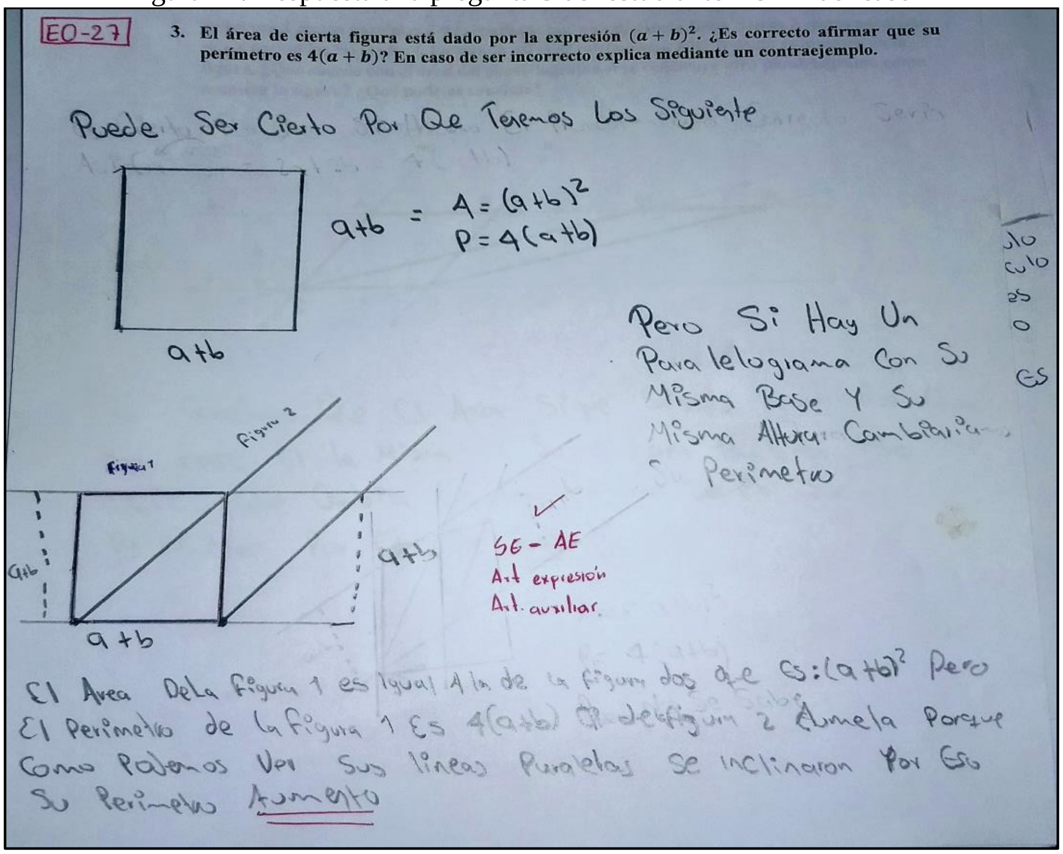
El estudiante EO–26 se ubica en el Modo SG asignando el valor de $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ al lado de un cuadrado y observando que su perímetro efectivamente corresponde a la expresión $4(\mathrm{a}+\mathrm{b})$, luego realiza un tránsito hasta el Modo AE descomponiendo la figura y reconfigurando nuevamente los trozos, deduce que el nuevo perímetro es diferente y finalmente concluye que la afirmación solo es posible si la figura es un cuadrado. En este proceso utilizó Articuladores como: $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$, $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$. (Ver figura 40)

Figura 40: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante EO-26 del caso 2



El estudiante EO–27 realiza un procedimiento similar desde el Modo SG construyendo un cuadrado de lado $a+b$ y calculando el perímetro como $4(a+b)$, luego construye un paralelogramo de base $a+b$ y altura $a+b$, concluyendo que tiene la misma Área, sin embargo se ubica en el Modo AE y resalta de una manera muy acertada que el perímetro aumenta ya que tiene 2 lados diagonales y en consecuencia no se cumple la afirmación de la pregunta. El estudiante evidenció en sus procesos el uso de Articuladores como: $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$ y $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$, permitiendo un tránsito entre el Modo SG y AE. (Ver figura 41)

Figura 41: Respuesta a la pregunta 3 del estudiante EO-27 del caso 2



En las tablas 22 y 23 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

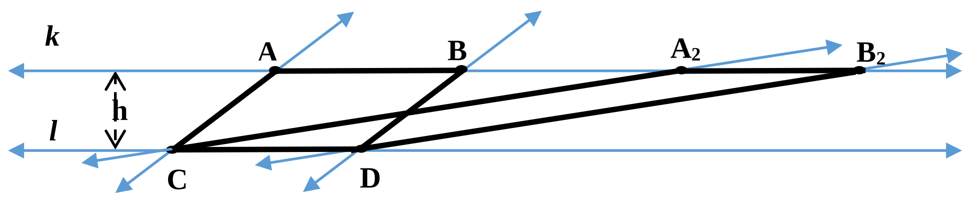
Tabla 22. Tabulación de resultados de la pregunta 3 para los estudiantes de Octavo del Caso 1

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–16	✓					
EO–17	✓	✓		$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$	$\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$	
EO–18	✓					
EO–19	✓		✓			
EO–20	✓					
EO–21	✓					
EO–22	✓					
EO–23	✓					
EO–24	✓					

Tabla 23. Tabulación de resultados de la pregunta 3 para los estudiantes de Octavo del Caso 2

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–25	✓		✓			
EO–26	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–27	✓		✓		$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$ $\overrightarrow{\text{Unidad no estándar}}$ $\overleftarrow{\text{Patrón}}$
EO–28	✓		✓		$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–29	✓		✓		$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$

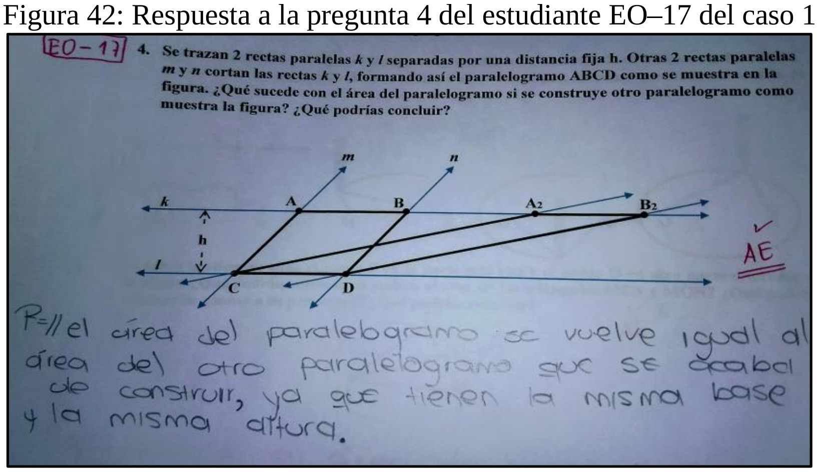
Pregunta 4: Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el Área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?



En esta pregunta, tanto los estudiantes del caso 1 como los del caso 2 se ubicaron en el Modo AE y la totalidad lograron concluir acertadamente que el Área no cambia.

El estudiante EO–17 del caso 1 afirma que el Área no cambia debido a que tanto la base como la altura del paralelogramo se mantiene igual. (Ver figura 42)

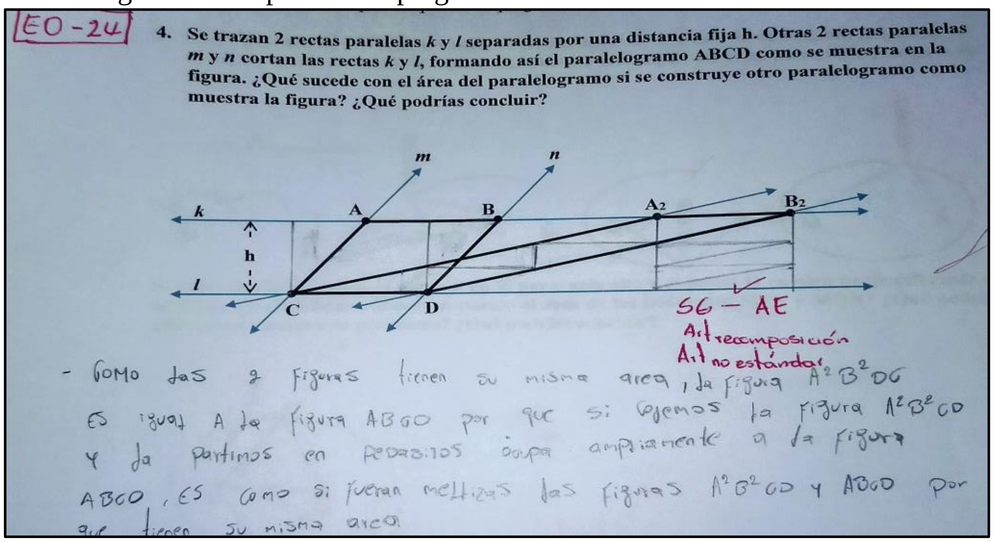
Figura 42: Respuesta a la pregunta 4 del estudiante EO–17 del caso 1



Los estudiantes del caso 2 llagan básicamente a la misma conclusión, sin embargo, se presentaron 2 procedimientos dignos de destacar:

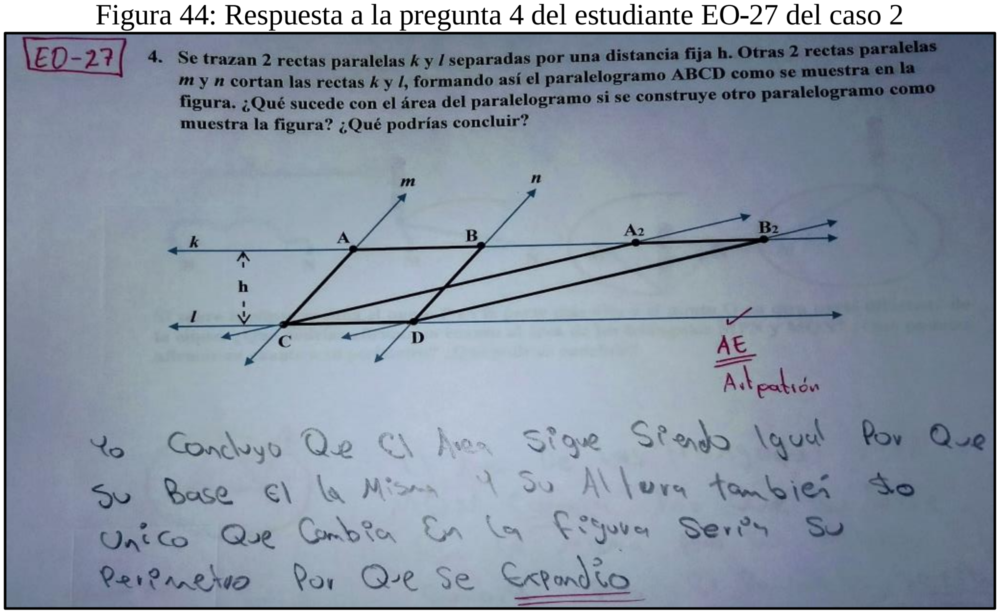
El estudiante EO–24 Se ubicó en el Modo SG y realizó un tránsito hasta el AE descomponiendo ambos paralelogramos en unidades no estándar (Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad no estándar}]{}$) y formando un rectángulo de las mismas dimensiones por lo que concluyó que deben tener la misma Área (Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$). (Ver figura 43)

Figura 43: Respuesta a la pregunta 4 del estudiante EO-24 del caso 1



Por otra parte, el Estudiante EO–27 desde el Modo AE concluyó que al tener bases y alturas iguales entonces tendrán la misma Área, además, se aventuró a asegurar de manera acertada que el perímetro aumenta. (Ver figura 44)

Figura 44: Respuesta a la pregunta 4 del estudiante EO-27 del caso 2



En las tablas 24 y 25 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

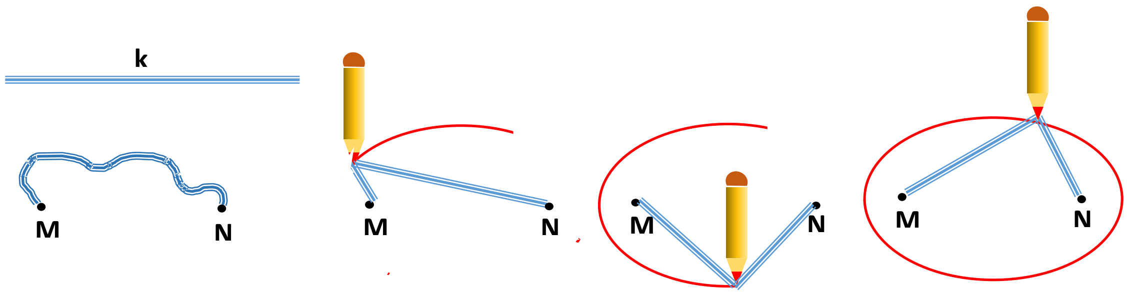
Tabla 24. Tabulación de resultados de la pregunta 4 para los estudiantes de Octavo del Caso 1

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–16			✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$		
EO–17			✓			
EO–18			✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$		
EO–19			✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$		
EO–20			✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$		
EO–21			✓			
EO–22			✓			
EO–23			✓			
EO–24	✓		✓			$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$ $\overrightarrow{\text{Unidad no estándar}}$

Tabla 25. Tabulación de resultados de la pregunta 4 para los estudiantes de Octavo del Caso 2

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–25			✓	$\overrightarrow{\text{Fórmula}}$		
EO–26	✓	✓		$\overrightarrow{\text{Unidad−cuadrada}}$ $\overrightarrow{\text{Medida}}$		$\overrightarrow{\text{Recomposición}}$
EO–27			✓			$\overleftarrow{\text{Patrón}}$
EO–28	✓		✓		$\overrightarrow{\text{Expresión}}$	$\overleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–29			✓			$\overleftarrow{\text{Patrón}}$

Pregunta 5: Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras

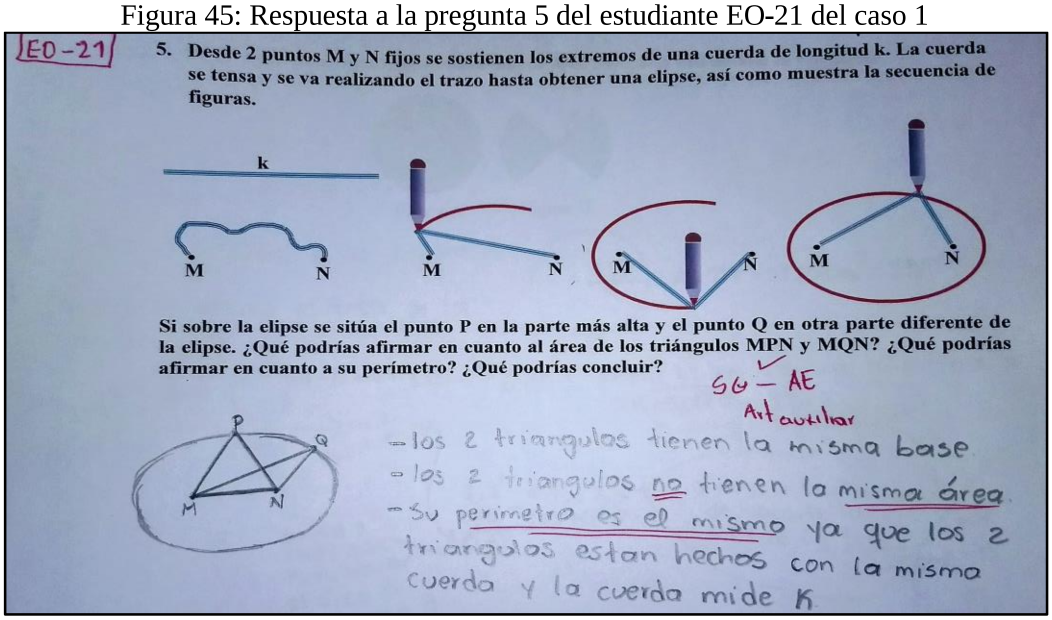


Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al Área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

La mayoría de los estudiantes se ubicaron en el Modo SG al tratar de dibujar la situación, sin embargo, dos de los estudiantes del caso 1 no logran identificar las características del Área ni del perímetro y otros tres estudiantes concluyen acertadamente que el Área de los triángulos cambia, pero no logran concluir nada para el perímetro.

El estudiante EO–21 realiza un tránsito entre el Modo AE al SG utilizando el Articulador $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$, para finalmente concluir acertadamente que ambos triángulos tienen la misma base, pero diferente altura y por tanto sus Áreas son diferentes. Seguidamente descubre la propiedad principal de la elipse y deduce que el perímetro de los triángulos no cambia ya que la cuerda mantiene su longitud k. (Ver figura 45)

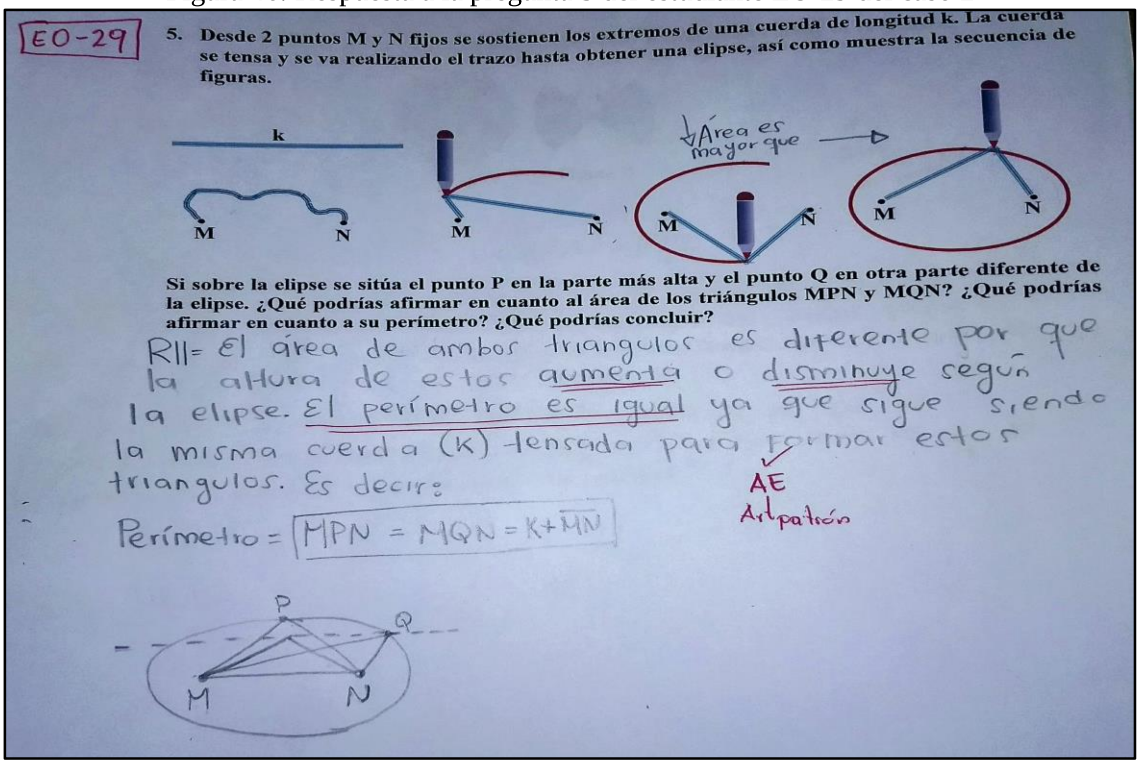
Figura 45: Respuesta a la pregunta 5 del estudiante EO-21 del caso 1



Los estudiantes del caso 2 logran transitar acertadamente entre los Modos SG y AE para concluir que las Áreas cambian mientras los perímetros se mantienen constantes.

El estudiante EO–29 del caso 2 transita del Modo AE al SG logrando identificar que las Áreas van cambiando, evidenciando así el uso del Articulador $\xleftarrow[\text{Patrón}]{}$. Además, deduce que el perímetro de los triángulos es el mismo ya que la cuerda se mantiene tensa. Aunque el estudiante no lo menciona, se puede observar en el gráfico algo muy importante, ya que ubicó un triángulo de Área igual al MQN dentro del triángulo MPN mostrando geométricamente que tanto el triángulo MPN como el MQN tienen diferente Área. (Ver figura 46)

Figura 46: Respuesta a la pregunta 5 del estudiante EO-29 del caso 2



En las tablas 26 y 27 se muestran los Modos de Pensamiento y los elementos Articuladores que más privilegiaron los estudiantes para esta pregunta.

Tabla 26. Tabulación de resultados de la pregunta 5 para los estudiantes de Octavo del Caso 1

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–16	✓					
EO–17			✓			
EO–18	✓					
EO–19	✓					
EO–20	✓					
EO–21	✓		✓			$\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$
EO–22			✓	$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$		
EO–23	✓	✓	✓	$\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$		$\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$
EO–24	✓					

Tabla 27. Tabulación de resultados de la pregunta 5 para los estudiantes de Octavo del Caso 2

Estudiante	SG	AA	AE	Articulador1 SG-AA	Articulador2 AA-AE	Articulador3 AE-SG
EO–25			✓			$\xleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–26	✓		✓			$\xleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–27	✓		✓			$\xleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–28	✓		✓			$\xleftarrow{\text{Construcción aux}}$
EO–29			✓			

5.3 CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

5.3.1 Con respecto al grado Tercero de la básica primaria

Los estudiantes de grado Tercero omitieron la unidad de cm^2 en el cálculo que lo requería. Esto muestra que aún no hay una conciencia de la importancia que tiene el uso y selección de la unidad de medida apropiada en la estimación de superficies planas. Algunos estudiantes incluso llegaron a asociar la cantidad de porciones en que dividieron cierta superficie con su Área, aún más, no consideraron el tamaño de cada porción. Este hecho da cuenta, que si bien, el estudiante tiene una idea del Área de la figura total, no considera el Área de las porciones que la conforman y se limita simplemente a realizar un conteo de estas porciones. Esto se evidenció, por ejemplo, al observar como algunos estudiantes dividen triángulos en franjas, obviando la diferencia entre sus Áreas, así mismo, en otras figuras que no ofrecían simetrías.

Gran parte de los estudiantes lograron diferenciar el concepto de Área y de perímetro. Esto se evidenció en sus procesos, aunque no argumentaron con palabras que figuras con Área igual pueden tener diferentes perímetros y viceversa. Es importante resaltar que los estudiantes reconocen el hecho de la conservación del Área al ser capaces de construir figuras con formas diferentes con la misma Área.

En varias de las situaciones planteadas en los cuestionarios, los estudiantes privilegiaron más el Modo SG-AFP que el AA-AFP, lo que significa que a esta edad (8 a 10 años) aún se tiene una idea gráfica del concepto de Área. Los estudiantes prefieren analizar las figuras geométricamente antes de pasar a realizar cálculos. Aunque se esperaba que el Modo AE-AFP causara grandes dificultades en los estudiantes, se pudo evidenciar el uso de este Modo cuando los estudiantes recurren a procesos como la descomposición de una figura en unidades estándar y en la reconfiguración de las mismas para obtener nuevas figuras.

Se evidenció que los estudiantes logran transitar el concepto de Área a través de los 3 Modos de pensamiento mediante el uso de los Articuladores hipotéticos considerados anteriormente, sin embargo, el tránsito se realizó con ciertas restricciones, limitándose al uso principalmente de los Articuladores que hacen referencia a la descomposición de figuras en unidades cuadradas ($\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$) y el Articulador que evidencia procesos de conteo ($\xleftrightarrow[Conteo]{}$). Ambos Articuladores dan cuenta del tránsito entre los Modos SG-AFP y AA-AFP.

También se pudo observar un buen uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Recomposición}]{}$ el cual permitió que los estudiantes pudieran usar la descomposición de una figura para formar otras con las mismas porciones, evidenciando así un tránsito del Modo AE-AFP al SG-AFP. No se evidenció el uso de Articuladores como $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$, $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ y $\xleftarrow[Construcción\ aux]{}$ lo que muestra que en este nivel aún no se desarrollan habilidades para deducir expresiones generales, usar fórmulas para el cálculo de Áreas ni la de hacer trazos auxiliares para profundizar en el análisis geométrico. Esto sugiere que estas destrezas se adquieren en la educación básica secundaria.

5.3.2 Con respecto al Caso 1 del grado Octavo de la básica secundaria

Los estudiantes de grado octavo mostraron reconocer el cm^2 como unidad de medida para el cálculo de Áreas y el cm para medir longitudes como el perímetro. Este hecho también les permitió establecer la diferencia que existe entre estos conceptos, reconociendo el carácter bidimensional del Área y el unidimensional que caracteriza al perímetro.

En varios de las situaciones planteadas en los cuestionarios, los estudiantes privilegiaron en mayor medida el trabajo numérico, mostrando así una gran fortaleza al situar sus procesos en el Modo AA-AFP, sin embargo, consideramos que este hecho fue algo exagerado debido a que algunas situaciones que se podían resolver por simple comparación de figuras, prefirieron realizar la comparación de los números que representan su superficie.

El tránsito a través de los diferentes Modos de Pensamiento arrojó los resultados esperados, los cuales fueron muy positivos. Los elementos Articuladores hipotéticos considerados y de mayor uso por parte de los estudiantes del Caso 1 fueron aquellos asociados a la parte numérica, por ejemplo, el Articulador de $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$. lo anterior evidenció que los estudiantes reconocen las unidades de medida apropiadas en cada figura y asocian cada una de estas con la fórmula que permite calcular su Área, realizando un tránsito desde el Modo SG-AFP hasta el AA-AFP.

Otro Articulador de uso frecuente aunque en menor medida fue el referido a la $\xrightarrow[\text{Unidad−cuadrada}]{}$, este Articulador muestra la habilidad para descomponer figuras geométricas en unidades cuadradas y así estimar su Área. Las unidades no estándar fueron de poco uso y en algunas situaciones se evidenciaron dificultades para reconocerlas o para descomponer figuras a base de unidades no estándar, dificultando a los estudiantes ubicarse en el Modo AE-AFP y su movilización hacia el Modo SG-AFP.

Los elementos Articuladores que menos usaron los estudiantes fueron los de $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$, $\xleftarrow[\text{Patrón}]{}$ y $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$. Bajo este escenario se evidencia que este grupo de estudiantes presentan dificultades para deducir y manipular expresiones algebraicas que les permita generalizar las situaciones planteadas en los cuestionarios y, en consecuencia, limitar el tránsito del Modo AE-AFP al SG-AFP, además, no ven más allá de la figura, por lo que no realizan otro tipo de construcciones auxiliares para analizar con mayor profundidad geométrica cada.

5.3.3 Con respecto al Caso 2 del grado Octavo de la básica secundaria

Los estudiantes del caso 2 (recibieron 3 clases extras sobre el manejo del software Cabri), indudablemente, mostraron mayor fortaleza en el análisis de las diferentes situaciones propuestas en el cuestionario. Reconocen con propiedad las unidades bidimensionales del Área y las diferencian con las del perímetro.

Se evidenció un gran dominio en el uso de contraejemplos para sustentar la invalidez de ciertas afirmaciones. Estos estudiantes transitaron plenamente por los diferentes Modos de Pensamiento usando varios tipos de Articuladores. El Articulador $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$, $\xleftarrow[Patrón]{}$ y $\xleftarrow[Construcción\ aux]{}$ fueron de uso frecuente y de forma correcta por parte de los estudiantes, lo que evidencia es que los estudiantes tienen facilidad para deducir y manipular expresiones algebraicas, para generalizar análisis, para ver más allá de la figura realizando construcciones auxiliares y facilitando así el tránsito desde el Modo AE-AFP al SG-AFP.

Las argumentaciones de los procesos por parte de los estudiantes del Caso 2 fueron más claras y contundentes en comparación con los del Caso 1, lo que da cuenta de la habilidad y destreza para manipular el lenguaje matemático en los estudiantes del segundo Caso.

Es importante resaltar también la fortaleza argumentativa mostrada por los estudiantes de este caso al enfrentar figuras que son nuevas para ellos, como el caso de la elipse, en donde lograron identificar su propiedad principal y, con base en ella pudieron establecer que el perímetro de los triángulos formados con los focos y un punto de la elipse tendrán siempre el mismo perímetro, pero su Área cambia, mientras que los estudiantes del caso 1 tuvieron mayor dificultad para observar esta característica.

5.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Es preciso manifestar que, en las clases regulares de geometría impartidas a los estudiantes, tanto de Tercero como de Octavo grado, previas a la aplicación del cuestionario, se enfatizó sobre los aspectos históricos y epistemológicos que dieron lugar a la consolidación del concepto de Área, además, se implementaron también algunas estrategias didácticas como el uso de regla y compás. A 5 estudiantes del grado Octavo se les implementó una estrategia didáctica diferenciada, la cual consistió en 3 clases extras de Cabri, en donde tuvieron la oportunidad de trabajar algunas situaciones relacionadas con la construcción de figuras planas a partir de sus propiedades y analizar sus Áreas y sus perímetros.

Cabe anotar que tanto los estudiantes de Tercero como los de Octavo grado tuvieron mejores desempeños en el componente geométrico de pruebas internas en relación con resultados de otros periodos académicos. En los estudiantes de grado Octavo del Caso 2 fue más notorio este hecho.

No se consideró conveniente aplicar un curso de Cabri en el grado Tercero debido a que nos pareció más importante que los estudiantes de este grado pudieran identificar las propiedades de las figuras planas y construirlas mediante el manejo de instrumentos básicos como la regla y el compás.

En los estudiantes de Tercero se observa mayor preferencia por ubicarse en el Modo SG-AFP, mientras que los estudiantes de Octavo privilegian el Modo AA-AFP. Los estudiantes de Octavo del Caso 2 transitan con más facilidad por los 3 Modos de Pensamiento y usan la mayoría de los Articuladores hipotéticos considerados anteriormente.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES TEÓRICAS

Las conclusiones se han dividido en apartados, para comunicar con mayor precisión los distintos aspectos que la investigación ha evidenciado.

6.1.1 Con respecto al concepto de Área de figuras planas

Al analizar los resultados del grado Tercero y los casos 1 y 2 del grado Octavo obtenidos después de la aplicación de los cuestionarios, se pudo clarificar que la enseñanza del concepto de Área de figuras planas puede ser abordado de muchas maneras, sin embargo, se identificaron ciertos principios que condujeron a una mejor comprensión del concepto.

En primera instancia, resultó muy conveniente en esta investigación comenzar el tratamiento del concepto de Área como magnitud autónoma, lo cual facilitó que los estudiantes pudieran tener contacto con las figuras, cambiar su posición, su forma y sus dimensiones y posteriormente considerar los cambios en el Área y su perímetro, por comparación, siendo el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad}-\text{cuadrada}]{}$ el más evidenciado. En este proceso cualitativo, se prescindió del número.

Posteriormente, y como consecuencia de analizar el Área como magnitud autónoma surgió la necesidad de medir y, es en esta parte del proceso donde la unidad de medida seleccionada y los procedimientos e instrumentos utilizados cobraron fuerza, en este caso, los Articuladores $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$, y $\xleftrightarrow[Conteo]{}$ fueron privilegiados por los estudiantes de primaria, mientras que el Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ fue el más usado en la secundaria. Finalmente, los estudiantes identificaron patrones particulares que les permitieron generalizar conceptos. Para el caso del grado Octavo, estos procesos de generalización condujeron a la validación de fórmulas para el cálculo de Áreas y perímetros.

