ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL: UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:

ANA LUISA MENA ROMAÑA
FREDDY HENAO RESTREPO

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

MEDELLÍN

2018

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL: UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO.

AUTORES:

ANA LUISA MENA ROMAÑA
FREDDY HENAO RESTREPO

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACION

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dra. MARCELA PARRAGUEZ GONZÁLEZ

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y

HUMANAS

MEDELLÍN

MAYO 2018

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por su infinita sabiduría…

Al Ministerio de Educación Nacional de Colombia, por brindar a sus docentes la posibilidad de estudiar.

A la Comunidad Educativa de la Institución Monseñor Francisco Cristóbal Toro por los tiempos y espacios proporcionados.

A nuestras Familias por acompañarnos de manera incondicional.

A nuestros asesores la doctora Marcela Parraguez y el doctor Luis Albeiro Zabala, quienes en todo momento estuvieron dispuestos a atendernos.

Al profesor Javier Santos Suárez Alfonso por sus valiosos aportes que nos permitieron cualificar nuestro trabajo de investigación.

Ana y Fredy

RESUMEN

El trabajo de investigación que presentamos hizo referencia a un estudio relacionado con el proceso de comprender de la Función Lineal (FL), evidenciado en estudiantes del grado noveno de una institución educativa oficial de Medellín, considerando como referente teórico los Modos de Pensamiento de Ana Sierpinska (2000) y como diseño metodológico el Estudio de Casos de Stake (2010).

La problemática de investigación se originó, en algunas dificultades identificadas en las competencias matemáticas, que según el currículo nacional deben alcanzar los jóvenes desde la interpretación, razonamiento-argumentación y formulación-ejecución, los que están en estrecha relación con el objeto matemático indagado en la investigación. Otras de las dificultades que se logran detectar se encuentran directamente relacionadas con la manera como se ha venido abordando dicho objeto en el contexto educativo, donde se le ha dado prioridad a la interpretación geométrica y aritmética, dejando de lado el análisis estructural que busca tener en cuenta las propiedades y axiomas que lo definen. En la presente investigación este último enfoque es precisamente el que se quiere resaltar en la comprensión de la FL, a través de la indagación de los elementos articuladores entre los tres modos de pensar la FL–Sintético-Geométrico FL, Analítico-Aritmético FL y Analítico-Estructural FL– para contribuir así con la comprensión profunda del concepto FL, donde el estudiante pueda comprender la FL en los tres modos, definidos explícitamente así: Sintético-Geométrico FL como la línea recta que representa una correspondencia proporcional, Analítico-Aritmético FL expresado como la ecuación general de la línea recta y Analítico-Estructural FL descrito como lugar geométrico.

Con base en los antecedentes epistemológicos rastreados, así como de la experiencia docente, y tomando como referente la teoría Modos de Pensamiento, se diseñaron diversas situaciones contextualizadas, desde tres interpretaciones diferentes, en donde no solo se le dio prioridad a lo Aritmético y Geométrico, sino también a lo Estructural como parte importante del concepto que se está investigando. Cabe mencionar también, que de estas múltiples interpretaciones de la FL surgen cuatro articuladores, los cuales se nombran i) Coordenadas Cartesianas, ii) Pendiente y Punto de Intersección de la recta con el eje y, iii) Plano Cartesiano junto a la recta como lugar Geométrico–, los cuales permitieron validar la articulación entre los tres modos de pensar FL.

PALABRAS CLAVE: Función Lineal, Articuladores, Enseñanza, Aprendizaje, Modos de Pensamiento.

ABSTRACT

The research work we presented, made reference to a study related to the process to understand the linear function (FL), evidenced in students of ninth grades, at a public educational institution in Medellin, considering as a theoretical referent the modes of thinking by Ana Sierpinska (2000) and as a methodological design, The Art of Case Study Research by Stake (2010).

The research problem originated, starting from some difficulties identified in the mathematical competences, which according to the national curriculum must reach young people from the interpretation, reasoning-argumentation and formulation-performance, being closely related to the mathematical object researched in the investigation. Other difficulties that are detected, are directly related to the way in which this object has been addressed in the educational context, where priority has been given to the geometric and arithmetic interpretation, leaving aside the structural analysis that seeks to take into account the properties and axioms that define it. In the current research, this last approach is precisely the one that we want to highlight in the understanding of the FL, through the investigation of the articulating elements between the three modes of thinking FL-Synthetic-Geometric FL, Analytical-Arithmetic FL and Analytical -Structural FL- to thus contribute to the deep understanding of the FL concept, where the student can understand the FL in the three modes, defined explicitly as follows: Synthetic-Geometric FL described as a straight line, Analytical-Arithmetic FL expressed as the general equation of the straight line and Analytic-Structural FL described as a locus.

Based on the tracked epistemological background, as well as the teaching experience, and taking the theory Modes of Thinking as a reference, several contextualized situations were designed, from three different interpretations, where not only the Arithmetic and Geometric were given priority, but also to the Structural as an important part of the concept that is being researched. It is also worth mentioning that from these multiple interpretations of FL there are 4 articulators which are named as follows -Cartesian Coordinates, Slope and Intersection Point of the line with the y-axis, Cartesian Plane and Properties of the line as the locus-these elements allowed to validate the articulation between the three ways of thinking FL.

KEYWORDS: Linear Function, Articulators, Teaching, Learning, Modes of Thinking.

SOMMARIO

Il lavoro di ricerca qui presentato, ha fatto riferimento a uno studio relativo al processo di comprensione della Funzione Lineare (FL), evidenziato negli studenti di una scuola pubblica di Medellin, considerando come riferimento teorico i Modi di Pensare di Ana Sierpinska (2000) e come metodologia lo Studio di caso di Stake (2010).

Il problema di ricerca ha avuto origine da alcune difficoltà individuate nelle abilità matematiche, che il curriculum nazionale dovrebbe raggiungere i giovani dalla interpretazione, ragionamento-argomentazione e la formulazione-esecuzione, essendo in stretta relazione con l'oggetto matematico indagato nella ricerca. Altre difficoltà rilevate sono direttamente correlate al modo in cui questo oggetto è stato affrontato nel contesto educativo, dove è stata data priorità all'interpretazione geometrica e aritmetica, lasciando da parte l'analisi strutturale che cerca di prendere in considerazione le proprietà e gli assiomi che lo definisce. Nella presente inchiesta quest'ultimo approccio è precisamente di evidenziare la comprensione della FL, attraverso l'indagine degli elementi articolatori tra i tre Modi di Pensare la FL– Sintetico-Geometriche FL, Analitiche–Aritmetiche FL e Analitico-Structurale FL– per contribuire con la comprensione profonda del concetto FL, dove lo studente può comprendere la FL in tutte le tre modalità, esplicitamente definito come segue: Sintetico–Geometriche FL descritta come una linea retta, Analitiche–Aritmetiche FL espresso come equazione generale della linea retta e Analitico-Strutturale FL descritto come luogo geometrico.

Sulla base di sfondi epistemologiche tracciati così come la esperienza di insegnamento, e prendendo come riferimento la teoria Modi di Pensare, sono state progettate diverse situazioni contestualizzate da tre diverse interpretazioni, in cui non solo ha dato la priorità allo aritmetico e geometrico, ma anche allo Strutturale come parte importante del concetto che viene studiato. Vale la pena menzionare, che da queste molteplici interpretazioni del FL sorgono quattro articolatori che sono denominati come segue -Cartesiane Coordinate, Pendenza e Punto di Intersezione della linea con l'asse y, Piano Cartesiano e Proprietà della retta come luogo geométrico– questi elementi hanno permesso di convalidare l'articolazione tra i tre Modi di Pensare FL.

PAROLE CHIAVE: Funzioni Lineare, Articolatori, Insegnamento, Apprendimento, Modi di Pensare.

INTRODUCCIÓN

La Didáctica de la Matemática siempre se ha preocupado por encontrar respuestas y mejoras a los procesos de enseñar y aprender la Matemática, dando así la oportunidad que tanto docentes como estudiantes se planteen nuevas formas de asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Para el tópico matemático particular de la presente investigación, y luego de analizar los resultados que presentan estudiantes del grado noveno en las pruebas externas planteadas por el Ministerio de Educación Nacional, conocidas en Colombia como Pruebas Saber, se detectan múltiples dificultades en los componentes Numérico-Variacional y Geométrico-Métrico, así como en las competencias matemáticas que los involucra, tales como el razonamiento, la interpretación, argumentación, y la formulación y ejecución. Es a partir de este rastreo que se identifica un objeto matemático que transversaliza dichos componentes, considerando de esta forma la Función Lineal como objeto de estudio, y sobre el cual se hace todo el constructo teórico y se implementan diferentes estrategias que serán puestas a prueba en el desarrollo de la presente investigación.

Al indagar por diferentes estudios relacionados con la Función Lineal, como los reportados por Fabra y Deulofeu (2000); Ospina (2012); Acosta y Joya (2013), se pone de manifiesto el objeto matemático Función Lineal al ser analizarlo desde diferentes puntos de vista; resaltando elementos relevantes como es el caso del uso del pensar aritmético y geométrico a través del estudio de las regularidades, mediado por las herramientas tecnológicas en el proceso formativo, dejando de lado el análisis desde sus propiedades y axiomas, limitándose al estudio sólo desde dos interpretaciones desconociendo su parte estructural, siendo este último el enfoque que se quiere fortalecer en la presente investigación, sin descartar lo aritmético y lo geométrico, de hecho, lo que se busca es una articulación entre lo geométrico, lo aritmético y lo estructural de la Función Lineal, que contribuye a una comprensión profunda del concepto.

Dicha articulación se argumenta desde la teoría Modos de Pensamiento planteada por la doctora Ana Sierpinska; esta teoría permite indagar en la manera en que los estudiantes comprenden el objeto matemático, así como en aquellos elementos que lo movilizan entre los Modos Analítico-Aritmético (AA–FL), Sintético-Geométrico (SG–FL) y Analítico-Estructural (AE–FL)[1] de la Función Lineal, que facilitan la conexión entre uno y otro. Dicha teoría posibilita que el estudiante sea quien construya de forma directa el concepto en cuestión, propiciando la posibilidad de interpretarlo de diferentes maneras a medida que transita de una representación a otra, aspectos que tienen implicaciones positivas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

El trabajo de investigación se organiza en seis capítulos como se describe a continuación:

[1] Estos modos se describen explícitamente en el capítulo 3

Capítulo 1: En este capítulo, denominado "*Problemática, Antecedentes y Objetivos de Investigación"*, se describen aquellos elementos que sustentan la problemática y el porqué del objeto matemático en cuestión, para lo cual se retoman los resultados obtenidos en pruebas externas. Además, se realiza un recorrido a las mallas curriculares institucionales y cómo se aborda desde algunos textos de estudio el objeto matemático. Posteriormente, se hace un rastreo a las investigaciones y enfoques teóricos predominantes en la enseñanza del concepto Función Lineal, analizando lo que ocurre cuando se pasa de una perspectiva a otra. A partir de estos elementos se plantean algunas preguntas y se definen los objetivos que demarcaran el rumbo de la investigación.

Capítulo 2: El capítulo se ha denominado "*Aspectos Histórico-epistemológicos de la Función Lineal***",** donde se realiza un análisis histórico por algunas culturas que aportaron significativamente a la evolución de lo que hoy se conoce como función, enfocándolo como aquel que fundamenta la génesis de la Función Lineal, enriqueciendo la indagación epistemológica y didáctica. Así también, muestran las dificultades que se presentaron en el desarrollo del concepto en estudio y de su evolución, identificando cómo algunos elementos matemáticos siglo tras siglo se han transformado para conformar lo que se conoce como Función Lineal.

Capítulo 3: Este capítulo se ha denominado "*Marco Teórico*", donde se exponen los fundamentos conceptuales de la Didáctica de la Matemática que sustentan la investigación. Se describen los elementos más importantes de la teoría Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000). Además se plantean situaciones de aula elaboradas a la luz de dicha teoría, a partir de las cuales se proponen los articuladores hipotéticos que propician un posible tránsito entre los Modos de pensar la Función Lineal.

Capítulo 4: Este apartado se denomina *"Diseño Metodológico"* y corresponde a la metodología utilizada que se fundamenta en el Estudio de Casos, para proveer de un sustento empírico experimental a la investigación. Se realiza una descripción de las herramientas a utilizar en la recolección de información, se definen las etapas de investigación y se describen las unidades de análisis.

Capítulo 5: En el desarrollo de este capítulo, que ha sido nombrado *"Análisis de Datos",* se identifica el análisis a priori y a posteriori tanto del cuestionario, como de la entrevista Semi–Estructurada, los cuales son parte fundamental de la implementación, se pone en evidencia los Modos de pensar la Función Lineal que priorizan los estudiantes, así como los articuladores presentes en las articulaciones entre un Modo y otro. Al final de cada análisis a posteriori, se plantean algunas conclusiones a la luz de la teoría que fundamenta la investigación.

Capítulo 6: Finalmente, en este capítulo, denominado *"Conclusiones",* se plantean las conclusiones obtenidas a partir de las evidencias empíricas que se derivan de los análisis realizados en el capítulo anterior. Dichas conclusiones son definidas desde varios enfoques que sustentan los hallazgos obtenidos en cada Caso de Estudio.

Índice

CAPÍTULO1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen los elementos que sustentan la problemática y el porqué del objeto matemático en cuestión. Para esto, se retoman los resultados obtenidos en las pruebas nacionales–Icfes–además, se realiza un recorrido a las mallas curriculares institucionales y cómo se aborda desde algunos textos de estudio el objeto matemático. Posteriormente, se hace un rastreo a las investigaciones y enfoques teóricos predominantes en la enseñanza del concepto Función Lineal, dando una mirada a sus diferentes interpretaciones en lo general y en lo específico. A partir de estos elementos se plantean algunas preguntas y se definen los objetivos que trazarán el rumbo de la investigación.

1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

El problema que motiva esta investigación surge de la revisión de los resultados obtenidos en las Pruebas Saber grado 5° y 9° del año 2015, propuestas por el Ministerios de Educación Nacional (MEN, 2010). Dicha revisión permite detectar las dificultades que presentan los estudiantes en los componentes Numérico-Variacional y Geométrico-Métrico, a partir de los cuales se identifica un objeto matemático que transversaliza dichos componentes, Función Lineal.

Se debe resaltar que las pruebas mencionadas nacen de la necesidad de mejorar la calidad de la educación en Colombia y de la definición de los estándares, como aquellos parámetros que nos indican qué deben alcanzar los estudiantes. Para evitar confusiones, el MEN, a partir del año 2010, etiquetó a todos los exámenes nacionales con un solo nombre, SABER, refiriéndose a las evaluaciones que debe presentar todo estudiante colombiano cuando finaliza los grados tercero, quinto, noveno, undécimo, respectivamente, y en el último año de educación superior (ya sea una carrera técnica, tecnológica o profesional). En dichas pruebas se evalúa la habilidad del estudiante para aplicar sus conocimientos en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Sociales, y un componente de ciudadanía (MEN, 2010).

La toma de datos para su posterior análisis se realiza con estudiantes del grado noveno de una institución en la ciudad de Medellín; estos se encuentran en un rango de edades que oscilan entre los 14 y 17 años; esto permite identificar falencias significativas en los componentes descritos desde las competencias interpretativa, razonamiento y argumentación. Además, específicamente se evidencia cómo al estudiante se le dificulta interpretar la gráfica de una Función Lineal y establecer su ecuación a partir de esta. De igual forma presentan falencias en la [2]modelación de expresiones algebraicas que representan funciones polinómicas.

En el mismo sentido, se observa que en el componente variacional y geométrico los estudiantes presentan un desempeño bajo en los aprendizajes evaluados, correspondiente al

[2] Tomado de Lineamientos Curriculares de Matemáticas. MEN. 1998.

72%. Estos son analizados a la luz de las competencias comunicativa, razonamiento y resolución de problemas, encontrando aprendizajes que deben mejorar, resaltando los siguientes: el uso de diferentes representaciones para modelar situaciones de variación, la falta de reconocimiento del lenguaje algebraico, identificación de características de gráficas cartesianas, uso de expresiones algebraicas equivalentes y de propiedades de los números reales para resolver problemas, así como la solución de problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas (Icfes, 2015).

Otro elemento a tener en cuenta en el análisis fueron los simulacros realizados por la Alcaldía de Medellín en el año 2016. De acuerdo con los resultados obtenidos, hay niveles de desempeño bajo en los componentes numérico-variacional y geométrico-métrico correspondientes al 74.5% de la población evaluada, componentes en los que según los estándares de matemáticas (MEN, 2010), se encuentra ubicado el objeto matemático a intervenir en esta investigación.

De igual forma, en las competencias evaluadas (interpretativa, razonamiento y argumentación, formulación y ejecución) los estudiantes no alcanzan a llegar a la media Nacional que se ubica en 50 para el 2016, según el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE).

1.1. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA FUNCIÓN LINEAL DESDE LA MALLA CURRICULAR INSTITUCIONAL

En la malla curricular el concepto de función está implícito desde los primeros grados de la etapa escolar, donde se inicia a trabajar la matemática de forma simbólica; en el grado cuarto se trabaja con proporcionalidad y de manera más simbólica ecuaciones en grado quinto, siendo esto el fundamento principal para trabajar la Función Lineal en la secundaria. En el grado sexto, se contextualiza el trabajo con las ecuaciones en una variable en el conjunto numérico de los naturales, y en séptimo se involucran ejes coordenados con los sistemas cartesianos, razones y proporcionalidad inversa y directa; en este punto se trabaja con las representaciones en lenguaje natural, numérico y simbólico.

En los grados posteriores se profundiza el estudio de la Función Lineal al abordar álgebra en octavo y noveno, siendo este último donde se trabaja el objeto matemático en su expresión analítica y gráfica.

En la Educación Media nuevamente se retoma la Función Lineal, como punto de partida en la definición de otras funciones como exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, entre otras, a partir de las cuales se trabaja el concepto de límite de funciones y a la función derivada.

Al observar la malla curricular se evidencia que el objeto matemático se aborda desde muy temprano en la etapa escolar; sin embargo, solo se privilegia dos tipos de interpretación (algebraica y geométrica) dejando de lado las estructuras en las cuales el estudiante debe favorecer las propiedades del objeto matemático.

Por otro lado, en el currículo institucional y nacional, el objeto matemático se ve desarticulado desde lo algebraico, lo geométrico y lo estructural; además que no se observan estrategias claras que propicien una interrelación entre estas y el uso de articuladores en el sentido de entrelazar dos dominios que lleven al estudiante a la comprensión profunda del concepto.

En la investigación realizada por Fabra y Deulofeu (2000), se detecta que, en el ámbito escolar, el trabajo con la Función Lineal se reduce a trazar la gráfica a través de una serie de pasos definidos por el docente, dejando de lado las otras representaciones, lo que no determina una fuente de error en el aprendizaje y reconocimiento de la función.

Al respecto, Cantoral y Montiel (2001) argumentan que la función puede tener diferentes interpretaciones dependiendo del contexto en el cual se plantea, pero resaltan la importancia de propiciar en el estudiante el paso de una representación a otra de una manera dinámica.

Retomando las ideas de las dos investigaciones anteriores, señalamos que con la presente investigación se indaga en cómo los estudiantes describen y reconocen las diferentes interpretaciones de la Función Lineal y además, a través de que elemento matemático se logra transitar para así analizar las implicaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje de este tópico.

1.1.2 ANTECEDENTES ASOCIADOS A LA FUNCIÓN LINEAL

Respecto al objeto matemático de investigación, el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, plantea algunos estándares curriculares que permiten entender las competencias que deben desarrollar los estudiantes al finalizar el grado noveno, deben haber alcanzado. Dentro de estos se encuentran las siguientes:

> En el componente Numérico-Variacional plantea:
>
> Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
> Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
> Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
>
> En el componente Geométrico-Métrico propone los siguientes:

> Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
> Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
> Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (p.87).

Vale la pena resaltar que la Función Lineal se encuentra de manera específica en los Derechos Básicos de Aprendizaje –DBA–, que según el MEN (2016) debe alcanzar el estudiante de acuerdo al grado en el que se encuentre, mencionando que los estudiantes deben estar en capacidad de "resolver problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes" (p. 77).

Como se puede ver en los DBA, en su última versión, solo se privilegian interpretaciones del objeto matemático respecto a lo algebraico y lo geométrico, desconociendo que existen formas estructurales de los objetos que valen la pena estudiar y analizar como una manera más para comprender un concepto.

Otro aspecto a considerar en la revisión de los antecedentes en torno a la Función Lineal, tiene lugar en la experiencia docente, la cual permite identificar dificultades relacionadas con la modelación de situaciones en las que intervienen variables, entendiendo esta no solo desde lo algebraico sino también desde lo geométrico y lo estructural. Una de las razones radica en la forma como el docente presenta la información del concepto al estudiante, el cual en ocasiones no ve ninguna atracción ni importancia; de igual manera, la falta de motivación juega un papel importante a la hora de aprender, y sin duda alguna el contexto social en el cual este se desenvuelve.

De igual forma se debe proveer de sentido y significado el concepto de Función Lineal, esto mediante estrategias llamativas e interesantes que motiven en el estudiante el deseo de aprender, máxime cuando se trata de jóvenes entre los 14 y 17 años.

Por lo anterior, es necesario que en los ambientes de aprendizaje se planteen actividades contextualizadas y transversales, en las que el estudiante pueda evidenciar la Función Lineal desde sus múltiples interpretaciones. Esta manera de abordar el objeto matemático permite que se presenten menos dificultades en torno a la comprensión del mismo, abordándolo desde diferentes miradas que favorecen la articulación de una y otra.

Las dificultades descritas anteriormente pueden verse permeadas en la estructura conceptual que se observa en diferentes libros de texto, donde desde lo didáctico se evidencian ambigüedades relacionadas con el concepto de Función Lineal. Algunos autores la definen como aquella que tiene la expresión $f\colon R \to R$ tal que $f(x) = mx,\ y$

otros, como la expresión de la forma $f: R \to R$ tal que $f(x) = mx + b$, entendiéndose que esta última es una transformación de la Función Lineal (Grossman, 1996).

Al respecto se hacen algunas precisiones que describen la ambigüedad antes mencionada, las cuales se observan en diversos textos tanto de nivel básico como superior, puntualizando en que el concepto de Función Lineal se presenta en algunos como una función cuya gráfica es una línea recta –cualquiera–, en otros, como aquella recta que pasa por el origen. Al respecto, en la revisión realizada, se evidencian algunas de estas ambigüedades.

> …En el Cálculo de Hughes Hallett, Gleason, y *et al*., (1997) se define la Función Lineal como aquella que tiene forma $f(x) = b + mx$, se aclara que su gráfica es una línea con las condiciones de que m, es la pendiente o razón de cambio y b, es la intersección vertical. En el mismo texto se distingue la proporcionalidad como caso particular de la Función Lineal, definiendo que si y es directamente proporcional se cumple que $y = kx$. En el cálculo de Louis Leithold (1998) se define análogamente y se hace explicito el caso de una Función Lineal particular $f(x) = x$ llamada identidad. En Cálculo y Geometría Analítica de Larson, Hostetler, & Edwards (1999) se trabaja la recta presentando diferentes elementos y formas analíticas de mostrarse, no se menciona en el apartado la palabra función y se emplea: ecuación lineal. En el texto Cálculo de Tom Apóstol (1988, p. 66) se menciona: una función g definida para todo real x mediante una fórmula de la forma $g(x) = ax + b$, se llama Función Lineal porque su gráfica es una recta. (p. 66).

Existen investigaciones, que indican que la Función Lineal es uno de los conceptos donde la proporcionalidad tiene su mayor utilidad y situaciones como el proceso de relacionar números, analizar secuencias y seguir patrones, aportan de manera efectiva a la comprensión del concepto de función. En el mismo sentido, se recrean elementos conceptuales “previos” como relaciones, conjuntos numéricos y sus propiedades, es decir, transversaliza tales conceptos presentes en el currículo de matemáticas.

A partir de los elementos descritos anteriormente, surgen algunos interrogantes que permiten abordar la problemática de investigación y determinan un horizonte claro para intervenir la misma:

- ¿Qué elementos identifican los estudiantes en cada interpretación de la Función Lineal?
- ¿Cómo fortalecer y motivar el tránsito entre lo geométrico, lo aritmético y lo estructural de la Función Lineal cuando los estudiantes abordan situaciones contextualizadas de este tópico?
- ¿Qué estrategias debe idearse el profesor en la clase de matemáticas para propiciar el tránsito entre lo geométrico, lo aritmético y lo estructural de la Función Lineal?

En esta investigación se hace énfasis en la comprensión de las diferentes interpretaciones de la Función Lineal y su articulación en diversos contextos, como elementos esenciales en el aprendizaje del concepto; de igual manera se hace la conexión del estudio de la proporcionalidad directa con las funciones lineales, considerando como referente la Teoría Modos de Pensamiento. (Capítulo 3).

1.2. ANTECEDENTES

Al realizar un rastreo en torno a la Función Lineal desde la Didáctica de la Matemática, se encuentra que algunos autores han realizado investigaciones enfocándolas desde diversos marcos teóricos del área, que permiten tener diversas miradas con respecto a la forma de abordar dicho objeto. Algunas de estas se presentan a continuación:

Ospina (2012), en su tesis de Maestría *"Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal"*, plantea cómo en el contexto escolar el concepto de función se maneja de una manera estática, donde el estudiante lo que hace es memorizar una fórmula (cita a Vasco, 1999); aspecto que, según la autora, le está quitando importancia a dicho concepto como herramienta que permite analizar fenómenos de la vida real. Para abordar dicha problemática enfoca su investigación desde la perspectiva de las "representaciones semióticas" concluyendo que el concepto de función debe abordarse desde el lenguaje natural y luego hacer otras representaciones (gráficos, tabular, figuras, simbólico), esto buscando minimizar la conceptualización formal de dicho objeto matemático. Si bien la propuesta está basada en analizar diferentes representaciones del objeto matemático, se observa cómo esta se sitúa en solo dos tipos de pensar lo cual da referentes para comprender la Función Lineal desde lo aritmético y lo geométrico.

Giraldo (2012), en su tesis de Maestría *"Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada por las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el colegio Marymount grupo 9° del Municipio de Medellín"*, aborda el estudio de la Función Lineal desde el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Este trabajo se basa en las Teorías del Aprendizaje, allí se resalta la importancia que tiene la Función Lineal en los diferentes espacios cotidianos donde se desenvuelve el individuo. El autor destaca que se puede usar en situaciones diversas de variación que involucren crecimientos lineales; a su vez, resalta que las TIC han pasado a ser una herramienta importante porque facilitan los procesos de enseñanza, llamando a los docentes a aprovechar las herramientas tecnológicas en el trabajo con los estudiantes. En este trabajo de investigación se rescata el uso de las TIC como herramienta facilitadora en los procesos de enseñanza, lo cual aporta un referente valioso para abordar la función lineal como lugar geométrico mediado con el *software* Cabri.

Así mismo, Muñoz, Piedrahita y Jessie, (2012), en el artículo de revista "*Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC"*, plantean abordar la Función Lineal desde contextos reales y mediadas por las TIC, concluyendo que las funciones lineales son de vital importancia y con una adecuada interpretación se pueden resolver problemas del contexto real, por ello hay que motivar al alumno para que aprenda a identificar situaciones que representen fenómenos lineales aplicando métodos matemáticos en la construcción de soluciones, y dichas construcciones deben ir de la mano de las Nuevas Tecnologías, para aportar diversas herramientas propiciadoras de conocimiento significativo. En el contexto de esta investigación, se valora la puesta en contexto de situaciones reales que involucran la Función Lineal, ubicándose en un pensar aritmético mediado por las TIC.

Acosta y Joya (2013), en la revista El Astrolabio en el artículo *Ingeniería Didáctica para la Enseñanza de la Función Lineal: análisis preliminar*, plantea otro enfoque teórico desde el cual se ha estudiado el objeto matemático que hace parte de la presente investigación, es el de la Didáctica de las Matemáticas francesa, más precisamente desde las construcciones conceptuales usadas por Brousseau (1986) en su teoría de las Situaciones Didácticas, donde se resalta el concepto de "trasposición didáctica" entendida como "ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en donde han tomado su origen, su sentido, su motivación y su empleo" (Brousseau, 1986, citado en Acosta y Joya, 2013, p. 119). Desde esta óptica se concluye que es necesario el diseño de actividades que lleven a un manejo de la Función Lineal como un objeto, y que se tenga una mirada más estructural y menos operativa (Acosta y Joya, 2013). Este artículo brinda un elemento muy importante a tener en cuenta en el proceso de investigación, en lo que respecta al pensar estructural del objeto matemático. Sin embargo, ya que se trata de un análisis preliminar no precisa con claridad cuáles fueron las estrategias y actividades que evidencian el uso de un conjunto de propiedades que enmarcan al objeto en un pensar estructural.

Ibarra y Moreno (2010), en su tesis de pregrado "*Una aproximación al concepto de Función Lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana"*, propone una manera de aproximarse al objeto matemático Función Lineal por medio del desarrollo de regularidades, quienes consideran que identificando los criterios que rigen las reglas de formación se puede llegar al patrón que se está repitiendo, permitiendo, de esta manera, un acercamiento a un caso particular de la Función Lineal como lo es la proporcionalidad directa simple, basándose en un marco teórico a la luz del esquema multiplicativo cuaternario propuesto por Vergnaud enfocado desde la formulación de problemas. Esta forma de entender la función lineal permite, sin involucrar un lenguaje simbólico como $f(x)$, que el estudiante identifique elementos que le permitirán, posteriormente, entender con mayor claridad cuáles son las relaciones que se dan entre las variables dependientes e independientes. Dicho estudio permitió concluir que los estudiantes lograron identificar la constante de proporcionalidad como el valor que posibilita pasar de una magnitud a otra, así como la construcción de generalizaciones de las situaciones que se estaban intentando resolver.

Siguiendo con la idea de retomar el concepto de variación en la construcción de la Función Lineal, Posada y Villa (2006) en su tesis de Maestría "*Propuesta didáctica de* *aproximación al concepto de Función Lineal desde una perspectiva variacional”,* realizan una aproximación a dicho objeto, tomando conceptos como la modelación matemática y los registros semióticos de representación, destacando que el concepto de Función Lineal puede ser analizado como un modelo matemático donde están presente la variabilidad y la relación de diferentes magnitudes. A partir del estudio realizado, los autores concluyen que, tomando como referente el componente variacional, se debe tener en cuenta la dependencia e independencia entre las magnitudes, involucrando en el proceso de enseñanza las tablas de valores, además de identificar la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal relevante al momento de modelar varios fenómenos. A continuación, se presenta una situación que los autores consideran dentro de su propuesta didáctica.

El aporte que hace este trabajo, junto con el de Ibarra y Moreno (2010), se evidencia en el hecho de lograr una relación entre el pensar aritmético que conlleva a un pensar geométrico a través del análisis de las regularidades que siguen un patrón. En ambos es relevante el uso de situaciones en contexto, que permiten identificar elementos propios de la Función Lineal como lo es el caso de la pendiente, a través del concepto de proporcionalidad.