Abordar el concepto de Área de una manera progresiva partiendo de lo simple a lo complejo resultó ser muy conveniente para posibilitar el proceso de aprendizaje. Para esto es necesario identificar las propiedades del Área que facilitan su comprensión. Aunque en la investigación de (Corberán, 1996) se sugiere estudiar la definición axiomática del Área en el nivel universitario, nosotros por el contrario consideramos que estos axiomas y propiedades explicadas en un léxico más simplificado y de dominio para los estudiantes, brindan elementos importantes para el diseño de actividades didácticas. Los estudiantes que lograron comprender las propiedades del Área y que pudieron diferenciarla de otros conceptos como el de perímetro, evidenciaron mejores desempeños en la solución de los cuestionarios. Algunos estudiantes del grado Tercero que no comprendieron la propiedad de la medida, presentaron dificultades reconocer al cm^2 como unidad de medida estándar y para cuantificar la medida del Área.

6.1.2 Con respecto a la teoría Modos de Pensamiento

El concepto de Área, aunque se entiende como la medida de una superficie, no se limita a lo numérico. Un error muy común y que limitó la comprensión fue considerar que los problemas del Área de una figura, se reducen solo a calcularla.

En esta investigación se abordó este desacierto afrontando el concepto desde situaciones que involucraran el razonamiento cualitativo y cuantitativo conjuntamente. En este punto fue donde la teoría Modos de Pensamiento aportó elementos importantes para lograr este propósito y que los estudiantes pudieran estudiar el concepto desde tres formas de pensar (SG-AFP, AA-AFP y AE-AFP), además de las conexiones y tránsitos que se pudieron generar entre éstos por medio de los elementos Articuladores.

Este marco teórico pese a haber sido diseñado en primera instancia para subsanar dificultades presentadas en el álgebra lineal, se relacionó estrechamente con la problemática descrita en esta investigación.

El Modo AE-AFP resultó ser el menos privilegiado por los estudiantes, tanto del grado Tercero como de Octavo, sin embargo, se evidenció su uso en los estudiantes que llevaron el curso de Cabri. Esto nos sugiere que la implementación de actividades con este software permite que el estudiante realice razonamientos que propicien la movilización del concepto a través de los diferentes Modos de Pensamiento.

6.1.3 Con respecto a los elementos Articuladores

La definición hipotética de los elementos Articuladores, basados en un análisis histórico y epistemológico resultó ser muy útil para identificar con claridad las causas que dificultaron la movilización del concepto de Área de figuras planas a través de los diferentes Modos de Pensamiento. Al mismo tiempo, estos elementos permitieron establecer algunos parámetros para el diseño de actividades de aula apropiadas para atender a dichas dificultades.

El uso de elementos Articuladores se presentó de manera diferente entre los distintos grupos de estudio. Mientras el grado Tercero evidenció en sus procesos la descomposición de figuras en unidades estándar y el conteo de las mismas ($\xrightarrow[\text{Unidad}-\text{cuadrada}]{}$ y $\xleftrightarrow[\text{Conteo}]{}$), los estudiantes de Octavo del caso 1 recurrieron principalmente a la aplicación de fórmulas ($\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$). Los estudiantes de Octavo del caso 2 respondieron positivamente a diversas situaciones, utilizando con mayor versatilidad distintos Articuladores, incluyendo aquéllos de mayor complejidad, como $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$ y $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$, lo cual les permitió realizar un enlace entre los Modos de Pensamiento de manera flexible.

6.1.4 Con respecto a los objetivos de investigación

Al iniciar esta investigación nos trazamos tres objetivos específicos:

- Caracterizar los Modos de Pensamiento para la enseñanza y aprendizaje del Área para estudiantes del grado Tercero y Octavo.
- Implementar actividades de aula para los estudiantes de los grados Tercero y Octavo que propicien el tránsito entre los Modos de Pensamiento en la práctica del Área de figuras planas.
- Diseñar Unidades Didácticas para Tercero y Octavo que promuevan el tránsito entre los Modos de pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Área de figuras planas.

Es importante aclarar que, con el diseño e implementación de actividades de aula enmarcadas en la teoría Modos de Pensamiento, se logró mayor motivación de los estudiantes por encontrar métodos alternos de solución en donde pudieron contrastar los procesos geométricos, numéricos y algebraicos, además de reconocer las potencialidades de cada uno de ellos.

El análisis a priori y a posteriori del cuestionario facilitó la caracterización de los Modos de Pensamiento que más privilegiaron los estudiantes y la detección de aquellas situaciones que dificultaron la movilización del concepto a través de los mismos.

A través de un análisis histórico y epistemológico, junto con un correcto uso de herramientas didácticas se logró diseñar Unidades Didácticas, tanto para el grado Tercero como para Octavo, las cuales consideramos llevarán progresivamente al estudiante a la comprensión profunda del concepto de Área de figuras planas, maximizando de manera eficiente las potencialidades de los estudiantes.

6.1.5 Con respecto a la pregunta de investigación

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del Área de figuras geométricas, en los grados Tercero y Octavo, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en los Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias matemáticas?

Con la implementación de actividades de aula se logró que los estudiantes de Tercero y Octavo mejoraran sus desempeños, principalmente en el componente geométrico-métrico. Además, mejoró la actitud por el trabajo con figuras planas al expresar en las clases de matemáticas su interés por trabajar la geometría.

Los docentes de matemáticas y directivos de la Institución que conocieron el proyecto elogiaron la investigación y sus resultados, estableciendo un compromiso para generar espacios de reflexión en torno a las prácticas educativas.

Las Unidades Didácticas que se diseñaron se basaron en un análisis de actuación realizado a las actividades de aula y a los cuestionarios aplicados, además, sirvieron de base para la actualización de los planes de área dentro del Proyecto Educativo Institucional.

6.2 CONSIDERACIONES ACERCA DE LOS INSTRUMENTOS

En los cuestionarios aplicados a los estudiantes se plantearon situaciones intencionadas para medir el nivel de comprensión del concepto de Área de figuras planas. Estas situaciones fueron proyectadas con un nivel de profundidad ascendente y compatible con el marco teórico, ya que se buscó la flexibilidad de análisis desde los diferentes Modos de Pensamiento.

Durante la aplicación de los cuestionarios se llevó un minucioso registro de datos relevantes para la investigación, donde las dudas que los estudiantes plantearon en cada una de las situaciones, se documentaron y fueron determinantes para efectos del análisis de datos.

A lo anterior, se suma el registro fotográfico, de audio y video, que nos permitió revisar situaciones con una mayor objetividad.

Si bien la posibilidad de aplicar entrevistas a los estudiantes fue considerada en forma preliminar como técnica para la recolección de información para esta investigación, las inquietudes que los estudiantes plantearon durante la aplicación de los cuestionarios nos hizo prescindir de ellas, pues aportaron datos mucho más valiosos para nuestro propósito.

La información obtenida de la aplicación de los cuestionarios logró proporcionar elementos que contribuyeron no sólo al análisis de datos, sino también al diseño de la Unidad Didáctica, que representa el producto final de esta investigación.

6.3 COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN LOS ESTUDIANTES

La implementación de actividades didácticas durante las clases evidenció una mejora en la comprensión del concepto de Área de figuras planas, tanto para los estudiantes de Tercero como para los de Octavo. Sin embargo, este hallazgo no se presentó con la misma claridad en la totalidad de sujetos participantes de esta investigación.

La mayoría de los estudiantes de grado Tercero demostraron comprender el concepto durante el desarrollo de las primeras situaciones planteadas en el cuestionario, aunque, algunos estudiantes de este grado presentaron dificultades para resolver correctamente las actividades de conservación del Área o al cambiar la forma de la figura. En las figuras con contornos rectangulares dividieron correctamente en cuadrículas y por conteo estimaron su Área, pero al enfrentarse con figuras como el triángulo, lo dividieron en franjas horizontales sin considerar el Área de éstas, asumiendo que la cantidad de franjas conformaba el Área, lo que nos sugirió que cada franja representaba para ellos una unidad cuadrada. Este hecho, nos parece una muestra de que a algunos estudiantes aún se les dificulta la comprensión de la propiedad de la unidad cuadrada y, en consecuencia, solo obtienen resultados satisfactorios cuando se trabajan con cuadrados y rectángulos.

La mayoría de los estudiantes de grado Octavo presentaron un buen dominio del concepto de Área, aunque algunos de ellos evidenciaron dificultades al enfrentarse con figuras nuevas, como la elipse, perteneciendo la mayoría de éstos al Caso 1. En cambio, los estudiantes del caso 2, quienes recibieron un curso extra con la aplicación Cabri, demostraron una mayor habilidad para identificar los elementos y propiedades de figuras que eran desconocidas para ellos, lo cual permitió profundizar sobre el concepto de Área.

Es importante mencionar que los estudiantes del caso 2 reflejaron mayor motivación al momento de enfrentarse a las situaciones plasmadas en el cuestionario, además, requirieron menos tiempo para resolverlo. Lo anterior nos sugiere que el software Cabri II Plus es una buena estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento estructural y facilitar el tránsito del AE-AFP al AA-AFP y SG-AFP, debido a los resultados que logramos evidenciar en esta investigación.

Por otro lado, la descomposición de figuras en unidades no estándar también ocasionó ciertas dificultades a los estudiantes de ambos grados. Al parecer, los estudiantes comprenden el concepto de Área, pero, presentan problemas en considerar las unidades no estándar como unidades de medida. Este hecho implica que aún hay algunos aspectos sobre los cuales se debe profundizar.

Un aspecto significativo radica en la diferencia en que los estudiantes de Tercero y Octavo comprenden el concepto de Área. Los estudiantes de Tercero usan razonamientos que son más naturales, como el de la comparación y la observación, siendo el Articulador $\xrightarrow[\text{Unidad}-\text{cuadrada}]{}$ el más utilizado en sus procesos. Por otra parte, los estudiantes de grado Octavo privilegian más los procesos aritméticos, donde el Articulador $\xrightarrow[\text{Fórmula}]{}$ fue muy utilizado. Esto parece evidenciar que en la medida en que los estudiantes van conociendo las relaciones matemáticas que simplifican los cálculos, van privilegiando los procesos numéricos.

Los resultados obtenidos con esta investigación también pusieron de manifiesto que gran parte de las dificultades para comprender el concepto de Área, radican en el escaso dominio del lenguaje matemático y del conocimiento de elementos básicos, como vértice, segmento, recta, ángulo, etc. Sin embargo, el software Cabri II Plus demostró ser un buen complemento didáctico que ayudó a subsanar las dificultades en el lenguaje matemático, además de fortalecer el análisis con expresiones algebraicas, facilitando así el aprendizaje del concepto de Área en estudiantes de grado Octavo. Esto se evidencia ya que los estudiantes del nivel, en el Caso 2, privilegiaron el uso de Articuladores como: $\xleftarrow[\text{Construcción aux}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Expresión}]{}$.

La consideración de Articuladores hipotéticos permitió caracterizar con mayor claridad y certeza los procesos realizados por los estudiantes al momento de resolver los cuestionarios en torno a los Modos de Pensamiento que más privilegiaron. Asimismo, se lograron identificar las dificultades que les impide entender el concepto de Área de figuras planas de manera profunda como se pudo observar en el capítulo 5.

6.4 COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN CONTRAPOSICIÓN CON EL CONCEPTO DE PERÍMETRO

Los estudiantes que participaron de la investigación lograron comprender muchas de las características y propiedades que permiten diferenciar los conceptos de Área y perímetro, tales como diferenciar el carácter bidimensional del Área y el unidimensional del perímetro, reconocer las unidades de medida, etc. Tanto en estudiantes de Tercero como de Octavo, la evidencia nos sugiere que se aclaró que, figuras planas que tienen la misma Área pueden tener diferentes perímetros y viceversa, por lo que se creó una independencia entre estos dos conceptos. Además, reconocieron al Área como una magnitud bidimensional y al perímetro como magnitud unidimensional. Sin embargo, los estudiantes de grado Tercero presentaron dificultades para reconocer las unidades de medida estándar como el *cm* para medir algunos perímetros y el cm^2 para medir superficies.

Los estudiantes de grado Octavo mostraron entender la diferencia entre las unidades de medida y, a partir de ciertas situaciones, construyeron figuras con un Área determinada y perímetros diferentes. Los estudiantes del Caso 2 demostraron mayor habilidad ya que lograron llegar a la misma conclusión a través de situaciones de tipo geométrico mediante la construcción, comparación, descomposición y recomposición de figuras planas, además de situaciones de tipo numérico como el cálculo mediante el uso de fórmulas y la deducción y manipulación de expresiones algebraicas. En este proceso se hizo importante el uso del Articulador $\xrightarrow[\text{Medida}]{}$ y $\xrightarrow[\text{Unidad}-\text{cuadrada}]{}$.

6.5 SUGERENCIAS PARA CONSTRUIR UNA UNIDAD DIDÁCTICA

El análisis de los aspectos históricos y epistemológicos, que sirvieron de base para el surgimiento de los elementos Articuladores hipotéticos planteados para esta investigación, además de las propiedades del Área presentadas al final del capítulo 2, constituyeron un insumo valioso que contribuyó a la construcción de una Unidad Didáctica, la cual representa un recurso que permitirá subsanar las dificultades de los estudiantes en la concepción del Área de figuras planas.

Inicialmente, se sugiere llevar a cabo el proceso de enseñanza respetando ciertos principios que a nuestra consideración permiten que el estudiante vaya desarrollando habilidades que faciliten la comprensión del Área de figuras planas de una manera progresiva, explicadas a continuación. Esta secuencia es independiente del nivel educativo y, por tanto, aplica tanto para la educación básica primaria como para la secundaria.

Es importante iniciar con actividades que enfaticen en el reconocimiento de elementos y conceptos básicos de la geometría, tales como punto, ángulo, segmento, recta, perpendicularidad, paralelismo, entre otros. Para tal fin, se sugiere la utilización de instrumentos tradicionales, como regla, compás y transportador.

Antes de iniciar el tratamiento del Área se hace necesario que el estudiante realice actividades de construcción de figuras geométricas planas a través de diferentes técnicas, con el fin de que reconozca e interiorice las propiedades individuales y comunes que las caracteriza.

Posteriormente, se sugiere partir de situaciones en contexto real que originaron el surgimiento del concepto de Área, como es el caso de la agricultura y la delimitación de terrenos.

Luego, se recomienda abordar situaciones que pongan a prueba la observación y la comparación de figuras geométricas de diferentes formas y posiciones y, que no estén mediadas por el número. En estas actividades se puede comenzar desde preguntas como ¿qué figura tiene mayor Área?, ¿cuántas veces cabe una figura en otra?, por mencionar algunos ejemplos.

Plantear actividades que introduzcan el uso de la unidad cuadrada, inicialmente vista de forma geométrica y posteriormente asociada a unidades estandarizadas, como el cm^2, el m^2, etc. Adicionar actividades de cálculo numérico mediante el uso de operaciones básicas, y otras, donde se propicie un paralelo entre el análisis geométrico y numérico.

Propiciar situaciones donde se posibilite la identificación de procedimientos numéricos que se puedan simplificar y deducir algunas fórmulas básicas. Para el caso de estudiantes de educación básica primaria se aconseja abordar sólo figuras poligonales como el cuadrado, rectángulo y triángulo.

Introducir los polígonos irregulares donde se facilite la subdivisión de ésta en figuras elementales ya estudiadas anteriormente, y analizar su Área equivalente con procesos geométricos en paralelo con procesos numéricos. Según el lenguaje usado en esta investigación, en este punto se promueve el tránsito entre el Modo SG-AFP y AA-AFP.

Establecer situaciones donde se trabaje la conservación del Área. En este caso se podrían plantear situaciones donde a partir de cierta figura plana se encuentren otras de igual Área. Es en esta parte donde se inicia con la descomposición y recomposición. Para los estudiantes de secundaria se puede complementar con actividades numéricas. De esta manera se promueve el tránsito entre lo geométrico, lo aritmético y lo estructural.

Estudiar las figuras con contornos irregulares curvos y estimar su Área por aproximación. En una primera instancia, se podrían ofrecer situaciones donde se aproxime la forma de la figura a otra conocida y, en una segunda instancia, se puede propiciar la descomposición de la figura con procesos similares al de exhaución.

En los estudiantes de grado Octavo en adelante se pueden introducir actividades de cálculo de Áreas mediante la manipulación y deducción de expresiones algebraicas. Por el contrario, en el grado tercero no se recomienda el uso de fórmulas, ya que es más conveniente que las vayan deduciendo a medida que adquieren mayor razonamiento en los grados siguientes. Es por eso que se sugiere trabajar actividades donde se identifiquen patrones.

Se recomienda durante el diseño de la Unidad Didáctica, abordar paralelamente conceptos como el de perímetro, Área y volumen. Esto permite establecer las diferencias entre ellos y consolidar el reconocimiento profundo del concepto de Área.

Para la aprehensión del concepto de Área es trascendental una correcta selección del material didáctico, considerando recursos como el tangram y la papiroflexia, los cuales han demostrado ser apropiados. Para el caso de la educación secundaria se sugiere complementar con el uso del software Cabri, el cual permite modelizar situaciones geométricas en las que se pueden efectuar análisis dinámicos que promueven la predicción de resultados al movilizar ciertos elementos.

6.6 SUGERENCIAS A LA COMUNIDAD EDUCATIVA INTERESADA EN ENSEÑAR EL CONCEPTO DE ÁREA

Es importante que la comunidad educativa reflexione sobre las dificultades en la comprensión y aprehensión del concepto del Área por parte de los estudiantes, ya que estas tienen componentes que provienen de naturaleza epistemológica y también didáctica. Esto implica que se hace necesario que los estudiantes conozcan situaciones históricas que impulsaron la necesidad de consolidar el concepto, además de las dificultades y obstáculos epistemológicos que posibilitaron su evolución.

Asimismo, la pedagogía empleada deberá ser reevaluada. En esta investigación se sugiere retomar el uso de regla y compás para fortalecer la construcción de figuras ya que de esta manera los estudiantes podrán identificar los elementos y propiedades que caracteriza cada figura geométrica. En la educación básica primaria se recomienda abordar el concepto del Área a través de actividades didácticas múltiples como el uso de tangram, papiroflexia, recorte de papel, rompecabezas, etc. Para la educación secundaria se sugiere además del uso de regla y compás, el análisis de situaciones geométricas mediadas por el uso del software geométricos como Cabri. De esta manera será más sencillo encontrar las relaciones numéricas y la deducción de expresiones algebraicas que permiten la generalización del concepto.

Para nosotros, las aulas de clase representan pequeños laboratorios de investigación de donde se extraen los insumos necesarios para desarrollar cualquier tipo de estudio. Por esta razón, consideramos que los docentes deben generar espacios de discusión donde se socialicen las metodologías empleadas y resultados obtenidos. De esta manera motivaremos a otros docentes a reflexionar sobre sus prácticas pedagógicas.

A través de esta investigación también estamos invitando a los docentes de matemáticas a crear comunidad científica mediante la publicación de artículos en revistas de alto impacto.

6.7 PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo y evolución del concepto de Área y su aporte al desarrollo de otras ramas de la matemática, como el cálculo integral, ha justificado la inclusión de este concepto dentro del currículo y los planes de estudio que actualmente se imparten en las instituciones educativas a nivel global. Es por esta razón que las investigaciones no pueden entenderse como un producto terminado y sobre el cual los aportes puedan parecer redundantes, por el contrario, sería de relevancia para la comunidad científica poder conocer nuevas producciones que profundicen sobre la enseñanza de este concepto que generan muchos matices didácticos.

Es interesante, por ejemplo, generar una investigación donde se establezcan las diferencias entre los conceptos de Área y volumen, ya que en una figura tridimensional se ven comprometidos ambos conceptos. Un poliedro construido con cartulina, por ejemplo, al ser desarmado se convierte en una figura plana y, lo que antes encerraba un volumen, ahora representa un Área. Consideramos importante que el estudiante descubra lo que en estas situaciones sucede.

Por otro lado, el Área de figuras fractales presentan un potencial importante dado su apogeo y aplicabilidad al desarrollo de las ciencias actuales. Desde el punto de vista matemático, abordar el Área de fractales permite enfatizar sobre el concepto de sucesiones, lo que posibilita que el estudiante pueda a través de su análisis, movilizarse entre varios elementos de la matemática que le permitirá profundizar en el concepto.

Otro estudio que seguramente despertará interés en la comunidad científica sería el trabajo del concepto de Área a través de homotecias. Esta metodología propicia que se puedan analizar y brindar conocimientos más profundos, los que permiten incluso transversalizar el concepto con la Educación Artística, donde también es considerado. Una de las propiedades del Área es que dos figuras congruentes tendrán la misma Área. De acá surge el interrogante ¿cómo será el Área de dos figuras semejantes?

De esta manera se podrían generar muchas otras líneas de investigación que apunten hacia en una adecuada enseñanza del concepto de Área y, por consiguiente, en la aprehensión del mismo por parte de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA 8(1),* 30-46.

Apóstol, T. (1999). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Barcelona: Reverté.

Arcos, I. y Sepúlveda, A. (2011). *Desarrollo conceptual de la geometría*. Toluca: Devi Kali.

Arenas, M. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Boyer, C. (1999). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, *Recherches en didactique des mathematiques 7(2),* 33-115.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica entre el saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Grupo Editor Aique.

Cifuentes, W. (2011). *Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Valencia, España.

D'Amore B. y Fandiño M. (2007). Relaciones entre área: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1),* 1665-2436.

Duval, R. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an icmi study. Dordrecht: Kluwer. Geometry From a Cognitive Point of View*. Springer: Mammana, Carmelo, Villani, V. (Eds).

Fuentes, P. (2000), Ératosthène de Cyrène, En R. Goulet (Ed.), *Dictionnaire des Philosophes Antiques, vol. III*. (pp. 188-236). Paris: Centre National de la Recherche Scientifique.

García, P. y López, E. (2008). *La enseñanza de la Geometría*. México: Instituto Nacional para la evaluación de la educación.

Garrido, E. (2015). *La enseñanza del concepto de área de polígonos a través del Geoplano, para el desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas del grado séptimo en el Colegio María Antonia Cerini*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional. Medellín, Colombia.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the pharaohs*. EE. UU: MIT Press.

Estrada, H., Ruiz, J. y Triana, J. (2011). *El origen del metro y la confianza en la matemática*. Escuela Regional de Matemáticas Universidad del Valle, Colombia.

López, F. (2002). *Las matemáticas en el antiguo Egipto.* Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas.

Maza, C. (2000). *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico.* Sevilla: Grafitrés.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Dirección Nacional de la Educación preescolar, básica y media

Parraguez, M. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Valparaíso, Chile: Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Parraguez, M. y Maturana, I. (2011), Los Modos de Pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios, *XIII Conferencia Internacional de Educación Matemática*, Recife, Brasil.

Peña, M. (2000). *Historia de la Geometría Euclidiana*. *Revista Candidus 1(10)*. Recuperado el 30 de septiembre de 2016 desde www.euclides.org/menu/articles/article3.htm.

Pérez, M. (2013). *Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes.* Madrid: Visión Libros.

Popocoa, M. y Acuña, C. (2011). *Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figurales, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24(2),* 541-550. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Roldán, G. y Rendón, H. (2014). *Estrategia para el estudio del área y el perímetro de figuras planas articulada al modelo socio crítico para los* estudiantes *de la Institución Educativa María de los Ángeles Cano Márquez*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Medellín, Colombia.

Salazar, W. (2016). *Enseñanza de los conceptos de perímetro, área y volumen a* estudiantes *de grado sexto a partir de maquetas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias*. Barcelona: Marfil.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra In Question* (pp. 209-246). Paises bajos: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Turégano, P. (1993). *De la noción de área a su definición*. Cuenca: La Mancha.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo, *Enseñanza de las Ciencias 16(2)*, 233-249.

ANEXO 1:

UNIDADES DIDÁCTICAS

UNIDAD DIDÁCTICA PARA GRADO TERCERO

UNIDAD DIDÁCTICA GRADO TERCERO

AUTORA: DARLING AGUALIMPIA OREJUELA
NOMBRE DE LA I. E.: JUAN DE DIOS COCK, MEDELLÍN, COLOMBIA
TÍTULO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA DE FIGURAS PLANAS
ÁREA: MATEMÁTICAS

RESUMEN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA
La realización de esta Unidad Didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de Área de figuras planas en estudiantes de grado tercero. Inicialmente se identifica la problemática, luego se realiza un estudio histórico epistemológico del Área y finalmente se establecen los contenidos apropiados que se convierten en el eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significado. La organización, experiencia y conocimiento proporcionan las pautas.

TEMÁTICAS

- Figuras geométricas básicas y sus elementos.
- Perímetro y Área de figuras geométricas planas básicas.
- Unidades de medida de longitud y área

ESTÁNDAR	
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Identifica y describe relaciones entre líneas (por ejemplo, paralelas y perpendiculares).
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Comprende atributos como longitud, área, peso, volumen, temperatura, ángulo, y utiliza la unidad apropiada para medir cada uno de ellos. • Clasifica ángulos agudos, rectos, planos u obtusos.

DBA (Derechos básicos de aprendizaje)
Describe y argumenta posibles relaciones entre los valores del área y el perímetro de figuras planas (especialmente cuadriláteros). Evidencias de aprendizaje • Toma decisiones sobre la magnitud a medir (área o longitud) según la necesidad de una situación. • Realiza recubrimientos de superficies con diferentes figuras planas. • Mide y calcula el área y el perímetro de un rectángulo y expresa el resultado en unidades apropiadas según el caso. • Explica cómo figuras de igual perímetro pueden tener diferente área.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
• Crear conciencia en el estudiante acerca de la importancia de la geometría para el desarrollo y fundamentación de las diferentes ciencias. • Diferenciar el concepto de Área y perímetro en figuras planas, además, de su carácter bidimensional y unidimensional respectivamente. • Lograr un tránsito del concepto de Área de figuras planas en los diferentes Modos de Pensamiento.
DIAGNÓSTICO DE AULA
En la I.E Juan de Dios Cock, el grado tercero cuentan con aproximadamente 111 estudiantes con edades que oscilan entre 8 y 9 años. Son estudiantes con una gran problemática sociocultural, razón por la cual adolecen de normas y directrices que regulen su conducta, esto se hace evidente en el aula de clase dificultando así su proceso de aprendizaje. En el aula de clase también son notorios sus problemas de comportamiento lo cual distrae la atención durante las explicaciones e impiden al mismo tiempo que el trabajo en clase se pueda desarrollar según la planeación. El tiempo invertido por los docentes en

problemáticas relacionadas con la convivencia afecta directamente el aprendizaje de los estudiantes.
El acompañamiento por parte de Padres de familia es insuficiente y se limita estrictamente a reuniones para entrega de informes académicos. Es necesario generar conciencia en los acudientes como primeros responsables del proceso de formación de sus hijos, garantizando un acompañamiento desde sus casas y que se refleje en el desarrollo de actividades de los niños en la Institución.
En lo que respecta a lo cognitivo, los estudiantes en su gran mayoría demuestran fortalezas y capacidades para lograr comprender la geometría, en especial, el Área de figuras planas. Existen muy pocos casos de estudiantes con necesidades educativas especiales, principalmente por déficit de atención, por lo que se pretende realizar una Unidad Didáctica flexible que logre atraer la atención de todos los estudiantes.

PRERREQUISITOS

- Operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división)
- Elementos geométricos básicos (punto, segmento, recta, ángulo)
- Figuras geométricas básicas (rectángulo, cuadrado, triángulo)
- Unidades básicas de longitud (cm y m)

LUGAR

Aula de clase, sala de sistemas, cancha y parque de la Institución.

TIEMPO

12 horas

DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO

El proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de Área de figuras planas se llevará a cabo bajo el marco de la teoría de los Modos de Pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000) en donde se enfoca el concepto desde 3 perspectivas:

<u>Modo Sintético geométrico (SG):</u> Acá el estudiante tiene la oportunidad de observar el Área de figuras planas de una forma gráfica lo cual le proporcionará herramientas para asociarlo con el mundo real.

<u>Modo Analítico aritmético (AA):</u> En este Modo de Pensamiento el estudiante podrá relacionar el Área de figuras planas con las diferentes operaciones matemáticas necesarias para realizar el cálculo.

Modo Analítico estructural (AE): Desde esta perspectiva el estudiante podrá comprender el Área de figuras planas desde las propiedades y elementos que componen las figuras geométricas, tales como las medidas de los lados y ángulos y sus elementos geométricos que permiten su construcción.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1: Tránsito entre los modos SG y AE

Nombre: Reconocimiento de elementos geométricos básicos de su entorno.

Semana: 1 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Planta física, lápiz, regla transportador y hoja de block.

Objetivo: Reconocer los diferentes elementos geométricos básicos que conforman las diferentes formas que componen el mundo real (puntos, segmentos, ángulos).

Descripción: Los estudiantes realizarán un recorrido dirigido por las instalaciones del colegio y visualizarán su entorno. En clase realizarán dibujos de los lugares visitados e identificarán en ellos los diferentes elementos geométricos que pudieron observar (ángulos, segmentos, rectas, triángulos, rectángulos, cuadrados, etc.). Además de lo anterior deberán asociar el lenguaje matemático con el lenguaje en contexto real.

ACTIVIDAD 2: Tránsito entre los modos AA-AE

Nombre: Toma de medidas.

Semana: 1 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Planta física, metro.

Objetivo: Reconocer el metro como unidad de medida patrón y diferenciar sus usos.

Descripción: Los estudiantes tomarán diferentes medidas en metros y centímetros a los elementos presentes en el salón y luego deberán consignar la información recolectada en el cuaderno. Se realizarán organizaciones de datos en forma ascendente y descendente. Se realizará una gráfica de los elementos con sus respectivas medidas.

ACTIVIDAD 3: Tránsito entre los modos AA-AE

Nombre: Toma de medidas.

Semana: 1 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Cuaderno y lápiz.

Objetivo: Comparar las unidades de medida de longitud m y cm.

Descripción: Los estudiantes deberán realizar diferentes conversiones de medida del sistema métrico decimal. Enfatizando en metros y centímetros.

ACTIVIDAD 4: Tránsito entre los modos SG-AA

Nombre: Construcción de figuras.

Semana: 2 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Cuaderno, cartulina, tijeras, regla, transportador, compás y lápiz.

Objetivo: Construir diferentes tipos de figuras geométricas usando los instrumentos y recursos solicitados.

Descripción:
a. Dibuja en cartulina un triángulo equilátero, un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo y un trapecio.
b. Identifica en cada figura los ángulos y segmentos que la componen y toma sus medidas.
c. Trata de definir o describir con tus palabras cada figura.

ACTIVIDAD 5: Tránsito entre los modos AE-SG-AA

Nombre: Medición del Área y del perímetro.

Semana: 2 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Planta física, metro, cuaderno y lápiz.

Objetivo: Diferenciar el Área y el perímetro de diferentes figuras geométricas y reconocer las unidades para medir estas magnitudes.

Descripción: Cada estudiante deberá tomar medidas de diferentes elementos geométricos de su entorno y luego en el salón de clase deberá realizar las figuras en su cuaderno y calcular el Área y perímetro de cada una de ellas. Deberá hacer comparaciones de Área y perímetro entre las diferentes figuras. Para medir el Área se debe recortar un cuadrado que sirva como unidad de medida.