Guzmán (2006), en su tesis de pregrado *“Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de Educación Secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la Función Lineal”*, aborda el estudio de la Función Lineal analizando las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de utilizar sus diferentes representaciones, el marco teórico está fundamentado en los trabajos de Duval (1998) sobre los registros de representación. En el estudio se concluye que los estudiantes muestran dificultades tanto en la interpretación como en la interacción entre los registros algebraico, gráfico y tabular. Se recomienda que es fundamental que los estudiantes puedan articular y realizar la conversión de las diferentes representaciones semióticas mediante actividades que favorezcan el aprendizaje de la función lineal. Con este trabajo se fortalece la idea de propiciar una articulación entre las diferentes formas de pensar el objeto matemático; hace énfasis en el pensar aritmético y en el geométrico, analizando las dificultades que presentan los estudiantes cuando deben pasar del uno al otro.

Cuesta (2007), en su tesis Doctoral “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica”,* plantea, desde la línea de investigación conocida como planteamiento matemático avanzado –PMA–, que las unidades didácticas pueden servir de herramienta para estimular el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, y concluye que dichas unidades son un instrumento de aprendizaje que propone una manera intuitiva para abordar el concepto de función en el estudio se corrobora la existencia de dificultades en los estudiantes, relacionada con el análisis de tareas que implican interpretar y construir un concepto. En esta investigación doctoral se valida la estrategia didáctica –Unidad Didáctica– como un instrumento valioso a la hora de enseñar un concepto, priorizando un pensar aritmético y geométrico de manera aislada; por otro lado, se evidencian elementos comunes en la problemática que se propone abordar en esta investigación, que hacen referencia a las dificultades presentes en los estudiantes, al momento de interpretar la gráfica de una Función Lineal y establecer su ecuación a partir de esta.

Cifuentes (2011) en su tesis de maestría *"Propuesta de enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos",* resalta que la enseñanza del álgebra y la solución de ecuaciones, se presenta de manera tal que no favorece la flexibilización del pensamiento, dejando de lado la interacción entre las diferentes formas de pensar el objeto matemático. La investigación se fundamenta en el marco teórico Modos de Pensamiento propuesto por Sierpinska (2000), resaltando que dicho marco se puede utilizar como una estrategia de enseñanza para el aula. En el estudio se concluye que presentar los contenidos de ecuaciones y modelos desde una visión geométrica, gráfica y utilizando algunas propiedades, permite que se den procesos de razonamiento en los estudiantes involucrando los distintos modos de pensamiento, favoreciendo un aprendizaje significativo en la construcción de conceptos, relaciones e ideas.

Si bien la mayoría de los estudios analizados anteriormente no se fundamentan en el marco teórico abordado en esta investigación, sin embargo permiten visualizar la importancia que se le ha dado al objeto matemático analizándolo desde diferentes perspectivas teóricas. Se resaltan elementos relevantes como es el caso del uso del pensar aritmético y geométrico a través del estudio de las regularidades, mediado por las herramientas tecnológicas en el proceso formativo. Pero en todas esas investigaciones presentadas, no se percibe un interés por analizar el objeto matemático desde sus propiedades que lo ha matemático único, limitándose a estudiarlo sólo desde dos miradas, dejando de lado su parte estructural, siendo este último uno de los enfoques desde el cual se quiere estudiar el objeto en el presente trabajo de investigación, sin descartar lo analítico y lo geométrico. De hecho, lo que se busca es una articulación entre los tres pensares matemáticos lo geométrico de la Función Lineal, lo aritmético de la Función Lineal y lo estructural de la Función Lineal, con la finalidad que su articulación genere una comprensión profunda del concepto.

A manera de síntesis, se puede ver que son muchas las investigaciones y los reportes que se han realizado respecto al objeto matemático en mención, desde diferentes perspectivas teóricas, a nivel del bachillerato y universidad; sin embargo, se limitan a analizarlo desde el pensar aritmético y geométrico, dejando de lado las propiedades que lo definen como estructura, aspecto que marca la diferencia en la presente investigación, donde el objetivo es abordar no solo la Función Lineal desde lo aritmético y geométrico, de manera aislada, sino también involucrar la parte estructural en un sistema articulado.

De lo anterior se deriva la necesidad de construir una estrategia de intervención, que permita trabajar con los estudiantes del grado noveno, el concepto de Función Lineal desde diferentes interpretaciones, propiciando un aprendizaje con sentido, donde estos puedan construir conceptos a partir de situaciones contextualizadas y prácticas; lo cual desde la didáctica de la matemática lo propicia el Marco Teórico Modos de Pensamiento, teoría que se detallará en el capítulo 3.

Dicha estrategia de intervención se llevará a cabo a través de una Unidad Didáctica, entendida como un medio que permite facilitar la enseñanza de un objeto matemático, propiciando su comprensión. Dicha Unidad estará estructurada por un conjunto de actividades que permite al estudiante ser parte activa de su proceso de aprendizaje (Herrera, 2014).

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación se propone estudiar desde la perspectiva teórica de los Modos de Pensamiento las implicaciones en la implementación y desarrollo del concepto Función Lineal, entendido este en su complejidad de interpretaciones.

1.4 PREGUNTA PROBLEMÁTICA

Al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias Matemáticas, ¿cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal en el grado 9°?.

1.5. OBJETIVO GENERAL

Analizar las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento en las prácticas de aula.

1.6 OBJETIVOS ESPECIFÍCOS

- Caracterizar los Modos de Pensamiento para la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal.
- Diseñar una Unidad Didáctica que propicie el tránsito entre los Modos de pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal.
- Implementar actividades en el aula para estudiantes del grado 9° que propicien el tránsito entre los Modos de Pensamiento en la práctica de la Función Lineal.
- Contribuir al mejoramiento de los componentes Numérico-Variacional y Geométrico-Métrico en los resultados de las Pruebas Saber mediante la implementación de una Unidad Didáctica.

1.7. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Luego de revisar la problemática y los elementos presentes en torno a esta, se evidencia cómo el objeto matemático Función Lineal, es un componente esencial del pensamiento numérico-variacional y geométrico-métrico, en cuanto que involucra diversos conceptos presentes en el currículo escolar.

El rastreo realizado en torno al objeto matemático muestra que éste es un concepto muy importante en la enseñanza de las matemáticas, que debe ser abordado desde sus diferentes interpretaciones, resaltando elementos importantes como es el caso del uso del lenguaje natural, del lenguaje algebraico y geométrico, así como del estudio de las regularidades. De igual manera, se observan algunas de las dificultades que presentan los estudiantes cuando deben pasar de una interpretación a otra, evidenciando el énfasis que se da sólo a dos tipos (aritmética y geométrica), dejando de lado las estructuras intrínsecas que podrían propiciar otra mirada del mismo objeto flexibilizando el pensamiento de los aprendices.

En este sentido los objetivos de investigación permiten guiarla y plantear estrategias de intervención a la problemática, marcando un norte claro en la ejecución de las actividades.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS DE LA FUNCIÓN LINEAL

Gran parte de los objetos matemáticos son hoy conocidos, gracias a la curiosidad y necesidad del hombre por resolver situaciones presentes en cada momento. Desde una perspectiva histórico-epistemológicos el objeto matemático Función lineal ha pasado por un proceso de evolución importante, que siglo tras siglo se ha transformado hasta lo que hoy se conoce.

En el siguiente capítulo se realiza un rastreo histórico por algunas culturas que aportaron significativamente a la evolución de lo que hoy se conoce como función y cómo a partir de este concepto se desarrolla y surge la Función Lineal, permitiendo con ello conocer la génesis de este objeto matemático, enriqueciendo así su estudio epistemológico y didáctico.

2.1 HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE LA FUNCIÓN LINEAL

Aunque el concepto de función formalmente constituido es reciente, se realiza un rastreo por varios autores que logran precisar cronológicamente cómo surge, distinguiendo varias etapas hasta mediados del siglo XIX (Youschkevitch, 1976, citado en Díaz, 2013). Como evidencia de una primera aproximación al concepto de función, se resalta lo siguiente:

> En la Antigüedad la civilización egipcia resalta un elemento importante en el papiro de Rhind (Ver figura 1) y el de Moscú (Ver figura 2), escritos entre los años 2000 a.C. y 1788 a.C., en los cuales se observan series de números, operaciones, relaciones geométricas, cálculos de pirámides y problemas prácticos resueltos en forma aritmética o con ecuaciones lineales. En particular, se encuentra implícito el objeto función en las construcciones de pirámides planteadas en el Papiro de Rhind, pues se usaba para la medición y la variación de la altura con respecto a una recta oblicua. (p. 2).

Figura *1:* Papiro de Rhind. R*ecuperado el 9 de* Junio de 2018 de *https://www.cultura10.org/egipcia/papiros/rhind/?cn-reloaded=1*

Figura 2: Papiro de Moscú. *Recuperado en* agosto 21 de 2016 *de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematica.*

Por su parte, los Babilonios presentan "cientos de tablillas que contienen información relacionada con cálculos astronómicos, tiempos de luminosidad de la luna, visibilidad de un planeta y el ángulo de este con respecto al sol, así mismo relacionaban números con sus raíces, cuadrados, cubos" (Vargas, 2011, p. 4).
Esta civilización también centra su atención en el "estudio de problemas de variaciones continuas, tales como la luminosidad de la luna en intervalos de tiempos de igual longitud, en esta cultura se encontraron tabulaciones de valores de $n^2 + n$ donde n tomaba valores en los números naturales" (Ruiz, 1994, p. 150).

No se puede asegurar que los babilonios expresaran sus resultados de forma general. En las tablillas sólo consta el estudio de casos concretos, sin ninguna formulación genérica (Ruiz, 1998, p. 107).

Con respecto a la generalización en esta época, Boyer (1968) plantea lo siguiente:

> El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios. Si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo (p. 66).

Aunque autores como Youschkevitch (1976) aseguran que en la matemática antigua no hubo ninguna idea de función; otros investigadores como Pedersen (1974) plantean que los matemáticos babilónicos poseían un auténtico instinto de funcionalidad, ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, aspecto que sí está presente en las numerosas tablas de los cálculos Babilónicos (Pedersen, 1974, p. 36, citado en Ruiz, 1998, p. 107).

La matemática babilónica y la egipcia alcanzan un alto grado de desarrollo de la habilidad en las operaciones, para abordar la solución de problemas de la vida cotidiana, desde la repartición de una herencia hasta el cálculo de interés compuesto. La aritmética babilónica permitía hacer cálculos astronómicos y mercantiles, así como lo relacionado con áreas y volúmenes, donde en este último está inmiscuida la proporción directa (Filloy, 1998).

En el libro clásico en la cultura china Chiu chang Sua-shu de la dinastía Han, en el Capítulo III se presentan problemas de aplicación de impuestos a productos de cualidades diferentes; así como aplicaciones de "la regla de tres" (Acosta, 2011, p. 120).

Tanto en la cultura egipcia como en la China, aparece la noción de proporcionalidad, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos en el cálculo de áreas y volúmenes.

Con respecto al aporte de los griegos, Vargas (2011) plantea:

> Los griegos también realizaron grandes aportes a la matemática y la geometría, estudiaron fenómenos naturales en los que se involucraba el concepto de variabilidad. Así, por ejemplo, Heráclito (535 a.C. – 484 a.C.), examinó las ideas de cambio y cantidad variable relacionadas con problemas de movimiento, continuidad e infinito. Por su parte, Apolonio (242 a.C. – 190 a.C.), dedujo una propiedad de las cónicas que da una condición necesaria y suficiente para que un punto este situado sobre una curva, dicha propiedad es expresada en términos de proporcionalidad de segmentos y puede asociarse con la ecuación de la curva referida a un vértice, en la actualidad (p. 4).

Continuando con el pensamiento de los griegos, se debe destacar que en estos se veía claramente la idea de función reflejada en el concepto de cambio y la relación entre magnitudes variables. “Los griegos concebían el cambio y el movimiento como algo externo a la matemática, de hecho Aristóteles opone la física, que concierne a los objetos en movimiento, a la matemática que es una ciencia netamente teórica” (Ruiz, 1994, p. 151).

Este pensamiento poco dinámico de la matemática se mantuvo por mucho tiempo, lo que llevaba a que los matemáticos no hablaran en términos variables sino de incógnitas e indeterminadas, llevándolos al concepto de proporción y ecuación más no de Funciones. (Ruiz, 1994).

Un primer acercamiento a la relación entre la magnitud y el número, la presenta Pitágoras quien considera que todo es número; considerando que el número podía ser asociado a cualquier magnitud, intentando encontrar relaciones entre los números y las magnitudes por medio de las proporciones, favoreciendo la solución algebraicamente los problemas geométricos (Ruiz, 1994).

Euclides emplea la proporcionalidad directa, donde relaciona el área del círculo con el cuadrado de su diámetro para inferir el área comprendida dentro de la circunferencia (Hofmann, 2002).

Se resalta que la noción de linealidad aparece de manera explícita cuando Euclides menciona la recta en todos sus postulados. Así, por ejemplo, en su libro Los Elementos, escrito hacia el año 300 a. C, presenta los conocimientos de la Grecia clásica, deduciéndolos a partir de cinco postulados, de los cuales tres hacen referencia a la recta de manera directa, y para efectos del presente trabajo de investigación, se tomarán dos de estos (Elementos de Euclides, Traducción. Sir Thomas, 1956):

Postulado 1

“Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto” (p. 6).

Postulado 2

“Toda recta se puede prolongar indefinidamente” (p. 6).

La homogeneidad que llevaba a comparar sólo magnitudes de la misma naturaleza, pudo obstaculizar el desarrollo de la noción de función, pues impedía encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional (De Cotret, 1985, citado en Ruiz, 1998).

En esta primera etapa se observa un acercamiento a la función desde el pensar aritmético y geométrico; sin embargo, no se evidencia una interrelación entre uno y otro, aspecto que conlleva a determinar la interpretación aislada que, para la época, se tenía del concepto de función.

Una segunda etapa del desarrollo del concepto de función aparece en la edad Media, dividida en dos partes comprendidas entre el año 500 hasta el año 1500. En esta etapa se destacan las matemáticas hindúes y árabes en el campo del álgebra y la trigonometría, se encuentran soluciones de ecuaciones lineales con una incógnita sin estar presente la idea de variable, por lo cual no se considera que una ecuación con dos incógnitas establezca una relación funcional entre dos variables (Boyer, 1946).

A partir del siglo XIII hasta inicios del período moderno, aparecieron con clara regularidad tratados sobre proporciones. "Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $y = kx^n$, donde n tiene un valor racional. Esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton" (Boyer, 1946, p. 9).

Con Robert Grosseteste (1175-1253) aparecen conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, y aceleración, todos ellos íntimamente ligados al concepto de función (Vargas, 2011).

La representación gráfica de la función inicia por primera vez con Nicolás Oresme (1323 - 1382), quien traslada "al plano lo que los geógrafos habían hecho sobre la esfera; consideraba que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada sobre un segmento rectilíneo" (Vargas, 2011, p. 5). Oresme se cuestiona por el dibujo o la representación gráfica de las cosas que varían, apareciendo una sugerencia primitiva de lo que en la actualidad se llama representación gráfica de funciones, pensando en que todo lo que varía podría ser imaginado como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo (Ruiz, 1998).

Nicolás Oresme tenía como objetivo representar por una figura las intensidades de una cantidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud análoga; dichas intensidades estaban representadas por segmentos (Ruiz, 1998). Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua (Youschevitch, 1976).

Oresme empieza a relacionar diferentes variables representándolas por medio de figuras, así, por ejemplo, dibuja "una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y para cada instante traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta en dicho punto” (Ruiz, 1994, p. 159). En este caso obtiene la siguiente representación gráfica (Ver figura 3).

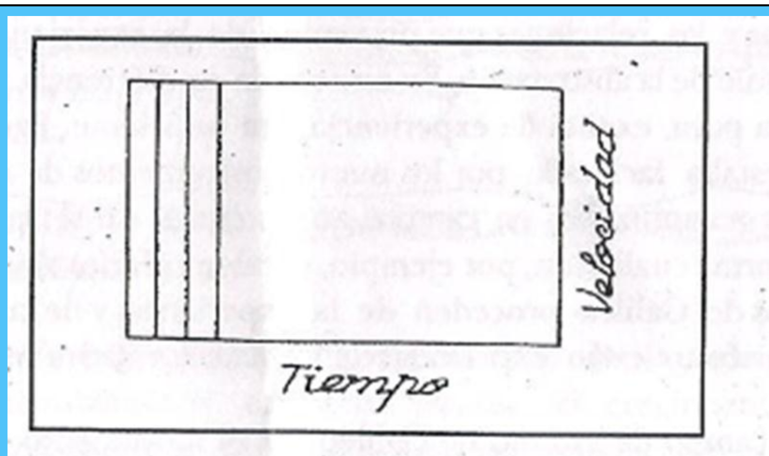


Figura 3: Relación de las variables tiempo y velocidad. (Ruiz, 1998, p. 114)

Aunque los términos latitud y longitud que utilizaba Oresme se podrían asemejar a las ordenadas y abscisas que se conocen en la actualidad respectivamente, y sus representaciones gráficas se parecen a la geometría analítica, se debe enfatizar que la longitud horizontal que plantea el autor no es estrictamente equivalente a la abscisa de la geometría analítica cartesiana. Su interés no era describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino en la figura misma. Sin embargo, su obra permite dar un paso adelante hacia la creación de la geometría analítica y hacia la introducción en la geometría de la idea de movimiento, de la cual carecía la matemática griega (Crombie, 1979). Podemos decir, no obstante, que fue capaz de captar el principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva (Ruiz, 1994).

Los nuevos métodos de la física matemática se fueron desarrollando con la idea de relación funcional. Existía una concepción sistémica de las variables concomitantes entre causa y efecto, expresando el fenómeno que se quería explicar –actualmente conocido como variable dependiente– como una función de las condiciones necesarias y suficientes de su producción –hoy conocidas como variables independientes–, donde se ve cómo están relacionados los cambios de la primera con los de la segunda (Crombie, 1979).

Así mismo, se desarrollan dos métodos para expresar las relaciones funcionales; el primero fue el “álgebra de palabras” utilizado por Bradwardino en la Mecánica, donde se conseguía la generalización empleando letras del alfabeto, en vez de números, para reemplazar las cantidades variables, mientras que las operaciones se describían con palabras y no con símbolos como se hace en el álgebra actual. El segundo fue a través de un método geométrico por medio de gráficas. En la Edad Media, también se presentan diferentes obstáculos epistemológicos en torno a la aparición tardía del concepto de función, destacando los siguientes:

> La concepción de variabilidad como una característica exclusiva de las magnitudes físicas se constituye en un obstáculo epistemológico; los matemáticos de esta época consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Existía un nivel desproporcionado entre el nivel de abstracción de las teorías y la falta de un instrumento matemático para su desarrollo. Continuaba también la disociación entre número y magnitud (Vargas, 2011, p. 5).

Es de resaltar que para la Edad Media, tanto hindúes como árabes muestran una forma de pensar la función desde una mirada algebraica y trigonométrica, sin darle mayor relevancia a las interpretaciones de tipo geométrico. Sólo con Oresme (1323-1382), se da una mirada a la representación gráfica de la función, posibilitando una aproximación geométrica frente a los fenómenos de variación y cambio (Posada y Villa, 2006).

Posteriormente, en el período Moderno (1450-1650) ocurrieron una serie de avances que fueron fundamentales para el surgimiento del concepto de función: “La unión del álgebra y la geometría, la introducción del movimiento como un problema central en la ciencia, la invención del álgebra simbólica y la invención de la geometría analítica”. (Kleiner, 1989, p. 283).

En el período moderno se distinguen dos direcciones fundamentales en el desarrollo de la matemática: en primer lugar, se da un perfeccionamiento serio del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular. Estas dos direcciones beneficiarán el desarrollo del concepto de función, la primera respecto a la simbolización y la segunda respecto al estudio de las funciones trigonométricas. Los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar tanto la formulación como la expresión de lo que hoy se conoce como “variable” en una función o “incógnita” en una ecuación (Ruiz, 1994).

Stiefel (1544), completa la idea de Chuquet (1484) en torno al estudio de la progresión aritmética $1, 2, 3, 4, \dots n, \dots$ y la progresión geométrica $a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots$, donde observa que si hacía corresponder los términos de igual rango de dichas progresiones, la suma de dos números de la progresión aritmética coincide con el producto de los dos números correspondientes de la progresión geométrica. Este trabajo permitió ir concibiendo una idea más moderna de funciones definidas por una correspondencia determinada entre la variable dependiente y la independiente (Ruiz, 1994).

Galileo Galilei (1564-1642) evidencia el trabajo con funciones y variables cuando busca los resultados y las relaciones que provienen de la experiencia más que los que provienen solo de la abstracción, así como el momento en que introduce lo numérico en las representaciones gráficas, expresa las leyes del movimiento incluyendo en ellas el lenguaje de proporciones y las relaciones inversa y directamente proporcional (Vargas, 2011).

En la idea de buscar las relaciones que provienen de la experiencia radica la diferencia entre Galileo y Oresme, ya que, para el segundo, la teoría pura, exenta de experiencia, era suficiente. Para Galileo, la experimentación estaba garantizada por los instrumentos de medida, quienes le permitieron introducir aspectos cuantitativos en campos en los cuales no se podía hablar antes de forma cualitativa, por ejemplo, el calor y el frío. A diferentica de Oresme, los gráficos propuestos por Galileo proceden de la experiencia y de la medida. Las relaciones de causa-efecto se expresan de manera cuantitativa verificable (Ruiz, 1998).

Nicolás Oresme en su libro "tratado sobre las dimensiones de las formas", plantea propone como tales dimensiones las que se consideran las primeras coordenadas generales. Se resalta que en dicho tratado se encuentran intuiciones directas de lo que posteriormente se conocerá como función.

El principal campo de estudio de Galileo fue el movimiento (velocidad, aceleración, distancia recorrida), buscando relacionar estos tres conceptos con la ayuda de leyes que están inspiradas por la experiencia y la observación (Ruiz, 1998). Esta insistencia de Galileo por estudiar el movimiento de manera cuantitativa, valiéndose de la experimentación, ha contribuido con la evolución del concepto de función. La necesidad de relacionar en forma funcional las causas y los efectos, fue un factor esencial en la concepción de la variabilidad dependiente (René. de Cotret, 1988).

En otro momento de este período, Descartes (1596-1650) desarrolla el concepto de función en forma analítica al representar una curva por medio de una expresión algebraica, fue el primero en plantear que una ecuación de x e y es una forma de mostrar dependencia entre cantidades, donde los valores de una pueden calcularse a partir de los valores de la otra, dando entrada a una relación de tipo funcional. Clasifica las curvas en mecánicas, es decir, aquellas que son trazadas con respecto a un sistema de coordenadas, pero de las cuales no se conoce la ecuación que las representa. Evidencia tener claros los conceptos de variable y de función, al clasificar las curvas algebraicas según sus grados y hallando la intersección de ellas mediante la solución simultánea de las ecuaciones que las representan (Vargas, 2011).

> Con una cierta analogía, desde el punto de vista histórico epistemológico, Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno. Persigue la unión empezada, pero no terminada por Viète, del Álgebra con la Geometría. En esta época se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de pares ordenados de números reales *(x, y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, *f(x,y)=0*) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita a su vez ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Acosta, 2011, p. 141).

Los aportes hechos por Descartes se dan en pleno Renacimiento, donde surge la función lineal en el plano Cartesiano, propiciando otros significados asociados a la misma ecuación lineal. Estos se pueden denotar como sucesos socioculturales de la época considerados como una “Revolución Científica” de la propia matemática. En aquel momento Descartes y Fermat dan origen a la Geometría Analítica al unificar la Geometría con el Álgebra, y con su consecuente inmersión en el ámbito de funciones (Acosta, 2011).

La importancia del método utilizado por Descartes y Fermat radica en el hecho de poder traducir cualquier problema geométrico bidimensional en un problema algebraico equivalente, dando origen a una nueva rama de la matemática denominada Geometría Analítica. La tarea de demostrar un teorema en geometría se cambia por buscar la demostración de un teorema correspondiente en álgebra o en análisis (Ruiz, 1998).

En el caso particular de Fermat, se resalta que aparte de las contribuciones a la teoría de números, anuncia un principio con la intención de estudiar los lugares geométricos planteando “siempre que en una ecuación se hallen dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico cuyos extremos describen una línea recta o curva afirmando que toda ecuación de grado uno tiene como lugar geométrico una recta” (Labraña, *et al*, 1995, p. 35).

Descartes fue el primero en darle uso a lo que llamaba líneas fundamentales. Fija de manera arbitraria “el origen de coordenadas sobre dos rectas que forman un cierto ángulo, y a tales ejes refiere cualquier figura a analizar sólo por puntos” (Labraña y otros, sf, p. 35).

Esta unión del álgebra y la geometría constituyó un cambio notable en las matemáticas, pues permitió pasar de expresar relaciones algebraicas geométricamente, como acostumbraban los matemáticos griegos, a una nueva perspectiva, expresar relaciones geométricas algebraicamente (Freudenthal, 2002).

La Geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en geometría (Eves, 1969).Y es con Descartes donde aparece claramente la expresión de dependencia general entre dos magnitudes (René de Cotret, 1985).

La introducción de funciones bajo la forma de ecuaciones tuvo el efecto de una revolución en el desarrollo de las matemáticas. El uso de expresiones analíticas unidas con las reglas para operar con ellas da al estudio de funciones un estatus de verdadero cálculo, abriendo nuevos horizontes en la matemática (Youschevitch, 1976).

El desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones resultó muy significativo, pues a través de estas se inicia a superar el obstáculo epistemológico de la diferenciación existente entre números y magnitudes (Sierpinska, 1989). Las letras que se usaron en Álgebra van haciendo cada vez más compleja la noción de magnitud, así para los matemáticos, el hacer una distinción entre magnitudes y proporciones, por un lado, y números e igualdades, por otro, está cada vez menos justificada. El Álgebra podría ser vista como un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional en Matemáticas, esto debido a que se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones (Ruiz, 1998).

La palabra función apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz en agosto de 1673, la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva. (Youschevitch, 1976, p. 56) y en 1718 Johan Bernoulli en un artículo dio la primera definición formal de función como: “Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes” (Rüthing, 1984, citado en Díaz, 2013, p. 16).

El desarrollo de la teoría de funciones se fundamentó en tres pilares: el primero es el crecimiento de los cálculos matemáticos, en segundo lugar, está la creación del álgebra simbólico-literal y en tercer lugar está la extensión del número. Luego, a principios del siglo XVII, comienza a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza, aspecto que incidirá en la evolución de la noción de función. El instrumento algebraico permite a Fermat (1601-1665) y a Descartes (1586-1650) descubrir la representación analítica. Comienza la formación de la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas en las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando fundamentalmente el método de coordenadas (Youschevitch, 1976).

En este período el concepto de función muestra una evolución en su desarrollo, donde Euler la concibe como una ecuación o fórmula definiéndola de la siguiente manera: “Por Función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes” (Rüthing, 1984, citado en Díaz, 2013, p. 16).

La noción de función permaneció sin cambios hasta inicios de 1800 cuando Fourier en su trabajo sobre las series trigonométricas, encontró relaciones más generales entre las variables, lo que permitió un cambio revolucionario en el desarrollo evolutivo del concepto de función, al dar una definición de la misma en la que hacía ver que lo primordial era la asignación de valores para la función. Contribuyó a la evolución del concepto de función al considerar fenómenos como la temperatura como una función de dos variables (Youschevitch, 1976).

En la teoría de los invarientes, Sylvester aborda los determinantes considerando que en el fondo la teoría de los determinantes es un álgebra sobre el álgebra, es un procedimiento de cálculo que permiten saber con anterioridad los resultados de las operaciones algebraicas, de la misma manera, con la ayuda del álgebra se puede dejar de realizar las operaciones de la aritmética (Labraña, *et al*, 1995).

Hacia la segunda mitad del siglo XIX, Felix Klein describe la geometría como el estudio de propiedades de las figuras que no varían a pasar de recibir la acción de un determinado grupo de transformaciones, lo que le permite a Cayley considerar por primera vez la teoría de las matrices, concluyendo que el conjunto de las matrices posee una estructura del álgebra. El desorden que se evidenciaba en las nociones algebraicas a principios del siglo XIX, se fue organizando hasta el punto de generarse el desarrollo continuo del álgebra lineal y multilineal, gracias a la introducción de las transformaciones geométricas y la noción de espacio vectorial Sobre R y C, y luego sobre cualquier cuerpo (Labraña, *et al*, 1995).

En 1829, Dirichlet formula por primera vez el concepto moderno de función en términos de $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$,. Esta definición fue extremadamente general, no decía ni una sola palabra sobre la necesidad de dar a la función por medio de una fórmula, sobre todo el dominio de definición. Definió función de la siguiente forma: "y es una función de una variable x , definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia" (Kleiner, 1989, citado en Díaz, 2013, p. 17).

En 1939, Bourbaki define la función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios "Sean E y F conjuntos. Una relación entre un elemento variable x y un elemento variable y se llama una relación funcional en y, si para toda yE, existe un único xE el cual está en la relación dada con x" (Rüthing, 1984, citado en Díaz, 2013, p. 18).

Otro elemento a tener en cuenta en la evolución del concepto de función, corresponde a los aportes de la trigonometría al desarrollo de las matemáticas en tiempos remotos, donde se usó en las grandes construcciones egipcias y estructuras astronómicas en los babilonios (Collette, 1998). Entre los aportes más significativos de la trigonometría al desarrollo del concepto de función se encuentra las relaciones existentes entre los elementos de la circunferencia, con las cuales se introducen algunas ideas sobre la variabilidad de las cantidades empleadas en la elaboración de sus tablas.

Si bien en el periodo moderno es donde el objeto matemático tiene su mayor desarrollo, se encuentra que también se presentaron algunos obstáculos, que no permitieron una evolución mayor de este, se destaca la rigurosidad del simbolismo algebraico, donde se llegó a tener en cuenta sólo aquellas relaciones que podían ser escritas mediante expresiones algebraicas y ecuaciones (Vargas, 2011).

Indiscutiblemente el periodo moderno trae consigo un avance significativo en torno a la función Lineal, y esto se evidencia en la unión entre el álgebra y la geometría cuando

Descartes y Fermat introducen por primera vez el concepto de linealidad, aspecto que no se resalta ni en la Antigüedad ni en la Edad Media. Esta unión permite darle una mirada diferente al objeto matemático, facilitando su análisis desde dos perspectivas que, en algún momento, presentan un punto de encuentro, y este se hace manifiesto en el momento en que Fourier define la función en términos de una sucesión de valores dados a la abscisa x, los cuales se corresponden con un número igual de ordenadas $f(x)$. Es en esta definición donde se observa la relación entre el pensar algebraico y el geométrico.

El análisis histórico realizado proporciona elementos para creer que el estudio del objeto en mención sigue en evolución, y que muchas de las dificultades que se tenían en aquellas épocas las presentan todavía hoy tanto estudiantes como docentes En la actualidad la discusión de cómo los matemáticos deben definir las funciones no ha cambiado significativamente, sin embargo, el tema no ha sido completamente resuelto.

2.2. CONCEPTO Y NOTACIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

Antes de empezar a hablar de la parte formal del concepto de función, es necesario retomar la idea propuesta por Sierpinska (1992), según la cual es importante introducir el concepto a través de una definición informal, sin utilizar una descripción estructural, lo que se podría lograr por medio de problemas prácticos de la vida real (Sierpinska, 1992). La autora considera que los cambios observados en el mundo real, las relaciones entre los objetos cambiantes y sus regularidades, están en estrecha relación con la identificación del concepto, favoreciendo su aplicación en problemas de índole práctico.

La propuesta de Sierpinska va encaminada a que el estudiante se familiarice y le encuentre sentido al concepto antes de entrar con la parte formal que, en la mayoría de los casos, tiende a confundirlo y a alejarlo del verdadero sentido matemático del concepto.

La idea de generar un acercamiento intuitivo al concepto matemático antes de cualquier formalización, lleva a reflexionar en torno a la aproximación que hace un niño ante la noción de linealidad (representación de la recta), la cual se ve enmarcada en la denominada "proporción cualitativa" al establecer comparaciones con respecto al tamaño de los objetos –mayor o menor que– (Ruiz y Valdemoros, 2006).

Este hecho parece evidenciarse en épocas tempranas de la humanidad, cuando se diferencia la talla de una persona y la de un animal muy grande. De otra parte, la "proporción cuantitativa" se evidencia cuando se resuelven problemas de estimación de interés simple en el pago de impuestos. Frente a la linealidad, se considera cierto paralelismo funcional entre el desarrollo individual y su desarrollo histórico social, en lo que respecta al surgimiento, comprensión y uso de los conceptos matemáticos asociados (Furinghetti y Radford, 2002).

Con respecto a la linealidad Acosta (2011) plantea:

> Esta noción de linealidad al parecer se evidencia en los estudiantes de Básica Secundaria, quienes pasan por una “revolución científica” al tener un cambio de paradigma en los temas que abordan en la escuela. Ellos trazaban rectas, circunferencias y elipses en Básica Primaria, sin tener en cuenta su ubicación en el plano, ahora trazan dichos lugares geométricos en un sistema de ejes coordenados, dando una localización precisa en R (p. 141).

Una vez aclarado el aspecto de hacer vivencial el concepto matemático antes de ingresar a la formalización del mismo, que para el caso particular de este trabajo es la función y la linealidad para llegar a la Función Lineal, se pasa a formalizar el objeto de estudio.

Con respecto al concepto de función, se encuentran las siguientes definiciones:

Definición 1: Allendoerfer y Oakley (1971), plantean que una “una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) siendo (1) x un elemento del conjunto X, (2) y un elemento del conjunto Y, (3) de modo que no hay dos pares con el mismo primer elemento” (p. 203).

Definición 2: Según Thomas (1979). “Sean X e Y conjuntos no vacios, y sea f una colección de pares ordenados (x, y), con $x \in X$ e $y \in Y$. Diremos que f es una función de X en Y si para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$". (p. 19).

En las anteriores definiciones se observan elementos en común que conllevan a concebir el concepto de función en los mismos términos; dichos elementos son los que hoy en día se mantienen en el ámbito escolar, aunque requieren, para efectos del aprendizaje por parte del estudiante, ser trabajados desde contextos específicos que favorezcan un acercamiento significativo, aspecto que amplía Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev (1981) cuando plantean que el concepto de función tiene su origen en los diferentes fenómenos naturales, quienes están relacionados unos con otros mostrando una interdependencia; para los autores, el ser humano conoce diferentes relaciones expresadas en términos de leyes físicas, y dichas leyes indican que las magnitudes que caracterizan un fenómeno se relacionan, hasta el punto que algunas están determinadas por los valores de las demás.

De acuerdo con Roldán (2013), debido al nivel de la complejidad, al carácter abstracto y al simbolismo del concepto de función, este puede resultar difícil de comprender. Por ello recomienda adecuarlo buscando una definición pertinente al nivel de los estudiantes. Además, recalca que si bien es importante dar ideas claras para lograr entender la definición de función, no se debe dejar de lado cierta rigurosidad.

De otra parte, considera que para responder la pregunta ¿qué es una función?, se requiere tener en cuenta el nivel académico de quien está respondiendo la pregunta –refiriéndose al estudiante–, además resalta que no se trata sólo de dar una visión simplista, porque son varias las nociones, ideas, conceptos y requisitos que se necesitan tanto para definirla como para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En la búsqueda del qué, es importante trabajar con situaciones que aportan para el desarrollo del concepto de función, habitualmente tratan contextos en donde se relacionan diferentes magnitudes, este tipo de situaciones, permiten una aproximación directa a la noción de función (Roldán, 2013). Esta idea la exponen también Posada y Villa (2006) en su tesis de Maestría "Propuesta didáctica de aproximación al concepto de Función Lineal desde una perspectiva variacional", quienes consideran que en el estudio del concepto se debe tener en cuenta la dependencia e independencia entre las magnitudes, involucrando en el proceso de enseñanza las tablas de valores, además de identificar la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal relevante al momento de modelar varios fenómenos.

Siguiendo con la idea de reflexionar en torno a la manera como se evidencia el concepto de función en el aula, es importante resaltar que la forma en que se asume éste en la educación matemática, no debe ser la misma con que se retoma en el plano de las matemáticas como ciencia, subrayando que el profesor debe conocer unas y otras existencias. Las bases de la construcción de este concepto se fundamentan en la noción de variable, dependencia, correspondencia, transformación, entre otros; sin embargo, pareciera que, al momento de presentarlo en el aula, dichas asociaciones se muestran de manera aislada o se dilatan por las rígidas definiciones de función generadas en la teoría de conjunto (Quintero y Cadavid, 2009).

De otra parte, Cuevas y Delgado (2015) resaltan la necesidad de destacar las representaciones del concepto de función desde una perspectiva educativa, principalmente para saber que los estudiantes y el profesor tratan el mismo concepto: el de función. Los autores hacen hincapié en que el docente debe hacer claridad sobre la representación semiótica que utilizará para visualizar el concepto, clarificando el conjunto de signos empleados, la sintaxis usada para combinar esos signos, así como la semántica relativa a dicha sintaxis. Recalcan que los estudiantes no necesariamente están familiarizados con el lenguaje formal, por lo que su representación puede implicar mayor esfuerzo para acceder al conocimiento.

Si bien las representaciones son muy importantes en la adquisición del concepto de función, se debe hacer hincapié en que el docente genere espacios que propicien en los estudiantes múltiples interpretaciones del objeto matemático.

Las definiciones mencionadas muestran una idea general de lo que es función, sin embargo, para efectos de esta investigación, se aborda el concepto de Función Lineal en un ámbito escolar de tal manera que sea más cercana al estudiante.

Con respecto a la Función Lineal propiamente dicha, se consideran las siguientes definiciones:

Definición 1: "La forma algebraica de la Función Lineal se representa $f(x) = mx$, donde $\boldsymbol{m}$ es un número real distinto de cero" (Peterson *et al*, 1969).

Definición 2: "La función lineal afín $y = mx + b$, donde m y b son constantes, tienen por gráfica una línea recta que forma un ángulo α con la dirección positiva del eje x (siendo $tg\ \alpha$=k) y que corta al eje y en el punto $(0, b)$" (Aleksandrov *et al*, 1981).

Definición 3: Suárez-Álvarez (2016) plantea desde los espacios vectoriales que:

> Si V y W son espacios vectoriales. Decimos que T es una transformación lineal $T: V \rightarrow W$, si se verifica que: $T(x + y) = T(x) + T(y), T(\delta x) = \delta T(x)$, para cada $x, y \in V$ y cada $\delta \in$ K(cuerpo de escalares. Si además es $W = V$, de manera que el dominio y codominio de T coinciden, decimos que T es un endomorfismo de V (p. 29).

Por ejemplo, consideremos los vectores $P_{1=}\{polinomios\ de\ grado\ menor\ o\ igual\ que\ 1\} = \{P(x) = f(x) = a_1x + a_0; a_{0,}a_1 \in R\}$, y $R^2{}_{=}\{vectores\ en\ el\ plano\} = \{< a_0\,, a_1 >; a_{0,}a_1 \in R\}$, donde los elementos del espacio vectorial se denominan vectores.

Consideremos la transformación lineal Tentre estos espacios vectoriales $T: V = P_1 \rightarrow W = R^2$.

Se tiene que $(V, +,\cdot)$ con $P(x) = a_1x + a_0$ y $Q(x) = b_1x + b_0$ entonces se tiene que:

$P(x) + Q(x) = (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$ y $\delta P(x)= \delta a_1x + \delta a_{0.}$ Para $(W, +,\cdot)$ que es la suma usual de vectores y el producto de un escalar por un vector, se tiene que:

$< a_1\,, a_0 > + < b_1\,, b_0 > = < a_1 + b_1\,, a_0 + b_0 >$ y $\delta < a_1\,, a_0 > = < \delta a_1\,, \delta a_0 >$

Se puede verificar que T es $1 - 1$ y es sobreyectiva por lo tanto los espacios P_1 y R^2 son Isomorfos, es decir: $P_1 \cong R^2$.

En otras palabras, estos espacios vectoriales como conjunto son diferentes pero tienen la misma estructura, es decir, que las operaciones entre ellas son equivalentes.

Es necesario aclarar que se consideró pertinente incluir las definiciones de función lineal afín y transformación lineal desde los espacios vectoriales que plantea la Función Lineal, dado que son aspectos que no se puede dejar de lado por su estructura a nivel cognitivo, sin embargo se debe precisar que para efectos de la presente investigación se enfoca el objeto matemático al nivel de educación básica, en donde la función lineal afín se convierte en una "familia de funciones lineales", según lo estipulado por el MEN en los Estándares de matemáticas y Derechos Básicos de Aprendizaje en su versión 1, donde dicho objeto matemático se ajusta a una mirada desde lo unidimensional[3].

La Función Lineal afín de una sola variable representada como $y = mx + b$, es la más simple y su representación gráfica es la más simple de las curvas: la línea recta (Aleksandrov *et al*, 1981), Afirmación que justifican de la siguiente manera:

> Esto se debe a que cualquier trozo pequeño de una curva lisa se puede equiparar a una línea recta y a que cuanto más pequeño es el trozo, mayor es el parecido. En el lenguaje de la teoría de funciones, esto significa que toda función lisa (continuamente diferenciable) es, para un pequeño cambio de la variable independiente, muy próxima a una función lineal (p. 55)

Este planteamiento es relevante y se le debe atender con la importancia que amerita, porque si bien los autores conciben la Función Lineal afín como la más elemental, también dejan claro que es muy importante como fundamento para abordar el estudio de las formas curvas, aspecto que se debe resaltar en el ámbito educativo.

2.3. ASPECTOS DIDÁCTICOS

2.3.1. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL

El concepto de Función Lineal (FL) aparece con notoria frecuencia en las aplicaciones prácticas. Diversas leyes físicas están representadas por dicho concepto, así por ejemplo, la longitud de un cuerpo se puede considerar como la Función Lineal de su temperatura. "Las funciones lineales son extremadamente útiles por su sencillez y porque es posible considerar ciertas variaciones no uniformes como aproximadamente lineales, aunque sólo sea en pequeños intervalos" (Aleksandrov *et al*, 1981). Desde este punto de vista, es importante que el docente considere como elemento fundamental en la enseñanza de la FL, todas aquellas situaciones que permiten aplicar el concepto, ello favorece su aprendizaje así como la interpretación del mismo en diversos contextos.

Algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función dejan ver que existen dificultades relacionadas con las representaciones, de hecho los maestros tradicionalmente centran su interés en poner en evidencia el aspecto algebraico del concepto, dejando de lado un análisis profundo y detallado sobre los elementos que permiten fortalecerlo para que sea aprendido de manera adecuada (Roldán, 2013).

El aprendizaje de las funciones, incluida la Función Lineal, pasa, en primera instancia, por un conocimiento de cada uno de los lenguajes de representación (ecuación, tabla, gráfica), por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos (Azcárate y

---

[3] Una línea es unidimensional porque sólo se necesita una coordenada para especificar un punto de la misma. Recuperado el 24 de febrero de 2017 de http://mathworld.wolfram.com/Dimension.html

Deulofeo, 1996, citado en Roldán, 2013). Estas representaciones ayudan en la comprensión del objeto matemático, permitiendo realizar interpretaciones y pasar de una a la otra, es decir, de la algebraica a la tabular, de la tabular a la gráfica, de la gráfica a la algebraica (Guzmán, 2006).

Con respecto al uso de múltiples representaciones al momento de introducir un concepto, se resalta cómo en la formación, tratamiento y conversión de las representaciones está comprometida la acción matemática, donde es necesario utilizar diferentes registros o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas en el campo de la matemática. Se busca que el estudiante utilice las múltiples representaciones para sustentar sus propios puntos de vista, que domine con fluidez los distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos (MEN, 1998).

> El eje puntual para la construcción del concepto función lineal se halla en las acciones que se logre realizar con las diversas representaciones; esto involucra acción en un registro, "tratamiento" y posterior coordinación entre los diferentes registros "conversión" orientada a construir el concepto hasta conseguir reconocer al concepto matemático en sus diferentes representaciones. (Ospina, 2012, p. 56).

La articulación entre las representaciones de la Función Lineal es de gran importancia al momento de querer interpretarla, donde cada una de ellas implica una exigencia cognitiva interdependiente. Es importante resaltar que tanto Guzmán (2006) como Ospina (2012), plantean la necesidad de "coordinar" cada forma de entender el objeto matemático –gráfica, tabla, ecuación–, buscando pensar el concepto desde sus diferentes concepciones.

Los denominados "ejercicios rutinarios" hacen parte del aprendizaje tradicional de la matemática que se ha basado en proponer ejercicios, por ejemplo, donde se le pide al estudiante obtener la gráfica de una ecuación, esto lo logra elaborando una tabla a partir de parejas ordenadas, para luego generar la representación en el plano de coordenadas cartesianas. Estos procesos lo que logran es desencadenar aprendizajes mecánicos ajenos a la comprensión e interpretación, llevando al estudiante a concepciones erróneas sobre el significado de la gráfica –su lectura e interpretación – (Roldán, 2013).

De acuerdo con los antecedentes que fortalecen esta investigación, una manera de evitar tales aprendizajes mecánicos es a través del uso de lenguaje verbal cotidiano para enunciar las propiedades, regularidades y observaciones propias de las diferentes representaciones de la función lineal–situaciones, fórmulas, tablas–.De otra parte, es relevante retomar situaciones del mundo real, así como la evolución histórica del concepto de función, permitiendo que el estudiante observe que uno de los motores del desarrollo de este concepto fue la ciencia y las necesidades originadas por esta, de esta manera resulta beneficiosa la naturalidad con la que puede surgir la información obtenida del contexto

En general, en la construcción del concepto de función, la representación es un elemento esencial y no fácil de trabajar, lo que invita a que el docente empiece a generar metodologías que conlleven a superar estas dificultades, aspecto que posibilita la construcción de bases sólidas en torno a este concepto, propiciando una interacción entre los diversos modos de pensar como los propuestos por Sierpinska (2000).

2.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El aspecto histórico-epistemológico, ha permitido identificar el constructo del concepto en diferentes épocas, lo que propicia el reconocimiento de elementos relevantes que llevaron a superar diferentes obstáculos epistemológicos implicados en su desarrollo, hasta lograr consolidar una definición clara y conceptualmente válida como la que se conoce actualmente. Es igualmente importante resaltar cómo esos obstáculos presentes en el devenir del objeto matemático, permitieron repensar cada vez más la Función Lineal, brindándole la posibilidad de consolidarse en la matemática como objeto de conocimiento y como objeto de aprendizaje, convirtiéndose en una herramienta que permite analizar e interpretar el mundo real.

De otra parte, se resaltan los esfuerzos de diversos autores por analizar la Función Lineal desde diferentes puntos de vista, evidenciándose una gran fortaleza en la forma de ver este objeto desde el pensar analítico y geométrico, donde la coordinación entre uno y otro debe ir de la mano al momento de llevarlo a un contexto educativo, fortaleciendo la interpretación de un mismo concepto desde ópticas diferentes. Sin embargo, se está dejando de lado una tercera interpretación que ponga su atención en las propiedades que definen el objeto, posibilitando una nueva forma de concebirlo y entenderlo. Esta nueva interpretación será retomada y analizada de manera detallada en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

El presente capítulo expone los fundamentos conceptuales en torno al Marco Teórico la Didáctica de la Matemática Modos de Pensamiento, propuesta Anna Sierpinska (2000), y a su vez contrasta varias situaciones de aula elaboradas a la luz de dicha teoría a partir de las cuales se realiza el planteamiento de los articuladores hipotéticos que propician un posible tránsito entre los Modos de pensar la Función Lineal (Pinto-Rojas y Parraguez, 2017).

3.1. LA TEORÍA

Teniendo como referente el concepto de Función Lineal abordado dentro de la investigación, y después de hacer un análisis de cómo los estudiantes de los niveles de Básica Primaria, Básica Secundaria y Media logran una aprehensión de este, se realiza la elección del marco teórico para abordar la problemática de investigación planteada.

El referente teórico de la Didáctica de la Matemática elegido son los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), porque permite interpretar el objeto matemático de diferentes maneras favoreciendo un conocimiento profundo del mismo. De otra parte, estos Modos de pensar permiten describir los enfoques –analíticos, geométricos o estructurales– que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Es importante destacar que cuando se hace referencia a los “Modos de Pensamiento”, se alude a la comprensión de un concepto matemático que requiere un significado para el estudiante, dependiendo del modo como se esté trabajando, lo que podría ser la causa de las dificultades que se presentan en el aula cuando el docente le plantea una interrogante en el Modo Sintético y le pide interpretarla de una manera Analítica (Parraguez, 2012), aspecto que favorece notoriamente el trabajo en contextos educativos, en cuanto a que el docente podrá tomar conciencia de la importancia de saber direccionar la pregunta dependiendo del objetivo interpretativo que esté buscando.

Anna Sierpinska identifica tres Modos de Pensamiento en el álgebra lineal y que implican maneras de análisis diferentes, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico de esta disciplina matemática, clasificándolos de la siguiente forma: el Sintético–Geométrico (SG) que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE), que se relacionan con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000).

A continuación, se describe de manera detallada cada uno de los Modos de Pensamiento mencionados anteriormente:

El Modo Sintético-Geométrico (SG) “permite que los objetos matemáticos se puedan analizar desde una representación geométrica, un conjunto de puntos, etc., resaltando como aspecto fundamental la visualización” (Parraguez, 2012, p.17). Este Modo de Pensamiento va de la mano con el modelo cognitivo de razonamiento geométrico, donde se plantea que los procesos de razonamiento son posibles gracias a la interacción de tres procesos: visualización, construcción y razonamiento (Duval, 1998).

El Modo Analítico-Aritmético (AA) “presenta la posibilidad de pensar los objetos matemáticos por medio de relaciones numéricas, donde, el plano cartesiano ya se ve como puntos formados por parejas ordenadas de números reales y las rectas son vistas desde las ecuaciones” (Parraguez, 2012, p. 17). Este modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el Modo (SG) por considerar otras relaciones que no son de tipo espacial.

Es importante resaltar la principal diferencia entre los modos Sintético y Analítico, la cual radica en que desde el Modo Sintético, la mente puede acceder directamente a los objetos para describirlos de forma natural, mientras que en el Modo Analítico estos se presentan de manera indirecta, se construyen a partir de las propiedades de los elementos (Sierpinska, 2000).

El Modo Analítico-Estructural (AE) “recurre más a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas” (Parraguez, 2012, p. 18), lo que llevaría a plantear que es un modo de pensar más avanzado donde se exigen otras relaciones, buscando generalizar elementos que ya se habían considerado en los modos SG y AA.

Con respecto a los Modos AA y AE, se debe resaltar que su principal diferencia radica en que en el primero se define el objeto a través de una expresión o fórmula que permite calcularlo, además en algunos casos se encuentra que dos procesos diferentes conllevan a un mismo resultado; por otro lado, en el segundo Modo el objeto se define por medio de sus propiedades (Parraguez, 2012).

En el estudio de la Función Lineal se puede evidenciar cómo a partir de métodos diferentes, en una misma situación, se llega a la misma respuesta, corroborando lo planteado anteriormente por Parraguez.

Para el estudio del objeto de investigación presente en este trabajo, se hace totalmente conveniente abordarlo desde la teoría Modos de Pensamiento, aunque inicialmente son propuestos para el álgebra lineal, se adaptan muy bien para analizar el objeto matemático de este estudio. Desde este referente teórico, es importante tener en cuenta la mirada que tiene el docente en el aula a partir de los Modos, porque sólo en esa medida puede poner al estudiante en contacto con situaciones que fortalezcan cada forma de pensar, esto para minimizar el hecho de que funcionen mejor en unos que en otros, “…por otra parte también se debe tener en cuenta que por los enfoques que habitualmente se realizan en los niveles educativos, los estudiantes funcionan mejor en SG y AA.” (Parraguez, 2012, p. 22)

3.2. INTERPRETACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

En el contexto específico de la Función Lineal, los participantes hacen un acercamiento a la interpretación a partir de la descripción de sucesos como crecer, decrecer, se mantiene constante, entre otros, los cuales, posteriormente, los conducirán a interpretaciones de otro nivel como, por ejemplo, encontrar la representación algebraica a partir de una gráfica dada.

El concepto de Función Lineal relaciona una gran variedad de representaciones e interpretaciones que dan cuenta de los modos de pensar. Dentro de las cuales se encuentran las siguientes: en el Modo Sintético-Geométrico (SG–FL) se representa la línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional; en el Modo Analítico–Aritmético (AA–FL), se encuentra el diagrama sagital, pares ordenados, tablas, proporciones y expresión algebraica; y en el Modo Analítico–Estructural (AE–FL) está la Función Lineal como lugar geométrico.

En el Modo AA–FL se ve cómo desde las proporciones y las expresiones algebraicas, se puede acceder a la Función Lineal a partir de múltiples relaciones, favoreciendo un tipo de interpretación del objeto. Además, es relevante destacar que las diferentes formas de interpretarla descritas a continuación, se relacionan entre sí, donde cada ecuación genera una y solo una gráfica cartesiana (SG–FL) que se corresponde unívocamente con un conjunto de parejas ordenadas –representadas en una tabla, diagrama sagital–.

Dichas relaciones evidencian la posibilidad de ver un mismo objeto matemático desde el pensar analítico, geométrico y estructural, permitiendo la multiplicidad interpretativa en el pensamiento matemático.

La Función Lineal analizada en cada uno de los Modos de Pensamiento (Ver Figura 4) se interpreta de la siguiente manera:

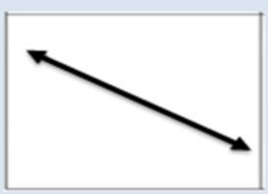
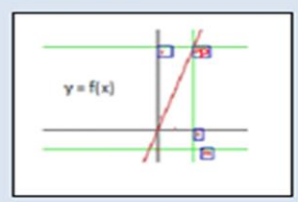
Sintético-Geométrico SG–FL	Analítico–Aritmético AA–FL	Analítico–Estructural SG–FL
 La recta representa un crecimiento proporcional.	$f(x) = mx$ Como la ecuación de la línea recta, donde m es un número real distinto de cero, además corta al eje y en el punto $(0,0)$.	Del *software* Cabri  Como un *lugar geométrico*, donde dado un punto P arbitrario, las proyecciones son perpendiculares a los ejes cartesianos, además es indispensable que dicho punto sea colineal a todos los que están sobre la misma recta.
	$f(x) = mx + b$ Como una extensión de $f(x) = mx$, con m y b constantes, además corta al eje y en el punto $(0, b)$.	**Del concepto matemático** Cociente entre Δy y Δx, tomando como referencia el punto intersecto $(0, b)$.

Figura 4: Caracterización de la Función Lineal desde los Modos de Pensamiento.

Estas interpretaciones de la Función Lineal generan tránsitos, permitiendo reflexionar en torno a la importancia de favorecer en el estudiante la articulación entre una interpretación y otra, propiciándole estrategias favorecedoras de un pensamiento flexible y divergente, capaz de solucionar situaciones matemáticas con creatividad, sacándolo del pensamiento único y lineal que podría presentar producto de la formación que ha podido tener.

Transitar entre los modos de pensamiento se convierte en un instrumento favorecedor del aprendizaje en cuanto que permite tener varios puntos de vista del objeto estudiado, así como lo resalta Parraguez (2012), quien plantea que la teoría en mención, "no sólo constituye formas de pensar y entender los objetos matemáticos, además se convierten en instrumentos heurísticos al momento de resolver problemas" (p. 17). El estudiante alcanza una comprensión profunda del concepto matemático, cuando logra transitar entre los Modos de Pensamiento Analítico–Aritmético, Sintético–Geométrico y Analítico–Estructural.

Abordar el estudio de un objeto matemático desde la mirada de la teoría Modos de Pensamiento, es útil en cuanto que permite que el estudiante interprete las situaciones de diferentes maneras dependiendo de la construcción cognitiva presente en él, es decir, cada individuo encuentra útil uno u otro Modo de pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando, de hecho se plantea que "estos Modos de Pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno es su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando" (Parraguez, 2012, p. 15).

Lo anterior se puede sintetizar en que los Modos de Pensamiento hacen alusión cuando la persona referencia el objeto de estudio con las estructuras adquiridas por experiencias anteriores (SG–FL). Una vez incorporado al imaginario se pasa a un segundo momento, es cuando se logra la aritmetización del objeto matemático (AA–FL), es aquí cuando se generan las relaciones entre lo Aritmético con lo Geométrico, llevando el objeto matemático a interactuar con diversos conceptos alcanzando así una transversalización del concepto, logrando interconexiones procesuales y conceptuales entre los objetos matemáticos y sus relaciones (AE–FL).

3.2.1. INTERPRETACIÓN ARITMÉTICA DE LA FUNCIÓN LINEAL

En el Modo Analítico-Aritmético la Función Lineal (AA–FL) se describe desde las representaciones verbales y expresiones algebraicas, donde las rectas son vistas como ecuaciones que representan parejas ordenadas en el plano cartesiano mediante la expresión $f(x) = mx$, donde $m\ es\ un\ numero\ real\ distinto\ de\ cero$, además corta al eje y en el punto (0,0).

Por otro lado, en la investigación se complementa la interpretación analítica aritmética con la Función Lineal afín $f(x) = mx + b$, con m y $b \in R$, dado que esta es una extensión de la lineal.

Respecto a la teoría Modos de Pensamiento, Parraguez (2012) plantea que:

> En el modo Analítico–Aritmético los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones en este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas (p. 17).

Estas relaciones numéricas se generan partiendo de las parejas ordenadas que aparecen como puntos en el plano, de las cuales surge, posteriormente, la ecuación que representa la línea recta. “El Modo Analítico hace que la línea recta quede definida de acuerdo a ciertas relaciones específicas entre las coordenadas de los puntos.” (Parraguez, 2012, p. 19).

Existen varias formas de representar las relaciones específicas entre las coordenadas de los puntos, las cuales conllevan a una misma interpretación del objeto matemático. Roldán, 2013) describe algunas de estas representaciones:

- Diagrama sagital

Con respecto a este tipo de representación, Roldán (2013) plantea:

> La representación de una función mediante un diagrama sagital, necesita la determinación de dos conjuntos A y B, el conjunto A es el $dominio$ también conocido como conjunto de salida, B es el $codominio$ llamado también conjunto de llegada. Los elementos de B que están relacionados con algún elemento de A es denominado $rango$ de la función o $conjunto\ de\ imágenes$. Los elementos del conjunto de salida se vinculan con un elemento del conjunto de llegada. Esta correspondencia es la que permite establecer la $función$ entre los dos conjuntos (p. 35).

A continuación se presenta un ejemplo del diagrama sagital (Ver figura 5).

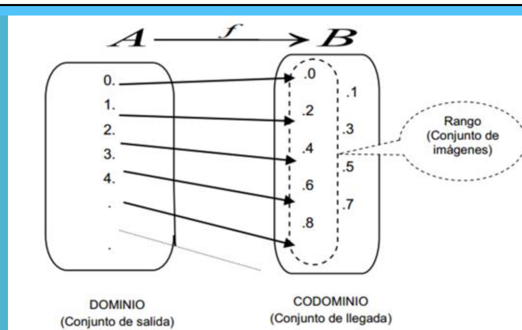


Figura 5: Diagrama sagital (Roldán, 2013, p. 35).

- Pares ordenados

Esta representación permite hacer explicita cada pareja (x, y) de la función. La primera componente corresponde al $dominio$ y la segunda componente al $codominio$ y es el valor de la función en x o $f(x)$, donde las parejas ordenadas son de la forma $\left(x, (f)\right)$. De la misma manera que en el diagrama sagital, los conjuntos infinitos quedan representados de manera parcial por algunos elementos únicamente; por ello es necesario hacer la expresión del conjunto de parejas por comprensión de la siguiente manera: $f = \{(x, y) \in R^2, y = x^3\ \}$, mientras que las funciones entre conjuntos finitos son posibles de representar por completo si no son muy grandes (p. 36).

- Tablas

En la cotidianidad es una de las formas más útiles que se tiene para organizar los datos de estudio. En estas se ordena la información para presentar la correspondencia entre cantidades en dos filas o columnas; el conjunto de salida está representando por la primera y el de llegada por la segunda. Este tipo de representación de relaciones funcionales tiene las mismas restricciones que presentan los diagramas sagitales y pares ordenados con respecto al manejo de los conjuntos finitos e infinitos. Las tablas presentan la ventaja de permitir descubrir regularidades como diferencias constantes, diferencias que crecen o decrecen regularmente, etc. (Azcárate y Deulofeu, 1996, citado en Roldán, 2013, p. 35).

- Proporciones

En el concepto de Función Lineal está implícito el de proporcionalidad, y dentro de esta hay elementos que no se definen ni se desarrollan y que se dan por sentados, dentro de estos están la razón, proporción y solución de problemas de proporcionalidad. La Función Lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias en la proporción (Fiol y Fortuny, 1990, citado en Roldán, 2013, p. 45).

- Expresión algebraica

Las ecuaciones y las fórmulas son la forma de representar la función por medio de una expresión escrita en la que se explicita la relación entre las variables, dicha expresión analítica (Ver figura 8) puede estar representada por medio de un polinomio o no y, corresponde a la dependencia entre cantidades o magnitudes (p. 38).

3.2.2. INTERPRETACIÓN ESTRUCTURAL DE LA FUNCIÓN LINEAL

- Del *Software* Cabri bajo el concepto de lugar geométrico en el Modo Analítico-Estructural de la Función Lineal.