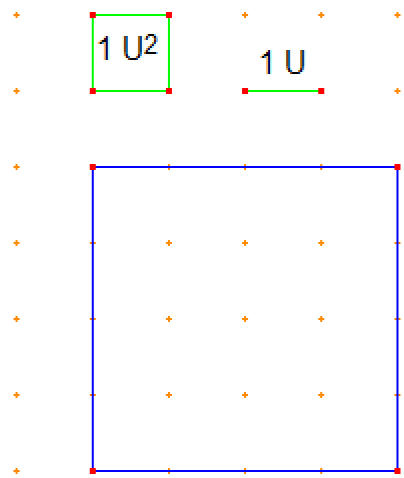
ACTIVIDAD 6: Tránsito entre los modos AE-SG-AA

Nombre: Conservación del Área por recomposición.

Semana: 2 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Cuaderno y lápiz.

Objetivo: Reconocer que figuras con igual Área pueden tener diferentes perímetros.

Descripción: Realiza el procedimiento descrito con base en la figura mostrada.



a. Divide el cuadrado en figuras del mismo tamaño, es decir, de la misma Área.
b. Usa las figuras para armar otras 4 figuras y dibújalas en el cuaderno.
c. Mide el Área y el perímetro de las nuevas figuras formadas, incluyendo el cuadrado.
d. Que puedes concluir del Área respecto al perímetro?

ACTIVIDAD 7: Tránsito entre los modos AE-SG-AA

Nombre: Interpretación de Áreas de figuras planas.

Semana: 3 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Cuaderno, regla y lápiz.

Objetivo: Interpretar el Área de diferentes figuras propuestas por la docente.

Descripción: A partir de una lista de Áreas propuestos por la docente, cada estudiante deberá construir varias figuras geométricas que se ajusten a esas medidas de Área y en cada figura relacionará el cálculo matemático utilizado para lograrlo. Deberá socializar los resultados.

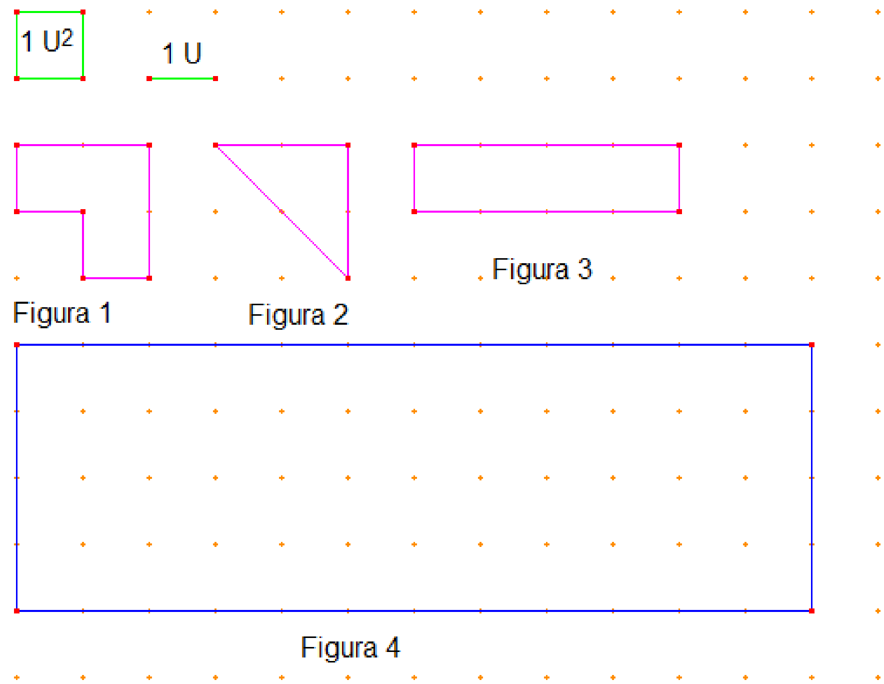
ACTIVIDAD 8: Tránsito entre los modos AE-SG

Nombre: Medición de Área con unidades no estándar.

Semana: 3 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Cartulina, tijeras, regla y lápiz.

Objetivo: Calcular el Área de diferentes figuras planas propuestas por la docente.

Descripción: Realiza el procedimiento descrito con base en las siguientes figuras.



a. Calcula el Área de cada unidad no estándar mostrada en las figuras 1, 2 y 3.
b. ¿Cuántas veces cabe cada figura no estándar en la figura 4?
c. Encuentra operaciones matemáticas para calcular el área de la figura 4 usando las áreas de las figuras no estándar. Compara los resultados.

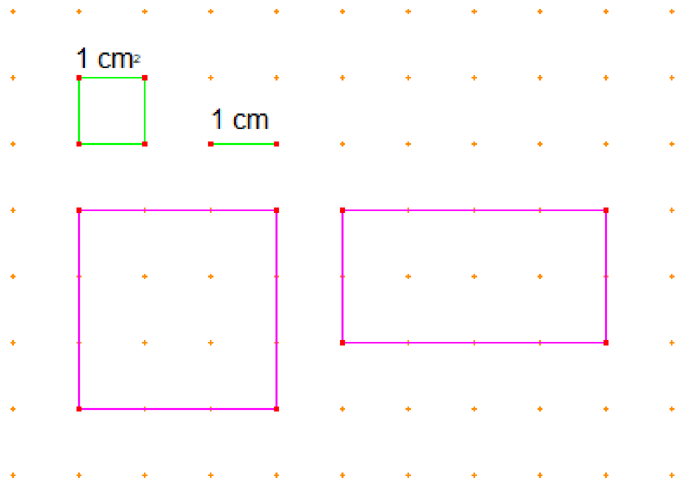
ACTIVIDAD 9: Tránsito entre los modos SG-AE-AA

Nombre: Construcción de figuras compuestas.

Semana: 4 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Cuaderno, regla y lápiz.

Objetivo: Construir figuras compuestas por adición y sustracción a partir de figuras básicas como cuadrados y rectángulos.

Descripción: Cada estudiante deberá construir 5 figuras diferentes a partir de las figuras básicas mostradas. Presentar las operaciones realizadas en cada caso.



ACTIVIDAD 10: Tránsito entre el modo AE, SG y AA

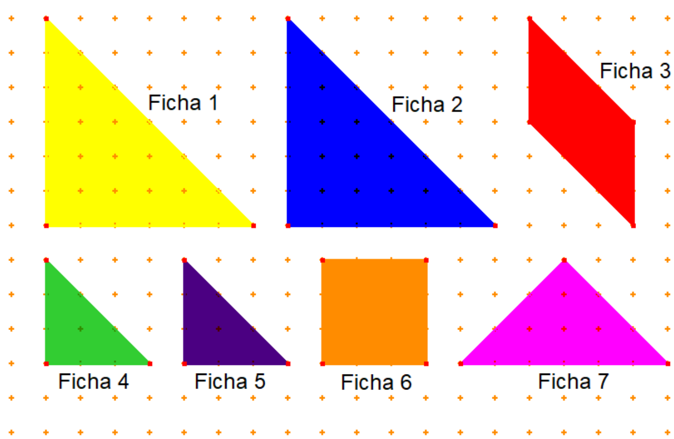
Nombre: Juguemos con el Tangram.

Semana: 4 **Tiempo:** 2 hora **Recursos:** Tangram, regla, lápiz y cuaderno

Objetivo: Formar y armar figuras utilizando las piezas del tangram.

Descripción:

a. Con las siguientes fichas del Tangram, arma un rectángulo, un cuadrado, un triángulo y 2 figuras irregulares.



b. Asigna un nombre a cada figura y con la ayuda de una regla marcada con centímetros, toma medidas y calcula el área y el perímetro de cada figura.
Registra los datos en la siguiente tabla:

Nombre de la figura	Área	Perímetro
Rectángulo		
Cuadrado		
Triángulo		

c. Qué puedes observar?
d. Cuántas veces cabe cada ficha en el rectángulo? Muestra el resultado mediante dibujos.
e. Cuántas veces cabe cada ficha en el rectángulo? Muestra el resultado mediante operaciones matemáticas.
f. Qué fichas tienen forma diferente, pero tienen la misma Área? ¿Cómo es el perímetro de estas fichas?

UNIDAD DIDÁCTICA PARA GRADO OCTAVO

UNIDAD DIDÁCTICA
GRADO OCTAVO

AUTOR: CARLOS MARIO GARCÍA ARANGO

NOMBRE DE LA I. E.: JUAN DE DIOS COCK, MEDELLÍN, COLOMBIA

TÍTULO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA DE FIGURAS PLANAS

ÁREA: MATEMÁTICAS

RESUMEN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En esta Unidad Didáctica se presenta una propuesta para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de Área de figuras planas en estudiantes de grado octavo por medio del uso del software Cabri II Plus. Para la realización de la misma se tuvieron en cuenta aspectos importantes como la problemática que presentan los estudiantes según resultados de pruebas Saber del año 2017. A continuación, se realiza un estudio histórico epistemológico del concepto de Área y finalmente se establecen los contenidos, actividades y metodología didáctica apropiada que apunte al cumplimiento de los

objetivos. En el desarrollo metodológico de esta Unidad Didáctica se consideran actividades de iniciación, desarrollo, ampliación, refuerzo y evaluación conducentes a la profundización del concepto del Área de figuras planas enmarcados en la teoría de los Modos de Pensamiento.

TEMÁTICAS
• Conceptos básicos del software Cabri II Plus. • Estructuras y operaciones con números reales. • Teorema de Pitágoras. • Productos notables y factorización • Área y Perímetro de figuras básicas (polígonos y círculo) • Área y Perímetro de figuras compuestas

ESTÁNDAR	
Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas.
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

DBA (Derechos básicos de aprendizaje)
Representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes (áreas y perímetro) y con base en la variación explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria.

Evidencias de aprendizaje

- Interpreta las modificaciones entre el perímetro y el área con un factor de variación respectivo.
- Establece diferencias entre los gráficos del perímetro y del área.
- Coordina los cambios de la variación entre el perímetro y la longitud de los lados o el área de una figura.
- Organiza la información (registros tabulares y gráficos) para comprender la relación entre el perímetro y el área.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Crear conciencia en el estudiante acerca de la importancia de la geometría para el desarrollo y fundamentación de las diferentes ciencias.
- Diferenciar el concepto de área y perímetro, además, del carácter bidimensional del área y unidimensional del perímetro.
- Lograr un tránsito del concepto de área y perímetro en los diferentes modos de pensamiento.

DIAGNÓSTICO DE AULA

La I.E Juan de Dios Cock cuenta con 3 grupos de grado octavo, con un promedio de 36 estudiantes por grupo, para un total de 108 estudiantes y con edades que oscilan entre 13 y 15 años. Son jóvenes con una gran problemática sociocultural, razón por la cual adolecen de normas y directrices que regulen su conducta, esto se hace evidente en el aula de clase dificultando así su proceso de aprendizaje.
En este grado no se encuentran casos de estudiantes con necesidades educativas especiales, esto implica que no es necesario realizar adaptaciones curriculares de fondo en la Unidad Didáctica para la consecución de los objetivos.
En el aula de clase también son notorios sus problemas de comportamiento lo cual distrae la atención durante las explicaciones e impiden al mismo tiempo que el trabajo en clase se pueda desarrollar según la planeación. El tiempo invertido por los docentes en problemáticas relacionadas con la convivencia afecta directamente el aprendizaje de los estudiantes.
La institución cuenta con 2 salas de sistemas apropiadas para el desarrollo de actividades que requieren el uso de software, recursos informáticos y aplicaciones matemáticas que propician el aprendizaje.

PRERREQUISITOS

- Operaciones matemáticas básicas (suma, resta y multiplicación)
- Elementos geométricos básicos (punto, segmento, recta, ángulo, etc.)
- Medidas de longitud y de área

- Reconocimiento de figuras geométricas (polígonos y el círculo)

LUGAR
Aula de clase, sala de sistemas, cancha y parque de la Institución.

TIEMPO
13 horas

DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO
El proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área y perímetro se llevará a cabo bajo el marco de la teoría de los Modos de Pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000) en donde se enfoca el concepto desde 3 perspectivas: Modo Sintético geométrico (SG): Acá el joven tiene la oportunidad de observar el área y el perímetro de una forma gráfica lo cual le proporcionará herramientas para asociarlo con el mundo real. Modo Analítico aritmético (AA): En este modo de pensamiento el joven podrá relacionar el área y el perímetro con las diferentes operaciones matemáticas necesarias para realizar el cálculo. Modo Analítico estructural (AE): Desde esta perspectiva el joven podrá comprender el área y el perímetro desde las propiedades y elementos que componen las figuras geométricas, tales como las medidas de los lados y ángulos y sus elementos geométricos que permiten su construcción.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1: Tránsito entre los modos AE y SG
Nombre: Reconocimiento y construcción de elementos geométricos básicos a través de Cabri. **Semana:** 1 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Computador y software Cabri. **Objetivo:** Reconocer los diferentes elementos geométricos básicos que componen las figuras geométricas mediante el uso del software Cabri. **Descripción general:** Los estudiantes deberán construir segmentos, ángulos, rectas perpendiculares y paralelas, además, deberá encontrar puntos notables en cada elemento.

Para cada construcción se tomarán medidas de longitud y ángulo. Lo anterior mediante el uso del software Cabri.

ACTIVIDAD 2: Tránsito entre los modos AE y SG

Nombre: Construcción de figuras geométricas básicas

Semana: 1 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Computador y software Cabri.

Objetivo: Reconocer y construir las diferentes figuras geométricas básicas a partir de sus propiedades.

Descripción general: Los estudiantes deberán construir figuras geométricas básicas a partir de la descripción de sus propiedades. De cada figura se determinará su área y su perímetro mediante el uso del software Cabri.

ACTIVIDAD 3: Tránsito entre los modos SG y AA

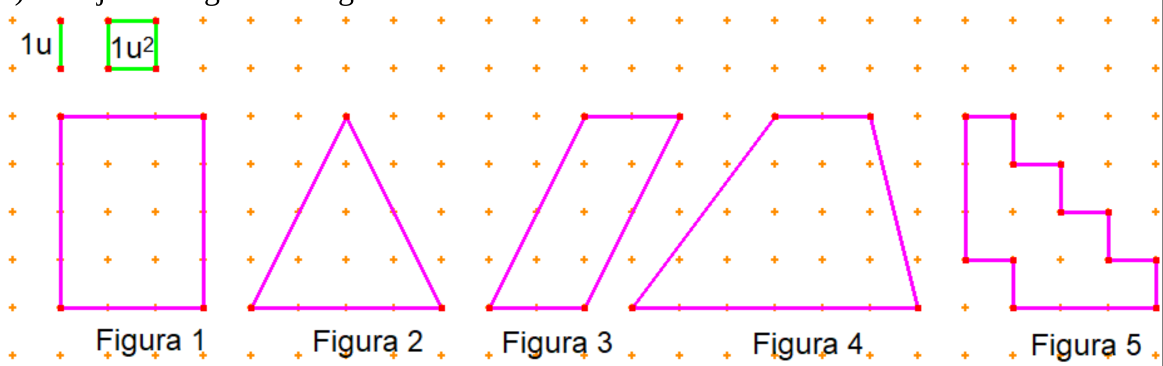
Nombre: Descomposición en unidades estándar.

Semana: 1 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Reconocer unidad cuadrada como patrón de medida bidimensional para el cálculo de Áreas.

Descripción general:

a) Dibujar las siguientes figuras en Cabri.



b) Descompone cada figura en unidades cuadradas.
c) Calcula el área de cada figura en unidades cuadradas, usando la rejilla como guía.
d) Usa la herramienta de medida de Área para calcular la superficie en cm^2 y compara con los resultados obtenidos en el literal anterior. ¿Qué puedes observar?
e) Realiza un ordenamiento de las figuras de mayor a menor área.

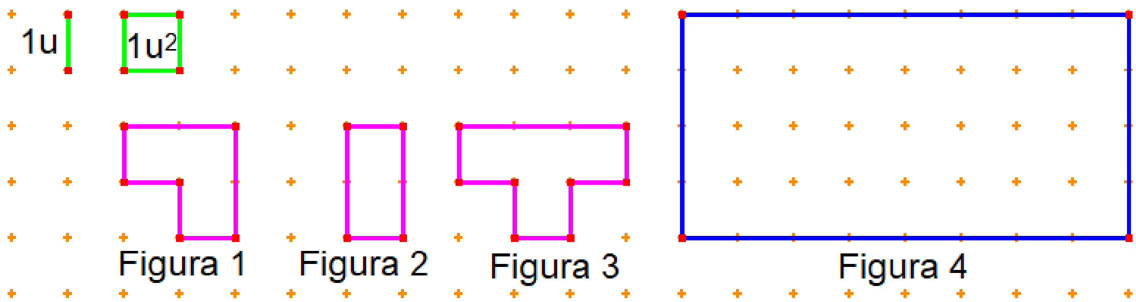
ACTIVIDAD 4: Tránsito entre los modos AE, SG y AA

Nombre: Descomposición en unidades no estándar.

Semana: 2 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Reconocer unidad cuadrada no estándar como patrón de medida bidimensional para el cálculo de Áreas.

Descripción general:
a) Dibujar las siguientes figuras en Cabri.



b) Descompón la figura 4 en unidades no estándar mostradas en las figuras 1, 2 y 3.
c) ¿Cuántas veces cabe cada figura no estándar en la figura 4?
d) Calcula el área de cada figura en unidades cuadradas.
f) Encuentra operaciones matemáticas para calcular el área de la figura 4 usando las áreas de las figuras no estándar.

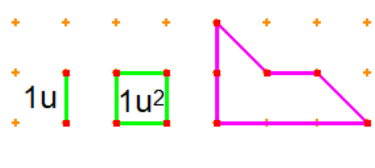
ACTIVIDAD 5: Tránsito entre el modos AE, AA y SG

Nombre: El Área como magnitud bidimensional.

Semana: 2 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Comprender el concepto de Área como magnitud bidimensional.

Descripción general:
a) Dada la siguiente figura, calcula su Área en unidades cuadradas.



b) Duplica la dimensión horizontal manteniendo constante la dimensión vertical, luego triplica la dimensión y luego cuadruplícala. Calcula el área obtenida en cada caso y tabula el resultado en la siguiente tabla.

	Figura original	**Base duplicada**	**Base triplicada**	**Base cuadruplicada**
Longitud base				
Área figura				

c) ¿Qué puedes concluir?
d) Repite el proceso multiplicando ambas dimensiones y nuevamente tabula los datos.

	Figura original	**Dimensiones duplicadas**	**Dimensiones triplicadas**	**Dimensiones cuadruplicadas**
Longitud base				
Longitud altura				
Área figura				

e) ¿Qué puedes concluir?
f) Según los resultados anteriores, al multiplicar por k las dimensiones de una figura irregular de área A, ¿cómo podrías calcular el área de la figura obtenida?

ACTIVIDAD 6: Tránsito entre los modos SG, AA y AE

Nombre: El Área por agotamiento.

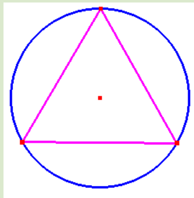
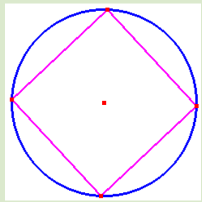
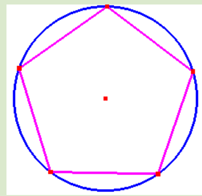
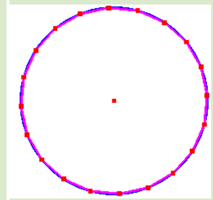
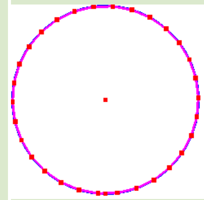
Semana: 2 **Tiempo:** 1 hora **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Descomponer figuras compuestas en figuras geométricas básicas y calcular su área y su perímetro.

Descripción general:

a) Dibuja en Cabri varios círculos de radio r y en cada uno de ellos inscribe polígonos regulares de 3, 4, 5, 20 y 30 lados. Usa la herramienta de medida de "área" para calcular el Área del círculo y de cada polígono. Ver figura.

Polígono inscrito de 3 lados	Polígono inscrito de 4 lados	Polígono inscrito de 5 lados	Polígono inscrito de 20 lados	Polígono inscrito de 30 lados

				
Área poligonal	Área poligonal	Área poligonal	Área poligonal	Área poligonal

¿Cuál polígono tiene su área más cercana a la del círculo?
¿Cómo puedes explicar lo sucedido?

ACTIVIDAD 7: Tránsito entre el modo SG y AA

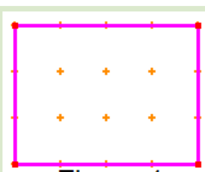
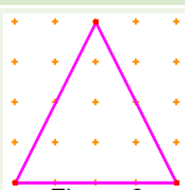
Nombre: Propiedades del Área y el perímetro.

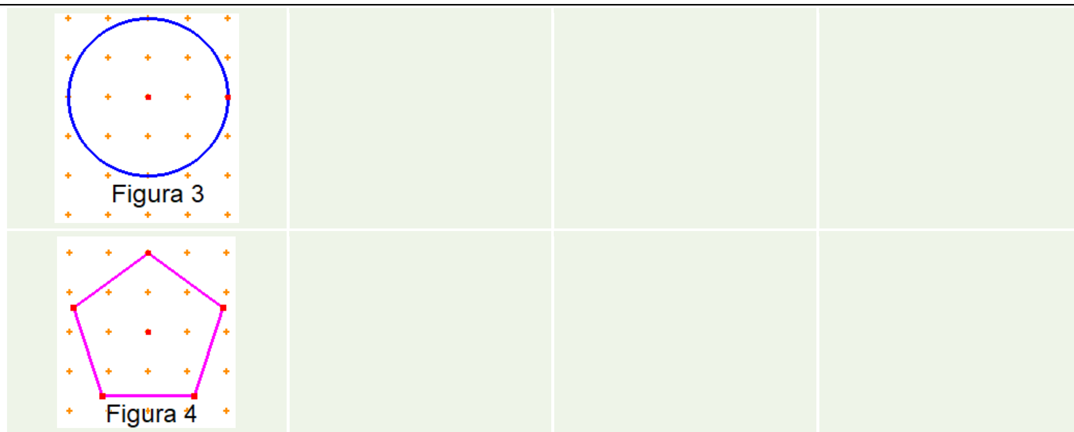
Semana: 3 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Reconocer las diferencias entre Área y perímetro.

Descripción general:

a) Descompone cada una de las siguientes figuras en partes iguales y con las partes arma otras 3 figuras. Mide el perímetro usando la herramienta de longitud en el software Cabri.

Figuras originales	**Recomposición 1**	**Recomposición 2**	**Recomposición 3**
 Figura 1			
 Figura 2			



¿Qué puedes afirmar del área respecto al perímetro?
b) Dibuja en Cabri 4 figuras que tengan el mismo perímetro y a cada una de ellas calcúlale el área. ¿Qué puedes observar?

ACTIVIDAD 8: Tránsito entre el modo SG, AA y AE

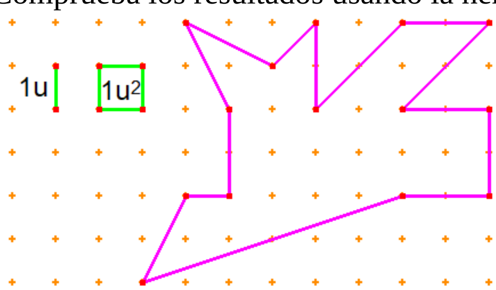
Nombre: Conservación del Área.

Semana: 3 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

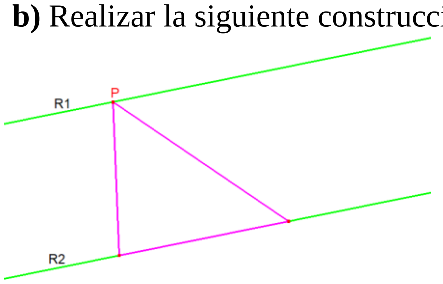
Objetivo: Comprobar que varias formas pueden tener igual Área y que el perímetro puede variar.

Descripción general:

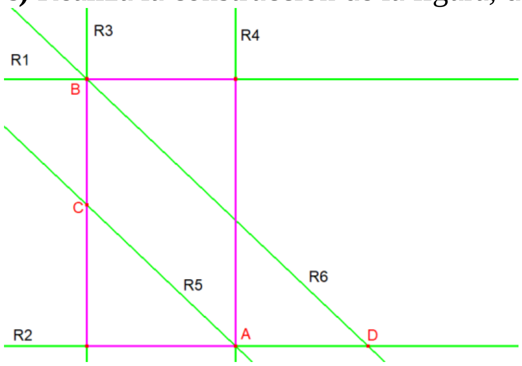
a) Construir en Cabri 3 figuras diferentes que tengan la misma Área que la figura dada. Comprueba los resultados usando la herramienta de medida de Área.



b) Realizar la siguiente construcción en Cabri, donde R1 y R2 son paralelas.



Mide el área y el perímetro del triángulo.
Al movilizar el punto P a lo largo de la recta R1 ¿Qué sucede con el área y el perímetro? Explica.
c) Realiza la construcción de la figura, donde, $R_1 // R_2$, $R_3 // R_4$, $R_5 // R_6$ y $R_2 \perp R_3$.



Mide el área y el perímetro del rectángulo. Al movilizar el punto A a lo largo de la recta R2 ¿Qué sucede con el área y el perímetro? Explica.

ACTIVIDAD 9: Tránsito entre el modo SG, AA y AE

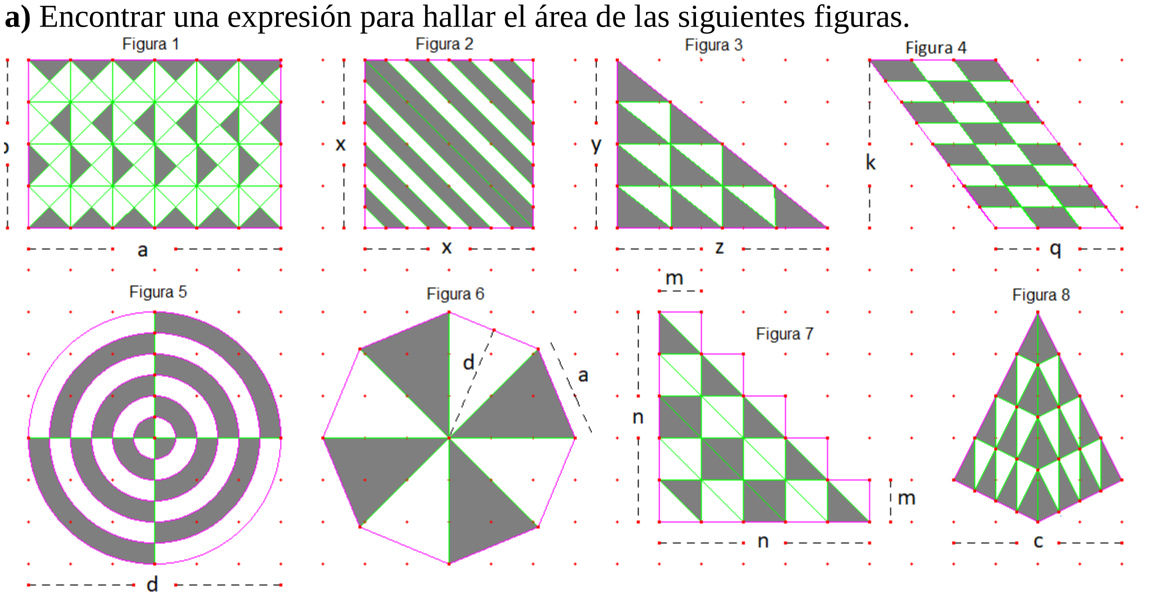
Nombre: Áreas con patrones.

Semana: 3 **Tiempo:** 1 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Identificar patrones geométricos para el cálculo de Áreas con formas básicas.

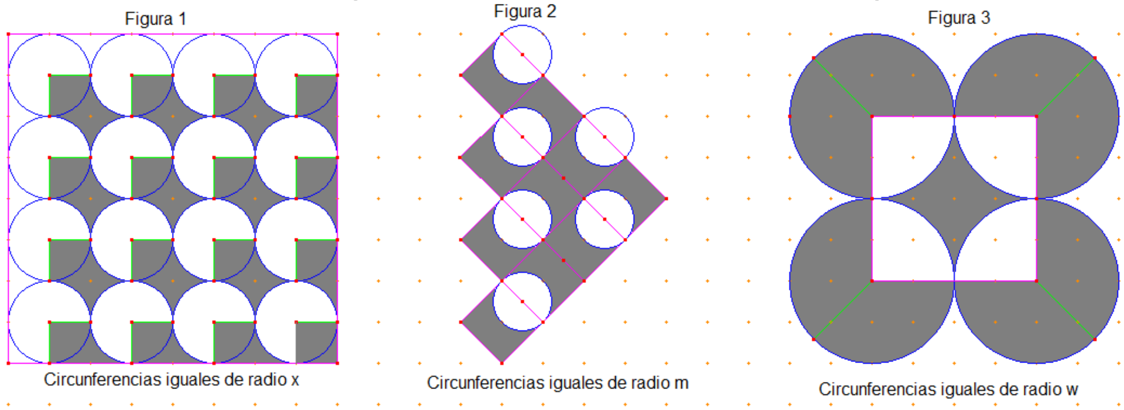
Descripción general:

a) Encontrar una expresión para hallar el área de las siguientes figuras.



b) Si en la figura 5 el valor de ***d*** es 7cm, ¿Cuál sería el valor del área sombreada?
c) ¿Cuánto podrían ser los valores de **k** y **q** en la figura 4 para que el área de la figura sombreada sea de 300 m^2?

d) Encontrar el área de la región sombreada en función del área de figuras individuales.



ACTIVIDAD 10: Tránsito entre el modo AE, SG y AA

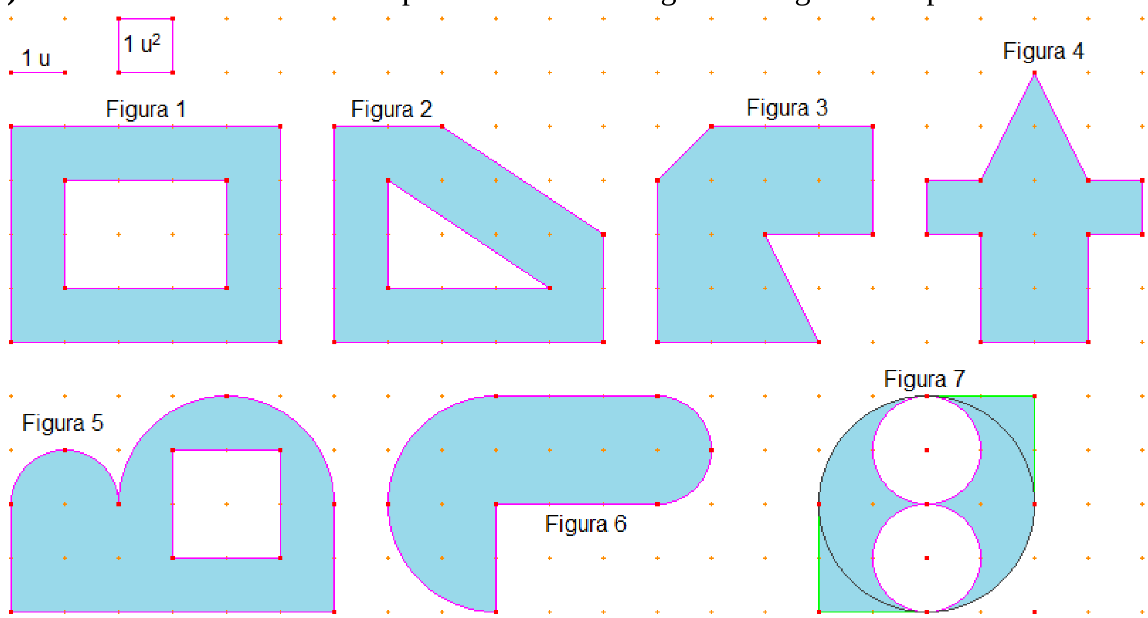
Nombre: Áreas de figuras compuestas.