La Función Lineal se puede definir desde el método de los lugares geométricos, teniendo en cuenta que:

> Se llama lugar geométrico de puntos a la figura formada por todos los puntos del plano –o en su caso, del espacio– que poseen una propiedad determinada. La esencia del método de los lugares geométricos consiste en lo siguiente: supongamos que al resolver un problema matemático debemos construir un punto P tal que satisfaga una serie de condiciones –pensemos que son dos o más–, las cuales son enumeradas –condición 1, condición 2, etc. –; el lugar geométrico que cumple la condición 1 es una figura F_1, el lugar geométrico que cumple la condición 2 es otra figura F_2, Entonces el punto buscado P debe pertenecer simultáneamente a las figuras F_1, F_2, esto es, se encuentra en la intersección de las figuras (Díaz, 2009, p. 45)

En el Modo Analítico-Estructural de la Función Lineal (AE–FL), esta se describe como un *lugar geométrico*, donde dado un punto P arbitrario, las proyecciones son perpendiculares a los ejes cartesianos, además es indispensable que dicho punto sea colineal a todos los que están sobre la misma recta.

Dado un espacio 2D, en la representación como un lugar geométrico (Ver figura 6) se observa que el punto P está sobre las dos rectas perpendiculares a los ejes cartesianos, y en la medida en que se cambien los valores de m y x, el punto P cambia de posición desplazándose en la recta siempre sobre las perpendiculares, lo que permite concluir que todos los puntos sobre dicha recta cumplen las condiciones ya descritas (Díaz, 2009).

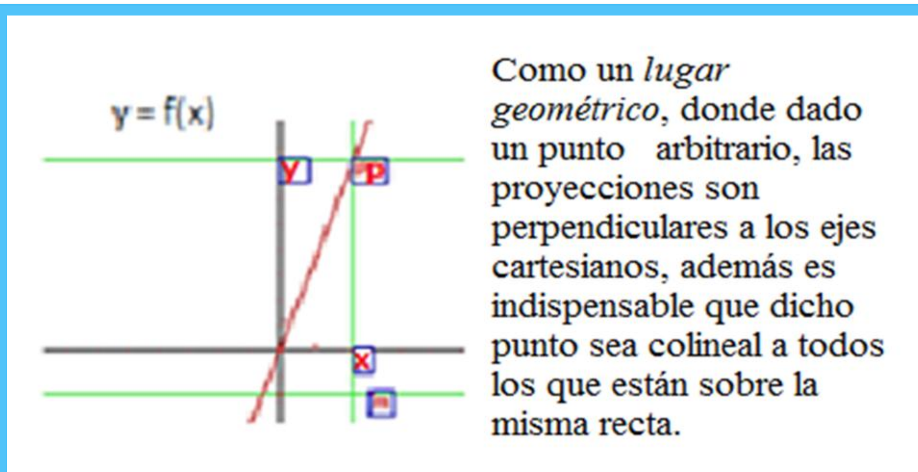


Figura 6: La Función Lineal como lugar geométrico.

- Del concepto matemático en el Modo Analítico-Estructural de la Función Lineal

A partir de la definición formal de Función Lineal (FL), se define la pendiente de la recta no vertical como la tangente del ángulo de inclinación o como la relación $y_2 - y_1/x_2 - x_1$ (Allendoerfer y Oakley, 1988). De lo anterior se entiende la FL en el Modo Analítico-Estructural como el cociente entre el desplazamiento en el eje y y el desplazamiento en el eje x, tomando como referencia el punto intersecto $(0, b)$. En este Modo el estudiante utiliza características de la FL –creciente y decreciente– para determinar el signo de la pendiente y el sentido de la recta, sin hacer uso de la relación mencionada anteriormente.

Para efectos de la investigación, se asume el Modo Estructural de la Función Lineal desde el *software* Cabri como un lugar geométrico, dado que para el nivel escolar de los estudiantes prevalece la visualización que se fortalece desde la Geometría Dinámica, en tanto que se constituye en un mediador que fundamenta la construcción del objeto matemático, propiciando la relación de los conceptos a través de sus características y propiedades, lo que ayuda a su comprensión.

3.2.3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA FUNCIÓN LINEAL

El Modo Sintético–Geométrico de la Función Lineal (SG–FL) se puede describir desde su representación geométrica como un conjunto de puntos infinitos, donde es posible usar diversas formas de representarla a través de una línea recta infinita.

En este Modo se representa la línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional sin tener algún sistema de referenica. Para percibir la forma de la recta, es necesario que haya una visualización previa que cumple el papel de interpretar la Función Lineal desde el Modo SG.

Si se piensa en la representación mental de la Función Lineal, esta se visualiza como una recta. En el Modo SG–FL se utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, al igual que sus representaciones gráficas convencionales (Parraguez, 2012).

La representación de la Función Lineal en este Modo de Pensamiento se presenta a continuación (Ver figura 7):

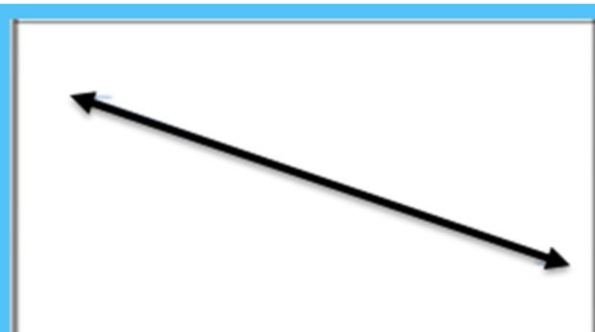


Figura 7: Representación de la Función Lineal en el Modo SG.

3.3 SITUACIONES QUE ILUSTRAN EL MARCO TEÓRICO

A continuación se presentan algunas situaciones que involucran la Función Lineal, analizadas desde la teoría Modos de Pensamiento, con las cuales se busca evidenciar cómo se aplica la teoría en diferentes contextos y como a través de esta se puede hacer uso de diversas estrategias didácticas, que propician la comprensión del objeto de estudio en sus múltiples interpretaciones del objeto matemático.

SITUACIÓN 1

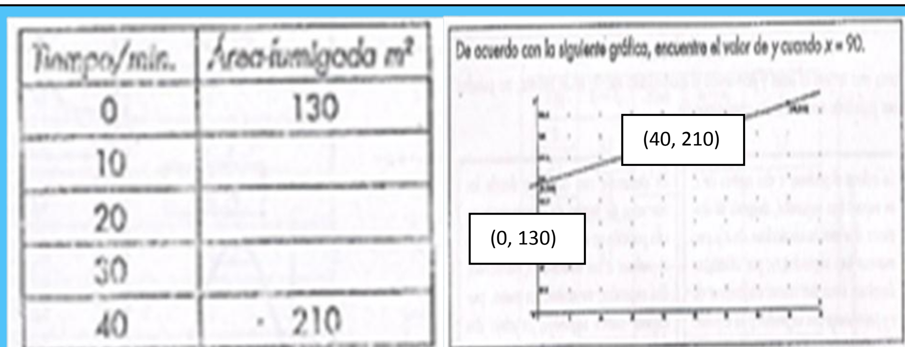
Surge a partir del siguiente planteamiento:

"La familia de Martín tiene un sembradío de café en su patio. El mes pasado fumigaron $130\ m^2$ y este mes deben completar la fumigación. Los datos obtenidos al completar la fumigación del plantío son los que se muestran a continuación" (Buendía, Ferrari y Martínez, 2015, p. 78) (Ver figura 8).

Si se tardó un total de 90 minutos en fumigar (se tuvo que realizar en forma proporcional) por completo:

1. ¿Cuántos metros cuadrados medía el plantío?"

2. ¿De qué otra manera representarías los datos registrados?



Tiempo/min.	Área fumigada m^2
0	130
10	
20	
30	
40	210

Figura 8: Representación gráfica de la situación 1 (Buendía, Ferrari y Martínez, 2015, p. 78).

Un estudiante que se encuentre en un modo AA–FL puede utilizar una de las siguientes estrategias:

Estrategia 1

Remitirse a la experiencia de la escuela y utilizar la herramienta aritmética conocida como "regla de tres", planteando las siguientes relaciones numéricas:

40 es a 210

90 es a "x"

Por medio de esta relación el estudiante puede hallar la solución a la pregunta planteada, dando cuenta de un pensamiento aritmético que pudo haber construido a lo largo de su formación escolar, presentando como argumento el hecho de poder completar la tabla a partir de las comparaciones que puede establecer entre los datos suministrados.

Estrategia 2

Una segunda estrategia que puede utilizar es encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 130) y (40, 210) representada en la expresión $y = 2x + 130$ (Ver figura 8), luego intentar hallar el valor de la "y" cuando "$x = 90$".

De otra parte, quien esté en un modo SG–FL reconoce que los puntos encontrados representan la línea recta como una correspondencia en la que hay un crecimiento proporcional, obteniendo una representación como la mostrada en la figura 12 (Ver figura 9).

Un estudiante que coordine un modo SG–FL con el modo AA–FL, puede concluir que cada par de datos que componen la tabla establecen una relación de proporcionalidad, y esta posteriormente permite la representación gráfica por medio de la línea recta y que además a medida que se van obteniendo más datos, dicha recta se irá prolongando.

Quien se encuentre en el modo AE–FL piensa la recta como un lugar geométrico donde al tomar cualquier punto sobre esta, cumple las condiciones de encontrarse sobre las rectas que son, respectivamente, perpendiculares a los ejes x y y, y que además son colineales; lo que le permite pensar que, por ejemplo, los puntos $(0{,}30)$ y $(40{,}210)$ pertenecen a la recta representada por la expresión $y = 2x + 130$, y están sobre las rectas perpendiculares a los ejes cartesianos.

Cuando el estudiante encuentra y utiliza la ecuación para hallar otras de las parejas ordenadas que forman la recta, y además reconoce que existen infinitos puntos sobre dicha recta que son a los ejes cartesianos, y que dichos puntos son colineales, permite deducir que está transitando entre los Modos AA–FL →AE–FL.

Una vez se encuentre la ecuación que representa todos los puntos sobre la recta (AA–FL), se utiliza para hallar parejas ordenadas que están sobre la misma y cumplen las condiciones ya descritas (AE–FL), y dichas parejas se pueden representar gráficamente estableciendo una relación de correspondencia proporcional (SG–FL), de esta manera se da el tránsito entre los dos Modos evidenciándose la presencia de los mismos en el proceso cognitivo del estudiante.

SITUACIÓN 2

En la tesis de Maestría "El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica." (Posada y Villa, 2016), se plantea la siguiente situación (Ver figuras 9 y 10)

- ✓ Observar las siguientes figuras y analizar cómo van cambiando:

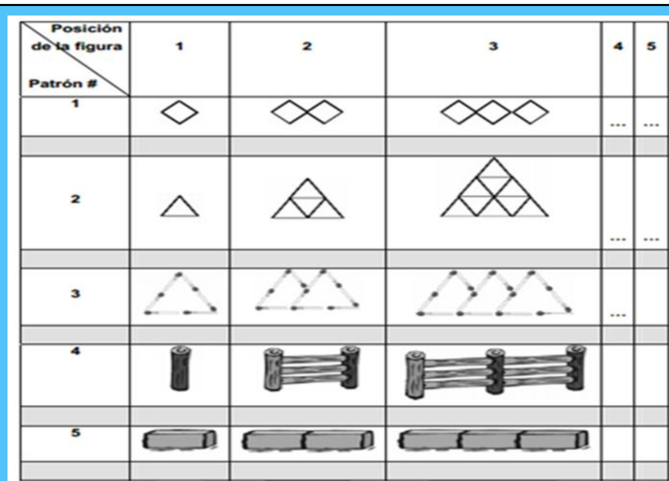


Figura 9: Representación gráfica de la situación 2 (Posada y Villa, 2006, p. 189).

- ✓ Elaborar una tabla como la siguiente donde se registre la información de los cambios de cada patrón.

Posición de la figura / Patrón #	1	2	3	4	5	6	7
1	1rombo	2rombos	3rombos				
2	1triángulo	4triángulos					
3	6 fósforos	10 fósforos	14 fósforos				
4		5 postes		13 postes			
5		14 líneas en los bloques	19 líneas en los bloques		29 líneas en los bloques		

Figura 10: Registro de los cambios de cada patrón (Posada y Villa, 2006, p. 190).

- ✓ Encontrar una expresión general que permita hallar la figura correspondiente para cada posición.
- ✓ Utilizar la expresión que se halló para representar los datos obtenidos por medio de una recta en el plano cartesiano.

Un estudiante desde un Modo Analítico–Aritmético empieza a encontrar relaciones entre las figuras que se van formando en cada posición, de esta manera halla el patrón de formación construyendo la expresión general que lo representa. Para llegar a dicha expresión puede utilizar la siguiente estrategia:

Para la primera secuencia podrá observar el número de rombos que van surgiendo en cada posición, y a parir de estos establecer relaciones para saber cuál es la regla de formación que va dando origen a cada figura. Esta estrategia puede ser utilizada en los demás patrones para encontrar la regla general en cada caso.

Cuando el estudiante logra hallar la expresión general para encontrar la figura en la posición n-ésima (AA–FL), puede establecer parejas ordenadas entre la posición y el número de elementos que compone cada figura, y de esta manera generar una correspondencia en la que hay un crecimiento proporcional obteniendo una línea recta (SG–FL). Por ejemplo, en el caso de la tercera secuencia, puede llegar a la expresión $a_n = 4n + 2$ y con esta buscar las formas de las figuras que estarían en cualquier posición, para luego relacionar la posición con la cantidad de cerillas que hay en cada término de la secuencia, obteniendo resultados como (1, 6), (2, 10), (3, 14), (4, 18), (5, 22), (6, 26), etc. Las parejas que el estudiante determina puede representarlas en el plano de coordenadas cartesianas y generar una representación gráfica.

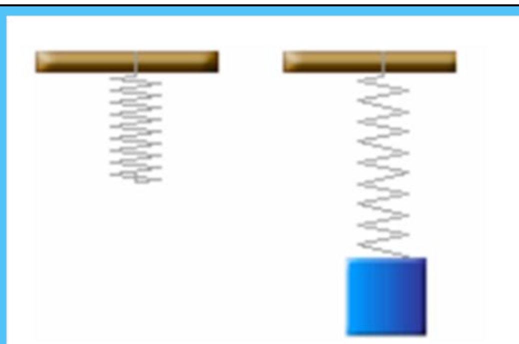
En este Modo se representa la línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional, generándose una representación unidimensional

El tránsito entre los Modos de Pensamiento se evidencia cuando el estudiante encuentra la expresión general que representa todos los puntos sobre la recta (AA–FL), luego la utiliza para hallar diferentes parejas ordenadas que estén en la misma, entendiendo esta como un lugar geométrico donde cada punto se encuentra sobre las rectas perpendiculares a los ejes de coordenadas cartesianas, además cumplen la propiedad de colinealidad (AE–FL), posteriormente dichas parejas se pueden representan en el plano cartesiano (SG–FL).

SITUACIÓN 3

En la tesis de Maestría “Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal” (Guzmán, 2006), se presenta la siguiente situación (Ver figura 11):

De un resorte se cuelgan diferentes objetos y se registran sus pesos en una tabla con el alargamiento que produce cada peso los cuales son directamente proporcionales. Se solicita a los estudiantes representar la información de diferentes formas –tablas, gráficas, expresión analítica– propiciando un acercamiento a la construcción del concepto de Función Lineal.



Peso (gramos)	Alargamiento (cm.)
10	2
15	
	4
	5
30	

Figura 11: Representación de la situación 3 (Guzmán, 2006, p. 67).

Un estudiante que se sitúa en un modo AA puede utilizar la siguiente estrategia:

Plantear una “regla de tres” estableciendo las siguientes relaciones numéricas:

10 es a 2

15 es a “x”

Este planteamiento le permite encontrar los datos que hacen falta en la tabla, estableciendo que a cada valor de la magnitud “peso” le corresponde un valor de la magnitud “longitud” (alargamiento), identificando la primera como la variable “independiente” y la segunda como aquella que depende de los gramos que contenga cada peso.

Otra manera de verificar que se encuentra en un Modo Analítico–Aritmético, es cuando encuentra la expresión que representa las parejas de puntos halladas en la tabla, esto le permite al estudiante representar la línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional, aspecto que evidencia el tránsito entre los Modos Analítico–Aritmético y Sintético–Geométrico. Así, por ejemplo, en el caso de las parejas ordenadas (10, 2) y (15, 3), la expresión matemática a la que puede llegar es $y = \frac{1}{5}x$, permitiéndose verificar, con esta, si los datos encontrados en la tabla son correctos. El tránsito entre los dos Modos de Pensamiento AA–FL→SG–FL, le permite concluir que los datos que componen la tabla forman una línea recta, cuyos puntos se pueden encontrar con la ayuda de la ecuación hallada (Ver figura 12).

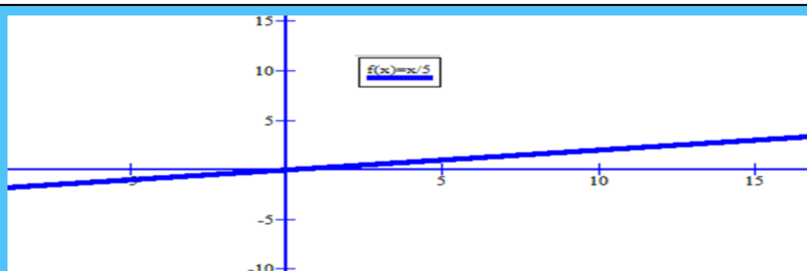


Figura 12: Representación de la ecuación $y = \frac{x}{5}$

En esta situación matemática se evidencia que un estudiante está en vía de comprender el Modo AE de la Función Lineal, cuando piensa la recta generada como un lugar geométrico donde cada punto se encuentra sobre las rectas perpendiculares a los ejes de coordenadas cartesianas y además son colineales.

El estudiante que logra establecer la gráfica de la Función Lineal a partir de la ecuación y luego argumenta desde la definición de la recta como un lugar geométrico, muestra evidencia de tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

SITUACIÓN 4

"En el siguiente diagrama, ¿cuál es la relación entre la cantidad de rectángulos y el perímetro de la figura que forman? Representar esta relación con una tabla, palabras, ecuación y una gráfica" (Ver figura 13).

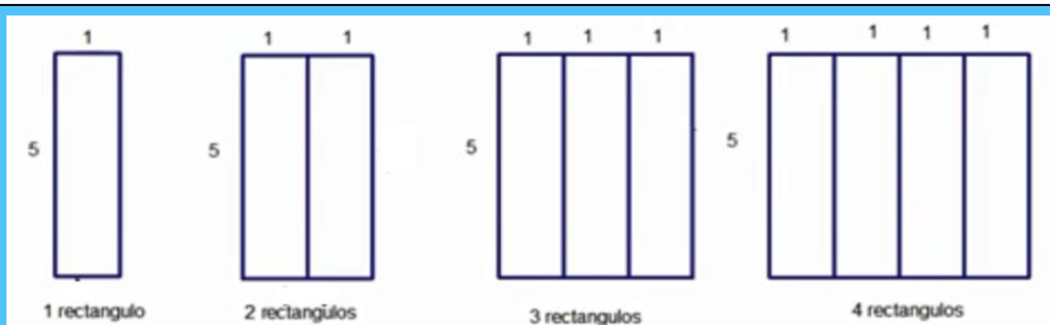


Figura 13: Representación de la situación 4. Recuperado de https://www.youtube.com

En un primer lugar el estudiante podría empezar a encontrar relaciones entre los perímetros de cada figura, llegando a planteamientos como los siguientes: la primera figura tienen un rectángulo y su perímetro es 12, la segunda está conformada por dos rectángulos donde la suma de los lados es de 14, y así sucesivamente iría relacionando el perímetro de cada figura y el número de rectángulos en cada una. En ese momento muestra que está transitando por los Modos AA– FL →SG–FL por las relaciones numéricas establecidas, así como por las representaciones geométricas como tal encontrada en cada posición.

Todo este proceso anteriormente descrito lo puede llevar a concluir que los perímetros para cada figura estarían representados en expresiones como las siguientes:

Figura 1: 5 (2) + 2 (1) cuyo resultado es el perímetro de la figura en la posición uno.

Figura 2: 5 (2) + 2 (2) cuyo resultado es el perímetro de la figura en la posición dos.

Figura 3: 5 (2) + 2 (3) cuyo resultado es el perímetro de la figura en la posición tres.

Figura 4: 5 (2) + 2 (4) cuyo resultado es el perímetro de la figura en la posición cuatro.

En cada figura observa que el producto de “(5).(2)” se mantiene constante, y representa las veces que se repite el lado mayor en las figuras formadas, mientras que los productos “2.(1), 2.(2), 2.(3), 2.(4)” hacen alusión a las longitudes formadas por los lados cortos de cada rectángulo, y que además los números encerrados en los paréntesis (1, 2, 3, 4) son las posiciones de cada figura.

Todas estas deducciones llevan al estudiante a encontrar la expresión general que representa cada figura dependiendo de su posición, hallando la siguiente ley de formación: $P = 2n + 10$. Para este momento se habla del Modo AA–FL donde el estudiante logra encontrar la ecuación que representa el perímetro para cualquier posición.

Un modelo de tabla que puede ser construida es la siguiente (Ver figura 15)., donde se registra la cantidad de rectángulos en cada figura, el perímetro y el par ordenado que posteriormente generaría la representación geométrica en el plano cartesiano, lo que nuevamente estaría dando cuenta de un tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL.

Un estudiante que coordine un Modo SG–FL con AA–FL puede concluir que cada par de datos que componen la tabla, están formando una línea recta y que además a medida que se van obteniendo más pares ordenados irá prolongando hacia el “infinito” (Ver figura 14):

La representación cartesiana a la que llegaría el estudiante a partir de los pares ordenados se presenta a continuación, y estaría dando cuenta directamente del Modo AA–FL, y al generar la gráfica estaría evidenciando la articulación entre los modos AA–FL→SG–FL. (Ver figura 14).

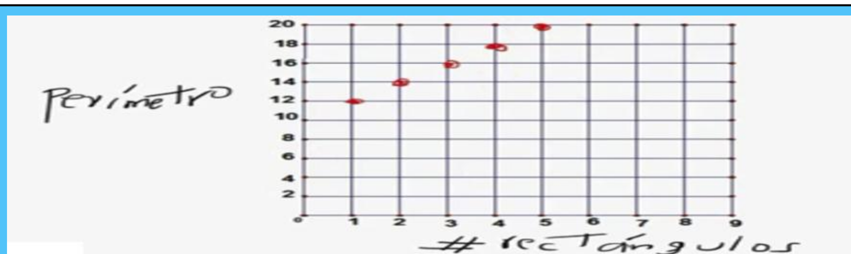


Figura 14: Articulación entre los Modos AA y SG. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s

Quien se encuentre en el modo AE–FL piensa la recta como un lugar geométrico, donde cada punto se encuentra sobre las rectas perpendiculares a los ejes de coordenadas cartesianas y son colineales, concluyendo que, por ejemplo, las parejas ordenadas (1, 12) y (2, 14) representan puntos que cumplen dichas propiedades

Una vez encontrada la ecuación que representa todos los puntos sobre la recta (AA–FL), se utiliza esta para hallar parejas ordenadas que estén sobre la recta y que cumplen las propiedades descritas anteriormente (AE–FL), y dichas parejas se pueden representar en el plano cartesiano (SG–FL); se evidencia un tránsito entre los Modos de Pensamiento.

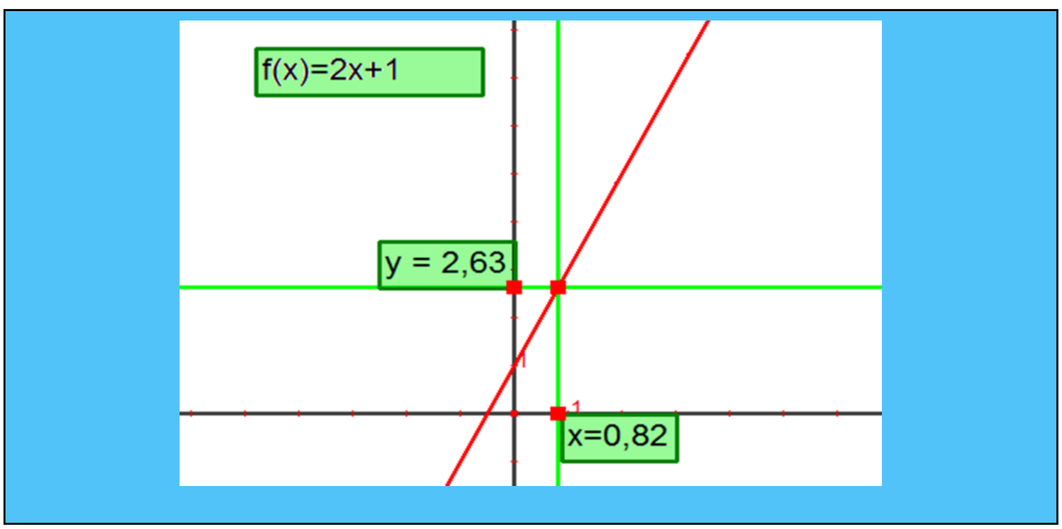
SITUACIÓN 5

Con ayuda del *Software* CABRI, construir la recta como lugar geométrico que represente la siguiente Función Lineal: $y = 2x + 1$ (Ver figura 15):

El estudiante inicialmente ubica un punto sobre el eje x y halla el valor numérico del mismo, además traza una recta perpendicular a dicho eje que pasa por el punto ubicado inicialmente, luego escribe la expresión dada $2x + 1$ sobre la cual aplica el valor hallado de la x, mostrando que se encuentra ubicado en un modo AA–FL.

Posteriormente, traslada sobre el eje y el valor numérico resultante al aplicar el valor de la x en la expresión dada, y sobre este traza una recta perpendicular al eje y de tal manera que la misma intersecte la perpendicular trazada inicialmente sobre el eje x; luego con la opción de "lugar" dada por el *Software*, toca el punto de intersección y el punto donde está ubicado el valor de x, generando la recta como el lugar geométrico, de esta manera da evidencia de estar transitando por los modos AE–FL→SG–FL.

El estudiante muestra un tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL cuando a partir de la expresión dada, logra trazar la recta que la representa, comprobando que el conjunto de puntos que la forman son perpendiculares a los ejes cartesianos y además colineales entre sí.



3.4. ARTICULADORES HIPOTÉTICOS QUE PROPICIAN EL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAR LA FUNCIÓN LINEAL

El estudio de la teoría Modos de Pensamiento a través de situaciones en contexto, permitieron identificar algunos elementos de la matemática que propician el tránsito en los modos AA–FL→SG–FL, AA–FL→AE–FL, SG–FL→AA–FL y SG–FL→AE–FL de pensar la Función Lineal. Dichos elementos se denominan articuladores, estos se plantean como hipótesis y se fundamentan desde el análisis histórico epistemológico del objeto matemático, así como de la experiencia docente de los investigadores.

- Hipótesis 1:
  Tránsito SG– FL →AA–FL:
  Coordenadas cartesianas –Ath.1–.

- Hipótesis 2:
  Tránsito AA–FL→SG–FL:
  Dominio de la función y su relación entre el rango–Ath.2–.
  Ángulo de inclinación de la recta con respecto al eje x –Ath.3–.
  Relaciones de proporcionalidad –Ath.4–.

Las hipótesis 1 y 2 se plantean con base en la analogía encontrada desde el punto de vista histórico-epistemológico, donde "Descartes (1596 – 1650) funda el primer sistema matemático moderno, persiguiendo la unión entre el Álgebra con la Geometría, permitiendo que la linealidad adopte representaciones que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, posibilitando transitar entro lo analítico y lo geométrico" (Acosta, 2011, p. 141).

Este tránsito planteado por Acosta (2011) se puede dar en sentido contrario, es decir, de lo geométrico a lo analítico, aspecto que lo corrobora la experiencia en el aula de clase, cuando los estudiantes, a partir de la representación gráfica de la recta, pueden identificar elementos –citados en la hipótesis 1– que les permita hallar la representación analítica de la recta.

- Hipótesis 3:
  Tránsito SG–FL→AE–FL:
  Condiciones de la línea recta (perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad) –Ath.5–.

- Hipótesis 4:
  Tránsito AA–FL→AE–FL:
  Plano cartesiano y condiciones de la línea recta (perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad) –Ath.6–.

Las hipótesis 3 y 4 se formulan partiendo de los antecedentes históricos-epistemológicos en torno a la Función Lineal, donde en el período moderno "Descartes (1596 – 1650) asocia un conjunto de pares ordenados de números reales *(x, y)* a un lugar geométrico (en términos modernos, $f(x,y)=0$) representado en un sistema de ejes cartesianos" (Acosta, 2011, p. 141).

Si bien no hay evidencias de la concepción de lugar geométrico que propone el autor, se resalta que se homologa al que se tiene en el presente trabajo de investigación, en cuanto que en ambos casos se habla de la estructura de la recta, aspecto que sería común a ambas concepciones.

A continuación se muestran los articuladores hipotéticos entre cada Modo de pensamiento de la Función Lienal (Ver figura 16):

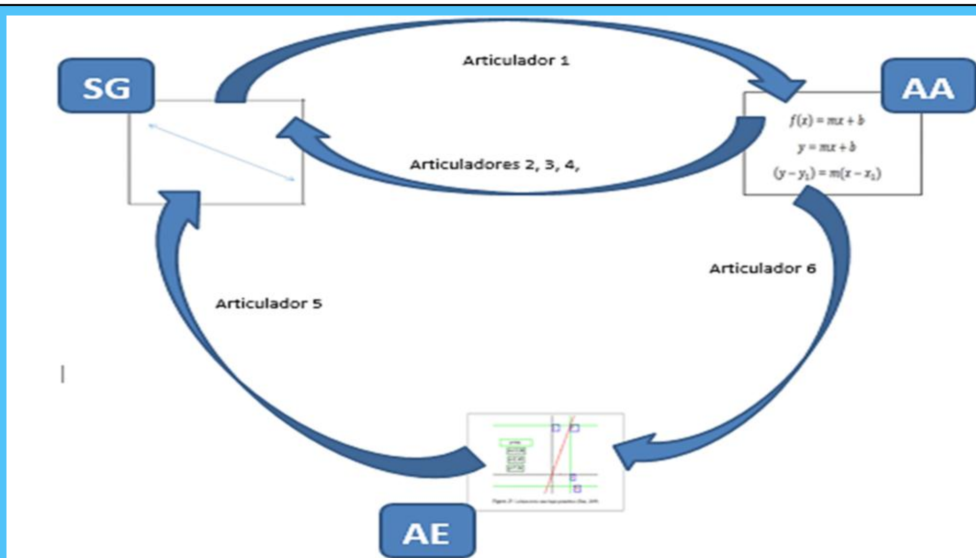


Figura 16: Articuladores hipotéticos entre los Modos de Pensar la Función Lineal.

3.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Luego de realizar un rastreo de la teoría Modos de Pensamiento, y de analizar diferentes situaciones matemáticas a la luz de la misma en torno al objeto matemático Función Lineal, se levantan las hipótesis respecto a los elementos articuladores que propician el tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal; además se evidencia que dicha teoría permite que el estudiante sea quien construya de forma directa el concepto trabajado, propiciando la posibilidad de interpretarlo de diferentes maneras a medida que transita por los Modos, aspectos que tienen implicaciones positivas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por otra parte, es importante visualizar el marco en situaciones matemáticas, pues permite identificar algunos elementos para tener en cuenta dentro de la planeación de las actividades, a desarrollar en la Unidad Didáctica.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se hace referencia al diseño metodológico fundamentado en el estudio de casos, dando un sustento empírico experimental a la investigación. Se realiza una descripción de las herramientas a utilizar en la recolección de información y se definen las etapas de investigación.

4. 1. DISEÑO METODOLÓGICO

La presente investigación es de corte empírico experimental, en cuanto que lleva al investigador a implementar procedimientos prácticos con un objeto de estudio en particular en torno a una problemática, creando las condiciones necesarias para esclarecer las propiedades y relaciones del objeto (Métodos y Técnicas de Investigación. (sf). Recuperado el 18 de septiembre de 2016).

Lo empírico se entiende como aquello que:

> "Está orientado al campo de observación; la atención se centra en lo que se observa, incluidas las observaciones hechas por los informadores; hace todo lo posible por ser naturalista, no intervencionista; y hay una relativa preferencia por la naturalidad lingüística en las descripciones, con un cierto desdén por las grandes expresiones. (Stake, 2010, p. 50).

De otra parte, se resalta que en el diccionario en línea de la Real Academia Española –RAE– se define "experimental" como "Fundado en la experiencia, o que se sabe y alcanza por ella" (RAE, citado en Zabala, 2015, p. 60).

La definición de "empírico" dada por Stake (2010) se adapta a esta investigación, en cuanto que la atención se centra en lo que se observa, es decir, en los estudiantes y en la problemática que se identifica previamente, partiendo de la implementación de diferentes técnicas e instrumentos que se explican en el presente capítulo.

Se adopta en el proceso de investigación un enfoque cualitativo, en cuanto que comienza con la recolección de datos alrededor de un problema relacionado con el objeto matemático Función Lineal, los cuales se obtienen mediante la observación empírica, permitiendo encontrar relaciones que justifiquen los datos identificados, todo esto mediante el estudio de fenómenos semejantes (Quecedo y Castaño, 2012).

4.2. ESTUDIO DE CASOS

La investigación se lleva a cabo en el marco del estudio de casos, a partir de la cual se plantea la posibilidad de tener en cuenta las particularidades y complejidades de un caso específico, para llegar a la comprensión de su esencia en circunstancias importantes (Stake, 2010). El interés está puesto en centrar la atención en el objeto de estudio conocido como Función Lineal, pensando en comprenderlo en contextos específicos desde sus múltiples representaciones, garantizando diferentes interpretaciones del mismo objeto matemático.

La Metodología estudio de casos es particularmente pertinente en el desarrollo de la presente investigación, en cuanto que se involucra directamente en la teoría Modos de Pensamiento, aspecto que confirma Parraguez y Randolph (2017). El estudio de casos permite establecer las particularidades y complejidades de los actores que hacen parte de la investigación, aportando procesos facilitadores de análisis tanto particulares como circunstanciales en el desarrollo investigativo (Stake, 2010).

El conocimiento matemático que se deriva de esta estrategia metodológica es de tipo conceptual, permitiendo entender realidades específicas alrededor de un contexto global. "Esta estrategia hace énfasis tanto en aquellos elementos comunes de los casos, como en aquellos elementos diferenciadores que complejizan, diversifican y especifican cada una de las diferentes experiencias estudiadas" (Bonilla, 2012, p.60).

De acuerdo a lo anterior, en la selección de los casos el investigador debe ser cuidadoso en su conformación, buscando que estos reúnan características y particularidades que permitan la identificación de todos los elementos que se requieren analizar.

> Entendemos que la investigación de estudio de caso no es una investigación de muestras. No estudiamos un caso fundamentalmente para comprender otros casos. Nuestra primera obligación es comprender el caso concreto, pero sí destacamos que estos son claves en la toma de decisiones. (Stake, 2010, p. 12).

Esta investigación se desarrolla con diferentes participantes, descritos más adelante en la sección 4.3. Se divide en tres grupos que representan los casos 1, 2 y 3, respectivamente, con características específicas, en los cuales se seleccionan, como lo plantea Stake (2010), aquellos casos que ofrezcan las mejores y mayores oportunidades de aprendizaje con respecto a la problemática objeto de estudio, con la finalidad de evidenciar los elementos Articuladores que subyacen en el tránsito por los Modos de Pensamiento.

Es importante resaltar que, durante la observación, en el caso de la investigación cualitativa con la metodología de estudio de casos, se deben registrar los acontecimientos, datos y todo tipo de información que se obtenga para así presentar un buen análisis y un buen informe final, que no da lugar a cuestionamientos (Stake, 2010).

4.3. PARTICIPANTES

La población con la cual se lleva a cabo el proceso de implementación de las actividades está conformada por 140 estudiantes del grado noveno, de la Institución Educativa Monseñor Francisco Cristóbal Toro, ubicada en la ciudad de Medellín, en el barrio Aranjuez de la comuna 6, sus edades oscilan entre los 14 y 17 años. Dicha implementación se extiende al total de estudiantes del grado cumpliendo con el objetivo de investigación propuesto, encaminado a contribuir con el mejoramiento de los componentes Numérico–Variacional y Geométrico–Métrico en los resultados de las Pruebas Saber.

Para efectos de aplicar el cuestionario y realizarle su respectivo análisis a priori y a posteriori, se eligen 30 estudiantes –E1, E2, E3, E4, E5…E30– donde cada uno es etiquetado con la letra **E,** seguido de un número que se asigna para mantener en el anonimato la identidad de quien responde. Por ejemplo, el participante tres se nombra como **E3**. Los participantes fueron seleccionados a partir de los resultados obtenidos, tanto en la implementación de las actividades construidas a la luz del marco teórico, como en su desempeño académico en el área de matemáticas, permitiendo identificar los estudiantes que conforman los casos 1 y 2. Así mismo, surge un caso 3 conformado por aquellos estudiantes que durante la aplicación del cuestionario, evidencian algún(os) tránsito (s) entre los modos de pensar la Función Lineal (Ver figura 3).

Se trabaja con estudiantes de diferentes grupos escolares –de un mismo grado– con desempeños académicos diferentes. Es relevante resaltar que el objeto matemático que hace parte del estudio, está inmerso en la malla curricular institucional, aspecto que posibilita el acceso directo de los investigadores en la recolección de los datos.

4.4. CASOS DE ESTUDIO

A continuación, se presentan los tres casos de estudio que fueron considerados en la investigación, describiendo las características que se tuvieron en cuenta para su elección (Ver figura 17):

	Participantes	**Características**	**Herramienta**
Caso 1	E1, E3, E9, E11, E13, E16, E19, E21, E23, E24, E25, E26, E27.	Demuestran niveles de desempeño alto o superior en el área de matemáticas, además evidencian tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal al implementar las actividades propuestas.	Cuestionario. Guías de aprendizaje (medición inicial)
Caso 2	E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E14, E15, E17, E18, E20, E22, E28, E29, E30.	Presentan niveles de desempeño básico y evidencian tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal al implementar las actividades propuestas.	Cuestionario. Guías de aprendizaje (medición inicial)
Caso 3	E1, E3, E6, E9, E11, E12, E13, E15, E18, E19.	Evidencian, en el análisis a posteriori del cuestionario, una articulación entre los modos de pensar la Función Lineal.	Entrevista Semi-estructurada.

Figura 17: Casos de estudio.

4.4.1. UNIDADES DE ANÁLISIS

CASO 1: El primer grupo lo conforman 13 estudiantes –E1, E3, E9, E11, E13, E16, E19, E21, E23, E24, E25, E26, E27– donde cada uno es etiquetado con la letra **E,** seguido de un número que se asigna para mantener en el anonimato la identidad de quien responde, por ejemplo, el participante tres se nombra como **E3** según la figura 19 del diseño metodológico; estos cursan el grado noveno de Educación Básica Secundaria, durante el año escolar han demostrado niveles de desempeño alto o superior en el área de matemáticas, además durante el proceso de implementación de las actividades planteadas como parte del trabajo cotidiano del docente, y diseñadas a la luz del marco teórico, evidenciaron un posible tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal. Esto evidenciado en el sistema institucional de evaluación. Dichos estudiantes han trabajado durante el segundo periodo académico la Función Lineal. El propósito es indagar en aquellos elementos articuladores que utilizan los estudiantes para pasar de un modo de pensar a otro, mediante el desarrollo del cuestionario.

CASO 2: El segundo grupo está conformado por 17 estudiantes –E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E14, E15, E17, E18, E20, E22, E30, E28, E29–, cada uno es etiquetado con la letra **E,** seguido de un número que se asigna para mantener en el anonimato la identidad de quien responde, por ejemplo, el participante dos se nombra como **E2** según la figura 19 del diseño metodológico; también cursan el grado noveno de Educación Básica Secundaria, pero a diferencia del Caso 1, presentan un nivel de desempeño básico, quienes durante el proceso de implementación de las actividades planteadas como parte del trabajo cotidiano del docente, y diseñadas a la luz del Marco Teórico, evidenciaron un posible tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal. Estos estudiantes son seleccionados porque se considera importante confirmar o descartar los articuladores hipotéticos que han sido planteados en este estudio.

CASO 3: Los estudiantes que participaron en este caso son aquellos que luego de la aplicación del cuestionario y del análisis a posteriori del mismo, evidencian una articulación entre los modos de pensar la Función Lineal según lo planteado en el análisis a priori, de igual manera tienen manejo del *Software* Cabri en relación con el objeto matemático. Para efectos de la entrevista, estos participantes se tipifican de la siguiente manera: Los estudiantes entrevistados se nombran de la siguiente manera: En_1, En_2, En_3, En_4, En_5, En_6, En_7, En_8, En_9, En_{10}, donde $\boldsymbol{En_1}$ es el entrevistado 1, con el numeral del anonimato según lo establecido en el numeral 5.3 de la conformación del caso 3.

4.5. HERRAMIENTAS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Martínez (2011) plantea que en un estudio de caso pueden utilizarse diferentes herramientas como: “documentos, archivos, entrevistas, observación, artefactos, grupos de enfoque, cuestionarios y otros" (p. 31). Algunas de estas herramientas mencionadas por el autor se implementan en el presente trabajo de investigación, las cuales se describen a continuación:

4.5.1 OBSERVACIÓN

Esta herramienta **"**apunta a mirar y estudiar algo detenidamente, concentrando nuestra atención en aquello que nos proponemos conocer" (Martínez, 2011. p. 33).

Para llevar a cabo esta observación se requiere:

- Medios audiovisuales (audio, video, fotografías)

Los audios, videos y fotografías son utilizadas con el propósito de observar cómo es que los estudiantes desarrollan las actividades identificando elementos diferenciadores (Ospina, 2012), además permite rastrear la solución de las situaciones tanto en pequeños grupos como de manera individual, registrando los procesos utilizados cuando se enfrentan a la solución de las situaciones presentadas, centrando la atención en la manera cómo proponen diferentes estrategias que les permite interpretar y encontrar posibles soluciones a las mismas, elementos que propiciaran herramientas para detectar el Modo de Pensamiento en que se está desenvolviendo, así como los instantes en que sus análisis les permite generar el tránsito entre uno y otro Modo.

- Entrevistas Semi-Estructuradas

Se realizan entrevistas con grupos focalizados (Caso 3) posterior al proceso de aplicación del cuestionario en el aula, cuyo principal objetivo es indagar en detalle por los elementos articuladores utilizados por los estudiantes en la solución de las situaciones planteadas, permitiendo identificar elementos que enriquezca el posterior análisis de resultados.

Estas parten de una pauta o guía de preguntas con los temas o elementos claves que se desean investigar (Martínez, 2011).

4.5. 2. CUESTIONARIO

La intención del cuestionario es indagar en los Modos de Pensamiento Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural de comprender la Función Lineal, que privilegian los estudiantes al momento de resolver una pregunta, así como la forma en que transitan entre un modo y otro SG–AA, SG–AE, AA–AE, identificando los articuladores que propician dicho tránsito.

La herramienta (Ver anexo 1) consta de cinco preguntas abiertas, cuyos objetivos son respectivamente:

- Verificar si los estudiantes reconocen y determinan la expresión analítica de una Función Lineal cuando se les presenta la gráfica, propiciando de esta manera una articulación entre los modos SG–FL→AA–FL.

- Comprobar si los estudiantes identifican las ecuaciones que describen la Función Lineal, así como su interpretación como lugar geométrico, cuando se les presenta un grupo de ecuaciones de diferentes grados que deberán representar gráficamente y verificar si cumplen las condiciones de perpendicularidad a los ejes cartesianos y colinealidad, con lo cual se espera, propiciar la articulación entre los modos SG–FL→AA–FL→AE–FL.

- Contrastar si los estudiantes logran hallar la ecuación de una Función Lineal a partir de los elementos que la definen y las condiciones como lugar geométrico, generando una articulación entre los Modos SG–FL→AA–FL→AE–FL.

- Comprobar si los estudiantes identifican la representación gráfica de la Función Lineal, reconociendo la recta como lugar geométrico, y a partir de ello, el reconocimiento de las relaciones cartesianas generando una expresión analítica. Estos elementos propician una articulación entre los modos SG–FL→AA–FL→AE–FL.

- Verificar si los estudiantes aplica diversas estrategias que le permitan representar gráficamente la Función Lineal, propiciando la articulación entre los modos AA–FL→SG–FL y AA–FL→AE–FL.

El cuestionario es aplicado a los casos de estudio 1 y 2 descritos en la sección 4.3. En el diseño de las preguntas se consideró importante fortalecer el tránsito entre SG–FL→AA–FL→AE–FL, debido a que investigaciones anteriores han evidenciado que los estudiantes que comprenden los objetos matemáticos como un lugar geométrico (modo AE–FL), presentan mayores posibilidades de lograr la comprensión profunda del concepto, debido a que esto ayuda en la interacción con los otros modos SG–FL→AA–FL (Bonilla, 2012).

Lo anterior lo confirma Bozt y Parraguez (2012,) cuando afirman que los estudiantes que logran establecer mejores conexiones entre los modos de pensamiento, son aquellos que presentan una mayor comprensión de la definición formal del concepto.

4.5.3 DOCUMENTOS

- Guías de aprendizaje (Bitácoras de los estudiantes) como sustento del producto Unidad Didáctica.

La herramienta está compuesta por una serie de guías que se aplican en el aula como parte del trabajo cotidiano del docente, las cuales posteriormente permitirán fortalecer el producto final que se refleja en la elaboración de la Unidad Didáctica (Ver anexo 6), estas son diseñadas por los investigadores a la luz del marco teórico, fortaleciendo los tres Modos de Pensamiento: Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural, así como los respecticos tránsitos entre uno y otro.

Las guías son desarrolladas por los estudiantes y su propósito es abordar el objeto matemático desde sus diferentes interpretaciones (AA–FL, SG–FL y AE–FL), aspecto que posteriormente se verá reflejado en la elaboración de la Unidad Didáctica como uno de los productos finales de la investigación. Cada guía se presenta con una situación matemática en contexto relacionada con la Función Lineal. A continuación, se explica el objetivo de cada una y se hace una breve descripción:

Guía de aprendizaje 1:"Bitácora Familiar"

Objetivo: Construir el concepto de relación desde un contexto familiar en la formalización del concepto de función.

En el análisis histórico realizado se observa que el concepto de función es de gran importancia al momento de abordar la Función Lineal. Por tanto se plantean una serie de situaciones en un contexto real buscando que los estudiantes, desde su cotidianidad, construyan los conceptos de "relación" y "función", llegando a establecer similitudes y diferencias entre uno y otro. De otra parte, aparecen las primeras nociones de "dominio" y "rango", fortaleciendo el Modo de pensar AA–FL respecto a las relaciones existentes entre variables, las cuales son fundamentales al momento de abordar el estudio de la Función Lineal (Ver anexo 2)

Guía de aprendizaje 2: "Siguiendo patrones"

Objetivo: Identificar regularidades en un conjunto de figuras y, a partir de estas, determinar la expresión general.

Se plantea una situación en contexto denominada "Función Lineal desde Patrones", donde los estudiantes, a partir de una serie de figuras (Ver figura 19), deben encontrar regularidades que les permite hallar una expresión general que represente cada una en la posición "n", la cual se convierte en una función de tipo lineal. Dicha situación lleva a que los estudiantes lleguen a generar múltiples interpretaciones: unas de tipo SG (representación gráfica) y otras enmarcadas en un pensamiento AA–FL (parejas ordenadas, diagrama sagital, tablas y expresión analítica).), realizando un análisis de aquellos elementos que conforman la Función Lineal (variable dependiente e independiente, la pendiente e Interceptos). Todo ello con el propósito de facilitar su comprensión profunda. (Ver anexo 3)

Guía de aprendizaje 3: Una mirada estructural de la Función Lineal mediada por el *software* Cabri.

Objetivo: comprender la Función Lineal como lugar geométrico desde la representación estructural, utilizando el *software* como mediador.

En un primer momento, los estudiantes indagan en la red acerca de las funciones que cumple el *software* Cabri, así como las diferentes herramientas que lo componen; posteriormente deben ingresar al *software* y verificar la función y el posible uso de algunas de las herramientas consultadas previamente.

En un segundo momento, se entrega a los estudiantes las coordenadas de dos puntos (AA–FL) y las deben ubicar en el plano cartesiano, luego trazan la recta que pasa por dichos puntos (SG–FL) utilizando la herramienta "coordenada o ecuación", hallan la expresión analítica que representa dicha recta, la cual deben corroborar realizando el respectivo procedimiento matemático (AA–FL).

En un tercer momento, a partir de la expresión analítica encontrada, se procede a la construcción de la Función Lineal como lugar geométrico, donde el docente da instrucciones precisas del paso a paso para la realización de dicha construcción. Los estudiantes deberán realizar otras construcciones identificando las condiciones específicas de la recta como lugar geométrico, fortaleciendo, de esta manera, el Modo AE–FL. Finalmente, los estudiantes deben establecer semejanzas y diferencias entre la interpretación geométrica realizada en el momento dos, y la interpretación estructural del momento 3. (Ver anexo 4)

- Rúbricas de análisis

Estas permiten recoger la información obtenida en el análisis a posteriori del cuestionario aplicado, permitiendo obtener una mirada general de los estudiantes que presentaron tránsitos entre los modos de pensar la Función Lineal, así como el registro de diferentes observaciones que permiten, posteriormente, el diseño de la entrevista que se aplicaría a los participantes seleccionados previamente.

4.6. ANÁLISIS A PRIORI DE LOS ELEMENTOS MATEMÁTICOS DE LA FUNCIÓN LINEAL

Para efectos del contexto escolar en el cual se desarrolla esta investigación, se adopta la siguiente definición de Función Lineal:

"La función $y = mx + b$, donde m y b son constantes, tienen por gráfica una línea recta que forma un ángulo α con la dirección positiva del eje x (siendo $tg\ \alpha$ = m) y que corta al eje y en el punto $(0, b)$" (Aleksandrov, *et. al*, 1981).

De la definición anterior podemos definir los elementos de la Función Lineal así:

- La pendiente

“La pendiente m de una recta (no vertical) del plano se define como la tangente del ángulo de inclinación de esta recta. Esta se expresa se la siguiente manera: $m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$” (Allendoerfer y Oakley, 1988, p. 405).

- Interceptos

Al ubicar una recta en el plano cartesiano se debe tener en cuenta que, si la pendiente es diferente de cero, entonces la recta interseca los ejes x y y, a cada uno de estos se denominan intercepto en y e intercepto en x (Roldán, 2013).

Los elementos anteriormente descritos con respecto a la Función Lineal, aproxima el objeto desde una interpretación geométrica, encontrándose una similitud, desde el punto de vista gráfico, entre su definición como lugar geométrico y la que plantea Roldán (2013). Sin embargo, este último se queda en un análisis de los atributos de la gráfica, así como de las coordenadas que forman cada punto.

4.7. ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO

Antes de aplicar el cuestionario a los estudiantes, se hace necesario hacer un análisis previo a partir de los Modos descritos (AA–FL, SG–FL y AE–FL) y tránsitos que se propician entre estos, donde los investigadores plantean claramente la intención de cada pregunta, precisando aquellos elementos del objeto matemático que permiten la articulación entre los Modos de pensar la Función Lineal. Para realizar dicho análisis, se toma pregunta por pregunta y se contempla, desde la mirada de expertos, la manera en que se espera respondan los estudiantes desde cada Modo de pensar, aspecto que, en el análisis a posteriori, permitirá contrastar sus respuestas con la dcl experto. Es importante resaltar que, como lo plantean Pinto-Rojas y Parraguez (2017), “las respuestas reúnen elementos desde lo práctico y lo teórico por parte del informante, ya que se refiere a cuestiones algebraicas, analíticas, geométricas o estructurales, que se ponen a tono con los propósitos del diseño del instrumento” (p. 883).

A continuación se presenta el análisis a priori realizado a cada pregunta del cuestionario:

Pregunta 1

A partir del gráfico dado (Ver figura 18) determina la ecuación de la recta. Justifica, en detalle, el procedimiento que has realizado.

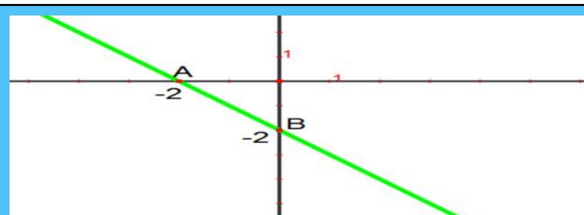


Figura 18: Gráfico de la recta.

Esta pregunta tiene la intención de verificar si los estudiantes reconocen y determinan la ecuación cartesiana de una Función Lineal, propiciando una articulación entre los Modos SG–FL→AA–FL.

Los estudiantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en los Modos SG–FL y AA–FL e interactuar entre ellos, son capaces de identificar características y elementos del gráfico –posición, signo, puntos de intersección con los ejes y magnitud de la pendiente–, y a partir de estos, obtener la expresión analítica que representa la recta.

Dentro de los posibles articuladores que propician el tránsito entre uno y otro Modo, se encuentran los siguientes: la pendiente y el punto de intercepto con el eje "y".

Los estudiantes para responder se pueden situar en un modo u otro, como se muestra a continuación (Ver tabla 2):

Tabla 2: Análisis a priori de la pregunta uno del cuestionario.

SINTÉTICO GEOMÉTRICO	**ANALÍTICO ARITMÉTICO**	**ANALÍTICO ESTRUCTURAL**
En este modo el estudiante conoce que la pendiente de la recta es negativa porque la gráfica es decreciente, además identifica que, dados dos puntos en el plano, si la coordenada x_1 coincide con y_2 y y_1 coincide con x_2 entonces la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos es -1, respectivamente (elementos que se han trabajado previamente). Posteriormente identifica, en la gráfica, que el intersecto con el eje y es la coordenada (0,-2), la cual coincide con (0, b) de donde deduce que b=-2. Finalmente, estos datos encontrados los utiliza para hallar la ecuación con base en la expresión $y = mx + b$, obteniendo $y = -x - 2$	En este modo encontramos dos soluciones desde la matemática: 1. Se eligen dos coordenadas de la recta dada y calcula la pendiente, luego identifica el punto intercepto con el eje y, es decir $(0, b)$, posteriormente reemplaza los datos hallados en la expresión general de una Función Lineal $y = mx + b$ (ecuación canónica) obteniendo por ecuación $$y = -x - 2$$ 2. El estudiante también podría hallar la ecuación pedida calculando la pendiente de la recta	Un estudiante en este modo ubica un punto (coordenada) sobre la recta dada, y utilizando el concepto de Función Lineal como lugar geométrico, puede trazar tantas rectas perpendiculares, a los ejes, como pueda, tomando como referente al punto inicial, extiende la recta y posteriormente determina las coordenadas de las intersecciones trazadas y calcula la pendiente tomando dos de estas, reemplaza este valor en la formula punto-pendiente de la Función Lineal $(y - y_1) = m(x - x_1)$, obteniendo por ecuación

	dada, luego selecciona una coordenada de la recta y reemplaza en la fórmula punto-pendiente de la Función Lineal $(y - y1) = m(x - x1)$ (ecuación general) obteniendo por ecuación $y = -x - 2$	$y = -x - 2$

Pregunta 2

Selecciona cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Función Lineal, luego construye una tabla de valores representando los datos de la misma en el plano cartesiano generando la recta, verifica si los puntos que representan las coordenadas obtenidas son colineales y perpendiculares a los ejes. Explica cómo llegaste a la respuesta.

a). $y + 2x^2 = 9$ b) $y - 3x = 4$ c). $y = 4x + 3$

Esta pregunta tiene la intención de verificar si los estudiantes identifican las ecuaciones que describen la Función Lineal, y además presentan una interpretación desde las condiciones como lugar geométrico, propiciando la articulación entre los modos SG–FL→AA–FL→AE–FL.

Los participantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en un modo SG–FL, AA–FL y AE–FL, e interactuar entre ellos, son capaces de: seleccionar las ecuaciones que representan una Función Lineal justificándolo en la forma y/o grado de la ecuación (AA–FL). Si los estudiantes representan gráficamente la línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional (SG–FL), muestran evidencia del tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL, para lo cual puede emplear técnicas analíticas como: generar coordenadas cartesianas que cumplan con la ecuación y/o identificar el valor de “b” y calcular el ángulo de inclinación de la recta con base en el valor de la “pendiente” a partir de la relación *m=TanA* (donde “m” representa la “pendiente” y “A” el ángulo). Con base en el gráfico, el estudiante da argumentos desde las propiedades que definen la Función Lineal como lugar geométrico (AE–FL).

Dentro de los posibles articuladores que propician el tránsito entre uno y otro Modo, se encuentran los siguientes: forma y grado de la ecuación, coordenadas cartesianas, intersecto con el eje y, las relaciones entre las variables (dependiente e independiente), ángulo de inclinación, y el *software* Cabri.

Los estudiantes para responder se pueden situar en un Modo u otro, como se muestra a continuación (Ver tabla 3):

Tabla 3: Análisis a priori de la pregunta dos del cuestionario.

SINTÉTICO GEOMÉTRICO	ANALÍTICO ARITMÉTICO	ANALÍTICO ESTRUCTURAL
Un estudiante en este modo puede graficar puntos que satisfacen, de manera particular, cada ecuación, y verificar que la figura que se obtiene es o no es una línea recta.	En este modo el estudiante puede revisar cada ecuación y compararla con la expresión general de una Función Lineal, luego dar argumentos de acuerdo a la forma de la ecuación.	En este modo el estudiante puede tomar cada ecuación y determinar algunos puntos de la recta, luego verificar si estos son perpendiculares con respecto a los ejes, en caso afirmativo estará frente a una Función Lineal.

Pregunta 3

Encuentra la ecuación de la recta que intercepta el eje "y" en el punto (0,3) el cual es perpendicular a los ejes coordenados y tiene por pendiente 4. Justifica tu respuesta.

En esta pregunta se tiene por intención verificar si los estudiantes logran hallar la ecuación de una Función Lineal a partir de los elementos y propiedades que la definen, generando una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

Los estudiantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en un Modo AA–FL, SG–FL y AE–FL e interactuar entre ellos, son capaces de: a partir de los elementos dados determinar la ecuación de la recta (AA–FL), con base en esta encuentra algunas coordenadas cartesianas estableciendo la representación gráfica (SG–FL); por último, verifica que dichas coordenadas sean perpendiculares a los ejes y que además cumplen la propiedad de colinealidad (AE–FL).

Dentro de los posibles articuladores que propician el tránsito entre uno y otro Modo, se encuentran los siguientes**:** punto de intersecto en y **,** relaciones entre las variables (dependiente e independiente), coordenadas cartesianas, propiedades de la línea recta.

Los estudiantes para responder se pueden situar en un Modo u otro, como se muestra a continuación (Ver Tabla 4):

Tabla 4: Análisis a priori de la pregunta tres del cuestionario.

SINTÉTICO GEOMÉTRICO	ANALÍTICO ARITMÉTICO	ANALÍTICO ESTRUCTURAL

En este modo el estudiante puede trazar el plano cartesiano y ubicar la coordenada (0,3), luego hallar el ángulo de inclinación usando la relación $m = TanA$, además reconoce, a partir de la pendiente, que la recta es *creciente*, lo cual le permitirá graficar con exactitud el ángulo de inclinación donde tanto el vértice como un lado de dicho ángulo, coinciden con la coordenada inicial (0,3). Con todos estos elementos puede hacer una aproximación a la ecuación que representa la recta.	En este modo el estudiante parte de la ecuación de la Función Lineal $y = mx + b$, reemplazando los valores para m y b obteniendo la ecuación $y = 4x + 3$.	En este modo el estudiante puede pensar la Función Lineal como un lugar geométrico, donde cada punto que conforma la recta es perpendicular a los ejes. Coordinando el modo AE con el SG, puede, a partir de los elementos dados, generar la gráfica verificando las condiciones de perpendicularidad y colinealidad con respecto a los ejes, para finalmente hallar la ecuación que representa dicha gráfica.

Pregunta 4

Dadas las coordenadas $(1, -3)$ y $(2,0)$, graficar y hallar otras coordenadas perpendiculares y colineales que pertenezcan a la gráfica que pasa por dichos puntos. Luego, hallar la ecuación y construir la recta como lugar geométrico (usar el *software* Cabri).

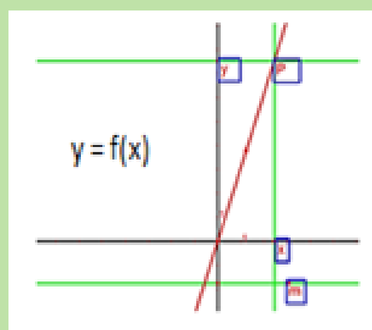
Esta pregunta tiene como intención que los estudiantes identifiquen la representación gráfica de la Función Lineal, reconociendo la recta como lugar geométrico, y a partir de ello, el reconocimiento de las relaciones cartesianas generando una expresión analítica. Estos elementos propician una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

Los estudiantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en un Modo SG–FL, AA–FL y AE–FL e interactuar entre ellos, son capaces de: a partir de las coordenadas cartesianas dadas (AA–FL) genera la gráfica en el plano cartesiano (SG–FL), posteriormente nombra otras dos coordenadas con ayuda del *software* Cabri y verifica que estas sean perpendiculares con respecto a los ejes y que representan puntos colineales, definiendo la Función Lineal como lugar geométrico (AE–FL).