Semana: 4 **Tiempo:** 2 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

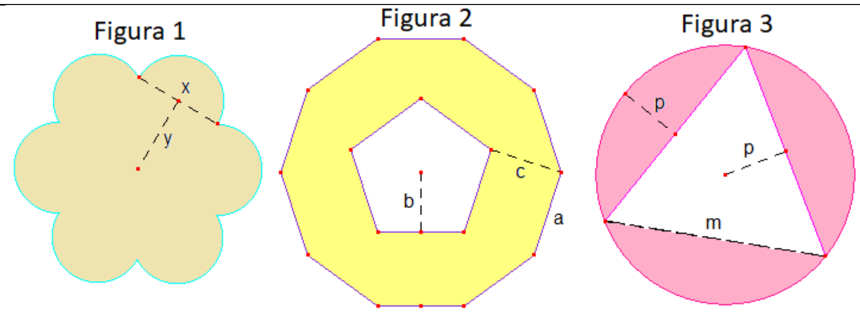
Objetivo: Comparación las áreas y perímetros de figuras geométricas.

Descripción general:

a) Encontrar un valor numérico para el área de las siguientes figuras compuestas.



b) Encontrar una expresión para calcular el área de las siguientes figuras compuestas.



ACTIVIDAD 11: Tránsito entre el modo AE, SG y AA

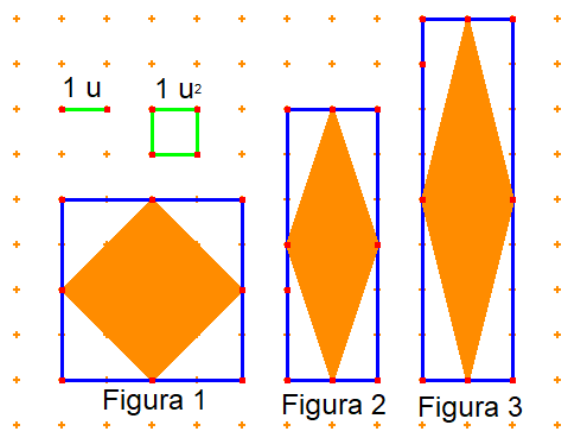
Nombre: Deducción de expresiones.

Semana: 4 **Tiempo:** 2 horas **Recursos:** Computador y software Cabri y cuaderno.

Objetivo: Deducir la expresión para calcular el Área de una elipse comparada vista como la proyección de un círculo.

Descripción general:

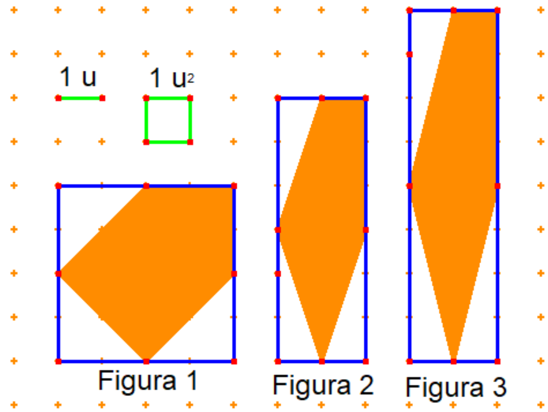
a) Calcular el área del rectángulo y de la figura inscrita en él, para cada una de las siguientes situaciones. Tabular los cálculos en la tabla.



	Área Rectángulo	**Área Rombo**	$\frac{A_{Rectángulo}}{A_{Rombo}}$
Fig. 1			
Fig. 2			
Fig. 3			

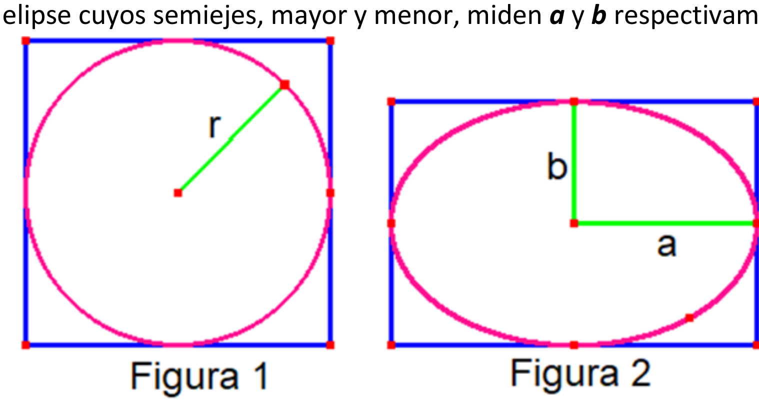
b) Qué puedes observar?, explica.

c) Basado en los resultados anteriores, calcular el área de un rombo cuyas diagonales miden ***p*** y ***q*** respectivamente.
d) Calcular el área del rectángulo y de la figura inscrita en él, para cada una de las siguientes situaciones. Tabular los cálculos en la tabla.



	Área Rectángulo	**Área Pentágono**	$\frac{A_{Rectángulo}}{A_{Pentágono}}$
Fig. 1			
Fig. 2			
Fig. 3			

e) Qué puedes observar?, explica.
f) Inscribe un pentágono con las mismas características de los anteriores y, calcula su área, si el rectángulo circunscrito tiene medidas de base ***a*** y altura ***b***.
g) Según los resultados anteriores, encuentra una expresión para calcular el área de la superficie interior de una elipse cuyos semiejes, mayor y menor, miden ***a*** y ***b*** respectivamente.



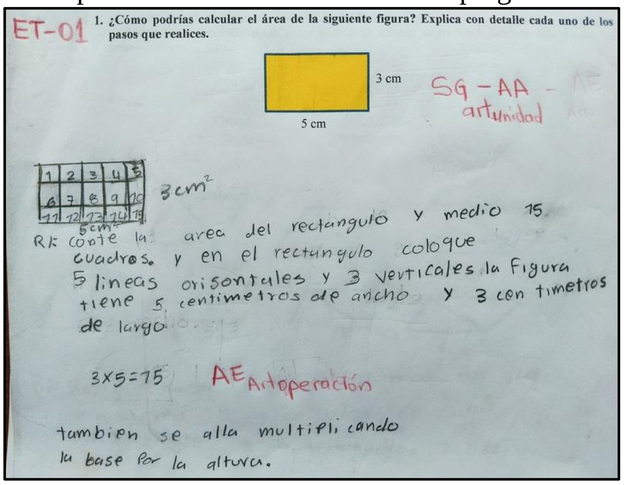
h) Desarrollar el ítem **a, d y g** en Cabri. Utilizar las herramientas de "Área" y "Calculadora" para comprobar los cálculos.

ANEXO 2:

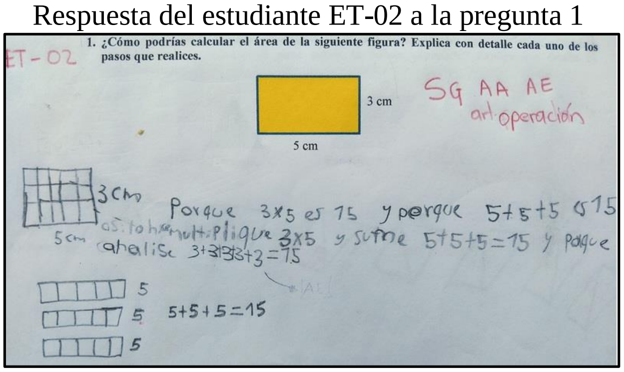
RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

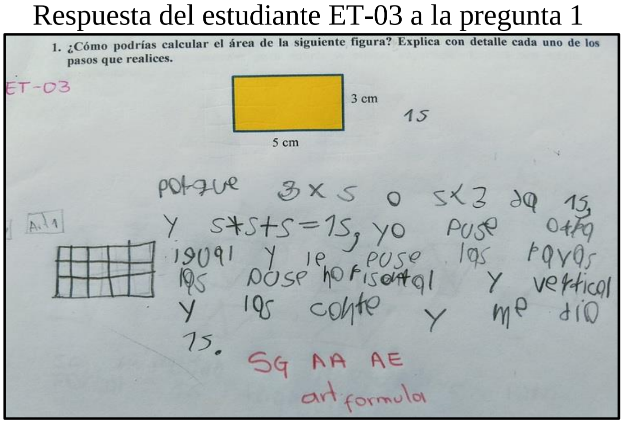
Respuesta del estudiante ET-01 a la pregunta 1



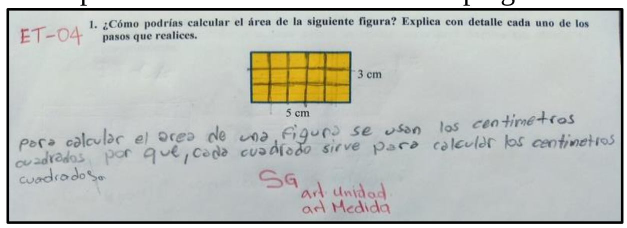
Respuesta del estudiante ET-02 a la pregunta 1



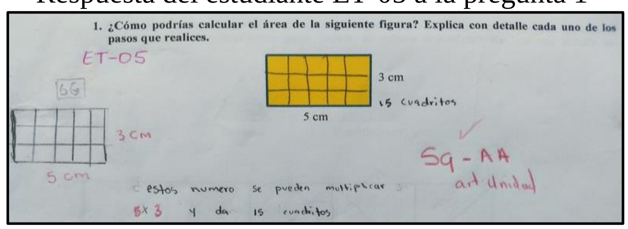
Respuesta del estudiante ET-03 a la pregunta 1



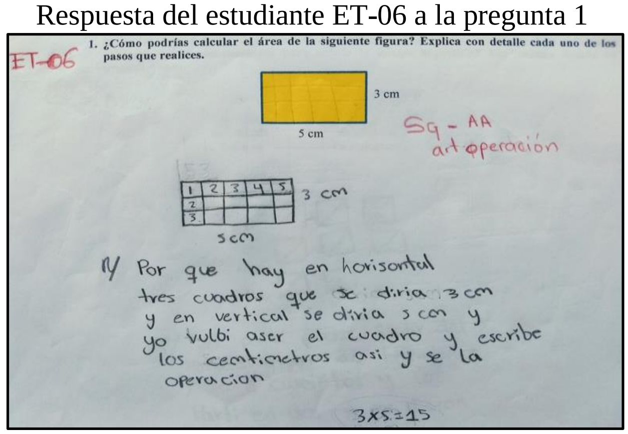
Respuesta del estudiante ET-04 a la pregunta 1



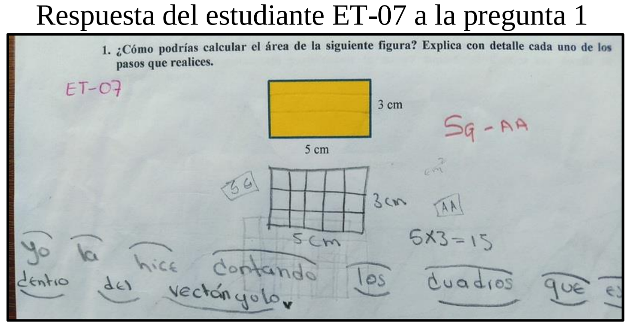
Respuesta del estudiante ET-05 a la pregunta 1



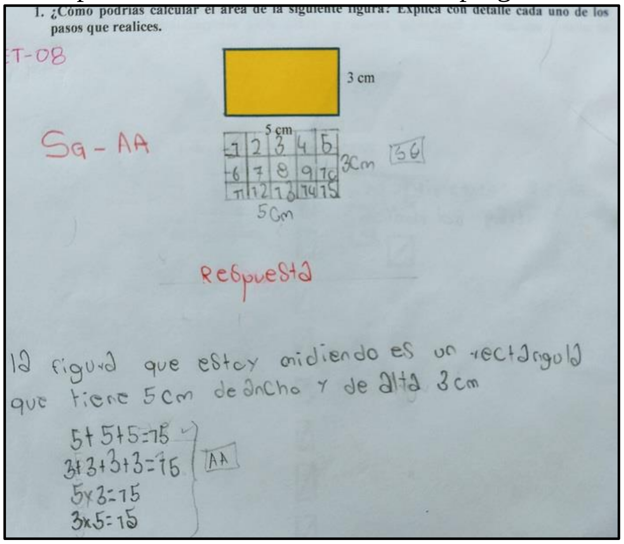
Respuesta del estudiante ET-06 a la pregunta 1



Respuesta del estudiante ET-07 a la pregunta 1



Respuesta del estudiante ET-08 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-08

3 cm

5 cm

Sg - AA

1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 13 14 15

3cm

5Cm

36

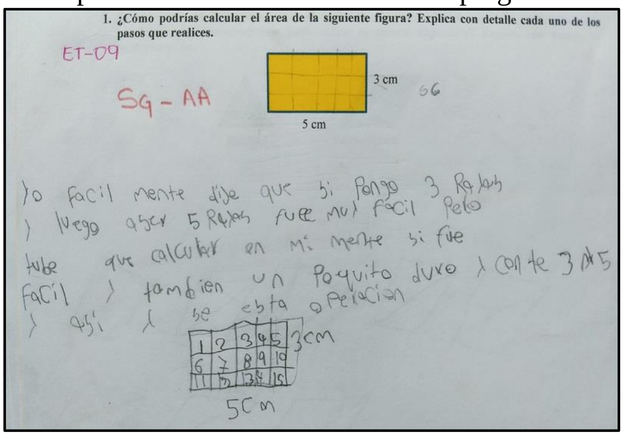
Respuesta

la figura que estoy midiendo es un rectangulo que tiene 5cm de ancho y de alta 3cm

5+5+5=15
3+3+3+3=15
5x3=15
3x5=15

AA

Respuesta del estudiante ET-09 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-09

Sg - AA

3 cm

5 cm

66

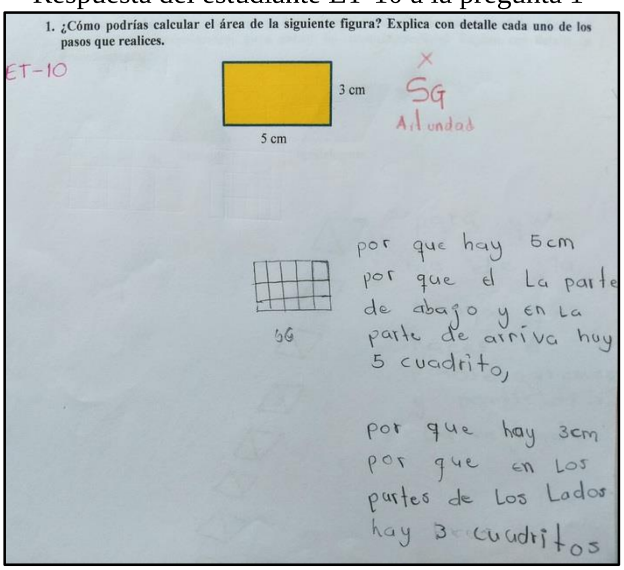
yo facil mente dije que si pongo 3 Rayas y luego aser 5 Rayas fue mui facil Pero tube que calcular en mi mente si fue facil y tambien un poquito duro y conte 3 y 5 y así y se esta operacion

1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 13 14 15

3cm

5Cm

Respuesta del estudiante ET-10 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-10

3 cm

5 cm

Sg

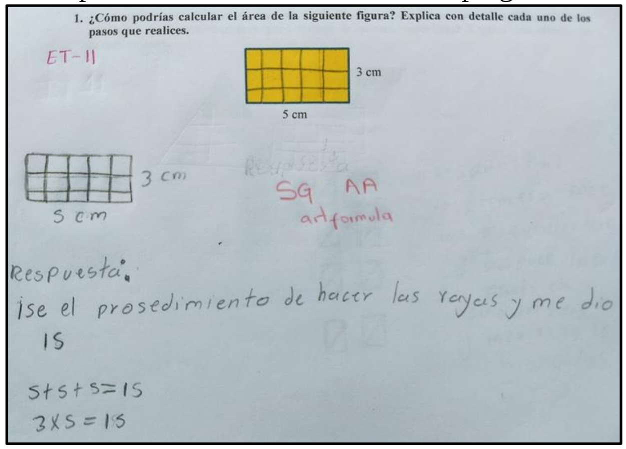
A.I. unidad

36

por que hay 5cm por que el La parte de abajo y en La parte de arriva hay 5 cuadrito,

por que hay 3cm por que en Los partes de Los Lados hay 3 cuadritos

Respuesta del estudiante ET-11 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-11

3 cm

5 cm

3 cm

5 cm

Sg AA

a.l fomula

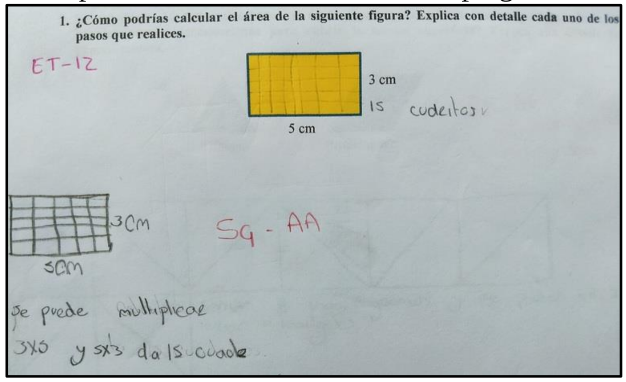
Respuesta:

ise el prosedimiento de hacer las rayas y me dio 15

5+5+5=15

3x5=15

Respuesta del estudiante ET-12 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-12

3 cm

15 cuadritos

5 cm

3Cm

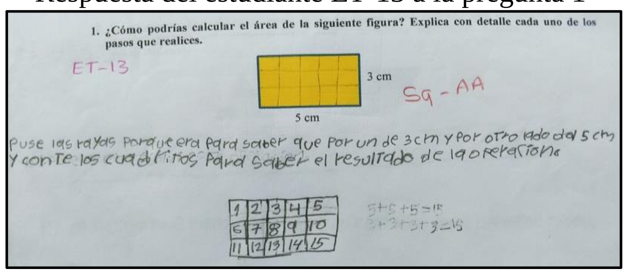
5Cm

Sg - AA

se puede multiplicar

3x5 y 5x3 da 15 cuadros

Respuesta del estudiante ET-13 a la pregunta 1


1. ¿Cómo podrías calcular el área de la siguiente figura? Explica con detalle cada uno de los pasos que realices.

ET-13

3 cm

Sg - AA

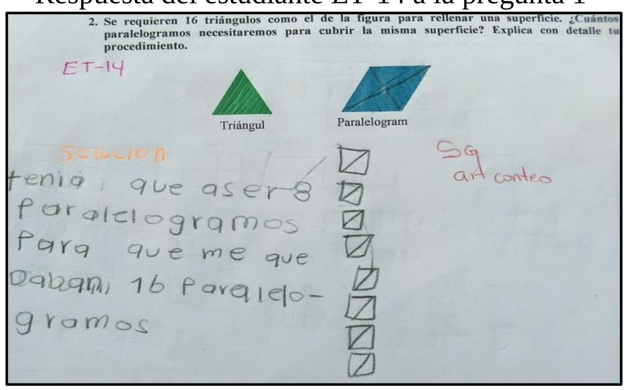
5 cm

puse las rayas porque era para saber que por un de 3cm y por otro lado de 5 cm y conte los cuadritos para saber el resultado de la operación

1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 13 14 15

5+5+5=15
3+3+3+3=15

Respuesta del estudiante ET-14 a la pregunta 1


2. Se requieren 16 triángulos como el de la figura para rellenar una superficie. ¿Cuántos paralelogramos necesitaremos para cubrir la misma superficie? Explica con detalle tu procedimiento.

ET-14

Triángul

Paralelogram

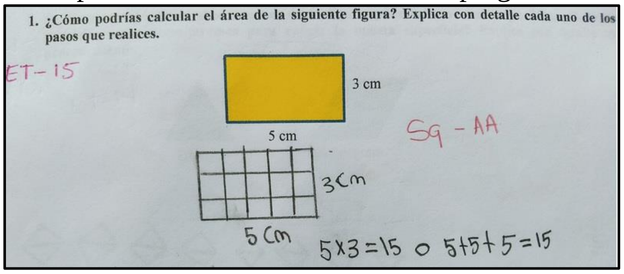
Solución

Sg

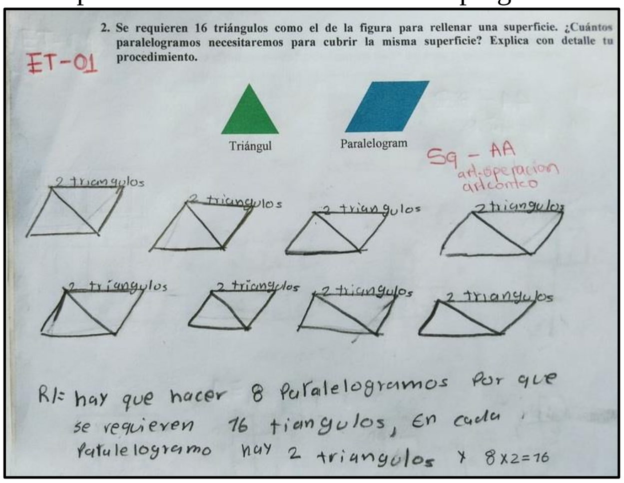
a.l conteo

tenia que aser 8 paralelogramos para que me que daban 16 paralelo- gramos

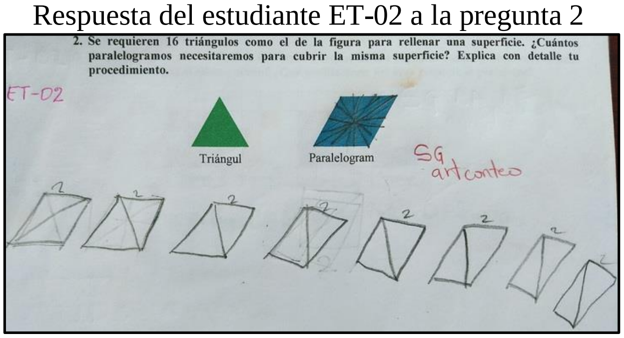
Respuesta del estudiante ET-15 a la pregunta 1



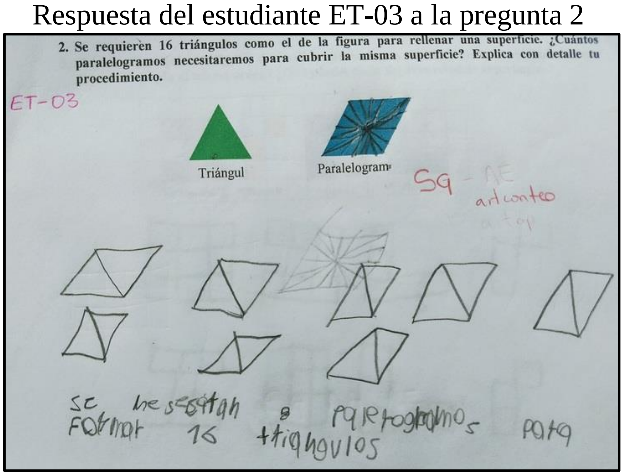
Respuesta del estudiante ET-01 a la pregunta 2



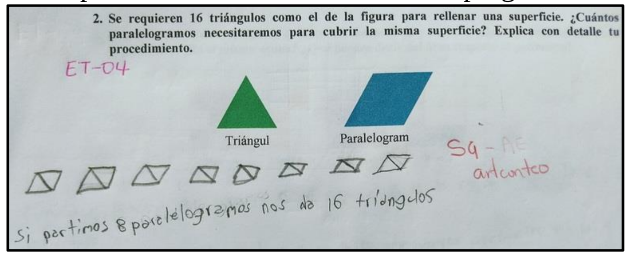
Respuesta del estudiante ET-02 a la pregunta 2



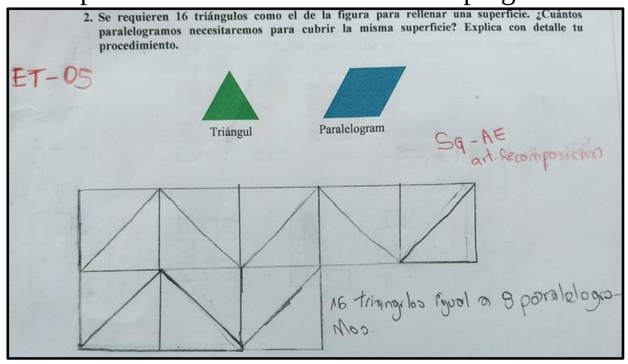
Respuesta del estudiante ET-03 a la pregunta 2



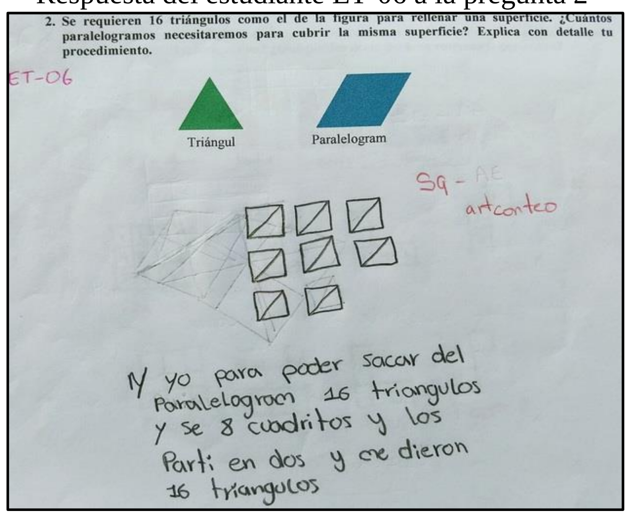
Respuesta del estudiante ET-04 a la pregunta 2



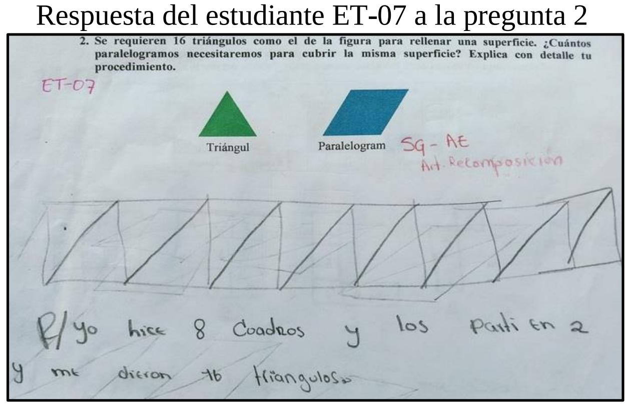
Respuesta del estudiante ET-05 a la pregunta 2



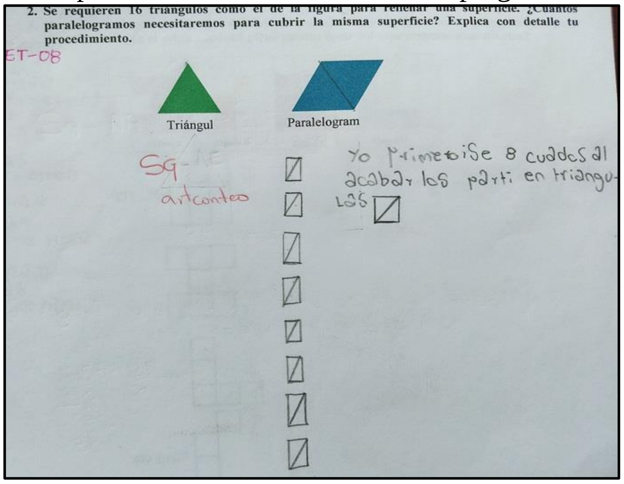
Respuesta del estudiante ET-06 a la pregunta 2



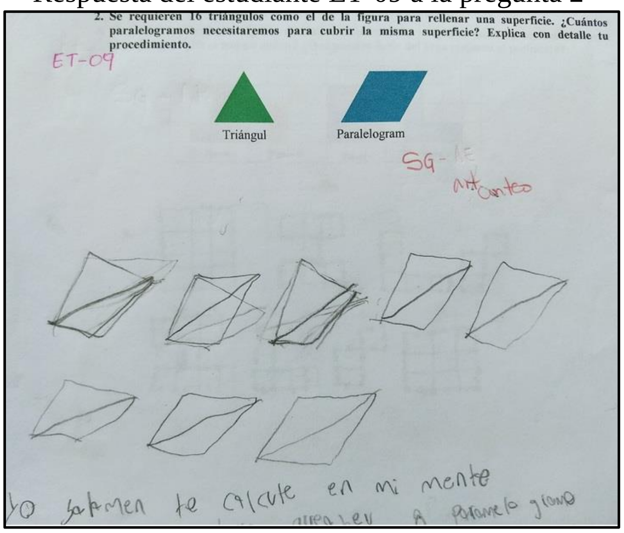
Respuesta del estudiante ET-07 a la pregunta 2



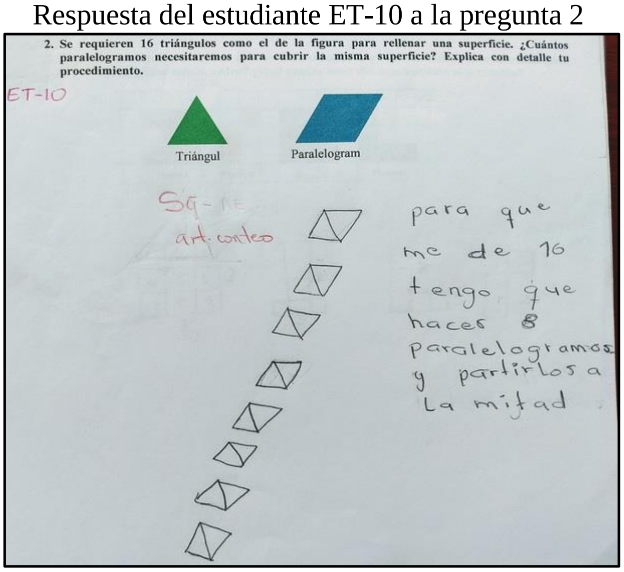
Respuesta del estudiante ET-08 a la pregunta 2



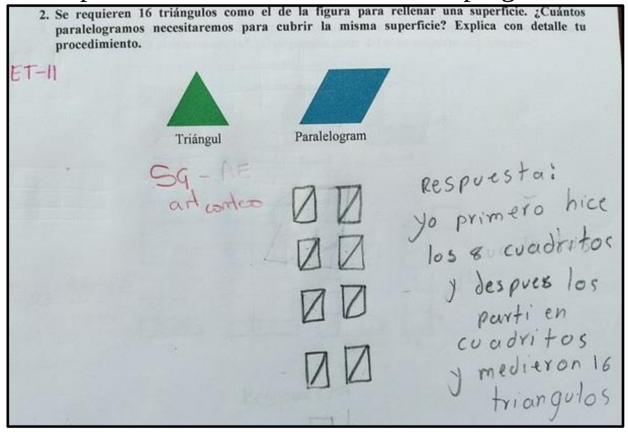
Respuesta del estudiante ET-09 a la pregunta 2