Dentro de los posibles articuladores que propician el tránsito entre uno y otro Modo, se encuentran los siguientes**:** Coordenadas Cartesianas, Relaciones entre las variables (dependiente e independiente), Propiedades de la recta y el *software* Cabri.

Los estudiantes para responder se pueden situar en un Modo u otro, como se muestra a continuación (Ver tabla 5):

Tabla 5: Análisis a priori de la pregunta cuatro del cuestionario.

SINTÉTICO GEOMÉTRICO	**ANALÍTICO ARITMÉTICO**	**ANALÍTICO ESTRUCTURAL**
Un estudiante en este modo ubica las coordenadas en el plano cartesiano y genera la recta identificando un crecimiento proporcional.	Un estudiante en este modo toma las coordenadas dadas, y a partir de estas calcula la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$ obteniendo $m = 3$, posteriormente mediante la fórmula $(y - y1) = m(x - x1)$, encuentra la ecuación $y = 3x - 6$. Finalmente, con dicha ecuación, le da valores arbitrarios a la variable independiente encontrando las coordenadas solicitadas.	Un estudiante en este modo, haciendo uso del *software* Cabri, utiliza herramientas como regla y compas para realizar una construcción que le permita encontrar puntos colineales a los ya dados, verificando que estos cumplan las condiciones de perpendicularidad con respecto a los ejes. Con dichos puntos traza la recta. 

Pregunta 5

Dada la ecuación $y + x = -1$, representarla gráficamente y comprobar que dicha gráfica cumple las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico. Explica el procedimiento (usar el *software* Cabri):

Esta pregunta tiene la intención de verificar si el estudiante aplica diversas estrategias que le permitan representar gráficamente la Función Lineal, propiciando la articulación entre los modos AA–FL →SG–FL y AA–FL →AE–FL.

Los estudiantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en un Modo AA–FL y SG–FL e interactuar entre ellos, son capaces de: a partir de la ecuación dada (AA–FL), generar la representación gráfica (SG–FL) utilizando el punto intercepto en y así como el ángulo de inclinación o estableciendo las coordenadas cartesianas.

Los participantes que muestran en sus respuestas comprender la Función Lineal en un Modo AA–FL y AE–FL e interactuar entre ellos, son capaces de: a partir de algunas coordenadas generadas con base en la ecuación, establece una relación de proporcionalidad que lo lleva a afirmar que dichas coordenadas representan una recta, y por ende, cumplen las condiciones de la recta como lugar geométrico.

Dentro de los posibles articuladores que propician el tránsito entre uno y otro Modo, se encuentran los siguientes**:**

Del modo AA–FL→SG–FL: el punto de intercepto en y, Angulo de inclinación, Coordenadas Cartesianas las relaciones entre las variables (dependiente e independiente) y el *software* Cabri.

Del modo AA–FL→AE–FL: Coordenadas Cartesianas, Relación de proporcionalidad, Propiedades de la línea recta.

Los estudiantes para responder se pueden situar en un Modo u otro, como se muestra a continuación (Ver tabla 6):

Tabla 6: Análisis a priori de la pregunta cinco del cuestionario.

SINTÉTICO GEOMÉTRICO	**ANALÍTICO ARITMÉTICO**	**ANALÍTICO ESTRUCTURAL**
Un estudiante en este modo puede graficar puntos que satisfacen la ecuación y verificar que la figura que	Un estudiante en este modo se puede encontrar con dos formas de solucionar la	Un estudiante puede pensar la Función Lineal coordinando los modos AA y AE, donde a partir de

se forma representa una línea recta como una correspondencia en la que hay crecimiento proporcional.	situación: En primer lugar, puede, a partir de los puntos intercepto, generar la gráfica uniéndolos. Otro procedimiento que podría utilizar es construir la tabla de valores, encontrar las coordenadas cartesianas y establecer si la figura que se encontró al unir los puntos, tiene una forma similar a la recta que él conoce.	algunas coordenadas generadas con base en la ecuación, establece una relación de proporcionalidad que lo lleva a afirmar que dichas coordenadas representan una recta, y por ende cumplen las condiciones de la recta como lugar geométrico.

4.8 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La investigación se ha venido desarrollando bajo los parámetros descritos en este capítulo: se implementaron actividades de aula que involucran el objeto matemático, la aplicación del cuestionario, con la respectiva retroalimentación especifica del concepto a investigar; además, se introduce al estudiante en el manejo del *software* Cabri como elemento importante para que el estudiante puede dar respuesta a la teoría sin limitaciones en un Modo Estructural; de igual forma realizamos las entrevistas a los estudiantes que mostraron indicios de un tránsito entre los modos de pensar, de esta manera se obtienen pautas muy sólidas para en análisis de la información que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

El desarrollo del capítulo se estructura en dos momentos. En el primero se realiza el análisis a posteriori del cuestionario, contrastándolo con el análisis a priori presentado en el capítulo 4, para ello se dispone de las respuestas que han proporcionado los estudiantes, con las cuales se elabora un análisis detallado verificando los casos donde se evidencia una articulación entre los Modos de pensar (AA–FL→SG–FL, AA–FL →AE–FL, SG–FL →AE–FL y AA–FL→SG–FL), confirmando o reformulando los articuladores hipotéticos inicialmente planteados.

Un segundo momento hace referencia a la entrevista Semi–Estructurada, resaltando que esta se realiza siempre y cuando el cuestionario no arroje los elementos suficientes para levantar los articuladores. Dicha entrevista se trabaja con base en una situación en contexto y se desprenden una serie de preguntas orientadas a la búsqueda de los elementos articuladores que utilizan los estudiantes, y que por ende evidencian un tránsito en su desarrollo; de igual forma, se cuenta con el análisis a priori y a posteriori de la entrevista a la luz de la teoría Modos de Pensamiento.

5.1 APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

La recolección de los datos consistió en la aplicación del cuestionario a principio de noviembre de 2017, los estudiantes de los casos de estudio respondieron en forma individual, en dos bloques de 100 minutos aproximadamente, garantizando que cada estudiante contara con el *Software* Cabri.

5.2. ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO A LA LUZ DE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO.

El siguiente análisis corresponde a las respuestas proporcionadas por los participantes en el cuestionario de preguntas Semi-Abiertas, aplicado a los casos de estudio 1 y 2, donde cada uno es etiquetado con la letra **E,** seguido de un número que se asigna para mantener en el anonimato la identidad de quien responde, por ejemplo, el participante dos se nombra como **E2** según la figura 19 del diseño metodológico; de igual forma, se nombran los Modos de pensar como Sintético–Geométrico de la Función Lineal (**SG–FL)**, Analítico–Aritmético de la Función Lineal (**AA–FL)**, Analítico– Estructural de la Función Lineal (**AE–FL)**. Los articuladores se nombran dependiendo de su clasificación, es decir, si son hipotéticos se identifican con la abreviatura **Ath** y si son emergentes con **Athe**. Dichas abreviaturas están acompañadas de un número para diferenciarlos, por ejemplo, el articulador hipotético uno recibe el nombre de **Ath1.** y el articulador emergente dos como **Athe2.;** ambos articuladores propician un tránsito entre un Modo de pensar y otro.

Para tener un mayor control y organización de la información obtenida, se ha utilizado una rúbrica (Ver Anexo 9) donde se identifica el Modo de pensar en que se ubica el estudiante al responder, los tránsitos que se evidencian en sus respuestas así como los articuladores que posibilitan dicho tránsito; de igual forma, se observan unas flechas en la parte superior de cada columna que indican qué tipo de tránsito –entre un modo de pensar y otro– se está observando en cada uno de los participantes. Para resaltar los nuevos elementos que surgen en el análisis a posteriori, se establecen las siguientes connotaciones: los articuladores emergentes aparecen de color verde, los tránsitos emergentes están en azul y aquellos articuladores que se plantearon hipotéticamente pero que propician un tránsito diferente al considerado en el análisis a priori, se identifican con amarillo.

El análisis en mención se realiza teniendo en cuenta la teoría Modos de Pensamiento y las posibles respuestas a la luz de la matemática descritas en el análisis a priori, para lo cual se pone en juego la intención de cada pregunta en el cuestionario, agrupando aquellas respuestas con el mismo tránsito. En cada uno de los casos de estudio, se analizan los siguientes aspectos:

Los tránsitos que logran los estudiantes entre los Modos de comprender la Función Lineal.
Los elementos de la matemática que se ponen en juego al momento de establecer estos tránsitos.

Los Modos de pensar que privilegian los estudiantes al enfrentarse a preguntas planteadas en distintos modos.

Las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de las preguntas, ya sean, del dominio de la matemática o bien por los planteamientos de las preguntas.

Los tránsitos entre los Modos que resultaron más débiles, y más fuertes y las posibles causas de ello.

En el análisis se incluirán ejemplos e imágenes de algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, resaltando que sólo se tienen en cuenta aquellas respuestas que se consideran suficientes para mostrar los distintos argumentos dados por los participantes.

5.2.1. REGISTRO Y ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CASO 1

El registro a posteriori del cuestionario surge como un instrumento (rubrica) que permitió organizar las respuestas proporcionadas por los estudiantes (Ver Anexo 9). En esta se resumen los hallazgos del caso 1 luego de la aplicación del cuestionario de preguntas Semi-abiertas. En su contenido se consignaron los posibles tránsitos y articuladores que propician dicho tránsito, así como aquellos que emergen en el proceso de análisis Con respecto a los símbolos utilizados en el registro, se precisa que cuando se habla de E9, se está haciendo referencia al participante 9, en el caso de las preguntas se usa la abreviatura P1 para el caso de la pregunta número 1, y los articuladores se representan por medio del símbolo $\xrightarrow[Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}]{}$ refiriéndose a un articulador hipotético.

.

A continuación, se hace un análisis de las respuestas proporcionadas por los participantes en las cinco preguntas planteadas en el cuestionario, mostrando ejemplos sólo de aquellos estudiantes que pueden brindar información tanto de los tránsitos entre los Modos de pensar la Función Lineal, así como de los Articuladores que generan dichos tránsitos.

Se nombran los participantes del Caso 1 como: E1, E3, E9, E11, E13, E16, E19, E21, E23, E24, E25, E26, E27.

Los participantes E21, E26, E27 no se incluyen en el análisis por no mostrar elementos que den cuenta del marco teórico.

Para efectos del análisis se retoman aquellos participantes que dan cuenta de los tránsitos entre un Modo y otro definidos en el a priori, y que además, algunos de ellos, mostraron indicios de nuevos tránsitos y/o articuladores, dentro de los cuales se encuentran: E1, E3, E9, E11, E13, E16, E19, E23, E24, E25.

Pregunta 1

A partir del gráfico dado (Ver figura 19), determina la ecuación de la recta. Justifica, en detalle, el procedimiento que has realizado.

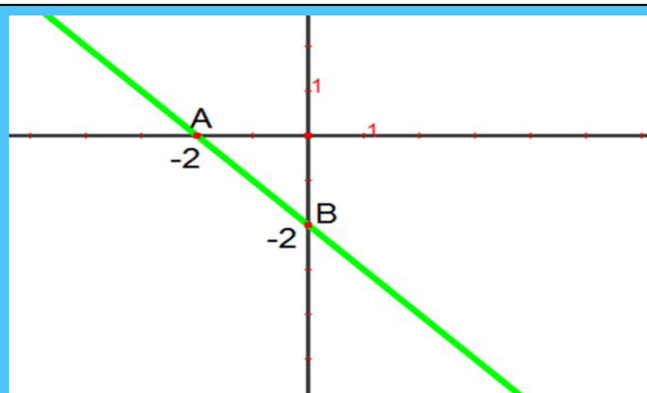


Figura 19: Gráfico de la recta.

La pregunta 1 del cuestionario tiene por intención verificar si los estudiantes reconocen y determinan la ecuación cartesiana de una Función Lineal a partir de su representación gráfica, propiciando una articulación entre los modos SG–FL→AA–FL.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E1:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevista
E1 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			

En esta pregunta los participantes presentan en común argumentos matemáticos que confirman el Articulador **"Coordenadas Cartesianas"** –**Ath.1**–, como aquel elemento que propicia el tránsito entre los Modos SG–FL→AA–FL, situándose en el Modo SG–FL para responder. A continuación, se presentan las evidencias del participante E1 quien muestra en detalle los procedimientos matemáticos utilizados, cuando se vale del gráfico planteado en la pregunta para tomar dos coordenadas, encontrar la pendiente y posteriormente hallar la expresión analítica. Se debe aclarar que dichos procesos son similares a los mostrados por los demás participantes, motivo por el cual sólo se retoma uno de ellos (Ver figura E1-P1).

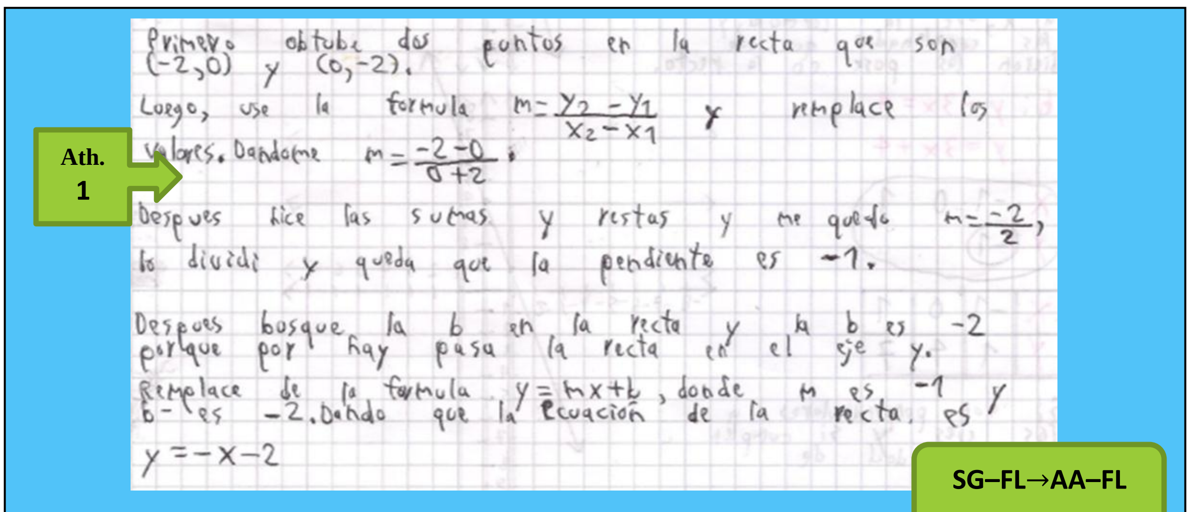


Figura E1-P1.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E11:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E11 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			

Este participante responde la pregunta tomando dos de las coordenadas planteadas en el gráfico y, con base en estas, encuentra la pendiente de la recta dando evidencia de utilizar el Articulador **“Coordenadas Cartesianas”** –**Ath.1**– que le permite el tránsito entre SG–FL→ AA–FL. Además de realizar el procedimiento matemático, específica de manera descriptiva dicho proceso (Ver figura E11-P1):

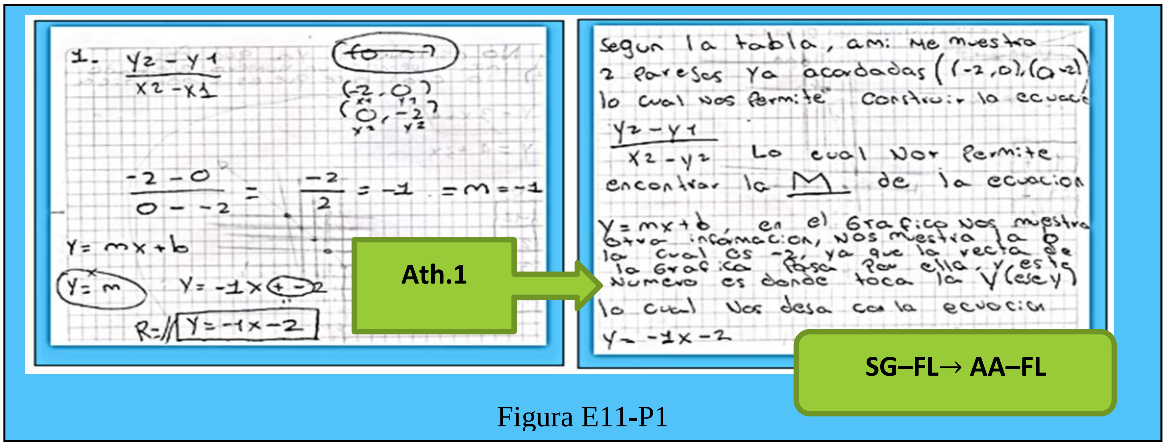


Figura E11-P1

La siguiente información tomada del Anexo 9, permite observar el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E19:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E19 (P1)	X			$\xrightarrow{\text{Ath 7 Coordenadas Cartesianas}}$	$\xrightarrow{\text{Ath 1 Corrdenadas Cartesianas}}$			

Este participante muestra es sus respuestas un aparente tránsito entre AA–FL→SG–FL, al utilizar el *software* Cabri para graficar la línea recta y encontrar su expresión analítica, esto a través de las **“Coordenadas Cartesianas”** –**Athe.7**–. Es de anotar que el tránsito en mención no fue planteado en las hipótesis iniciales al realizar el análisis a priori, por lo cual requiere ser confirmado o rechazado mediante la entrevista (Ver figura E19-P1 (1)):

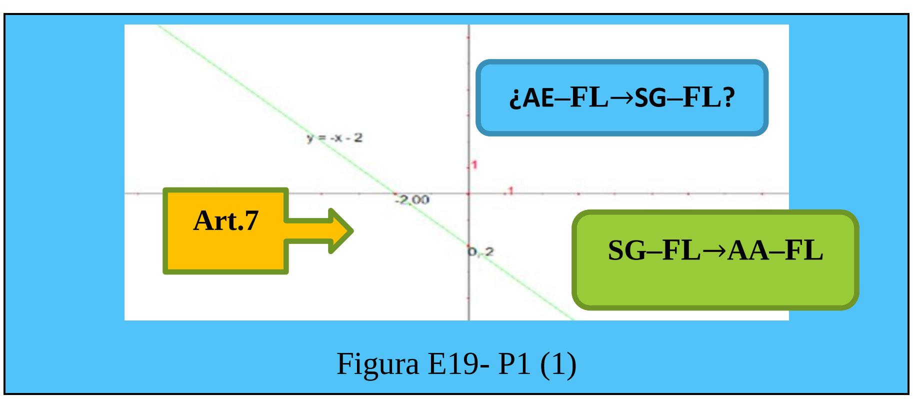
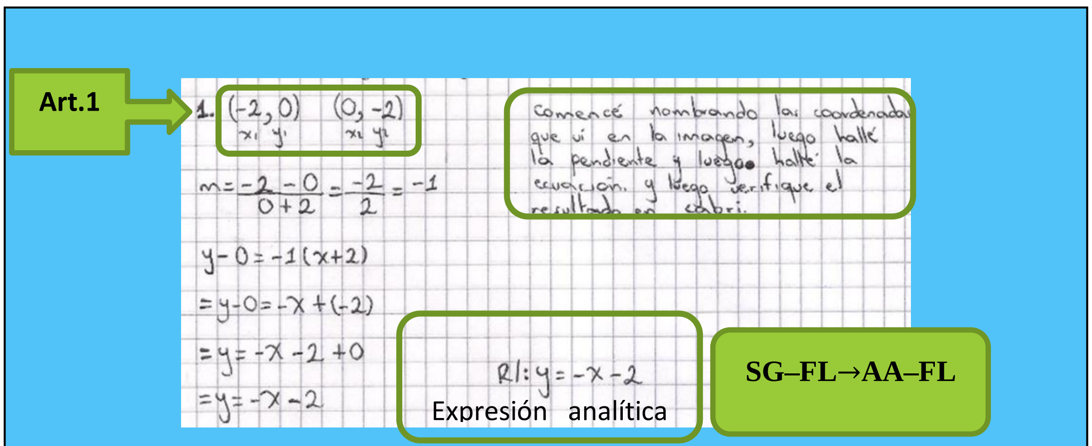


Figura E19- P1 (1)

En el mismo sentido, se observa cómo este participante transita entre los Modos SG–FL→AA–FL, cuando dice ***“comencé nombrando las coordenadas que vi en la imagen, luego hallé la pendiente y luego hallé la ecuación, y luego verifiqué el resultado en Cabri”***, haciendo referencia a la gráfica dada en la pregunta, para ello utiliza las **“Coordenadas Cartesianas”** –**Ath.1**–, lo cual lleva a pensar en el siguiente cuestionamiento: ¿Es posible que un mismo Articulador posibilite un tránsito en doble sentido?, interrogante que se aborda en la entrevista aplicada al Caso 3 (Ver figura E19, P1 (2)):

De otra parte, en este participante se evidencia un aparente tránsito entre los Modos AE–FL→SG–FL, que se observa cuando recurre al *software* Cabri para “verificar” la expresión analítica que representa la recta. Ello da indicio de tener apropiación de las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico (Ver figura E19, P1 (1)):



Ver figura E19, P1 (2)

Lo anterior significa que en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Función Lineal, es importante fortalecer el concepto de “**Coordenadas Cartesianas”** –**Ath.1**– como un elemento de la matemática valioso a la hora de enseñar, pues permite movilizar los Modos de pensar desde lo Geométrico a lo Aritmético.

Pregunta 2

“Selecciona cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Función Lineal, luego construye una tabla de valores representando los datos de la misma en el plano cartesiano generando la recta, verifica si las coordenadas obtenidas son perpendiculares a los ejes y cumplen la propiedad de colinealidad. Explica cómo llegaste a la respuesta”.

a) $y + 2x^2 = 9$ b) $y - 3x = 4$ c) $y = 4x + 3$

Esta pregunta tiene por intención verificar si los estudiantes identifican las ecuaciones que describen una Función Lineal, así como su interpretación geométrica representada en la línea recta y lo estructural descrito como un lugar geométrico, donde todos los puntos cumplen con las propiedades de perpendicularidad respecto a los ejes y de colinealidad, propiciando la articulación entre los modos de pensar SG–FL→AA–FL→AE–FL.

Los participantes E1, E3, E9, E11, E13, E19, E24, E25 muestran en sus respuestas evidencias del tránsito entre AA–SG, cuando a partir de la expresión analítica, son capaces de generar coordenadas cartesianas y ubicarlas en el plano para representar la línea recta.

Para efectos del análisis, se retoman algunas construcciones y justificaciones proporcionadas por los participantes E1, E9, E11, E13.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se pueden observar articuladores y tránsitos evidenciados por el participante E1:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevista
E1 (P2)		X		$\xrightarrow[Ath\ 2_{\text{Dominio y rango}}]{}$ $\xrightarrow[Ath\ 7_{\text{Coordenadas Cartesianas}}]{}$		$\xrightarrow[Ath\ 6\ \text{Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico}]{}$	$\xrightarrow[Ath\ 5_{\text{Propiedades lugar geométrico}}]{}$	Forma coordenadas.

En el análisis de la pregunta se retoma al participante E1 quien argumenta su respuesta planteando que "***primero le di valores a x para ver que funcionara, luego le di más*** **valores y use la formula, las coordenadas que me daban las colocaba en la recta…".**

Desde la teoría Modos de Pensamiento este participante se ubica para responder en AA–FL, esto queda en evidencia en los procedimientos utilizados cuando da valores a x y los reemplaza en la fórmula obteniendo así los de y, lo que le permite generar las coordenadas que luego lo llevan a graficar la línea recta, propiciando un tránsito entre AA–FL→SG–FL mediante l Articulador hipotético **"Dominio y Rango"** –**Ath.2**– y el Articulador emergente **"Coordenadas Cartesianas"** –**Athe**.**7**–. Se puede ver en estos articuladores que en esencia representan el mismo concepto matemático, lo que lleva a pensar que se pueden conjugar en uno solo, confirmando de esta manera las **"Coordenadas Cartesianas"** como un Articulador entre AA–FL→SG–FL.

En la misma respuesta el participante E1 muestra uso de las condiciones de la Función Lineal como un lugar geométrico, cuando dice "***sí son perpendiculares a los ejes y sí son colineales",*** dando evidencia de un tránsito entre SG–FL→AE–FL a través del Articulador **"Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"** –**Ath.6**– y del tránsito entre AA–FL→AE–FL al relacionar este mismo Articulador en la explicación de su respuesta.

Así mismo, el estudiante muestra una aparente comprensión de las condiciones de la recta como lugar geométrico que le permite generar la represetación gráfica de la recta, mostrando indicios del tránsito AE–FL→ SG–FL usando el articulador "**Perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad"** –**Ath.2**– (Ver figura E1, P2).

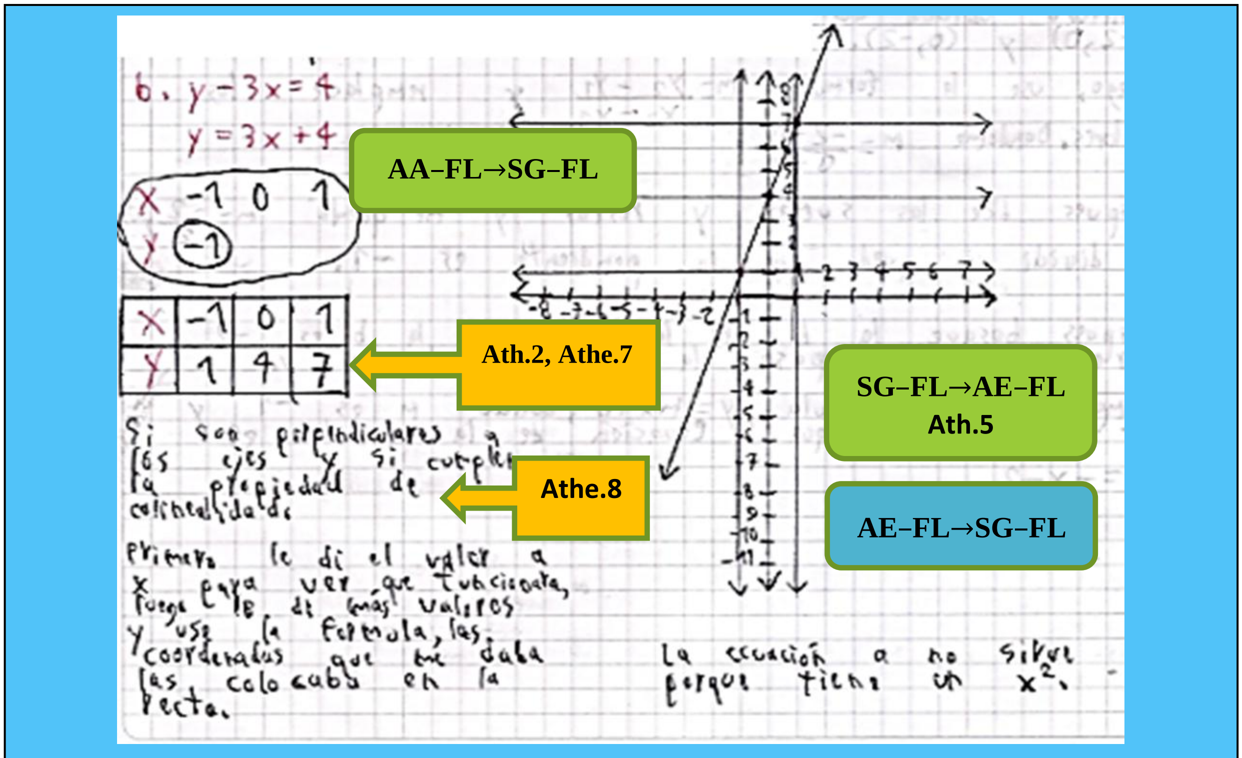


Figura E1-P2.

Además, en este participante se percibe claridad respecto al Modo de pensar AA–FL de la Función Lineal, cuando escribe "***...la ecuación a) no sirve porque tiene un*** $\boldsymbol{x^2}$" evidenciando así apropiación de los elementos que definen este objeto.

En la misma línea, el participante E11 presenta argumentos similares al E1 cuando plantea lo siguiente (Ver figura E11-P2):

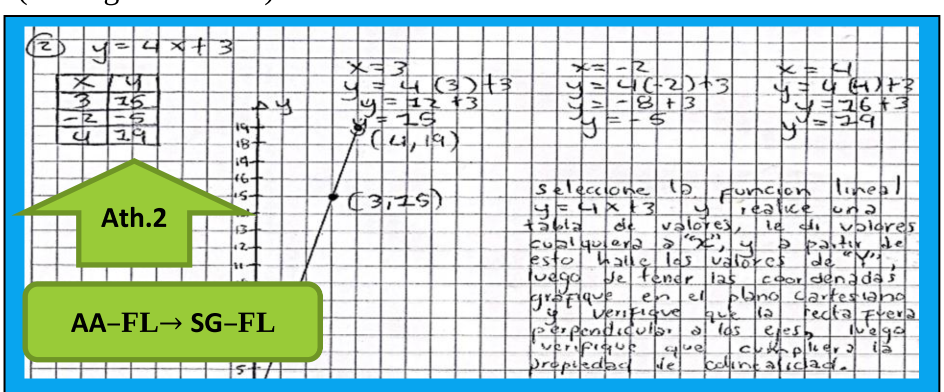


Figura E11-P2

En la anterior figura, se observa que el participante genera las coordenadas cartesianas a partir de la tabla de valores, haciendo uso de estas para graficar, además muestra un conocimiento parcial de las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico, cuando da cuenta sólo de la propiedad que tiene que ver con la colinealidad.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se puede observar el Articulador y tránsito evidenciado por el participante E13:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E13 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				¿Hay claridad en lo estructural? ¿Cómo comprueba la colinealidad?

El participante muestra claridad frente a las características de la Función Lineal, cuando selecciona las dos expresiones que la representan, además usa el Articulador **“Dominio y Rango”** –**Ath.2**– para construir la tabla de valores que posteriormente le permite generar la gráfica transitando entre AA–FL→SG–FL. A continuación se muestran los procesos realizados (Ver figura E13-P2):

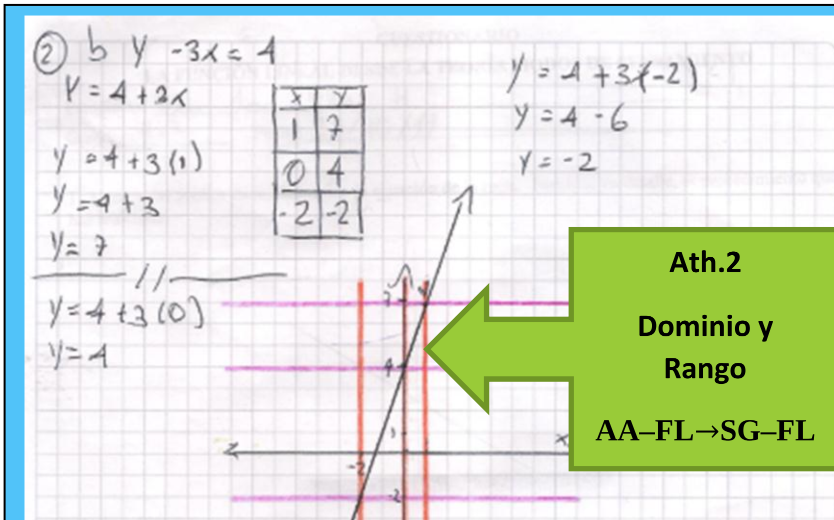


Figura E13-P2

La siguiente información tomada del Anexo 9, corresponde a los articuladores y tránsitos evidenciados por el participante E19:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E19 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$ $\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$			$\overrightarrow{Ath\ 5_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$	
E19 (P3)		X						

En esta pregunta el participante muestra en sus procedimientos un elemento diferenciador utilizando el *software* Cabri para transitar entre los Modos SG–FL→AE–FL, al graficar la recta y a partir de esta trazar rectas perpendiculares a los ejes, verificando las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico (Ver figura E19-P2 (1)).