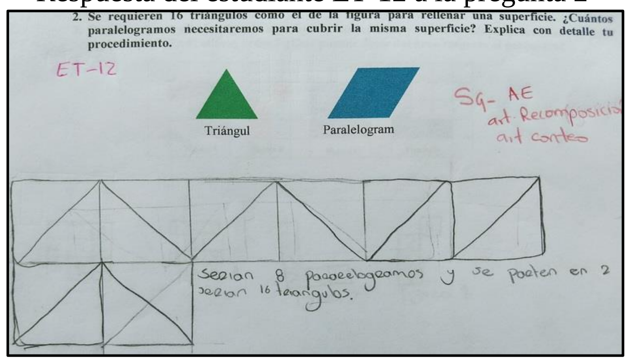
Respuesta del estudiante ET-10 a la pregunta 2



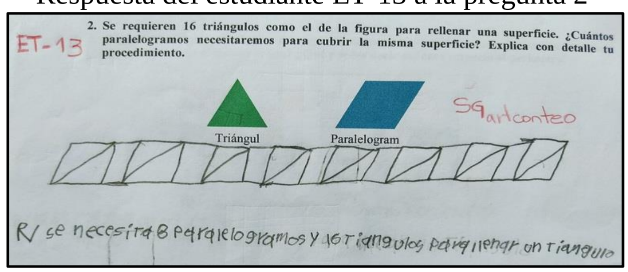
Respuesta del estudiante ET-11 a la pregunta 2



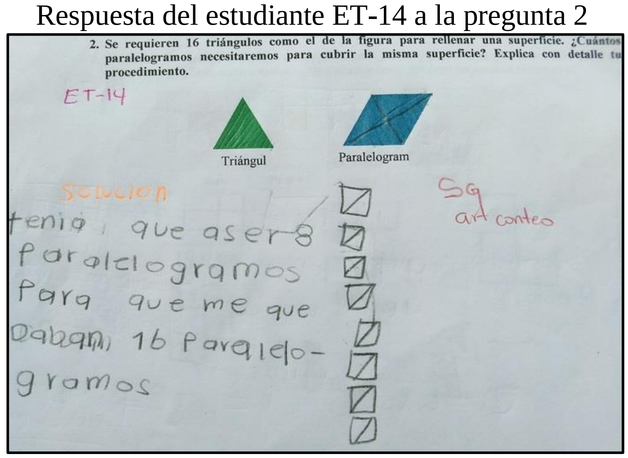
Respuesta del estudiante ET-12 a la pregunta 2



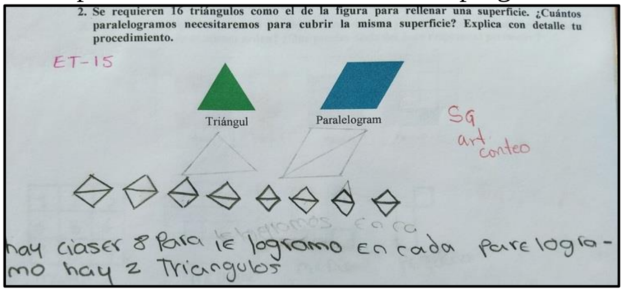
Respuesta del estudiante ET-13 a la pregunta 2



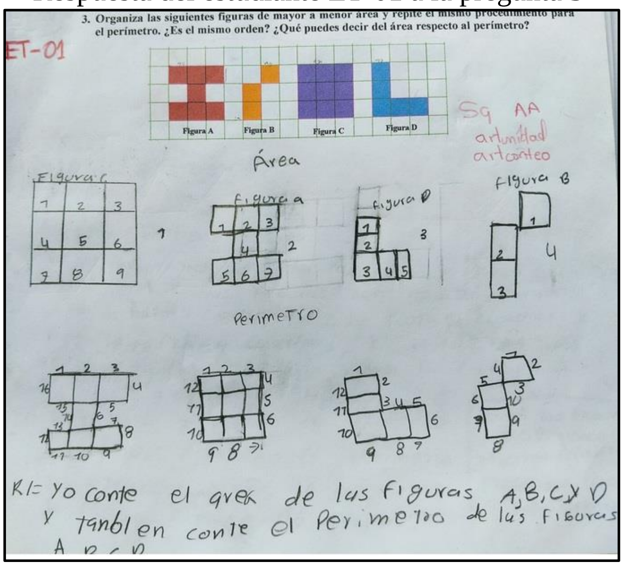
Respuesta del estudiante ET-14 a la pregunta 2



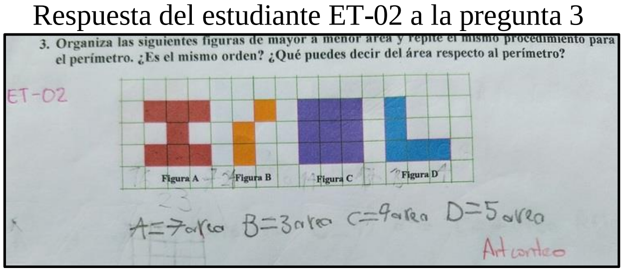
Respuesta del estudiante ET-15 a la pregunta 2



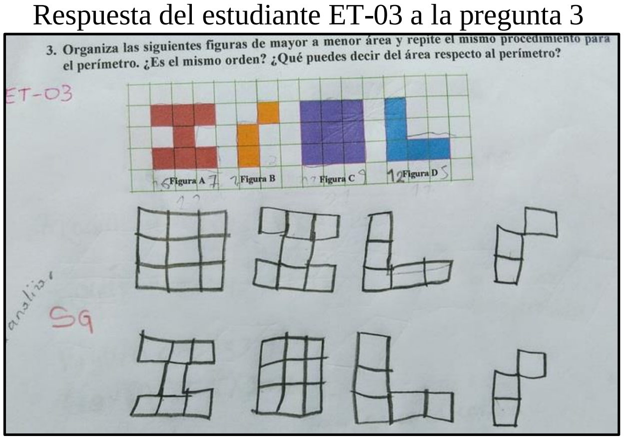
Respuesta del estudiante ET-01 a la pregunta 3



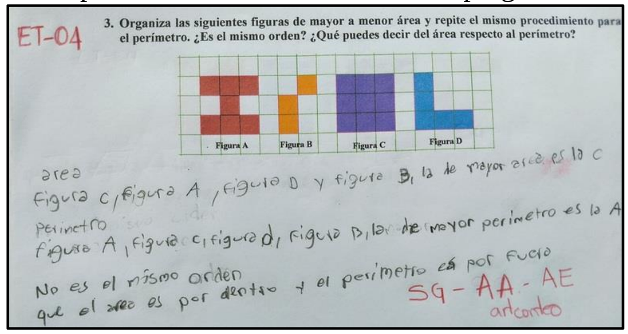
Respuesta del estudiante ET-02 a la pregunta 3



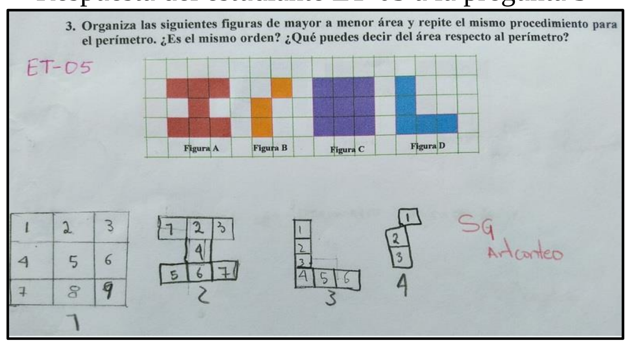
Respuesta del estudiante ET-03 a la pregunta 3



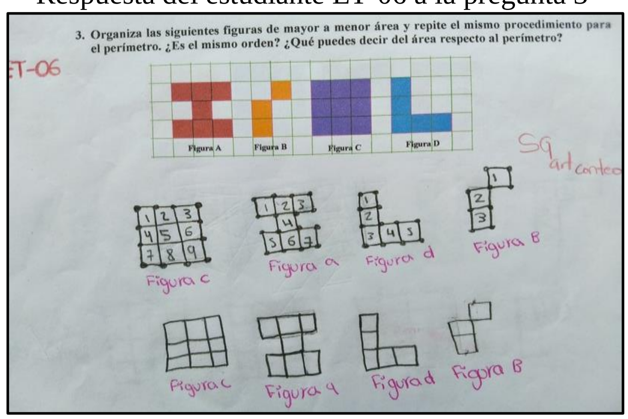
Respuesta del estudiante ET-04 a la pregunta 3



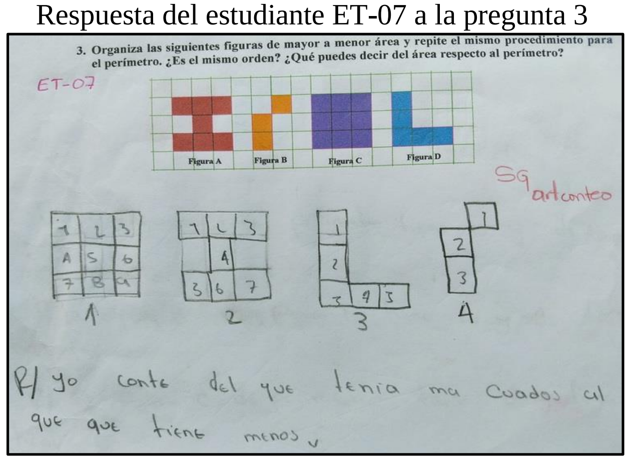
Respuesta del estudiante ET-05 a la pregunta 3



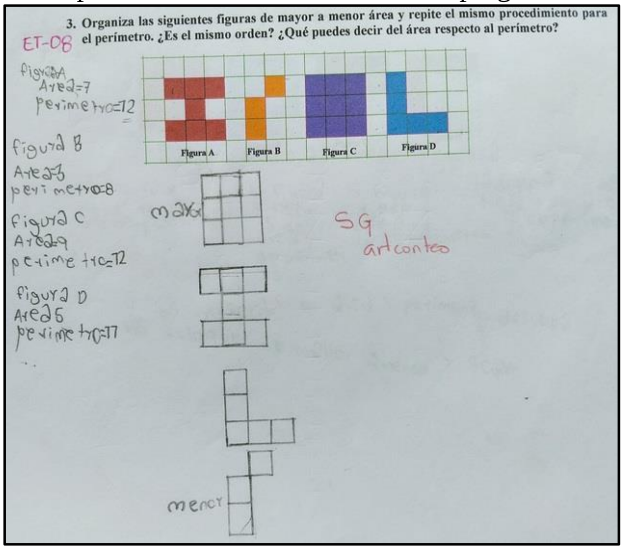
Respuesta del estudiante ET-06 a la pregunta 3



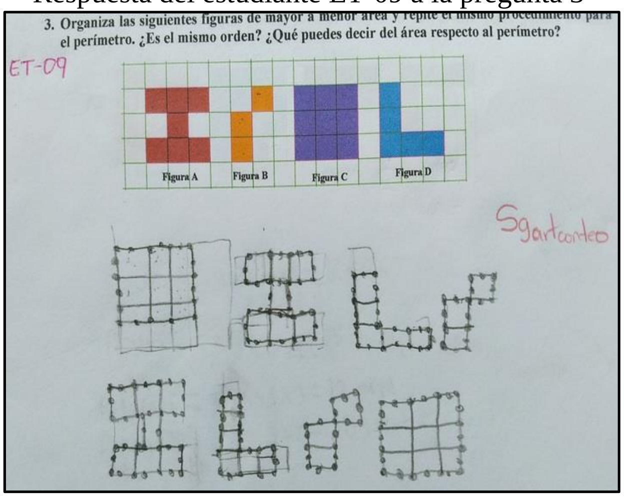
Respuesta del estudiante ET-07 a la pregunta 3



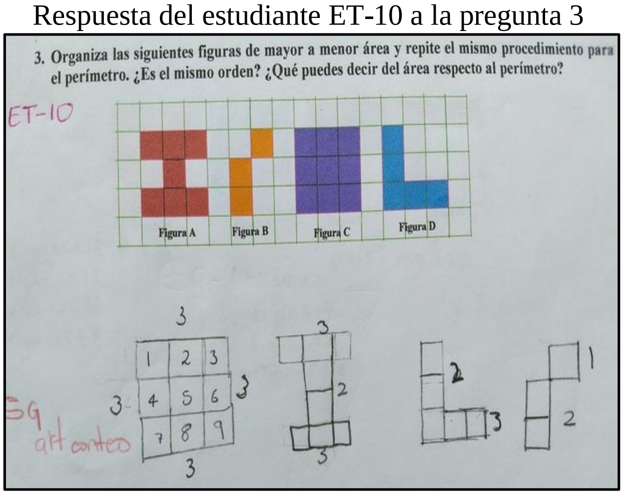
Respuesta del estudiante ET-08 a la pregunta 3



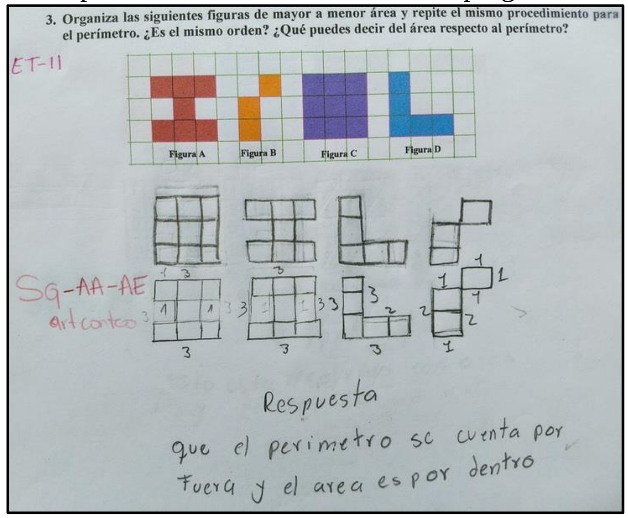
Respuesta del estudiante ET-09 a la pregunta 3



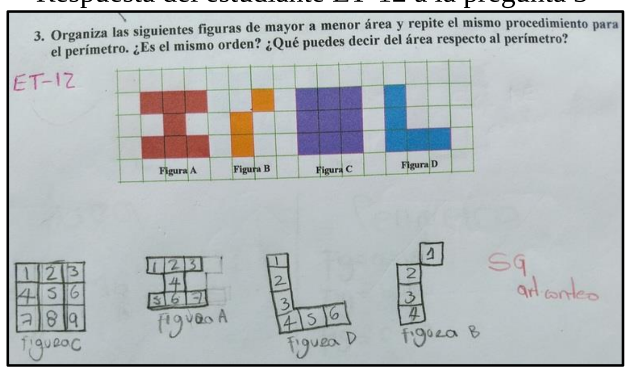
Respuesta del estudiante ET-10 a la pregunta 3



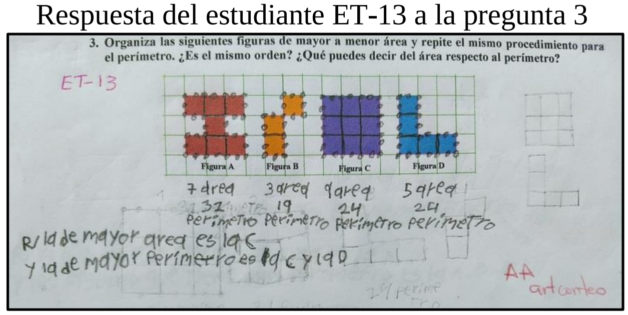
Respuesta del estudiante ET-11 a la pregunta 3



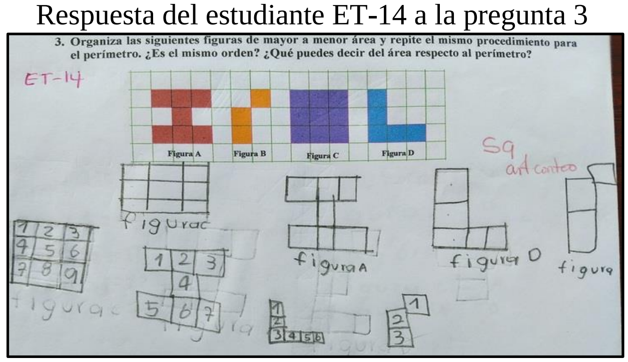
Respuesta del estudiante ET-12 a la pregunta 3



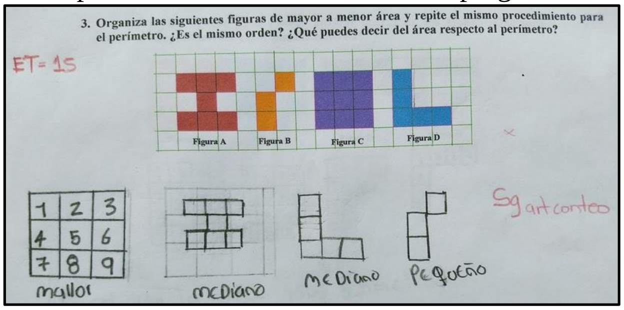
Respuesta del estudiante ET-13 a la pregunta 3



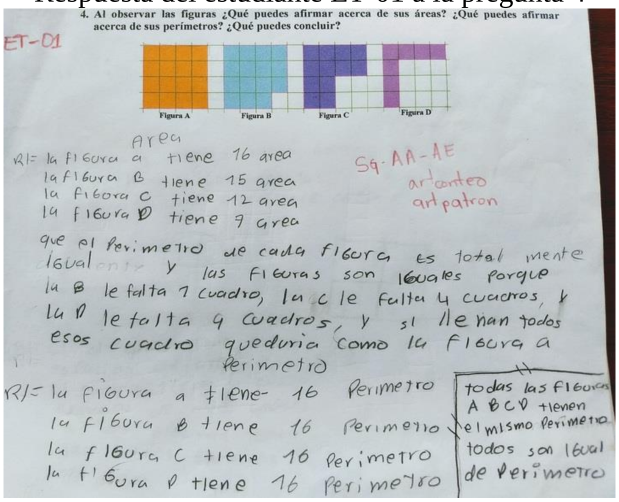
Respuesta del estudiante ET-14 a la pregunta 3



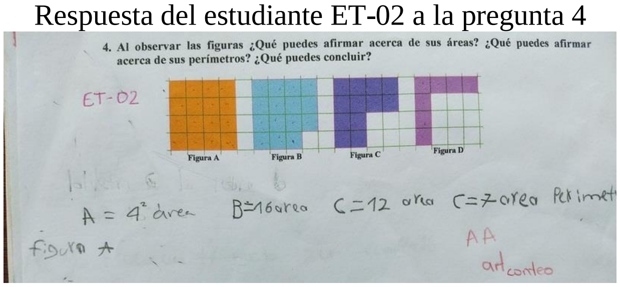
Respuesta del estudiante ET-15 a la pregunta 3



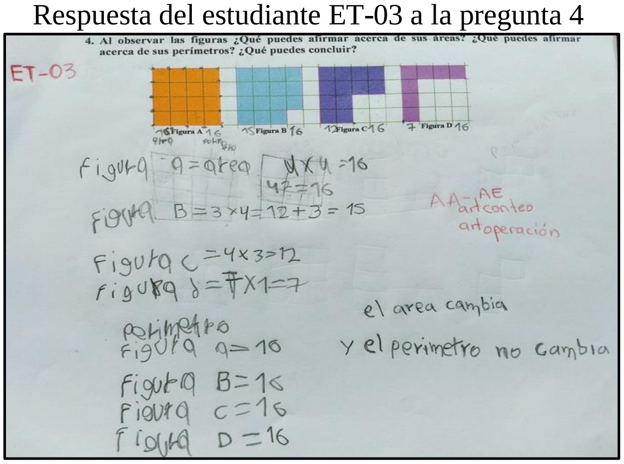
Respuesta del estudiante ET-01 a la pregunta 4



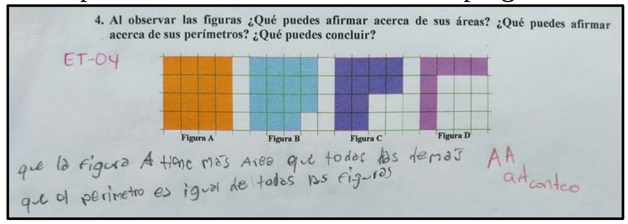
Respuesta del estudiante ET-02 a la pregunta 4



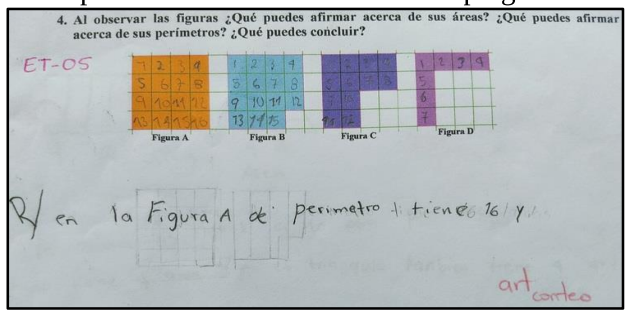
Respuesta del estudiante ET-03 a la pregunta 4



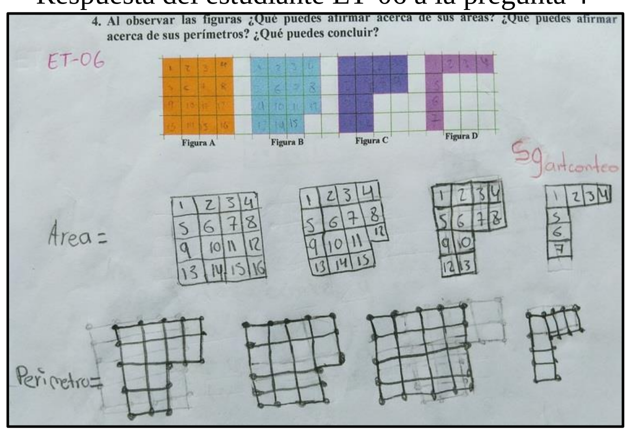
Respuesta del estudiante ET-04 a la pregunta 4



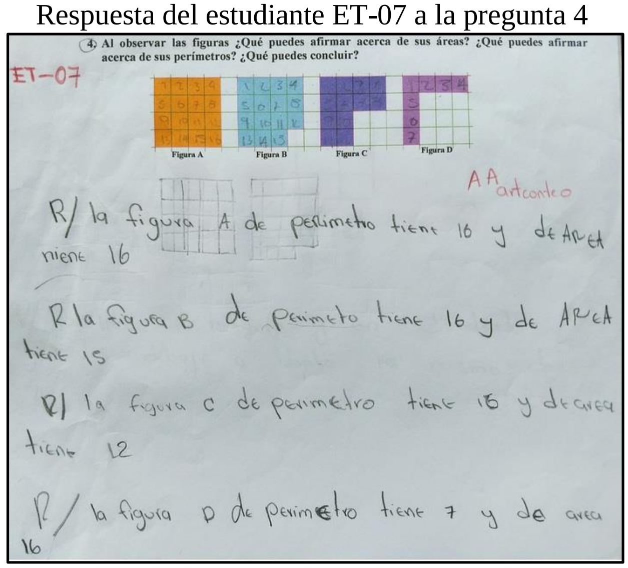
Respuesta del estudiante ET-05 a la pregunta 4



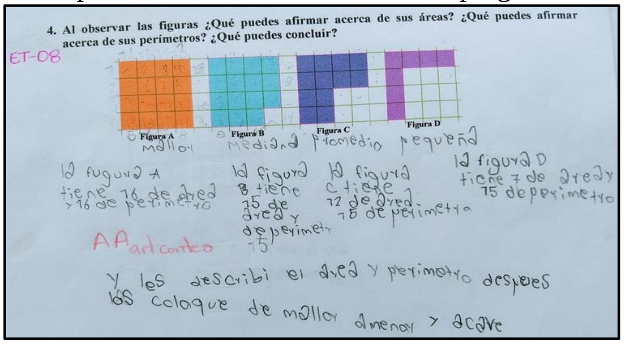
Respuesta del estudiante ET-06 a la pregunta 4



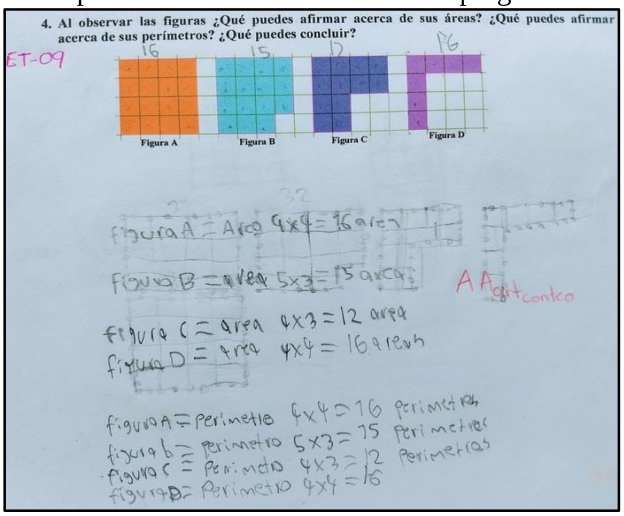
Respuesta del estudiante ET-07 a la pregunta 4



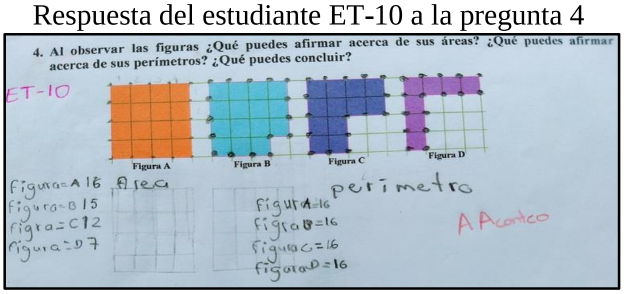
Respuesta del estudiante ET-08 a la pregunta 4



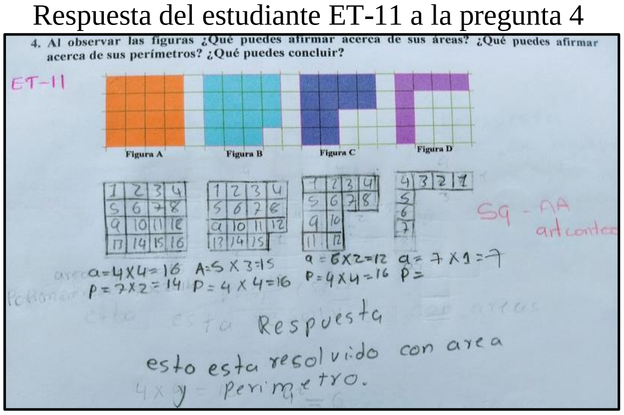
Respuesta del estudiante ET-09 a la pregunta 4



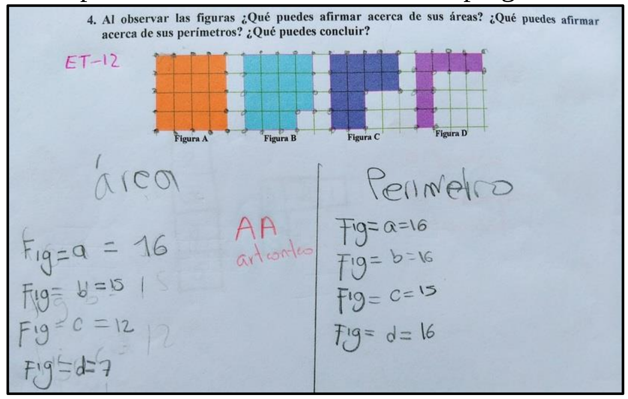
Respuesta del estudiante ET-10 a la pregunta 4



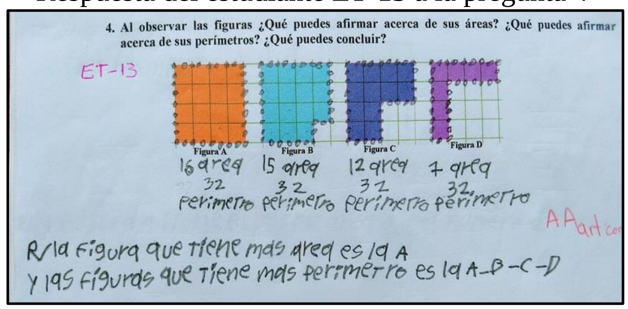
Respuesta del estudiante ET-11 a la pregunta 4



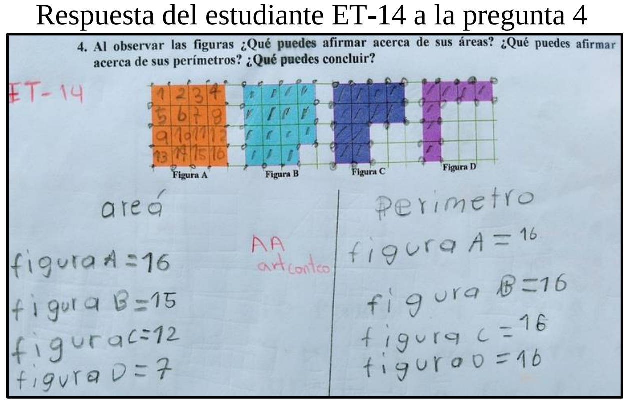
Respuesta del estudiante ET-12 a la pregunta 4



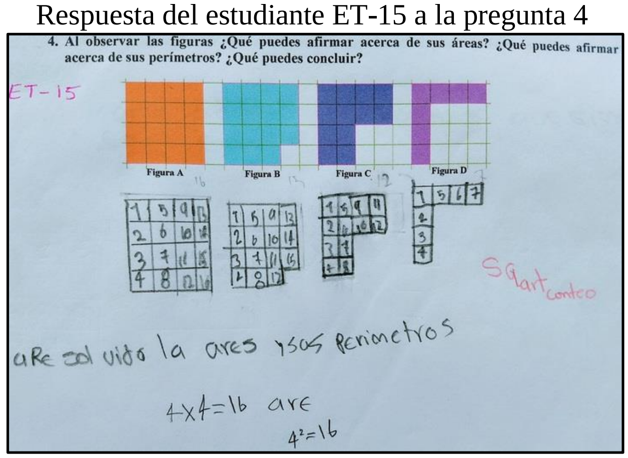
Respuesta del estudiante ET-13 a la pregunta 4



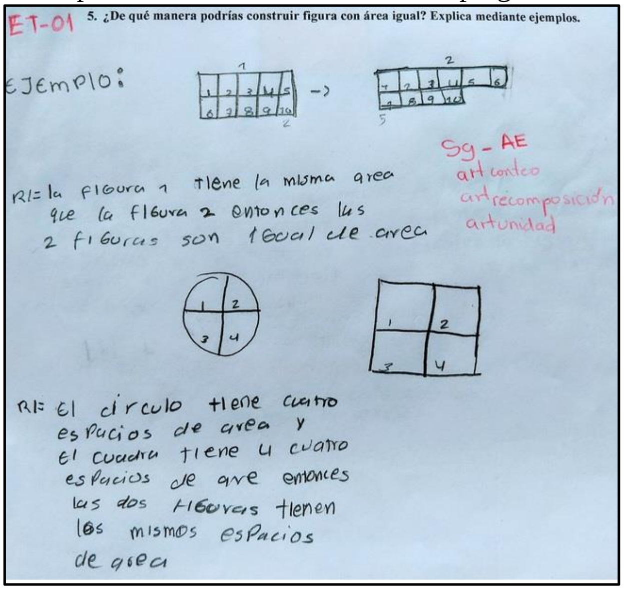
Respuesta del estudiante ET-14 a la pregunta 4



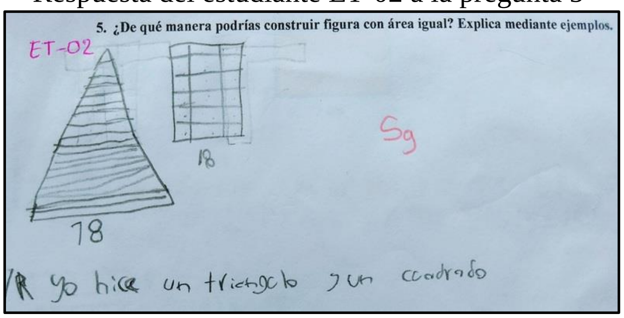
Respuesta del estudiante ET-15 a la pregunta 4



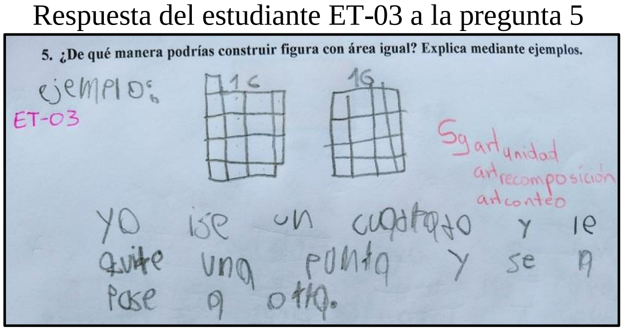
Respuesta del estudiante ET-01 a la pregunta 5



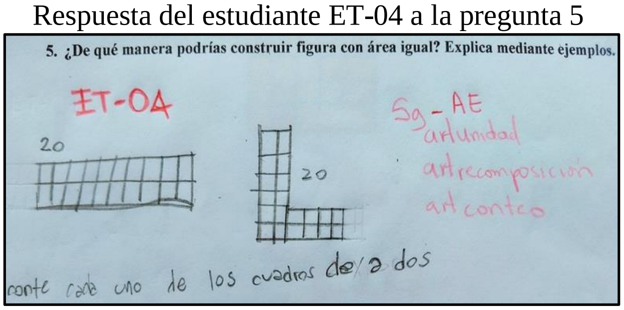
Respuesta del estudiante ET-02 a la pregunta 5



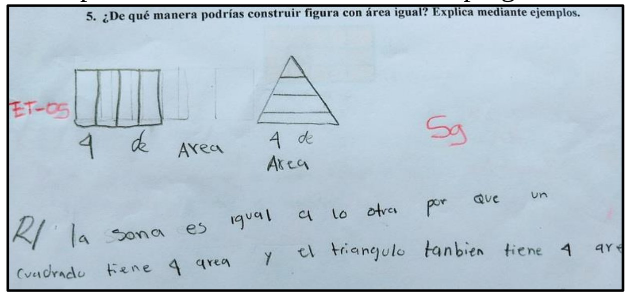
Respuesta del estudiante ET-03 a la pregunta 5



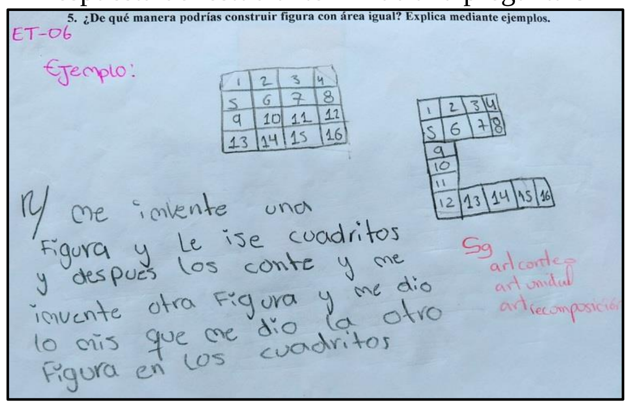
Respuesta del estudiante ET-04 a la pregunta 5



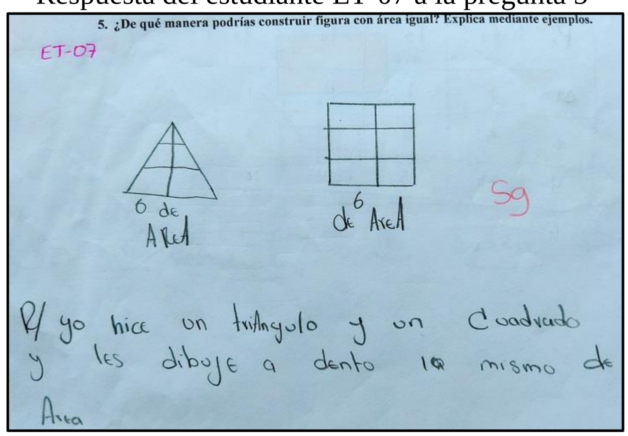
Respuesta del estudiante ET-05 a la pregunta 5



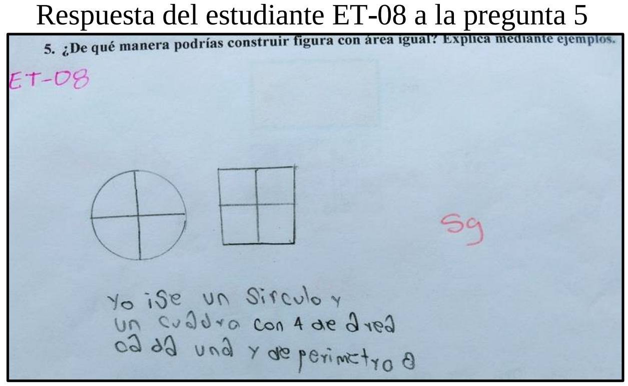
Respuesta del estudiante ET-06 a la pregunta 5



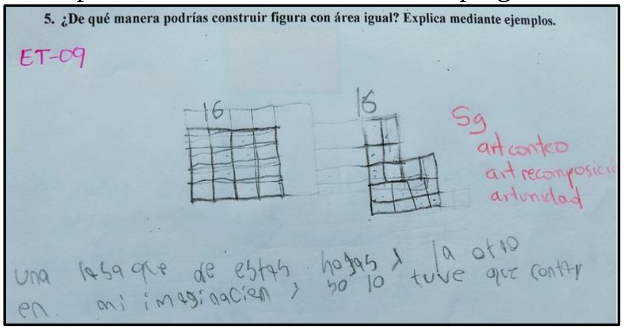
Respuesta del estudiante ET-07 a la pregunta 5



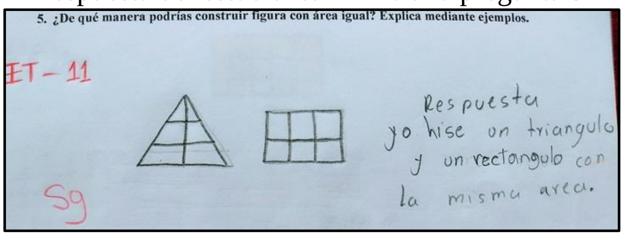
Respuesta del estudiante ET-08 a la pregunta 5



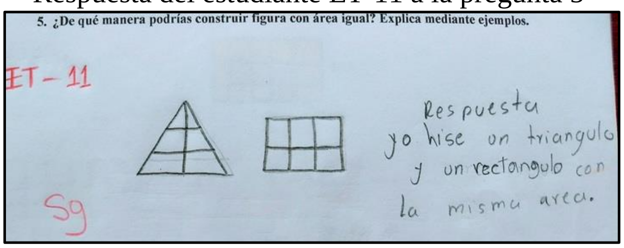
Respuesta del estudiante ET-09 a la pregunta 5



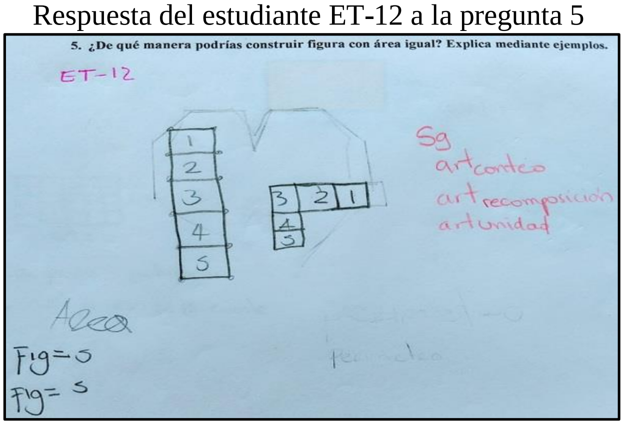
Respuesta del estudiante ET-10 a la pregunta 5



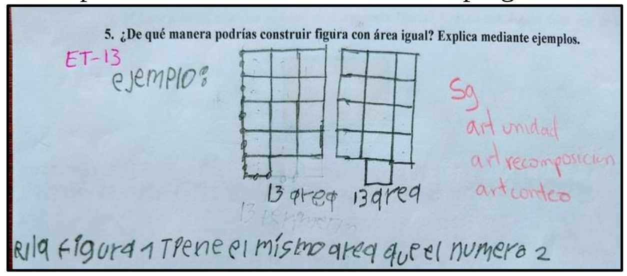
Respuesta del estudiante ET-11 a la pregunta 5



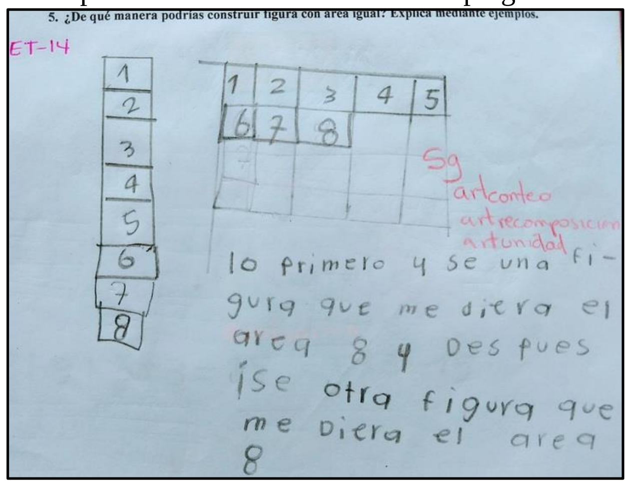
Respuesta del estudiante ET-12 a la pregunta 5



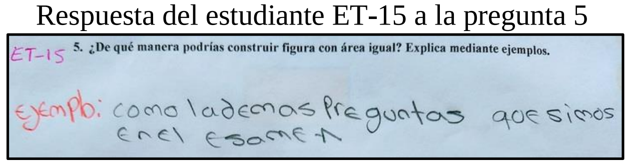
Respuesta del estudiante ET-13 a la pregunta 5



Respuesta del estudiante ET-14 a la pregunta 5

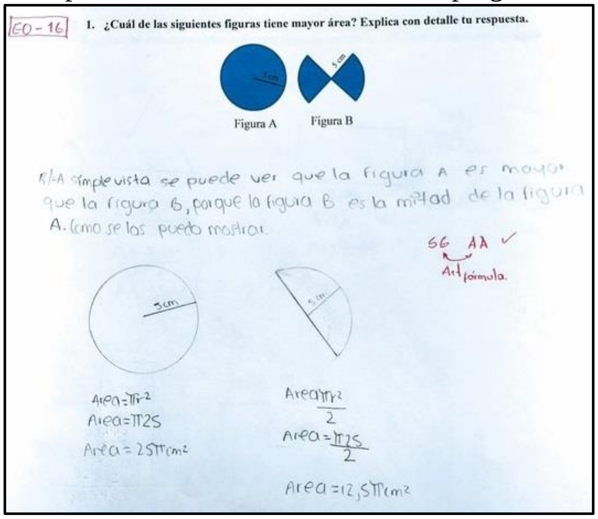


Respuesta del estudiante ET-15 a la pregunta 5

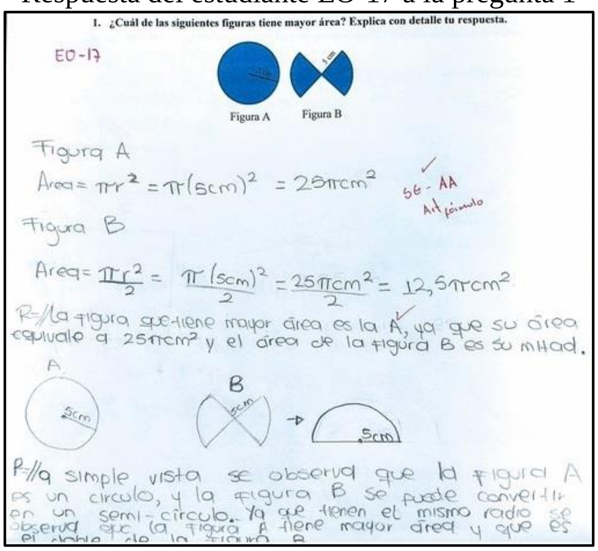


RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DEL CASO 1

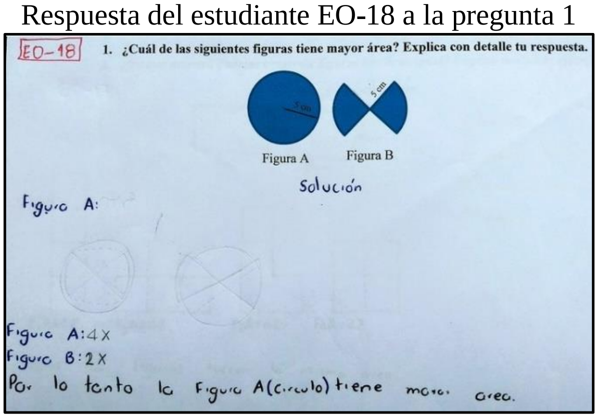
Respuesta del estudiante EO-16 a la pregunta 1



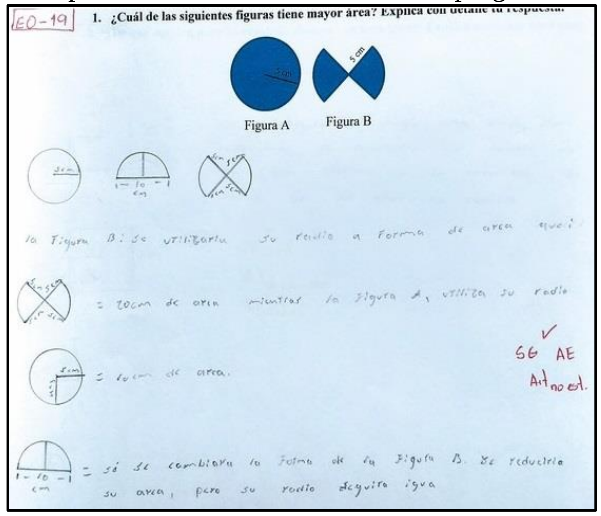
Respuesta del estudiante EO-17 a la pregunta 1



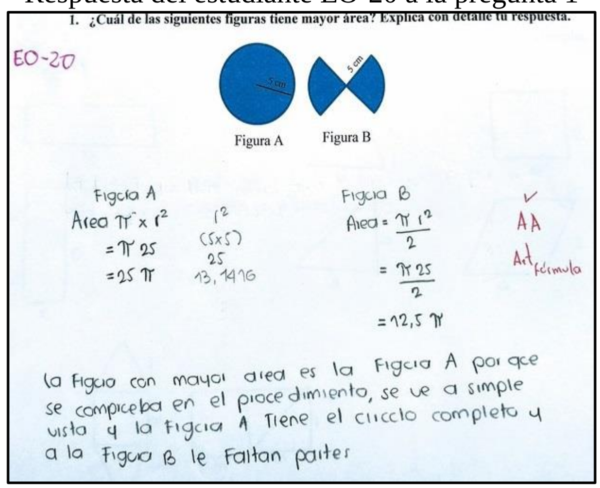
Respuesta del estudiante EO-18 a la pregunta 1



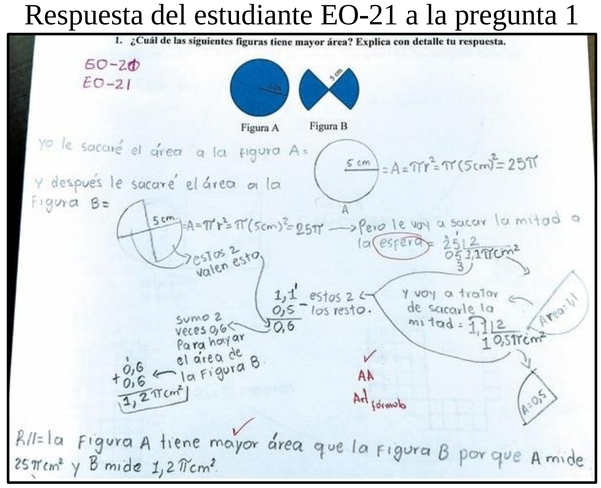
Respuesta del estudiante EO-19 a la pregunta 1



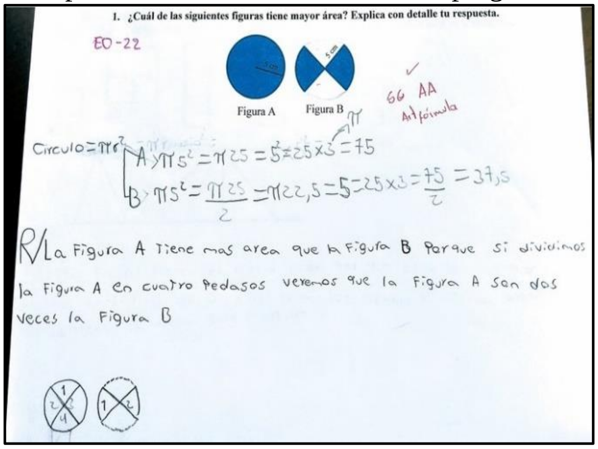
Respuesta del estudiante EO-20 a la pregunta 1



Respuesta del estudiante EO-21 a la pregunta 1



Respuesta del estudiante EO-22 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-22

Figura A Figura B

66 AA

A.t fórmula

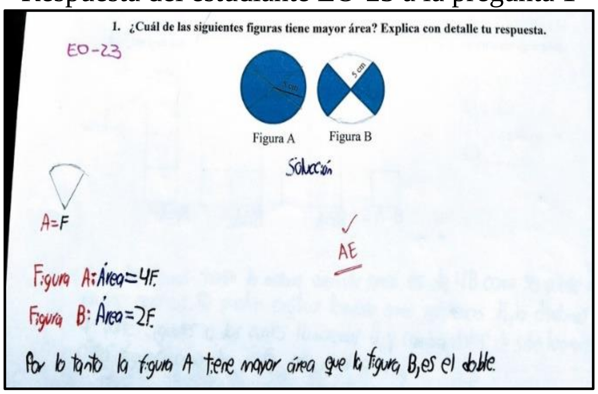
Circulo = πr^2

A > $\pi 5^2 = \pi 25 = 5^2 = 25 \times 3 = 75$

B > $\pi 5^2 = \frac{\pi 25}{2} = \pi 22{,}5 = 5 = 25 \times 3 = \frac{75}{2} = 37{,}5$

R/ La Figura A Tiene mas area que la Figura B Porque si dividimos la Figura A en cuatro pedasos veremos que la Figura A son dos veces la Figura B

Respuesta del estudiante EO-23 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-23

Figura A Figura B

Solución

A=F

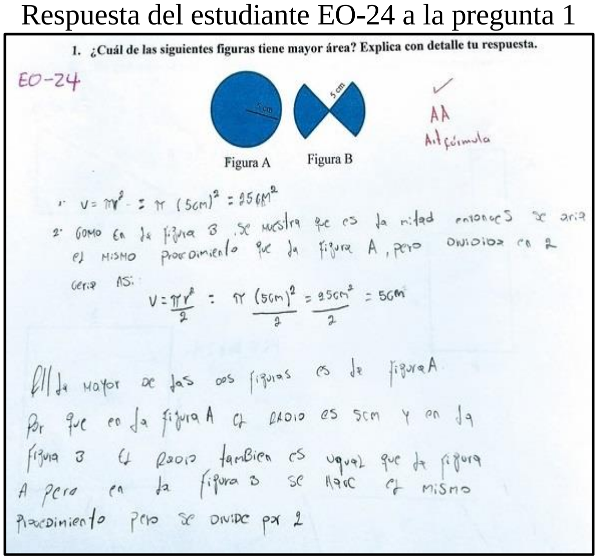
AE

Figura A: Área = 4F.

Figura B: Área = 2F.

Por lo tanto la figura A tiene mayor área que la figura B, es el doble.

Respuesta del estudiante EO-24 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-24

Figura A Figura B

AA

A.t fórmula

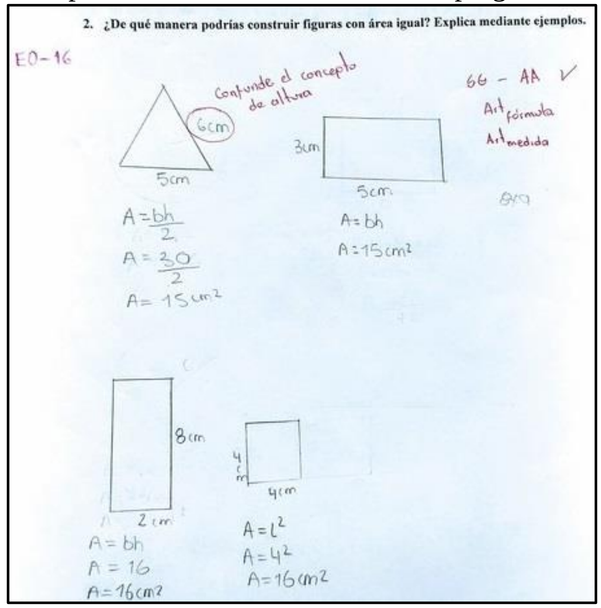
1. $V = \pi r^2 = \pi (5cm)^2 = 25cm^2$

2. Como en la figura B se muestra que es la mitad entonces se aria el mismo procedimiento que la figura A, pero dividido en 2 seria así:

$V = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (5cm)^2}{2} = \frac{25cm^2}{2} = 5cm$

R// la mayor de las dos figuras es la figura A por que en la figura A el radio es 5cm y en la figura B el radio también es uqual que la figura A pero en la figura B se hace el mismo procedimiento pero se divide por 2

Respuesta del estudiante EO-16 a la pregunta 2


2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.

EO-16

Confunde el concepto de altura

66 - AA

A.t fórmula

A.t medida

6cm

5cm

3cm

5cm

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{30}{2}$

$A = 15cm^2$

$A = bh$

$A = 15cm^2$

8cm

2cm

4cm

4cm

$A = bh$

$A = 16$

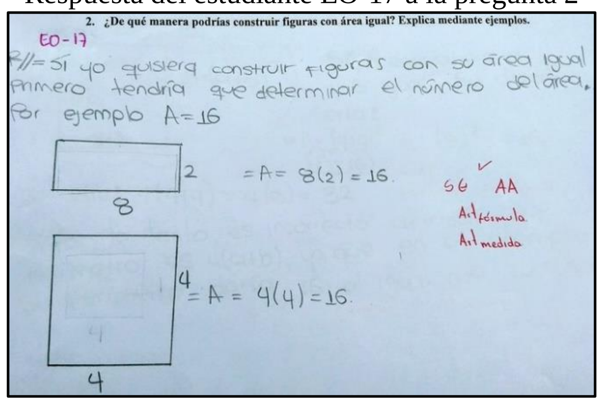
$A = 16cm^2$

$A = l^2$

$A = 4^2$

$A = 16cm^2$

Respuesta del estudiante EO-17 a la pregunta 2


2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.

EO-17

R//= Si yo quisiera construir figuras con su área igual primero tendría que determinar el número del área, Por ejemplo A=16

2

8

$= A = 8(2) = 16$

56 AA

A.t fórmula

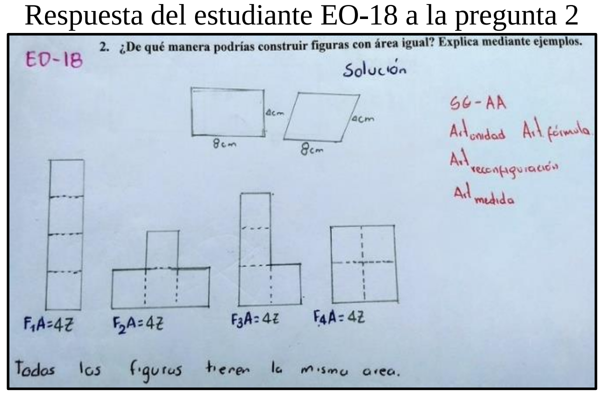
A.t medida

4

4

$= A = 4(4) = 16$

Respuesta del estudiante EO-18 a la pregunta 2


2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.

EO-18

Solución

56 - AA

A.t unidad A.t fórmula

A.t reconfiguración

A.t medida

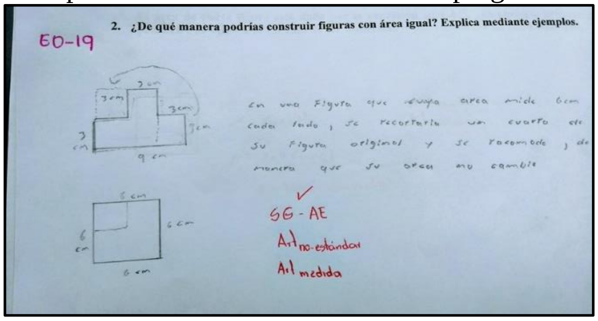
6cm 6cm

8cm 8cm

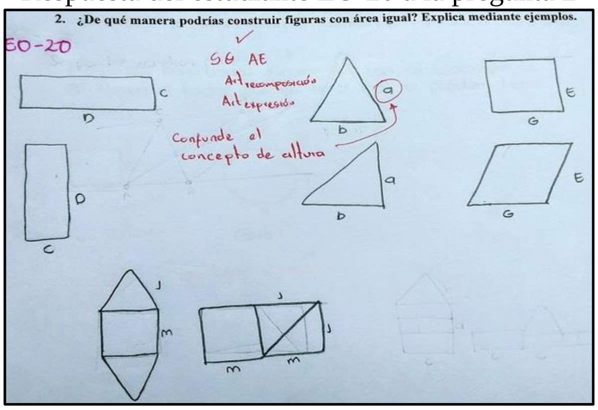
$F_1 A = 42$ $F_2 A = 42$ $F_3 A = 42$ $F_4 A = 42$

Todas las figuras tienen la misma area.

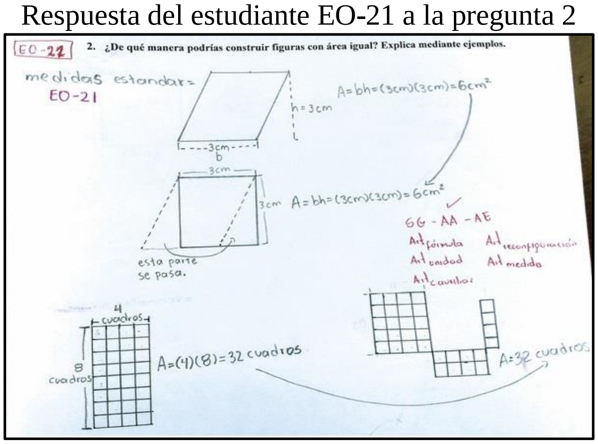
Respuesta del estudiante EO-19 a la pregunta 2



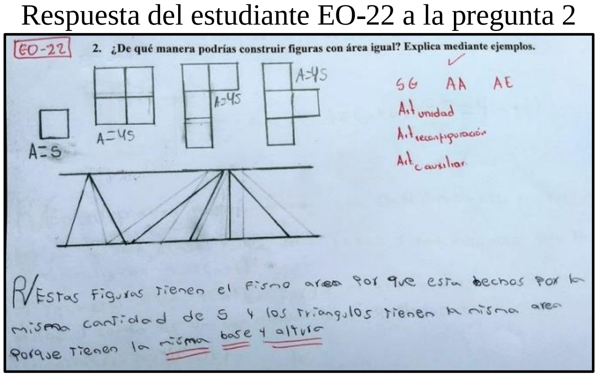
Respuesta del estudiante EO-20 a la pregunta 2



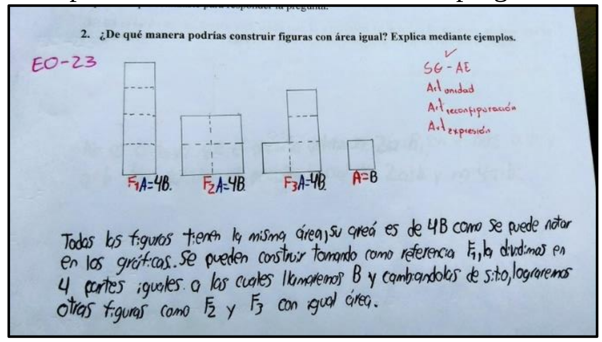
Respuesta del estudiante EO-21 a la pregunta 2



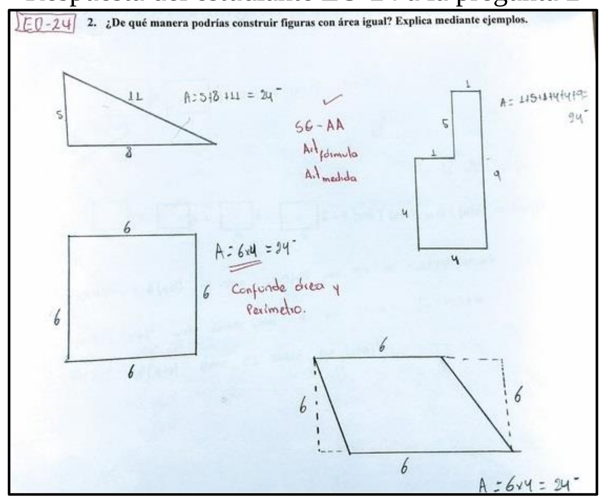
Respuesta del estudiante EO-22 a la pregunta 2



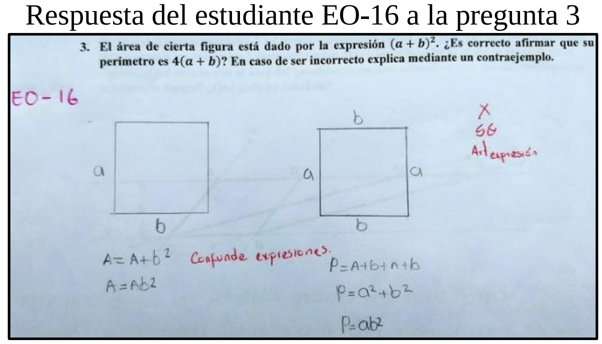
Respuesta del estudiante EO-23 a la pregunta 2



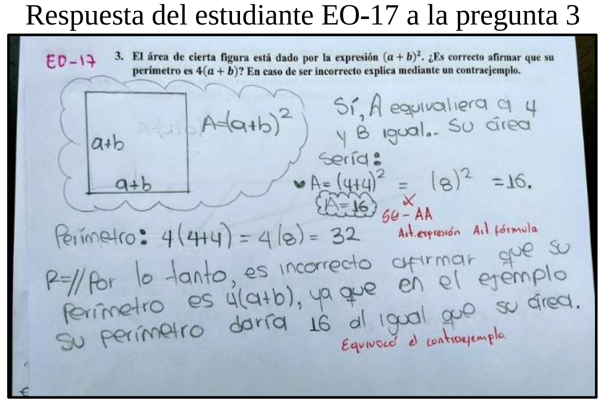
Respuesta del estudiante EO-24 a la pregunta 2



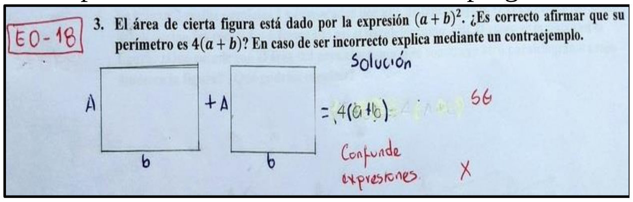
Respuesta del estudiante EO-16 a la pregunta 3



Respuesta del estudiante EO-17 a la pregunta 3



Respuesta del estudiante EO-18 a la pregunta 3


EO-18

3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

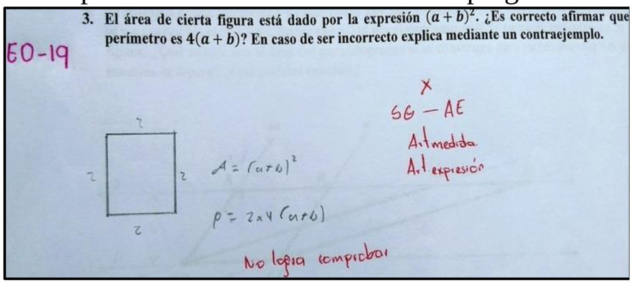
Solución

$= 4(a+b)$

SG

Confunde expresiones

Respuesta del estudiante EO-19 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-19

SG – AE

A.I medida

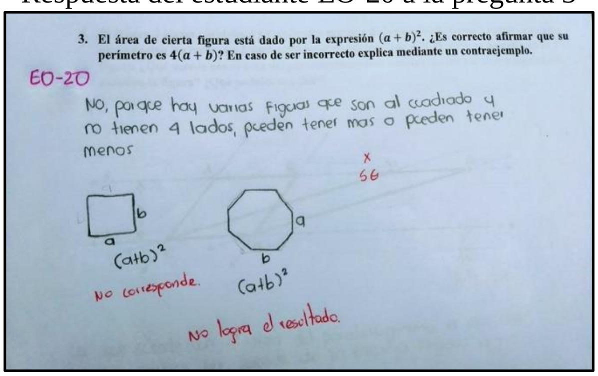
A.I expresión

$A = (a+b)^2$

$P = 2 \times 4 (a+b)$

No logra comprobar

Respuesta del estudiante EO-20 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-20

No, porque hay varias figuras que son al cuadrado y no tienen 4 lados, pueden tener mas o pueden tener menos

SG

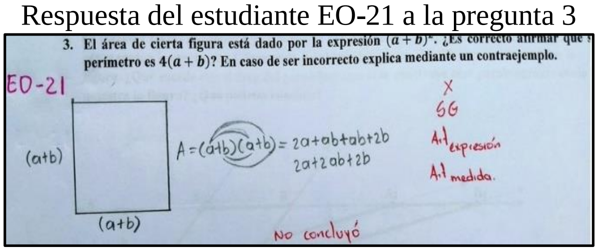
$(a+b)^2$

$(a+b)^2$

No corresponde.