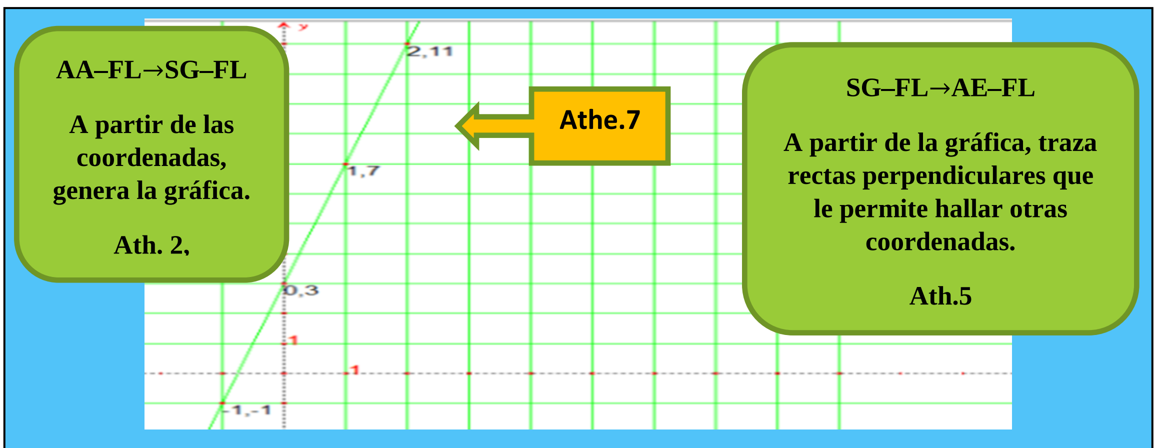


Figura E19-P2 (1)).

De otra parte, dicho participante muestra un evidente tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL cuando, a partir de las coordenadas encontradas con base en la expresión analítica, traza la gráfica que la representa manifestando que ***"hizo una tabla de valores, en x, puse dos números cualesquiera y luego con la operación dada empecé a darle valores a y"*** (Ver figura E19-P2 (2))

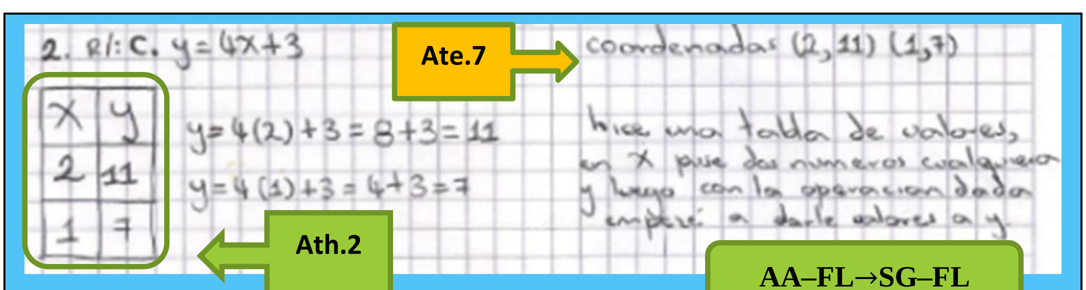


Figura E19-P2 (2)

El participante E23 no responde la pregunta 2, lo que no permite evidenciar elementos del marco teórico que ameriten un análisis.

Pregunta 3

"Encuentra la ecuación de la recta que intercepta el eje "y" en el punto (0,3) el cual es perpendicular a los ejes coordenados y tiene por pendiente 4.   Justifica tu respuesta".

La pregunta 3 del cuestionario tiene la intención de verificar si los estudiantes logran hallar la ecuación de una Función Lineal a partir de los elementos y propiedades que la definen, generando una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

Los participantes E1, E3, E11, E13, E16, E19, E21, E23, E24, E25, E26, E27, se sitúan en el Modo AA planteando la ecuación solicitada a partir de los datos dados (pendiente e intercepto en el eje y), mostrando claridad en los elementos que conforman una Función Lineal, pero no evidencia ningún tránsito hacia otro modo de pensar, aspecto que podría ser un indicio de posibles dificultades en el planteamiento de la pregunta por parte de los investigadores.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E9:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E9 (P3)		X		$\xrightarrow{\text{Ath 7}_{\text{Coordenadas Cartesianas}}}$				Obtener más información del punto 3.

El participante E9 encuentra la expresión analítica pensando en elementos proporcionados por la gráfica, cuando afirma ***"encontré la "b" porque al ubicar (0, 3) en el plano sería "o" para la "x" y "3" para la "y" y el 3 corta en la recta por eso es la "b""***. En este participante se observa un aparente tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL mediante el Articulador **"Coordenadas Cartesianas" –Athe.7–**, cuando dentro de su argumentación resalta que "…***el 3 corta en la recta por eso es la "b".*** De otra parte, muestra comprender el concepto de Función Lineal en cuanto que tiene claridad de cómo logra formar la ecuación (Ver figura E9, P3).

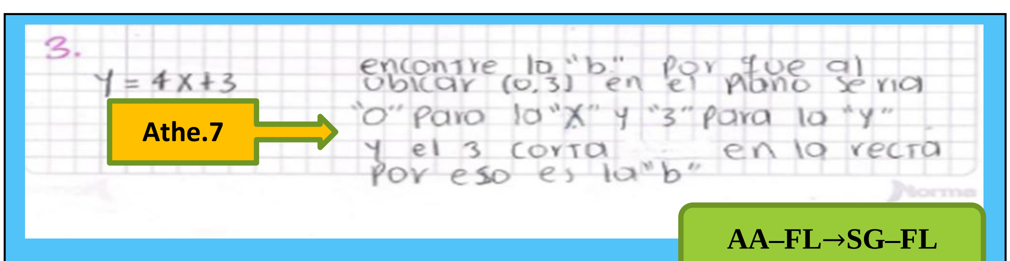


Figura E9, P3.

Pregunta 4

"Dadas las coordenadas $(1,-3)\, y\, (2,0)$, graficar y hallar otras coordenadas perpendiculares y colineales que pertenezcan a la gráfica que pasa por dichos puntos. Luego, hallar la ecuación y construir la recta como lugar geométrico (usar el *software* Cabri)".

La pregunta 4 del cuestionario tiene la intención de verificar que los estudiantes identifiquen la representación gráfica de la Función Lineal, reconociendo la recta como lugar geométrico, y a partir de ello, el reconocimiento de las relaciones cartesianas generando una expresión analítica. Estos elementos propician una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

Los participantes E1, E3, E9, E11, E13, E16, E19, E23 muestran en sus respuestas evidencias de algunos tránsitos, estos se muestran de manera detallada a continuación, aclarando que como varios presentan articuladores y tránsitos comunes, sólo se muestran los procedimientos realizados por algunos de ellos:

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E16:

PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E16 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$				

Los participantes E9, E13, E16, E23, argumentan matemáticamente su respuesta identificando las "**Coordenadas Cartesianas"** –**Athe.7**– como aquel elemento que permite el tránsito entre los modos AA–SG, situándose en el modo AA–FL para responder. Todos utilizan el *software* Cabri para dar respuesta a la pregunta y algunos sustentan de manera textual, así, por ejemplo, el participante E23 plantea ***"los puntos encontrados están en la misma recta, son colineales y pueden extenderse…".*** Es de resaltar que los participantes E16 y E23 muestran comprender la Función Lineal como lugar geométrico, al reconocer las la perpendicularidad con respecto a los ejes y la colinealidad de los puntos. Como evidencias se muestra la construcción y los argumentos que presenta el participante E16 (Ver figura E16-P4).

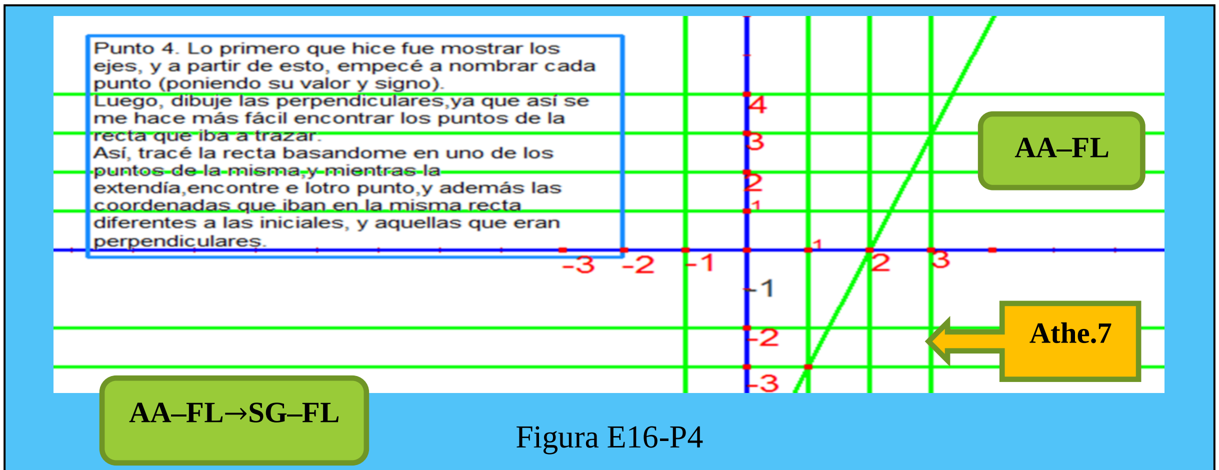


Figura E16-P4

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E3:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				**Observaciones** Candidato para entrevista
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E3 (P4)		X		Ath 7 Coordenadas Cartesianas				

Por su parte, los participantes E1 y E3 hacen uso de las "**Coordenadas Cartesianas**" – **Athe.7**– para argumentar su respuesta, valiéndose de estas para generar la gráfica con ayuda del *software* Cabri, convirtiendo dicha herramienta en el principal facilitador al momento de hacer la construcción, lo que propicia el tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL. Como evidencias se muestra la construcción del participante E3 (Ver figura E3-P4).

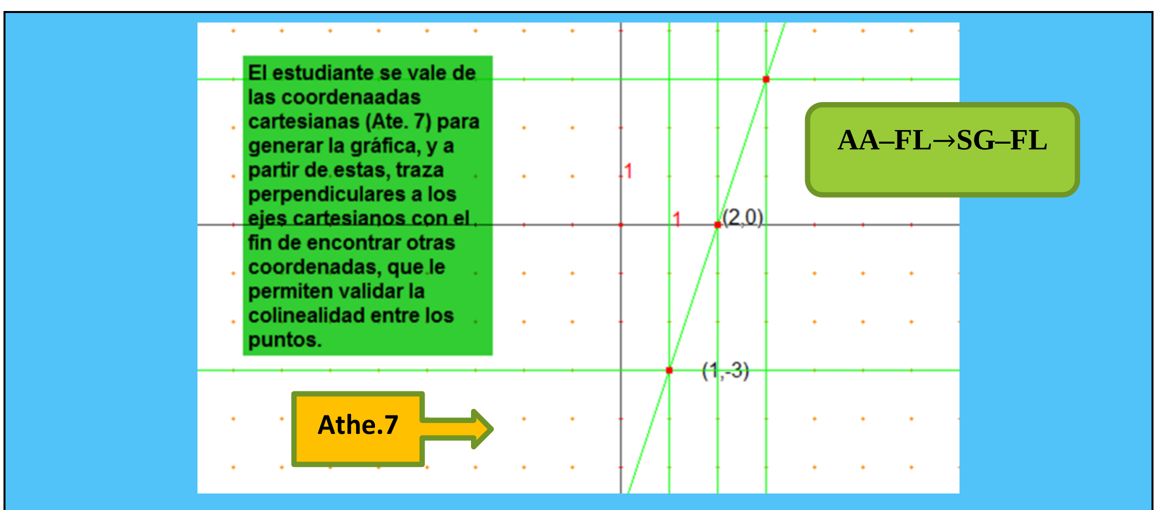


Figura E3-P4

En el caso del participante E19 se evidencia un tránsito entre los modos AE–FL→SG–FL trazando la gráfica a partir de las coordenadas dadas, luego traza rectas perpendiculares y busca intersecciones sobre la recta para encontrar otras coordenadas, contrastando el Articulador **“Perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad” –Athe.8–**, que hace referencia a la línea recta como lugar geométrico, además se sitúa en el Modo AE–FL para responder. Muestra en sus argumentos elementos de AE–FL cuando se vale de las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico para generar otras coordenadas.

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E13:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E13 (P4)		X		$\xrightarrow{\text{Ath 7 Coordenadas Cartesianas}}$		$\xrightarrow{\text{Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico}}$		

Los participantes E11 y E13 basan sus argumentos en el Articulador **“Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico”–Ath.6–**, como elementos que permiten el tránsito entre los Modos AA–FL→AE–FL, utilizando como mediador el *software* Cabri situándose en el Modo AA–FL para responder; además plantean cálculos aritméticos para sustentar su respuesta. A continuación se muestra la respuesta proporcionada por el participante E13 (Ver figura E13, P4).

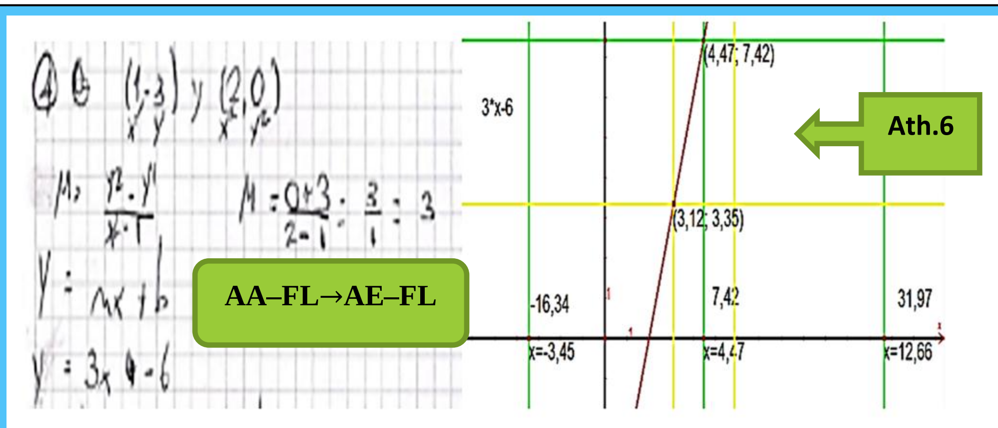


Figura E13, P4

El participante E21 no responde la pregunta 4, lo que no permite evidenciar elementos del marco teórico que ameriten un análisis.

Pregunta 5

"Dada la ecuación $y + x = -1$, representarla gráficamente y comprobar que dicha gráfica cumple las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico. Explica el procedimiento (usar el *software* Cabri)".

La pregunta 5 del cuestionario tiene la intención de verificar si el estudiante aplica diversas estrategias que le permitan representar gráficamente la Función Lineal, propiciando la articulación entre los modos AA–FL→SG–FL y AA–FL→AE–FL.

Los participantes E1, E3, E9, E11, E13 muestran en sus respuestas evidencias de algunos tránsitos, estos se muestran de manera detallada en el siguiente análisis:

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E1, los cuales coinciden con los del E13:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevista
E1 (P5)		X		$\xrightarrow{Ath\ 2_{\text{Dominio y rango}}}$		$\xrightarrow{Ath\ 6}$ Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		

Los participantes E1 y E13 muestran argumentos similares donde evidencian comprender en el Modo AE la Función Lineal, al describir paso a paso cómo obtener la gráfica de dicha función como lugar geométrico, dando cuenta del tránsito AA–FL→AE–FL. De otra parte, evidencian tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL utilizando el Articulador **"Dominio y rango" –Ath.2–**, cuando le dan valores a la x y los transfieren a la expresión para hallar los de y, y luego poder graficar. Para efectos del análisis se presentan las respuestas de E1 (Ver figuras E1-P5 (1) y E1-P5 (2)).

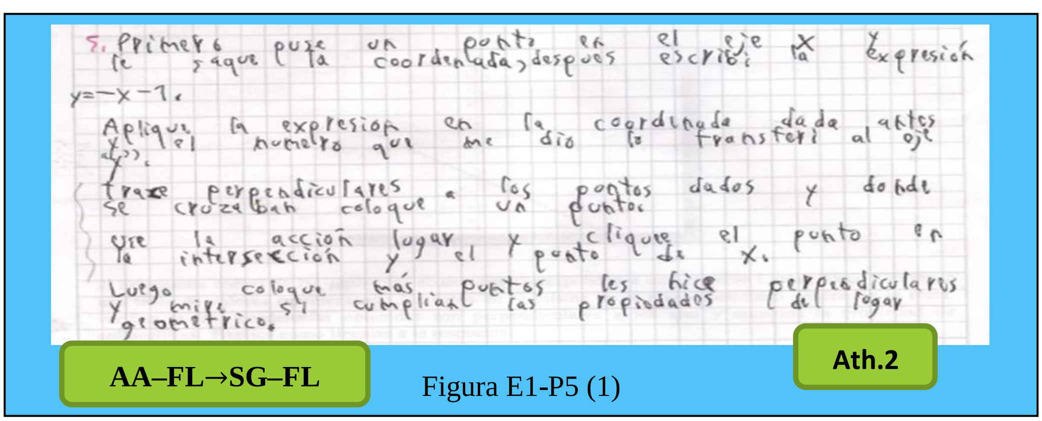


Figura E1-P5 (1)

Figura E1-P5 (2)

En la siguiente información tomada del Anexo 9, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por el participante E9 y E13:

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E9 (P5)		X				$\xrightarrow[\text{Ath 6}]{}$ Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		Indagar por lo estructural.
E13 (P5)		X		$\xrightarrow[\text{Ath 2}]{}$ Dominio y rango		$\xrightarrow[\text{Ath 6}]{}$ Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		

En esta misma pregunta, los participantes E1, E3, E9, E11 y E13 se ubican en el Modo AA–FL donde a partir de la expresión dada en la pregunta, generan la gráfica con ayuda de Cabri identificando las propiedades de la Función Lineal como un lugar geométrico, además se ubican en el modo AE propiciando un tránsito entre los modos AA–FL→AE–FL con el Articulador **“Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico” –Ath.6–** Se aclara que por la similitud de las construcciones de los cinco participante, se muestran las evidencias sólo de dos (Ver figuras E13-P5 y E9-P5).

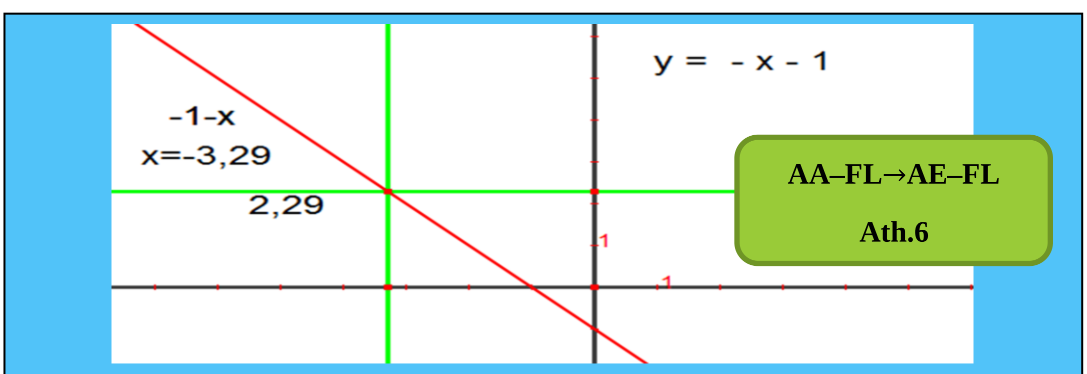


Figura E13-P5

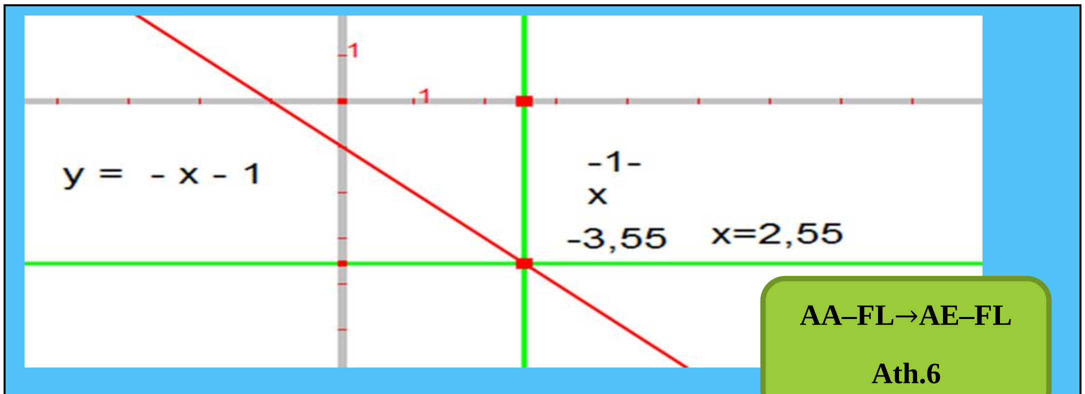


Figura E9-P5

Finalmente, los participantes E16, E19, E21, E23, E24, E25 no responden la pregunta 5, lo que no permite evidenciar elementos del marco teórico que ameriten un análisis.

5.2.2 HALLAZGOS DEL CASO 1

- La mayoría de los participantes del caso 1, se ubican para responder el cuestionario en AA–FL o en SG–FL, estos logran identificar elementos característicos de la Función Lineal; como puntos de corte con los ejes coordenados, pendiente o inclinación y gráfica, además reconocen la expresión analítica que define al objeto matemático en mención y en pocos casos comprenden las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico.

- Lo descrito en el párrafo anterior, se ve reflejado en las conexiones que establecen los participantes entre los modos AA–FL →SG–FL, SG– FL →AA–FL, AA– FL →AE–FL, SG– FL →AE–FL y AE–FL →SG–FL en la recta, cuando a partir de la expresión analítica o de elementos de esta logran representar gráficamente la Función Lineal; en la ecuación, cuando son capaces de tomar elementos de la gráfica y hallar la expresión analítica de la misma y como lugar geométrico, cuando hacen uso de las propiedades de la línea recta para graficar o encontrar su ecuación.

- En este caso la mayor fortaleza logra ser evidenciada en el tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL, donde 10 participantes de un total de 13 hacen uso del Articulador hipotético **“Dominio y rango” –Ath.2–**, y el Articulador emergente “**Coordenadas Cartesianas”–Athe.7**–; se puede ver en ellos que en esencia representan el mismo concepto matemático donde el Athe.7 se considera como un elemento importante de la Función Lineal que permite generar el Ath.2, lo que permite confirmar en este caso, las **“Coordenadas Cartesianas”** como un Articulador entre AA– FL →SG–FL.

- De otra parte, el tránsito entre los modos SG–FL→AA–FL se evidencia en 7 participantes de este caso mediante el Articulador **“Coordenadas Cartesianas”** –**Ath. 1**–, mostrando que, a partir de la recta en el plano cartesiano, es posible extraer como mínimo dos coordenadas que le permiten, encontrar la expresión analítica que la representa. De esta manera se observa como este Articulador se convierte en un elemento fundamental de la matemática que permite generar el tránsito entre los Modos de Pensamiento SG– FL →AA–FL.

- Otro tránsito que se logra con éxito en este caso es el que ocurre entre los Modos AA–FL→AE–FL en esta conexión los participantes hacen uso del Articulador “**Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico” –Ath.6–** , para ello se valen de la expresión analítica y representan la Función Lineal en el plano cartesiano como lugar geométrico, esto, a través del *software* Cabri mostrando evidencias de ser capaces de comprender que todos los puntos que conforman la recta son perpendiculares a los ejes coordenados y además cumplen la propiedad de colinealidad; ratificando así las propiedades de la Función Lineal como el elemento de la matemática que es fundamental en el tránsito entre estos Modos.

- Es de anotar, que el tránsito entre AA–FL→AE–FL, no se da de manera directa, pues los participantes deben recurrir primero a lo gráfico para justificar lo Estructural, aun dando evidencias de comprender parte de AE–FL.

- En las conexiones entre los Modos SG–FL→AE–FL, solo 2 participantes muestran en sus argumentos algunos elementos que hacen pensar en un posible tránsito, lo cual no es suficiente para confirmar el Articulador “**Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico” –Ath.5–** como aquel elemento de la matemática que propicia el paso de un modo a otro; sin embargo, se considera que dicho tránsito es posible en este nivel, pero se requiere un mayor trabajo y detenimiento en estos participantes, por lo cual serán participes de la entrevista como segundo instrumento de análisis.

  Por otro lado, se muestra cómo en este caso los participantes presentan grandes dificultades para pensar el concepto en un Modo AE–FL, evidenciado en 14 de ellos que no logran dar argumentos a partir de este modo, lo que lleva a pensar si faltó un mejor diseño de las preguntas del instrumento, de tal manera que movilizara este modo de pensar el objeto matemático. Si bien uno de los participantes muestra en la pregunta 1 indicios de conocer el AE de la Función Lineal y de establecer conexiones entre los modos AE–FL→SG–FL utilizando el Articulador emergente “**Perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad” –Athe.8–**; sus estrategias no son suficientemente claras para dar una respuesta, por ello se requiere profundizar en él mediante la entrevista, permitiendo confirmar o no el tránsito y articulador utilizado.

- Luego del análisis en detalle del caso, se verifica que los participantes que lograron evidenciar situaciones o procedimientos objeto de indagación, deberán realizar entrevista directa con los investigadores como segundo instrumento de análisis, estos son: E1, E3, E19, E9, E11, E12 los cuales harán parte del caso 3.

5.2.3. ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CASO 2

El registro a posteriori del cuestionario surge como un instrumento (rubrica) que permitió organizar las respuestas proporcionadas por los estudiantes (Ver Anexo 10). En esta se resumen los hallazgos del caso 2 luego de la aplicación del cuestionario de preguntas Semi-abiertas. En su contenido se consignaron los posibles tránsitos y articuladores que propician dicho tránsito, así como aquellos que emergen en el proceso de análisis Con respecto a los símbolos utilizados en el registro, se precisa que cuando se habla de E2, se está haciendo referencia al participante 2, en el caso de las preguntas se usa la abreviatura P1 para el caso de la pregunta número 1, y los articuladores se representan por medio del símbolo $\xrightarrow[Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}]{}$. Refiriéndose a un articulador hipotético
.

A continuación, se hace un análisis de las respuestas dadas por los participantes de este caso en las cinco preguntas planteadas en el cuestionario, mostrando ejemplos sólo de aquellas que pueden brandar información tanto de los tránsitos entre los modos de pensar la Función Lineal, así como de los articuladores que generan dichos tránsitos.

Se nombran a los participantes del Caso 2 como: E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E14, E15, E17, E18, E20, E22, E28, E29, E30.

Los participantes E14, E20, E22, E28, E29, E30 no se incluyen en el análisis por no mostrar elementos que den cuenta del marco teórico.

Se tienen en cuenta aquellos que evidencian tránsitos entre un Modo y otro, dentro de los cuales se encuentran: E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E15, E17, E18.

Pregunta 1

"A partir del gráfico dado (Figura 20), determina la ecuación de la recta. Justifica, en detalle, el procedimiento que has realizado".

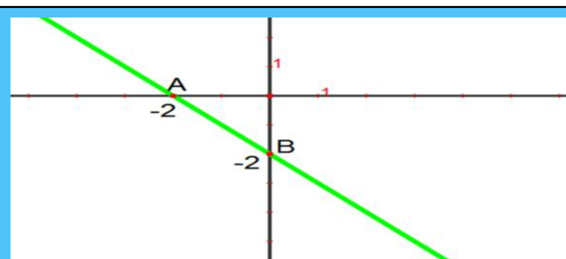


Figura 20: Gráfico de la recta.

La pregunta 1 del cuestionario tiene por intención verificar si los estudiantes reconocen y determinan la ecuación cartesiana de una Función Lineal a partir de su representación gráfica, propiciando una articulación entre los modos SG–FL→AA–FL.

Los participantes E2, E4, E5, E6, E8, E10, E12, E15, E17, E18 argumentan matemáticamente sus respuestas identificando las “**Coordenadas Cartesianas”** – **Ath.1**–, como aquel elemento que permite el tránsito entre los Modos SG–FL→AA–FL. Para efectos del análisis, a continuación se muestran las respuestas de los participantes E4, E17, E18.