No logra el resultado.

Respuesta del estudiante EO-21 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-21

$A = (a+b)(a+b) = 2a + ab + ab + 2b$

$2a + 2ab + 2b$

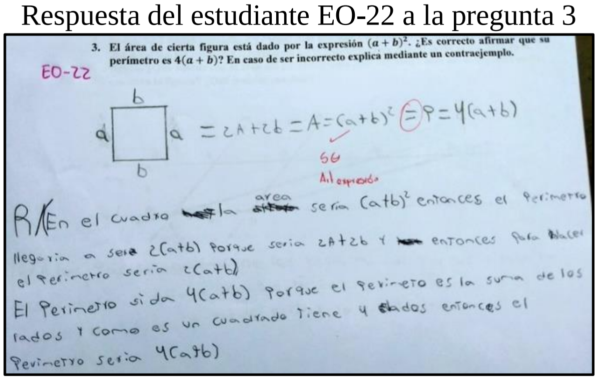
SG

A.I expresión

A.I medida.

No concluyó

Respuesta del estudiante EO-22 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-22

$= 2A + 2b = A = (a+b)^2 = P = 4(a+b)$

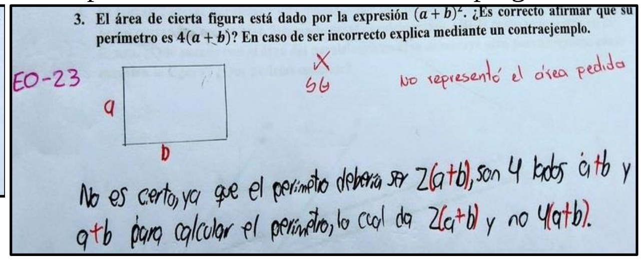
SG

A.I expresión

R/ En el cuadro la área sería $(a+b)^2$ entonces el perímetro sería $2(a+b)$ porque sería $2A + 2b$ y entonces para hacer llegaría a el perímetro sería $2(a+b)$

El perímetro si da $4(a+b)$ porque el perímetro es la suma de los lados y como es un cuadrado tiene 4 lados entonces el perímetro sería $4(a+b)$

Respuesta del estudiante EO-23 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

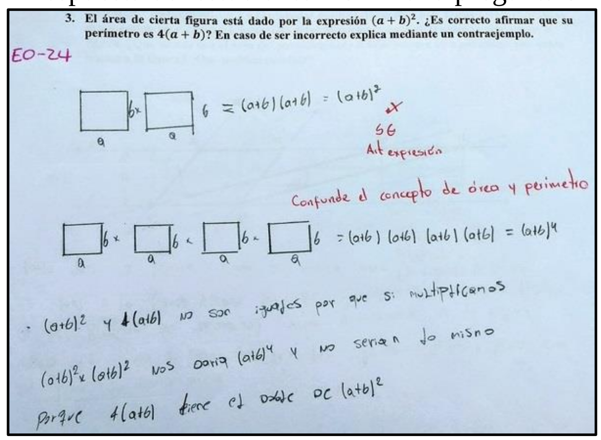
EO-23

SG

No representó el área pedida

No es cierto, ya que el perímetro debería ser $2(a+b)$, son 4 lados $a+b$ y $a+b$ para calcular el perímetro, lo cual da $2(a+b)$ y no $4(a+b)$.

Respuesta del estudiante EO-24 a la pregunta 3


3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-24

$= (a+b)(a+b) = (a+b)^2$

SG

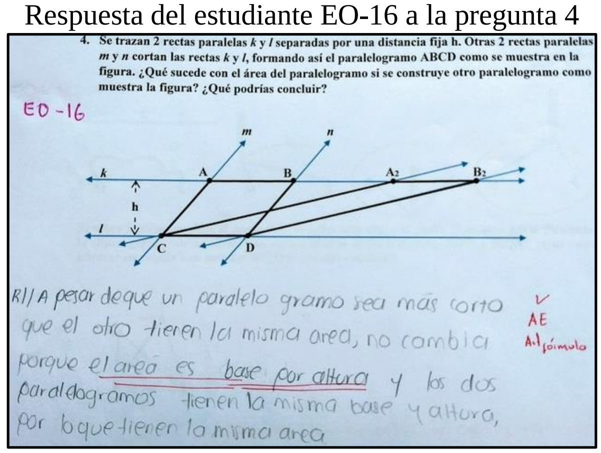
A.I expresión

Confunde el concepto de área y perímetro

$= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^4$

$(a+b)^2$ y $4(a+b)$ no son iguales por que si multiplicamos $(a+b)^2 \times (a+b)^2$ nos daría $(a+b)^4$ y no serían lo mismo porque $4(a+b)$ tiene el doble de $(a+b)^2$

Respuesta del estudiante EO-16 a la pregunta 4


4. Se trazan 2 rectas paralelas k y l separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas m y n cortan las rectas k y l, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

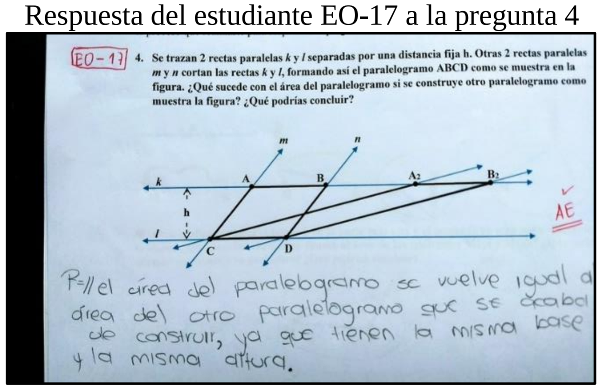
EO-16

R// A pesar de que un paralelogramo sea más corto que el otro tienen la misma area, no cambia porque el area es base por altura y los dos paralelogramos tienen la misma base y altura, por lo que tienen la misma area

AE

A.I fórmula

Respuesta del estudiante EO-17 a la pregunta 4

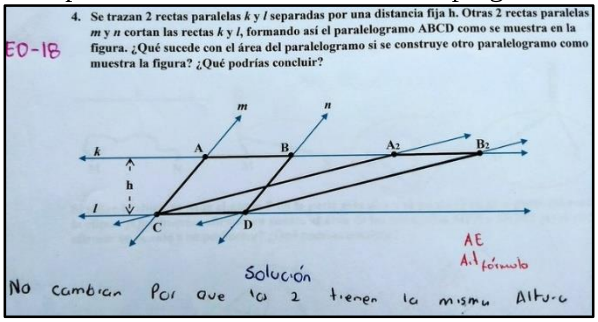

EO-17

4. Se trazan 2 rectas paralelas k y l separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas m y n cortan las rectas k y l, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

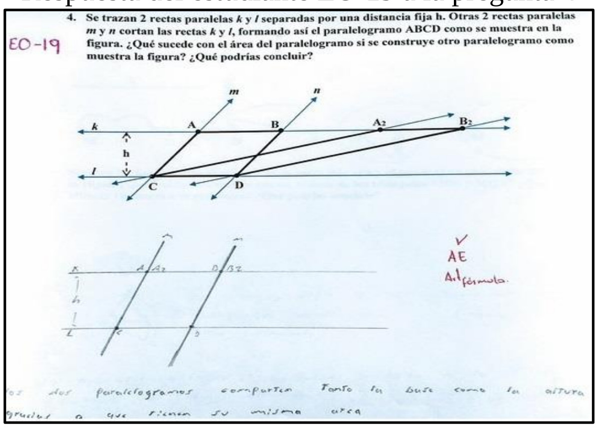
AE

R// el área del paralelogramo se vuelve igual al área del otro paralelogramo que se acaba de construir, ya que tienen la misma base y la misma altura.

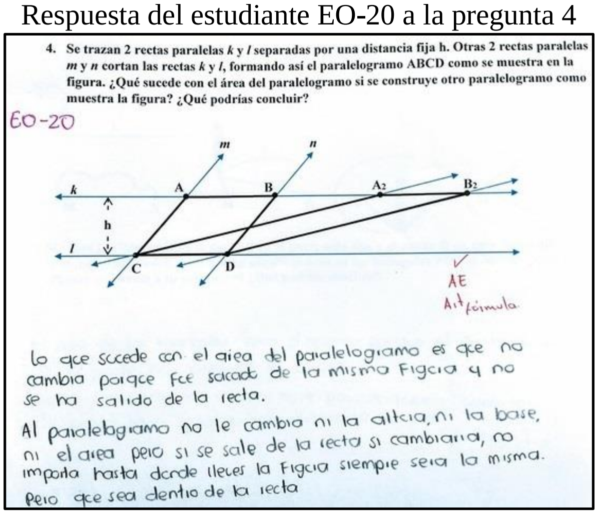
Respuesta del estudiante EO-18 a la pregunta 4



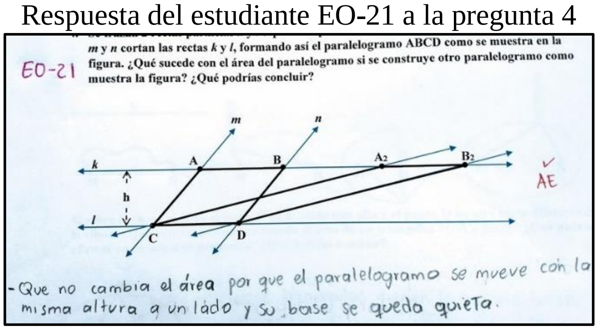
Respuesta del estudiante EO-19 a la pregunta 4



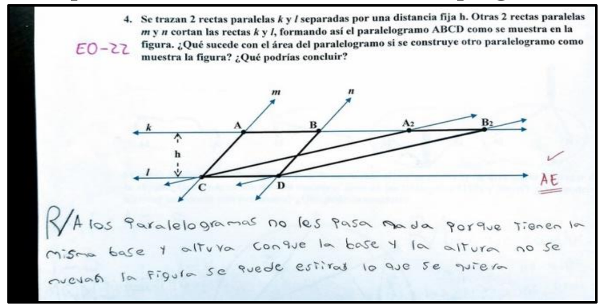
Respuesta del estudiante EO-20 a la pregunta 4



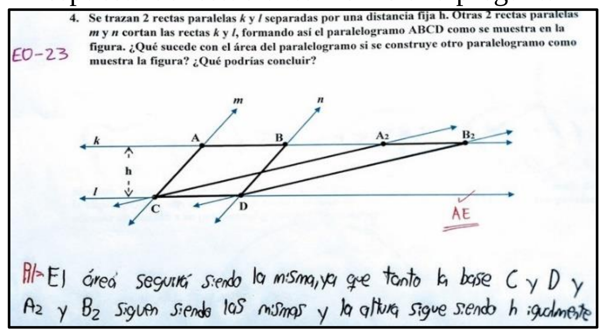
Respuesta del estudiante EO-21 a la pregunta 4



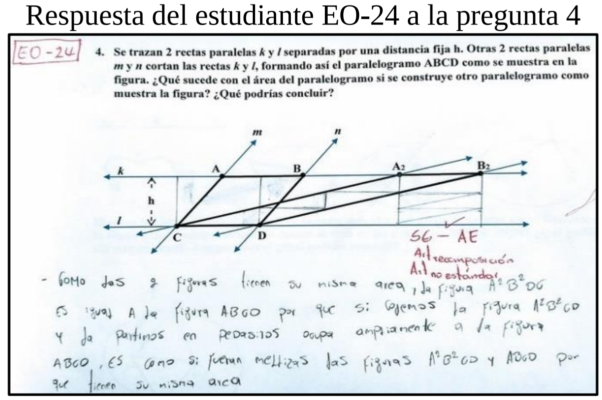
Respuesta del estudiante EO-22 a la pregunta 4



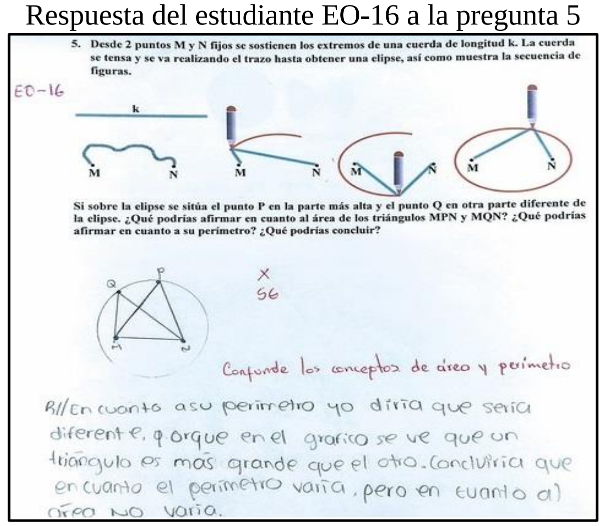
Respuesta del estudiante EO-23 a la pregunta 4



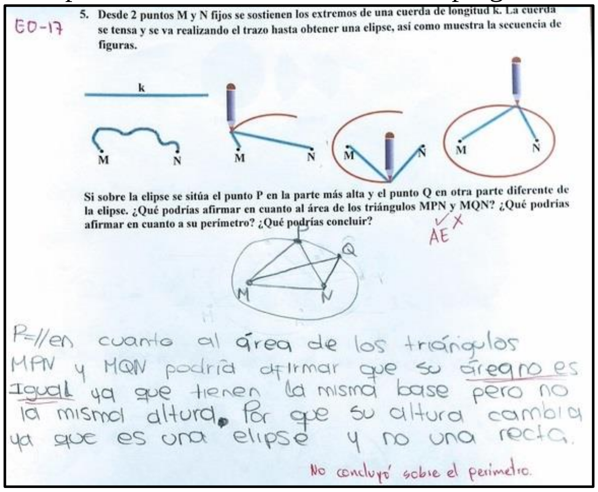
Respuesta del estudiante EO-24 a la pregunta 4



Respuesta del estudiante EO-16 a la pregunta 5



Respuesta del estudiante EO-17 a la pregunta 5



EO-17

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

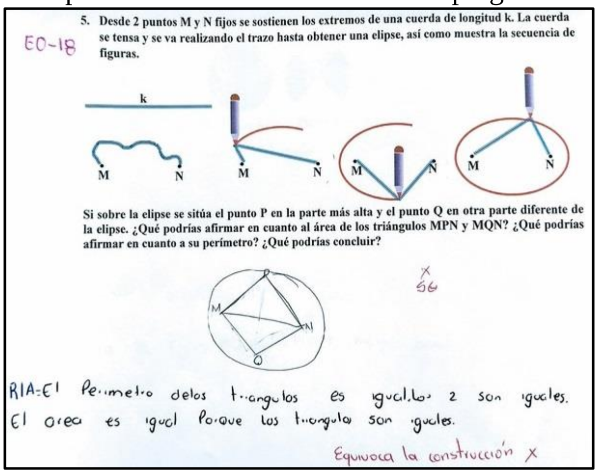
Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

AE

R=//en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN podría afirmar que su área no es Igual ya que tienen la misma base pero no la misma altura, Por que su altura cambia ya que es una elipse y no una recta.

No concluyó sobre el perímetro.

Respuesta del estudiante EO-18 a la pregunta 5



EO-18

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

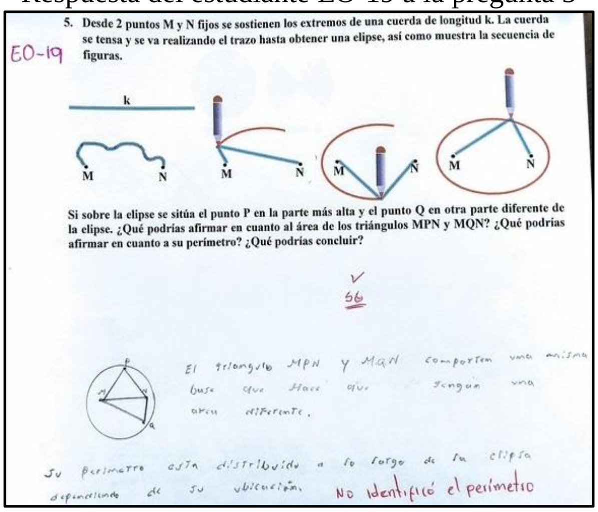
Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

SG

R/A: El Perimetro delos triangulos es igual, los 2 son iguales. El area es igual Porque los triangulo son iguales.

Equivoca la construcción

Respuesta del estudiante EO-19 a la pregunta 5



EO-19

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

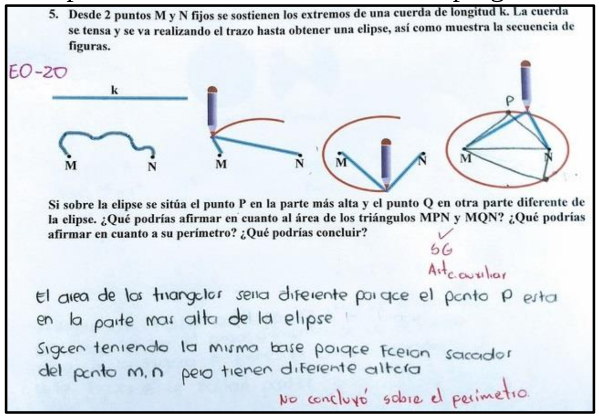
Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

SG

El triangulo MPN y MQN comporten una misma base que Hace que tengan una area diferente.

Su perimetro esta distribuido a lo largo de la elipsa dependiendo de su ubicación. No identificó el perímetro

Respuesta del estudiante EO-20 a la pregunta 5



5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

EO-20

Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

SG

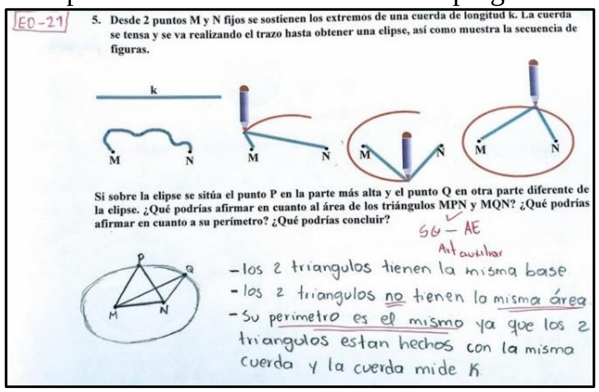
Art. auxiliar

El area de los triangulos seria diferente porque el punto P esta en la parte mas alta de la elipse.

Siguen teniendo la misma base porque fueron sacados del punto m, n pero tienen diferente altura

No concluyó sobre el perímetro

Respuesta del estudiante EO-21 a la pregunta 5



EO-21

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

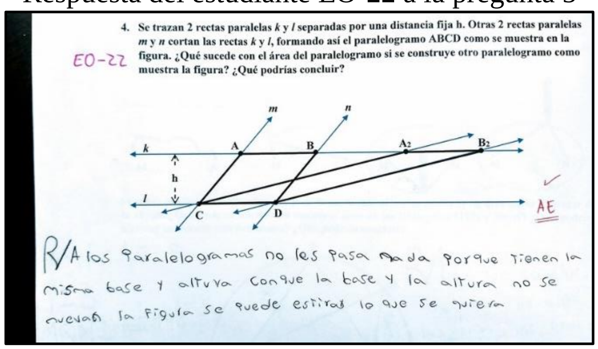
Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

SG – AE

Art. auxiliar

- los 2 triangulos tienen la misma base
- los 2 triangulos no tienen la misma área
- Su perimetro es el mismo ya que los 2 triangulos estan hechos con la misma cuerda y la cuerda mide K

Respuesta del estudiante EO-22 a la pregunta 5



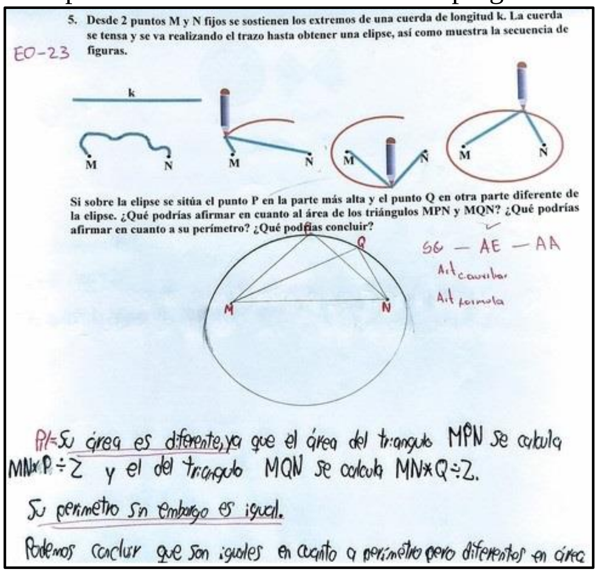
4. Se trazan 2 rectas paralelas k y l separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas m y n cortan las rectas k y l, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

EO-22

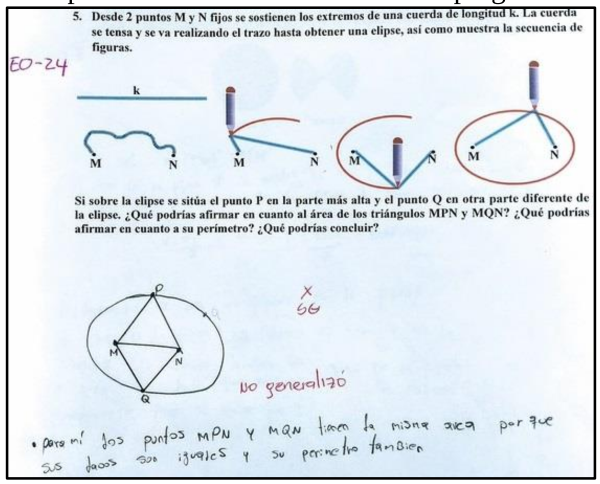
AE

R/A los paralelogramas no les pasa nada porque tienen la misma base y altura conque la base y la altura no se muevan la figura se puede estirar lo que se quiera

Respuesta del estudiante EO-23 a la pregunta 5

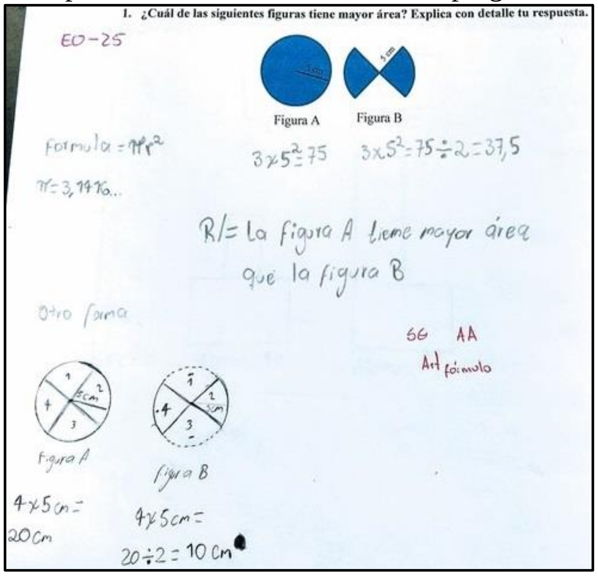


Respuesta del estudiante EO-24 a la pregunta 5



RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DEL CASO 2

Respuesta del estudiante EO-25 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-25

Figura A Figura B

Formula = πr²

π = 3,1416...

3x5² = 75   3x5² = 75 ÷ 2 = 37,5

R/= La figura A tiene mayor área que la figura B

Otra forma

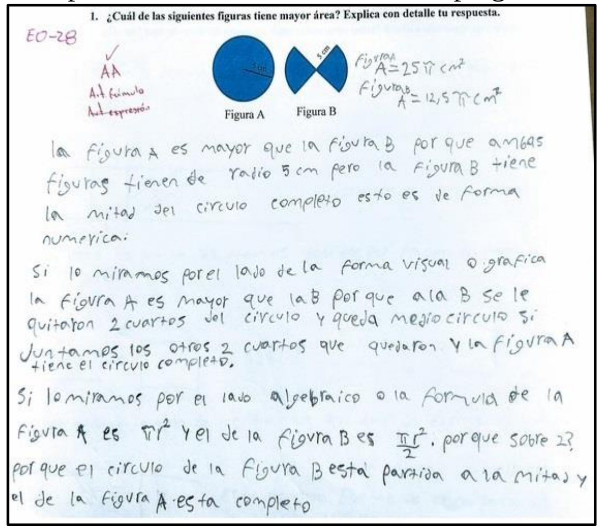
SG AA

Ar fórmula

figura A figura B

4x5cm = 20cm   4x5cm = 20÷2 = 10 cm

Respuesta del estudiante EO-28 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-28

AA

Ar fórmula

Ar expresión

Figura A Figura B

figura A = 25π cm²

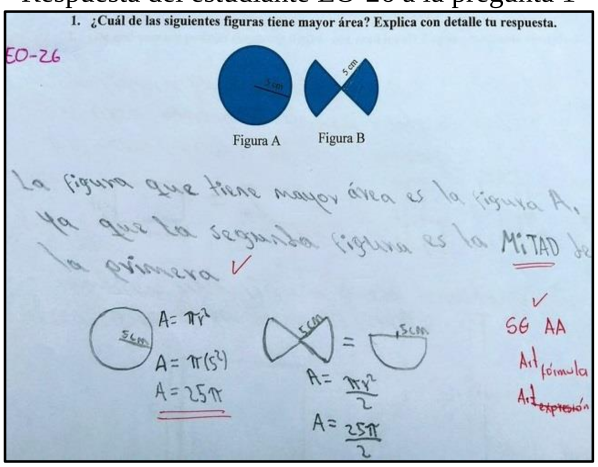
figura B = 12,5π cm²

la figura A es mayor que la figura B por que ambas figuras tienen de radio 5 cm pero la figura B tiene la mitad del circulo completo esto es de forma numerica.

Si lo miramos por el lado de la forma visual o grafica la figura A es mayor que la B por que a la B se le quitaron 2 cuartos del circulo y queda medio circulo si juntamos los otros 2 cuartos que quedaron y la figura A tiene el circulo completo.

Si lo miramos por el lado algebraico o la formula de la figura A es πr² y el de la figura B es πr²/2. por que sobre 2? por que el circulo de la figura B está partido a la mitad y el de la figura A esta completo

Respuesta del estudiante EO-26 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-26

Figura A Figura B

La figura que tiene mayor área es la figura A, ya que la segunda figura es la MITAD de la primera

A = πr²

A = π(5²)

A = 25π

A = πr²/2

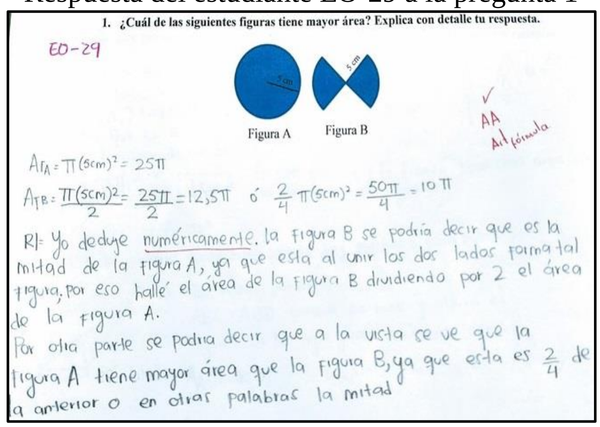
A = 25π/2

SG AA

Ar fórmula

Ar expresión

Respuesta del estudiante EO-29 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-29

Figura A Figura B

AA

Ar fórmula

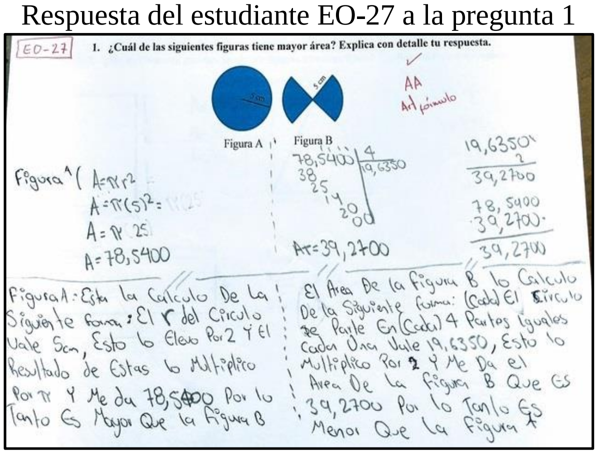
$A_{fA} = \pi(5cm)^2 = 25\pi$

$A_{fB} = \frac{\pi(5cm)^2}{2} = \frac{25\pi}{2} = 12,5\pi$ ó $\frac{2}{4}\pi(5cm)^2 = \frac{50\pi}{4} = 10\pi$

R/= Yo deduje numéricamente. la figura B se podría decir que es la mitad de la figura A, ya que esta al unir los dos lados forma tal figura, por eso hallé el área de la figura B dividiendo por 2 el área de la figura A.

Por otra parte se podría decir que a la vista se ve que la figura A tiene mayor área que la figura B, ya que esta es 2/4 de la anterior o en otras palabras la mitad

Respuesta del estudiante EO-27 a la pregunta 1


1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica con detalle tu respuesta.

EO-27

AA

Ar fórmula

Figura A Figura B

Figura A (A=πr²

A=π(5)²=

A=π 25

A=78,5400

78,5400 ÷ 4 = 19,6350

AT=39,2700

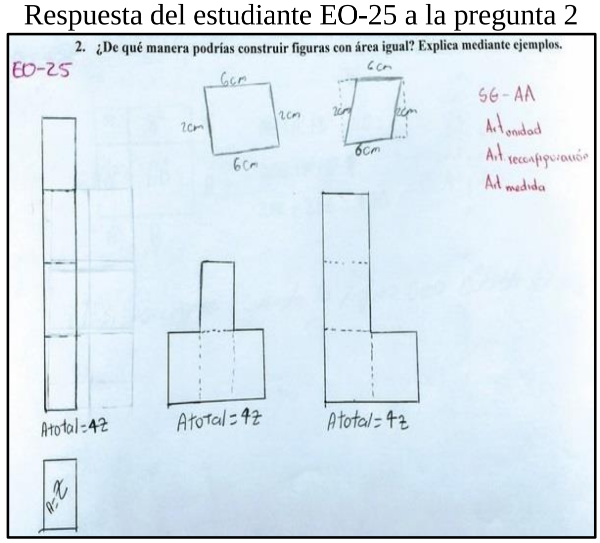
19,6350 x 2 = 39,2700

78,5400 - 39,2700 = 39,2700

FiguraA: Esta la Calculo De La Siguiente forma: El r del Circulo Vale 5cm, Esto lo Elevo Por 2 Y El Resultado de Estas lo Multiplico Por π Y Me da 78,5400 Por lo Tanto Es Mayor Que la Figura B

El Area De la Figura B lo Calculo De la Siguiente forma: (Cada) El Circulo se Parte En (Cada) 4 Partes Iguales Cada Una Vale 19,6350, Esto lo Multiplico Por 2 Y Me Da el Area De la Figura B Que Es 39,2700 Por lo Tanto Es Menor Que la Figura A

Respuesta del estudiante EO-25 a la pregunta 2


2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.

EO-25

SG-AA

Ar unidad

Ar reconfiguración

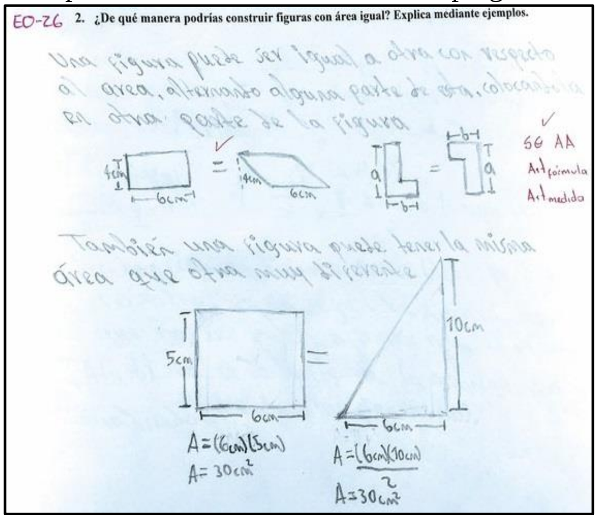
Ar medida

6cm 2cm 2cm 6cm

6cm 2cm 2cm 6cm

Atotal=4z   Atotal=4z   Atotal=4z

Respuesta del estudiante EO-26 a la pregunta 2



EO-26 **2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.**

Una figura puede ser igual a otra con respecto al area, alternando alguna parte de esta, colocandola en otra parte de la figura

4cm 6cm = 4cm 6cm a b = a b

SG AA
A-t fórmula
A-t medida

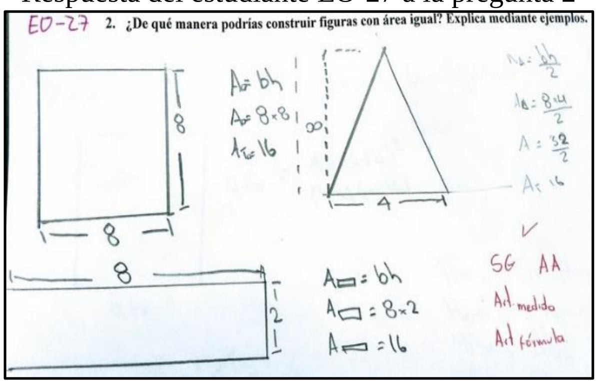
También una figura puede tener la misma área que otra muy diferente

5cm 6cm = 10cm 6cm

$A=(6cm)(5cm)$
$A=30cm^2$

$A=\frac{(6cm)(10cm)}{2}$
$A=30cm^2$

Respuesta del estudiante EO-27 a la pregunta 2



EO-27 **2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.**

$A=bh$
$A=8\times8$
$A=16$

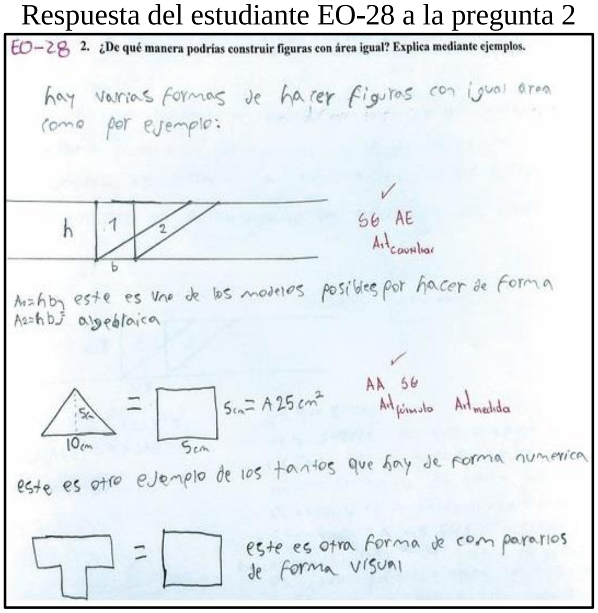
$A=\frac{bh}{2}$
$A=\frac{8\cdot4}{2}$
$A=\frac{32}{2}$
$A=16$

8 8 4 8 2

$A=bh$
$A=8\times2$
$A=16$

SG AA
A-t medida
A-t fórmula

Respuesta del estudiante EO-28 a la pregunta 2



EO-28 **2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.**

hay varias formas de hacer figuras con igual area como por ejemplo:

h 1 2 b

SG AE
A-t cauxiliar

$A_1=hb$, $A_2=hb$ este es uno de los modelos posibles por hacer de forma algebraica

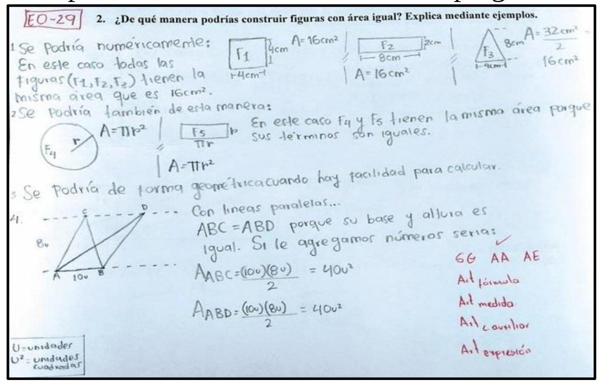
5cm 10cm = 5cm = A 25 cm²

AA SG
A-t fórmula A-t medida

este es otro ejemplo de los tantos que hay de forma numerica

este es otra forma de comparar de forma visual

Respuesta del estudiante EO-29 a la pregunta 2



EO-29 **2. ¿De qué manera podrías construir figuras con área igual? Explica mediante ejemplos.**

1. Se podría numéricamente: En este caso todos las figuras (F_1, F_2, F_3) tienen la misma área que es 16cm².

F_1 4cm 4cm $A=16cm^2$ | F_2 8cm 2cm $A=16cm^2$ | F_3 8cm 4cm $A=\frac{32cm^2}{2}$ 16cm²

2. Se podría también de esta manera:

F_4 r $A=\pi r^2$ | F_5 πr r $A=\pi r^2$

En este caso F_4 y F_5 tienen la misma área porque sus términos son iguales.

3. Se podría de forma geométrica cuando hay facilidad para calcular.

Con lineas paralelas...

ABC = ABD porque su base y altura es igual. Si le agregamos números serias:

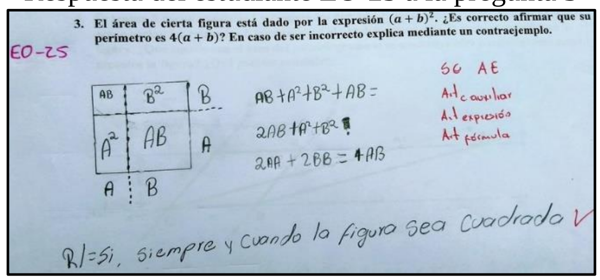
$A_{ABC}=\frac{(10u)(8u)}{2}=40u^2$

$A_{ABD}=\frac{(10u)(8u)}{2}=40u^2$

SG AA AE
A-t fórmula
A-t medida
A-t cauxiliar
A-t expresión

U = unidader
U² = unidades cuadradas

Respuesta del estudiante EO-25 a la pregunta 3



3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

EO-25

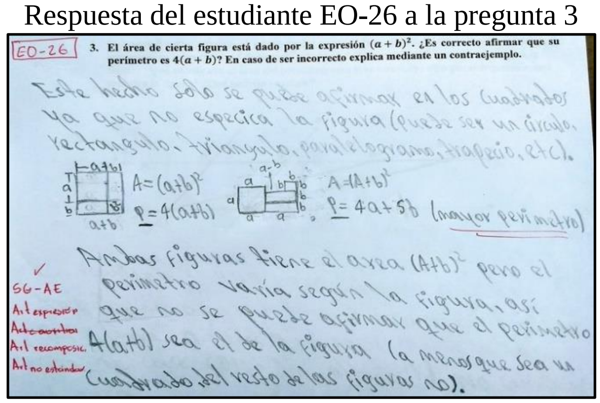
AB B² B
A² AB A
A B

$AB+A^2+B^2+AB=$
$2AB+A^2+B^2$
$2AA+2BB=4AB$

SG AE
A-t cauxiliar
A-t expresión
A-t fórmula

R/= Si, siempre y cuando la figura sea cuadrada

Respuesta del estudiante EO-26 a la pregunta 3



EO-26 **3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.**

Este hecho solo se puede afirmar en los cuadrados ya que no especifica la figura (puede ser un circulo, rectangulo, triangulo, paralelogramo, trapecio, etc).

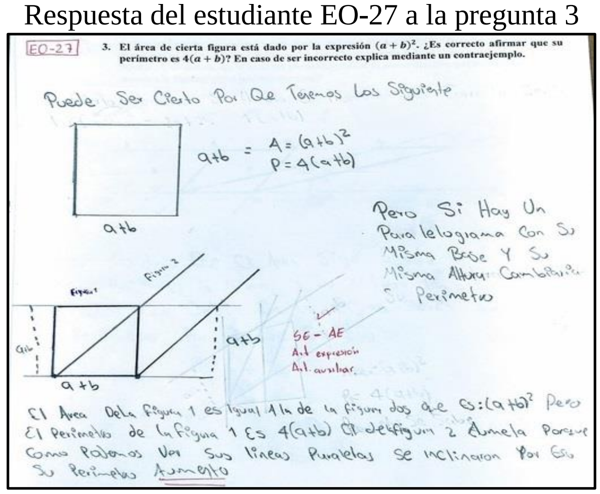
$A=(a+b)^2$
$P=4(a+b)$

$A=(A+b)^2$
$P=4a+5b$ (mayor perímetro)

Ambas figuras tiene el area $(A+b)^2$ pero el perimetro varía según la figura, así que no se puede afirmar que el perimetro $4(a+b)$ sea el de la figura (a menos que sea un cuadrado del resto de las figuras no).

SG-AE
A-t expresión
A-t cauxiliar
A-t recomposic.
A-t no estándar

Respuesta del estudiante EO-27 a la pregunta 3



EO-27 **3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.**

Puede Ser Cierto Por Qe Tenemos Los Siguiente

a+b = $A=(a+b)^2$
$P=4(a+b)$

a+b

Pero Si Hay Un Paralelogramo Con Su Misma Base Y Su Misma Altura Cambiaría Su Perímetro

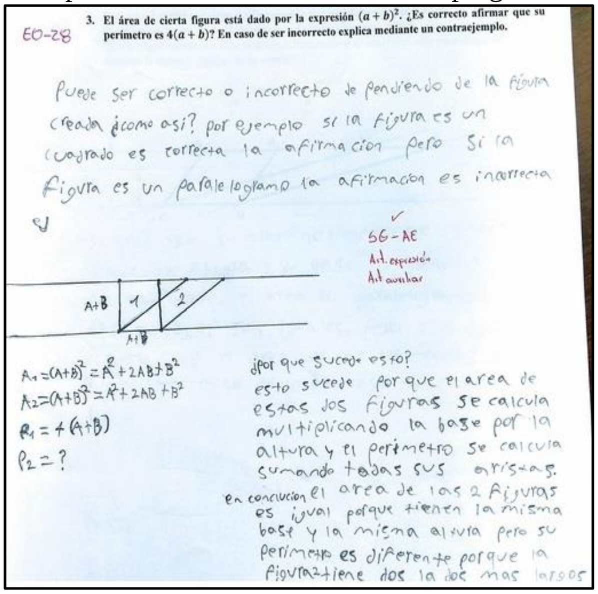
Figura 1 Figura 2

a+b a+b

SG-AE
A-t expresión
A-t auxiliar

El Area Dela Figura 1 es Igual A la de la figura dos que es $(a+b)^2$ Pero El Perímetro de la Figura 1 Es $4(a+b)$ el de la figura 2 Aumenta Porque Como Podemos Ver Sus líneas Paralelas Se Inclinaron Por Eso Su Perímetro Aumento

Respuesta del estudiante EO-28 a la pregunta 3


EO-28

3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

Puede ser correcto o incorrecto dependiendo de la figura creada ¿como así? por ejemplo si la figura es un cuadrado es correcta la afirmacion pero si la figura es un paralelogramo la afirmacion es incorrecta

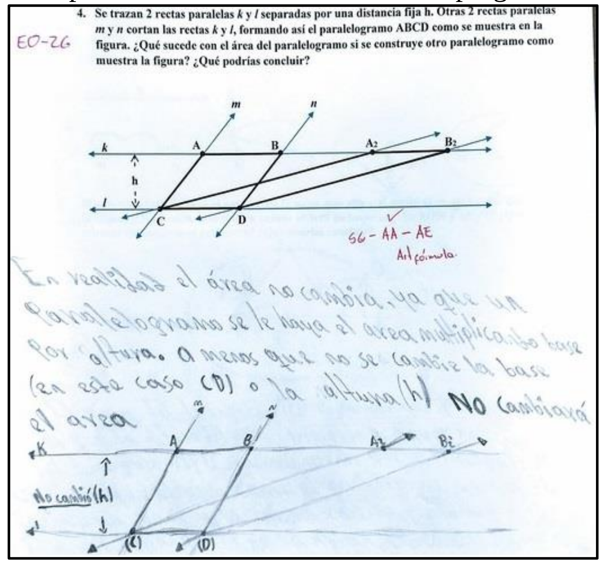
SG-AE
A.t expresión
A.t auxiliar

A+B 1 2 A+B

$A_1 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$A_2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$P_1 = 4(A+B)$
$P_2 = ?$

¿por que sucede esto? esto sucede por que el area de estas dos figuras se calcula multiplicando la base por la altura y el perímetro se calcula sumando todas sus aristas. en conclucion el area de las 2 figuras es igual porque tienen la misma base y la misma altura pero su perimetro es diferente porque la figura 2 tiene dos la dos mas largos

Respuesta del estudiante EO-26 a la pregunta 4


EO-26

4. Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

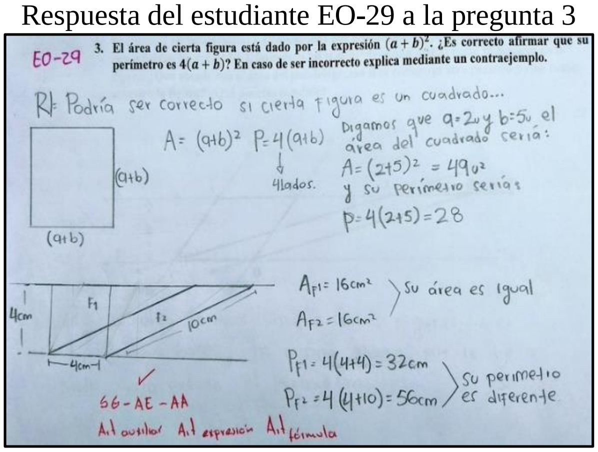
m n k A B A_2 B_2 h l C D

SG - AA - AE
A.t fórmula

En realidad el área no cambia, ya que un paralelogramo se le haya el area multiplicando base por altura. a menos que no se cambie la base (en este caso CD) o la altura (h) No cambiará el area

K A B A_2 B_2 No cambio (h) l (C) (D)

Respuesta del estudiante EO-29 a la pregunta 3


EO-29

3. El área de cierta figura está dado por la expresión $(a+b)^2$. ¿Es correcto afirmar que su perímetro es $4(a+b)$? En caso de ser incorrecto explica mediante un contraejemplo.

R/: Podría ser correcto si cierta figura es un cuadrado...

$A = (a+b)^2$ $P = 4(a+b)$ 4lados.

(a+b) (a+b)

Digamos que a=2u y b=5u el área del cuadrado sería:
$A = (2+5)^2 = 49u^2$
y su perimetro sería:
$P = 4(2+5) = 28$

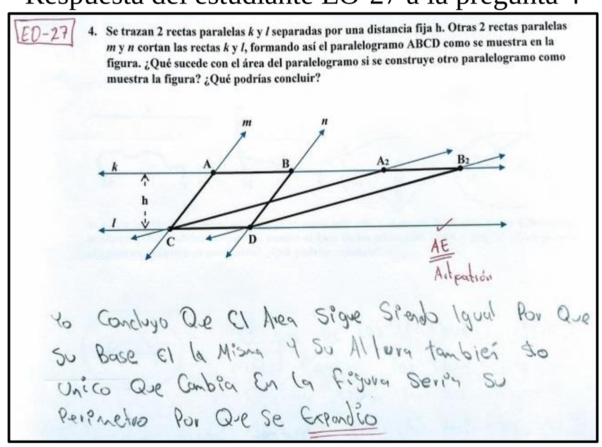
4cm F1 F2 10cm 4cm

$A_{F1} = 16cm^2$
$A_{F2} = 16cm^2$ su área es igual

$P_{F1} = 4(4+4) = 32cm$
$P_{F2} = 4(4+10) = 56cm$ su perimetro es diferente

SG - AE - AA
A.t auxiliar A.t expresión A.t fórmula

Respuesta del estudiante EO-27 a la pregunta 4


EO-27

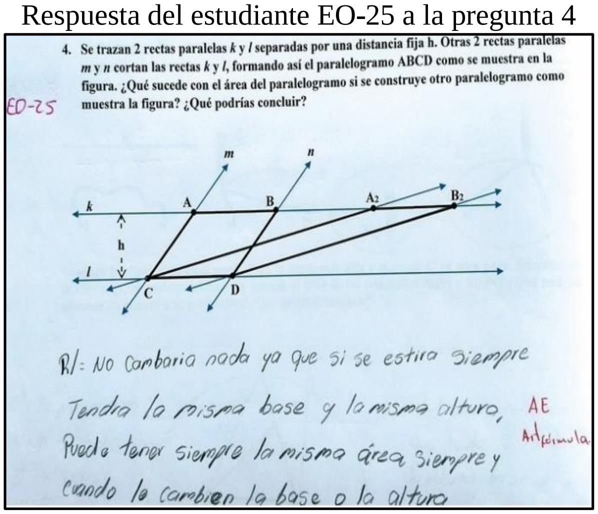
4. Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

m n k A B A_2 B_2 h l C D

AE
A.t patrón

Yo Concluyo Qe El Area Sigue Siendo Igual Por Que Su Base Es la Misma Y Su Altura tambieñ Lo Unico Que Cambia En la Figura Sería Su Perimetro Por Qe Se Expandio

Respuesta del estudiante EO-25 a la pregunta 4


EO-25

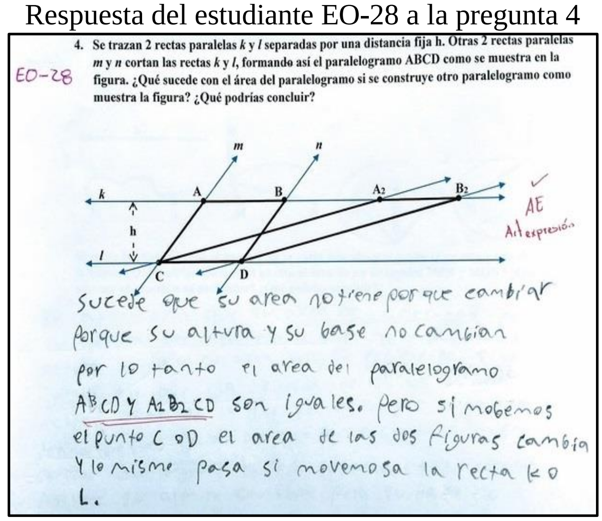
4. Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

m n k A B A_2 B_2 h l C D

R/: No cambaria nada ya que si se estira siempre Tendra la misma base y la misma altura, Puede tener siempre la misma área siempre y cuando lo cambien la base o la altura

AE
A.t fórmula

Respuesta del estudiante EO-28 a la pregunta 4


EO-28

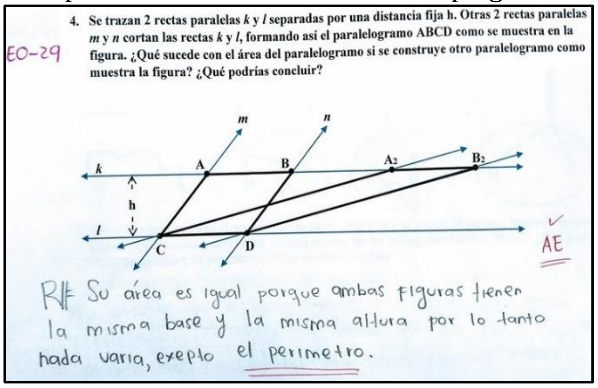
4. Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

m n k A B A_2 B_2 h l C D

AE
A.t expresión

sucede que su area no tiene porque cambiar porque su altura y su base no cambian por lo tanto el area del paralelogramo ABCD y A_2B_2CD son iguales. pero si mobemos el punto C o D el area de las dos figuras cambia y lo mismo pasa si movemos a la recta k o L.

Respuesta del estudiante EO-29 a la pregunta 4

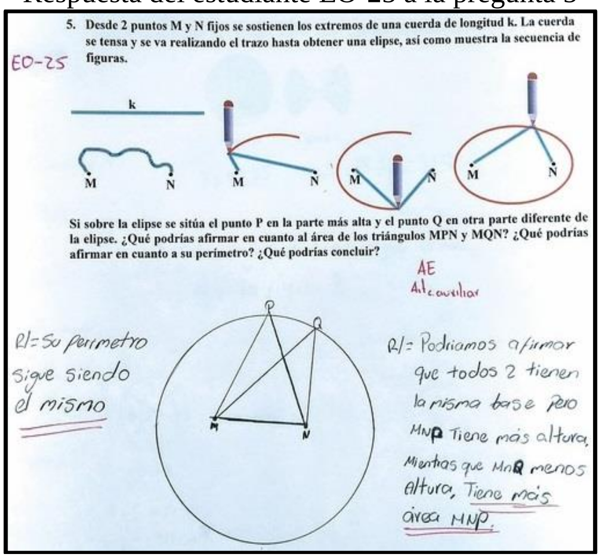

EO-29

4. Se trazan 2 rectas paralelas *k* y *l* separadas por una distancia fija h. Otras 2 rectas paralelas *m* y *n* cortan las rectas *k* y *l*, formando así el paralelogramo ABCD como se muestra en la figura. ¿Qué sucede con el área del paralelogramo si se construye otro paralelogramo como muestra la figura? ¿Qué podrías concluir?

AE

R/ Su área es igual porque ambas figuras tienen la misma base y la misma altura por lo tanto nada varia, exepto el perimetro.

Respuesta del estudiante EO-25 a la pregunta 5


EO-25

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

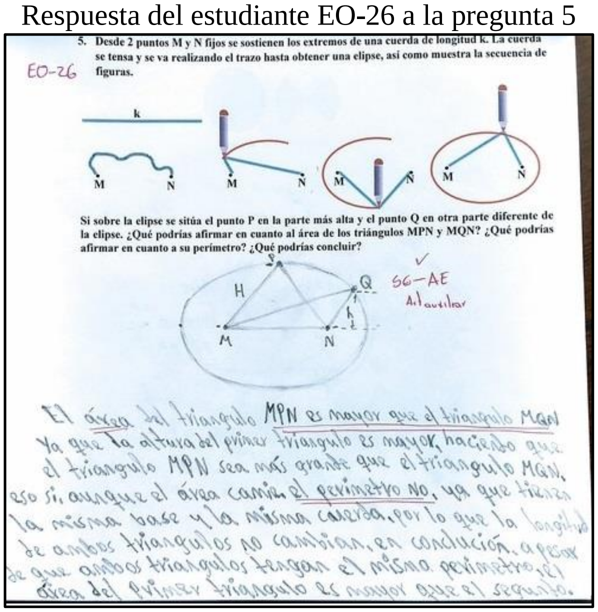
Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

AE
Art. auxiliar

R/= Su perimetro sigue siendo el mismo

R/= Podriamos afirmar que todos 2 tienen la misma base pero MNP Tiene más altura, Mientras que MNQ menos altura, Tiene más área MNP.

Respuesta del estudiante EO-26 a la pregunta 5


EO-26

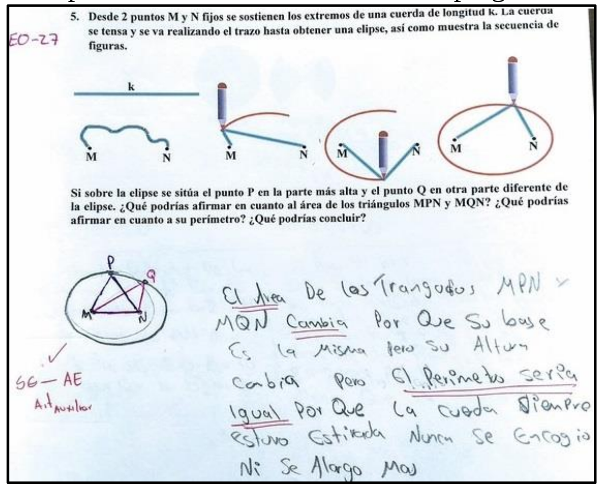
5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

SG–AE
Art. auxiliar

El área del triangulo MPN es mayor que el triangulo MQN ya que la altura del primer triangulo es mayor, haciendo que el triangulo MPN sea más grande que el triangulo MQN, eso si, aunque el área cambia el perimetro no, ya que tienen la misma base y la misma cuerda, por lo que la longitud de ambos triangulos no cambian, en conclusión, a pesar de que ambos triangulos tengan el mismo perimetro, el área del primer triangulo es mayor que el segundo.

Respuesta del estudiante EO-27 a la pregunta 5


EO-27

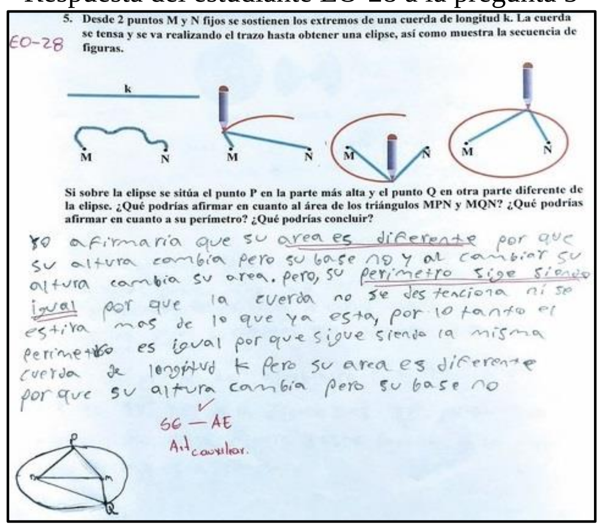
5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

El Área De los Triangulos MPN y MQN Cambia Por Que Su base Es la Misma pero Su Altura cambia pero El Perimetro sería Igual Por Que La Cuerda Siempre estuvo Estirada Nunca Se Encogio Ni Se Alargo Mas

SG – AE
Art. auxiliar

Respuesta del estudiante EO-28 a la pregunta 5


EO-28

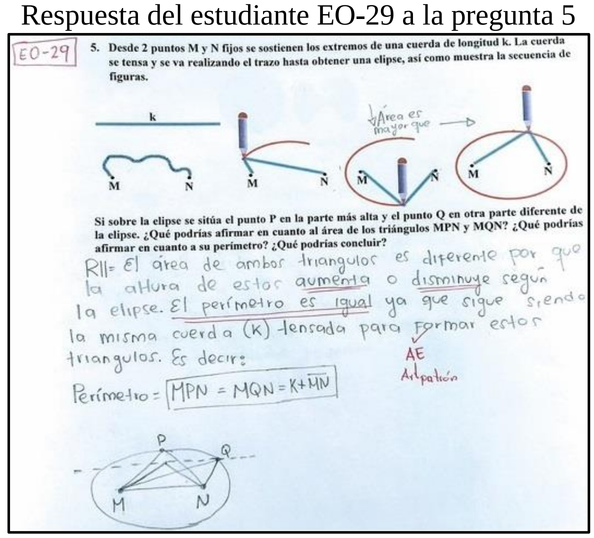
5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

Yo afirmaria que su area es diferente por que su altura cambia pero su base no y al cambiar su altura cambia su area. pero, su perimetro sige siendo igual por que la cuerda no se des tenciona ni se estira mas de lo que ya esta, por lo tanto el perimetro es igual por que sigue siendo la misma cuerda de longitud k pero su area es diferente por que su altura cambia pero su base no

SG – AE
Art. auxiliar.

Respuesta del estudiante EO-29 a la pregunta 5


EO-29

5. Desde 2 puntos M y N fijos se sostienen los extremos de una cuerda de longitud k. La cuerda se tensa y se va realizando el trazo hasta obtener una elipse, así como muestra la secuencia de figuras.

Área es mayor que

Si sobre la elipse se sitúa el punto P en la parte más alta y el punto Q en otra parte diferente de la elipse. ¿Qué podrías afirmar en cuanto al área de los triángulos MPN y MQN? ¿Qué podrías afirmar en cuanto a su perímetro? ¿Qué podrías concluir?

R// El área de ambos triangulos es diferente por que la altura de estos aumenta o disminuye según la elipse. El perímetro es igual ya que sigue siendo la misma cuerda (k) tensada para formar estos triangulos. Es decir:

AE
Art. patrón

Perímetro = $\boxed{MPN = MQN = K + \overline{MN}}$