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa tanto el Articulador como el tránsito evidenciado por el participante E4-P1:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E4 (P1)	X				$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ *Ath 1* *Corrdenadas Cartesianas*			

El participante E4 argumenta su respuesta tomando dos coordenadas del gráfico diciendo que ***“con este procedimiento, encontré la pendiente que es -1. Entonces la ecuación me quedaría negativa. Para encontrar la b, es muy fácil, es sólo mirar por dónde pasa, o por donde corta el eje y…”*** (Ver figura E4, P1)

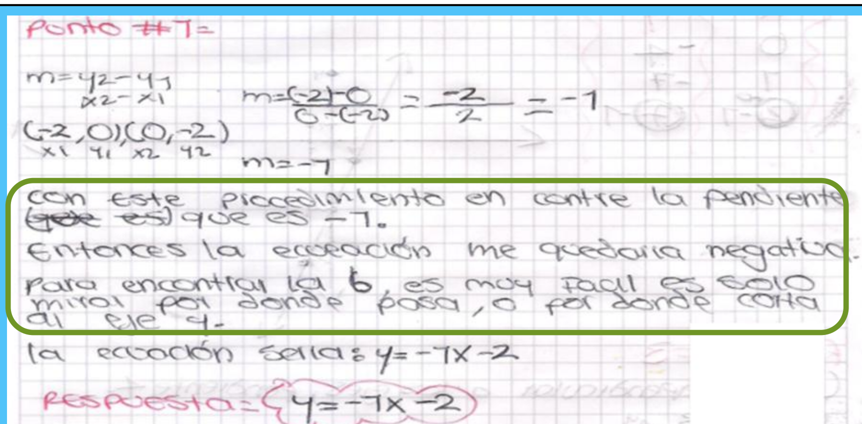


Figura E4-P1

La información tomada del Anexo 10, se presenta a continuación, donde se observa tanto el Articulador como el tránsito evidenciado por el participante E17-P1:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E17 (P1)	X				$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ath 1 Corrdenadas Cartesianas			

El participante E17 elige coordenadas diferentes a las mostradas en el gráfico argumentando que ***"fijé otra coordenada, luego bauticé y hallé a m. Luego usando la fórmula… hallé la ecuación"*** (Ver figura E17-P1)

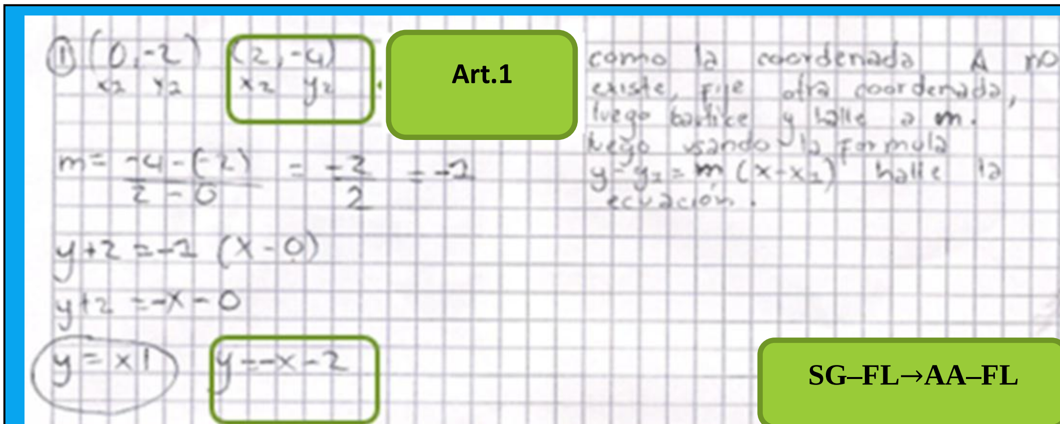


Figura E17-P1

Los participantes E4 y E17 se sitúan en el Modo SG–FL para responder y transitan entre los Modos SG–AA, resaltando que utilizan fórmulas diferentes en los cálculos realizados.

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa tanto el Articulador como el tránsito evidenciado por el participante E18-P1:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E18 (P1)	X				$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ate 9 Punto de corte en eje "y", ,desplazamiento en "x"			

En esta pregunta se resalta que el participante E18 utiliza como elementos articuladores entre los Modos SG–FL→AA–FL el **"Punto de corte y el desplazamiento sobre los ejes**

con respecto a dicho punto de corte"–Athe.9–, Articulador que no fue considerado por los investigadores en el análisis a priori de esta pregunta; este será corroborado o rechazado e n la entrevista Semi-Estructurada, indagando en otros participantes la presencia del mismo (Ver figura E18, P1).

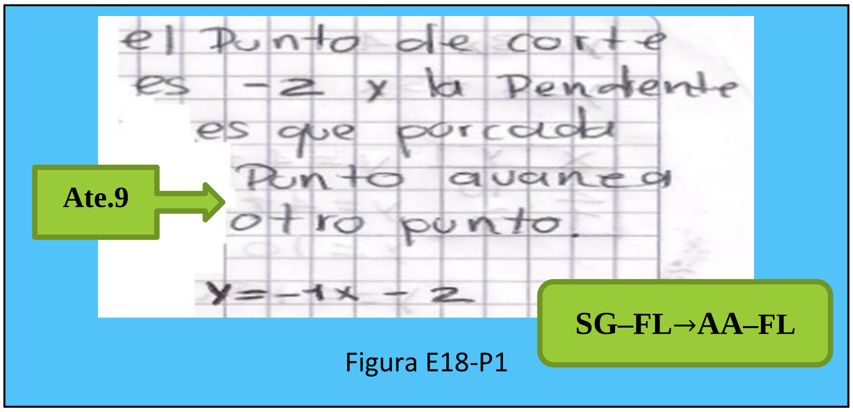


Figura E18-P1

Los participantes E7, E8, E14, E20 y E28 presentan errores aritméticos en sus respuestas, lo que no permite evidenciar un tránsito entre los Modos de pensar. Por su parte, los participantes E22, E29 y E30 no responden la pregunta.

Pregunta 2

"Selecciona cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Función Lineal, luego construye una tabla de valores representando los datos de la misma en el plano cartesiano generando la recta, verifica si las coordenadas obtenidas son perpendiculares a los ejes y cumplen la propiedad de colinealidad. Explica cómo llegaste a la respuesta".

a) $y + 2x^2 = 9$ b) $y - 3x = 4$ c) $y = 4x + 3$

La pregunta 2 del cuestionario tiene la intención de verificar si los estudiantes identifican las ecuaciones que describen la Función Lineal, así como su interpretación gráfica como lugar geométrico, propiciando la articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E12-P2:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA–FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E12 (P2)		X		$\xrightarrow[\text{Ath } 2_{\text{Dominio y rango}}]{}$				

Los participantes E4, E6, E8, E10, E12, E15, E18 argumentan matemáticamente de manera similar, planteando en sus respuestas la construcción de una tabla de valores, a parir de la identificación del "**Dominio y rango"–Ath.2–**, como aquel elemento que permite el tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL, situándose en AA–FL para responder. A continuación se presenta la respuesta del participante E12 (Ver figura E12-P2):

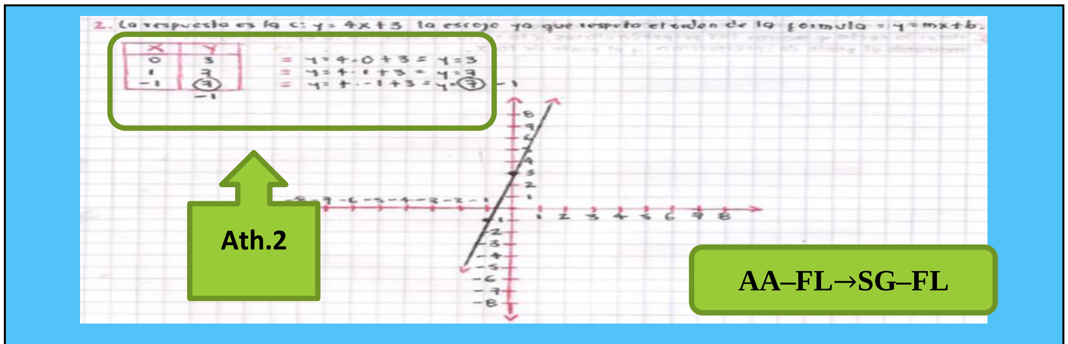


Figura E12-P2

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observan los articuladores y tránsitos evidenciados por el participante E17-P2:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E17 (P2)		X		$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ *Ath 2*$_{Dominio\ y\ rango}$			$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ *Ath 5*$_{Propiedades\ lugar\ geométrico}$	

El participante E17 evidencia un tránsito entre AA–FL→SG–FL mediante el Articulador **"Dominio y rango"–Ath.2**–al igual que el tránsito entre SG–FL→AE–FL, para este caso emplea el Articulador **"Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"–Ath.5**–cuando manifiesta que, ***"…luego de tener las coordenadas grafiqué en el plano cartesiano y verifiqué que la recta fuera perpendicular a los ejes, luego verifiqué que cumpliera la propiedad de colinealidad",*** situándose en los modos AA–FL y SG–FL, respectivamente, para responder (Ver figura E17-P2).

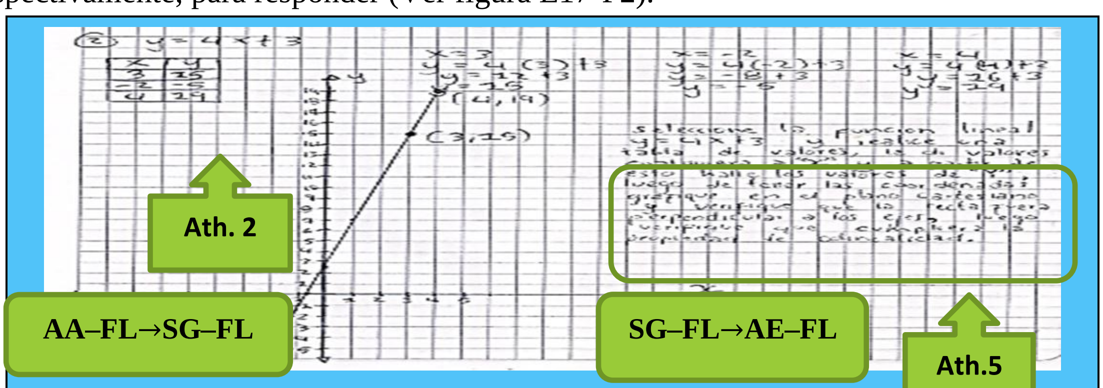


Figura E17-P2

Los participantes E5, E7, E14, E20, E28 y E29 presentan errores de tipo aritmético y geométrico en sus respuestas, lo que no permiten evidenciar ningún tránsito. De otra parte, los participantes E2, E14, E22, E30 no responden la pregunta.

Pregunta 3

"Encuentra la ecuación de la recta que intercepta el eje "y" en el punto (0,3) el cual es perpendicular a los ejes coordenados y tiene por pendiente 4. Justifica tu respuesta".

La pregunta 3 del cuestionario tiene la intención de verificar si los estudiantes logran hallar la ecuación de una Función Lineal a partir de los elementos y propiedades que la definen, generando una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E4-P3:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E4 (P3)		X		$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}$				

En el participante E4 se observa una apropiación de los elementos de la Función Lineal al generar la expresión analítica, además muestra intentos por graficar la función construyendo una tabla de valores usando el **"Dominio y rango" –Ath.2–**, sin embargo, presenta errores aritméticos que no le permiten generar una gráfica que corresponde a la expresión analítica encontrada, por lo tanto en este participante no se puede homologar lo realizado como indicios de un tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL (Ver figura E4-P3).

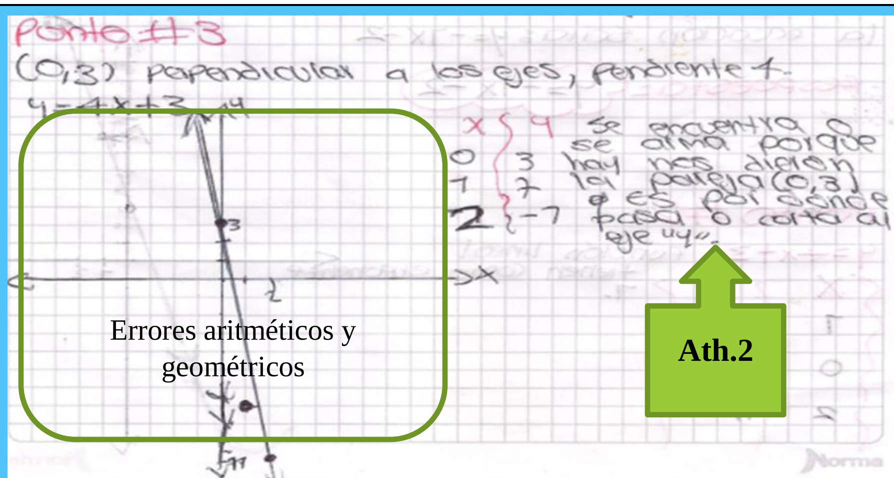


Figura E4-P3

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa el Modo en que se situó el participante E10-P3 sin presentar ningún tránsito:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E10 (P3)		X						Encuentra la ecuación solicitada pero no evidencia ningún tránsito.

Los participantes E7, E8, E10, E12, E14, E15, E18, E20 se sitúan en el Modo AA–FL planteando la ecuación solicitada a partir de los datos dados –pendiente e intercepto en el eje y–, pero no evidencia ningún tránsito hacia otro Modo de pensar, aspecto que podría ser un indicio de posibles dificultades en el planteamiento de la pregunta por parte de los investigadores (Ver figura E10-P3).

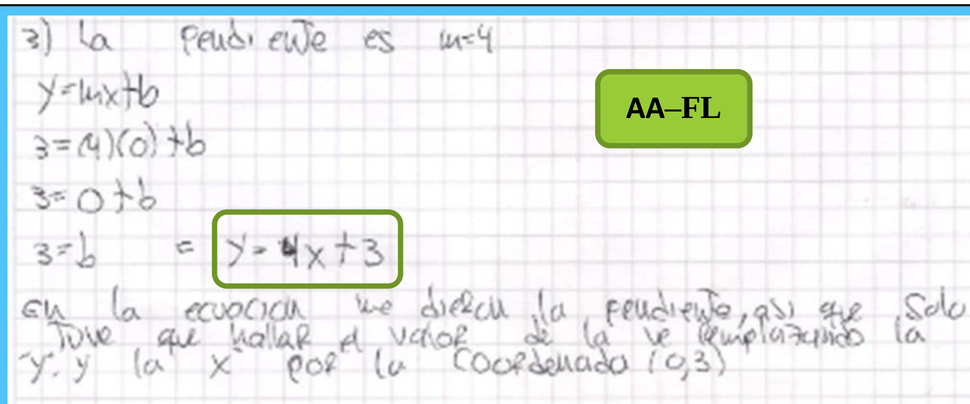


Figura E10-P3

Los participantes E2, E22 presentan errores de tipo aritmético en sus respuestas, lo que no permiten evidenciar ningún tránsito. De otra parte, los participantes E5, E6, E17, E28, E29, E30 no responden la pregunta.

Pregunta 4

"Dadas las coordenadas $(1,-3)$ y $(2,0)$, graficar y hallar otras coordenadas perpendiculares y colineales que pertenezcan a la gráfica que pasa por dichos puntos. Luego, hallar la ecuación y construir la recta como lugar geométrico –usar el *software* Cabri–".

La pregunta 4 del cuestionario tiene la intención de verificar que los estudiantes identifiquen la representación gráfica de la Función Lineal, reconociendo la recta como lugar geométrico, y a partir de ello, el reconocimiento de las relaciones cartesianas generando una expresión analítica. Estos elementos propician una articulación entre los modos AA–FL→SG–FL→AE–FL.

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E18 (P4)		X		X			$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$	

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E18-P4:

Los participantes E4, E7, E12, E17, E18, sustentan sus respuestas identificando las "**Coordenadas Cartesianas" –Athe.7**– como aquel elemento que permite el tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL, situándose en AA–FL para responder, aspecto que se evidencia cuando toman las dos coordenadas dadas y las ubican en el plano cartesiano utilizando el *software* Cabri, para después trazar la línea recta que pasa por dichas coordenadas inicialmente. Como evidencia se presenta la construcción realizada por el participante E18 (Ver figura E18-P4).

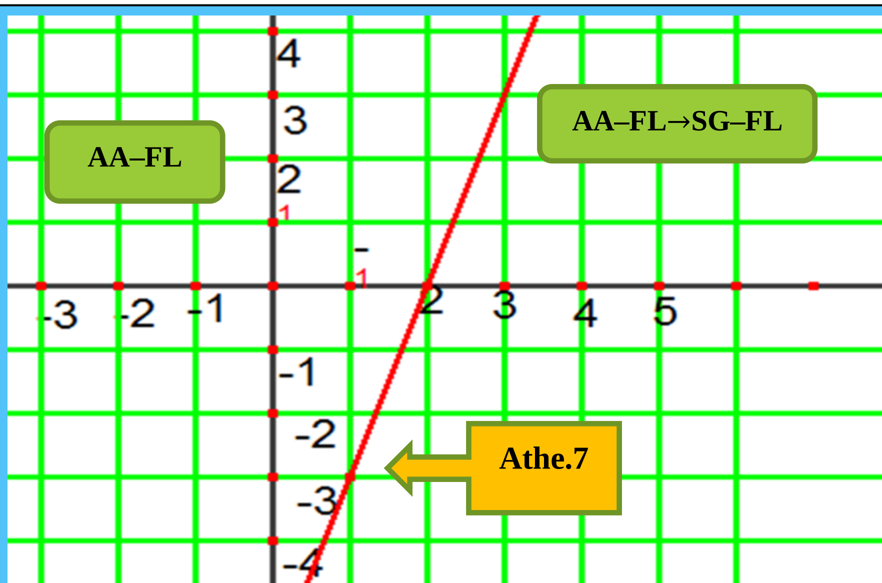


Figura E18-P4

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observan los articuladores y los tránsitos evidenciados por los participantes E6, E15-P4:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevista
E6 (P4)		X				Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		
E15 (P4)	X	X			Ath 1 Corrdenadas Cartesianas	Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico	Ath 5 Propiedades lugar geométrico	¿Cómo construyó la gráfica en Cabri?

Los participantes E6 y E15 hacen uso del "**Plano cartesiano y las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"–Ath.6**– para argumentar su respuesta, propiciando el tránsito entre los modos AA–FL→AE–FL, situándose en modo AA–FL para responder. El primer participante muestra un reconocimiento de las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico, cuando traza perpendiculares a los ejes cartesianos y ubica sobre la recta otros puntos, confirmando la colinealidad. Por su parte, el participante E15 realiza un procedimiento similar pero usa como mediador el *software* Cabri para encontrar las coordenadas de otros puntos (Ver figura E6, E15-P4).

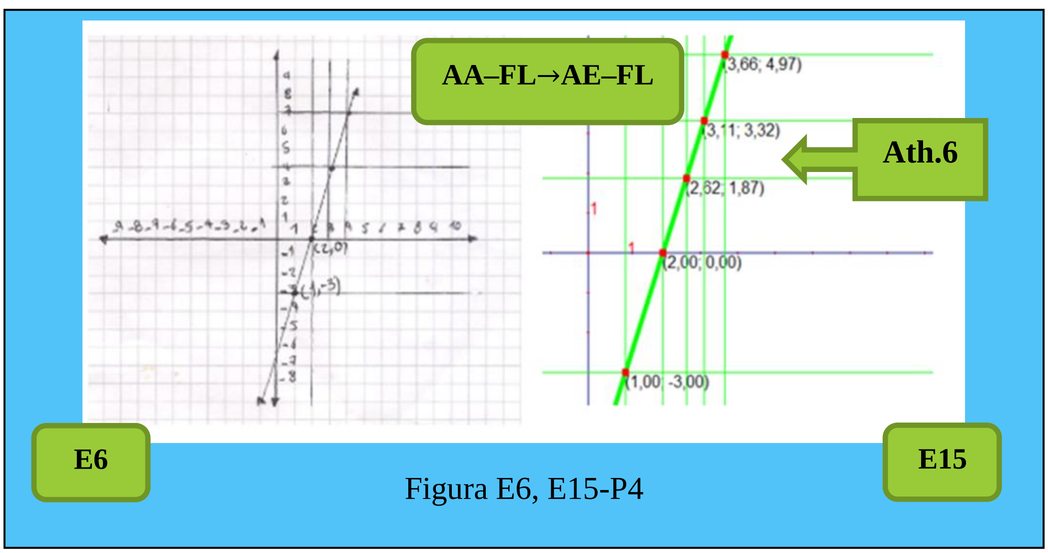


Figura E6, E15-P4

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa el Articulador y el tránsito evidenciado por el participante E15-P4:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E15 (P4)	X	X			$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ath 1 Corrdenadas Cartesianas	$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico	$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ath 5 Propiedades lugar geométrico	¿Cómo construyó la gráfica en Cabri?

El participante E15 sustenta su respuesta con base en las **"Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"–Ath.5–**, como elemento que permite el tránsito entre los Modos SG–FL→AE–FL, situándose en SG–FL para responder. La evidencia de dicho tránsito se da cuando utilizando el *software* Cabri, traza la recta con base en las coordenadas dadas, posteriormente ubica otros puntos al azar que son colineales a la misma, y traza en cada punto hallado líneas perpendiculares a los ejes cartesianos, verificando las propiedades de perpendicularidad a los ejes y colinealidad (Ver figura E15-P4).

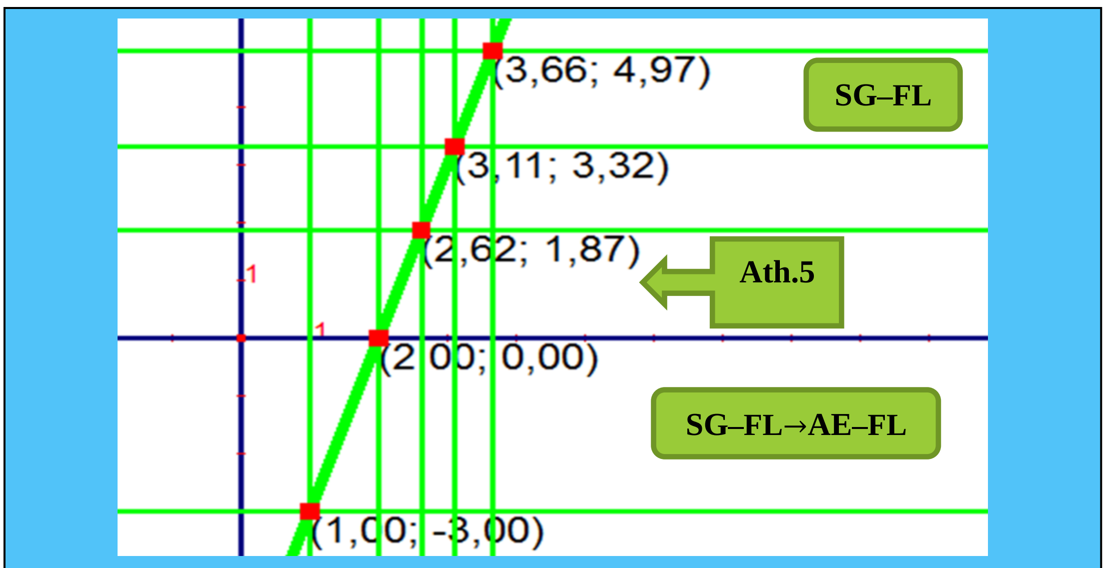


Figura E15-P4

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observa los articuladores y tránsitos evidenciados por el participante E17-P4:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E17 (P4)		X				$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		

Los participantes E2, E12, E15, E17 basan su argumentación en el **"Plano cartesiano y en las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"–Ath.6–**, como elementos que permiten el tránsito entre los modos AA–FL→AE–FL, situándose en AA–FL para responder. Este tránsito se evidencia cuando los participantes toman las coordenadas dadas y las llevan al plano cartesiano utilizando el *software* Cabri, luego trazan líneas perpendiculares a los ejes cartesianos que pasan por las coordenadas iniciales, para finalmente encontrar otros puntos que son colineales a los ya dados. A continuación, se presenta la construcción realizada por el participante E17 (Ver Figura E17-P4).

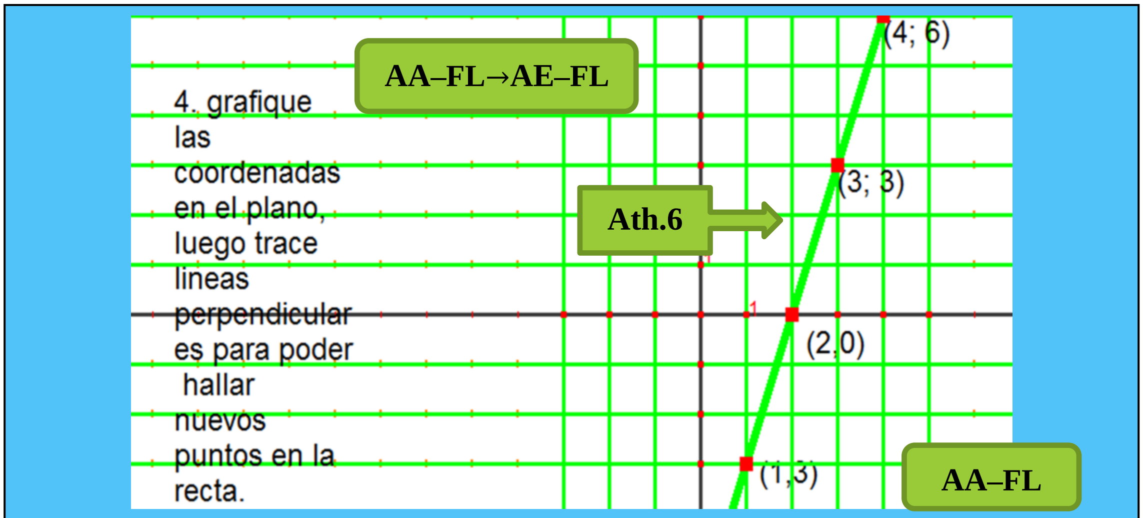


Figura E17-P4

De otra parte, el participante E20, E22 presenta errores aritméticos en sus respuestas lo que no permite evidenciar un tránsito. Finalmente, los participantes E5, E8, E10, E14, E28, E29, E30, no responden la pregunta.

Pregunta 5

"Dada la ecuación $y + x = -1$, representarla gráficamente y comprobar que dicha gráfica cumple las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico. Explica el procedimiento (usar el *software* Cabri)".

La pregunta 5 del cuestionario tiene la intención de verificar si el estudiante aplica diversas estrategias que le permitan representar gráficamente la Función Lineal, propiciando la articulación entre los modos AA–FL→SG–FL y AA–FL→AE–FL.

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observan los articuladores y tránsitos evidenciados por los participantes E12-P5 y E15-P5:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E12 (P5)		X		$\xrightarrow{\text{Ath 2}_{\text{Dominio y rango}}}$		$\xrightarrow{\text{Ath 6}}$ Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico		
E15 (P5)		X		$\xrightarrow{\text{Ath 2}_{\text{Dominio y rango}}}$		$\xrightarrow{\text{Ath 6}}$ Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico	$\xrightarrow{\text{Ath 8}_{\text{Coordenadas perpend. y Colinealidad}}}$ AE-SG	¿Cuáles son los criterios para trazar la perpendicularidad?

Los participantes E15 y E12 sustentan su respuesta con base en el **"Plano cartesiano y en las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"–Ath.6–**, las cuales están relacionadas con la perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad, estas propiedades son vistas como elementos que permiten el tránsito entre los Modos AA–FL→AE–FL; ambos utilizan el *software* Cabri en sus procedimientos, sustentando que la construcción realizada es un lugar geométrico porque la recta cumple las dos propiedades mencionadas anteriormente (Ver figura E12-P5).

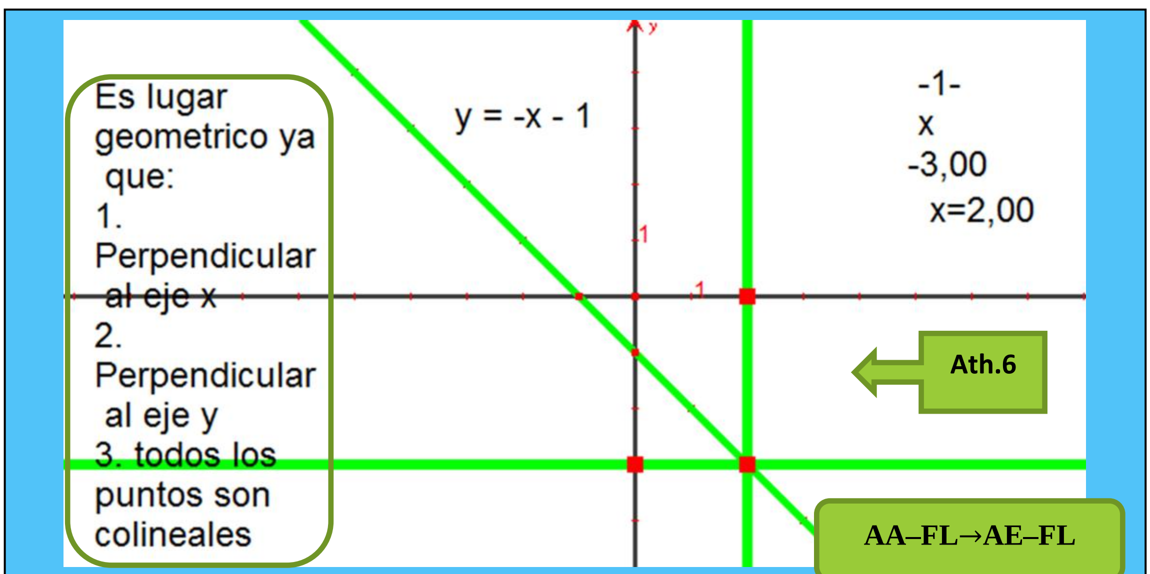


Figura E12-P5

En la siguiente información tomada del Anexo 10, se observan los articuladores y tránsitos evidenciados por el participante E15-P5:

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato a entrevista
E15 (P5)		X		Ath 2 Dominio y rango		Ath 6 Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico	Ath 8 Coordenadas perpend. y Colinealidad AE-SG	¿Cuáles son los criterios para trazar la perpendicularidad?

El participante E15 argumenta su respuesta con base en el uso del **“Dominio y rango”–Ath.2**–, transitando entre los modos AA–FL→SG–FL. Este tránsito se evidencia cuando dice” ***dándole valores a x en una tabla de valores, reemplacé en la ecuación y el resultado obtenido de la y formé parejas. Ubiqué en el plano cartesiano y tracé las perpendiculares y una recta”.*** La representación gráfica la hace con ayuda del *software* Cabri (Ver figura E15-P5).

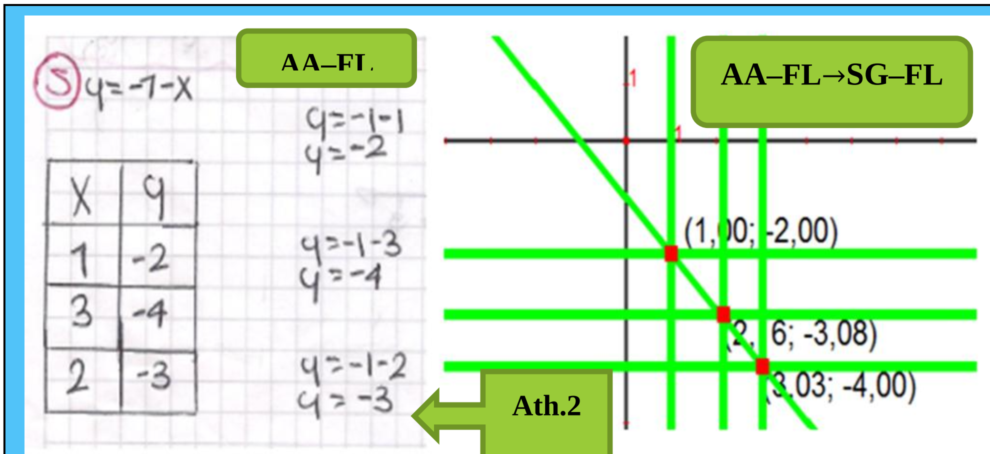


Figura E15-P5

Finalmente, los participantes E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E14, E17, E18, E20, E22, E28, E29 y E30, no responden la pregunta, lo que no permite evidenciar elementos del marco teórico que ameriten un análisis.

5.2.4 HALLAZGOS DEL CASO 2

- La mayoría de los participantes de este caso, se ubican para responder el cuestionario en AA–FL o en SG–FL, estos logran identificar elementos característicos de la Función

Lineal; como puntos de corte con los ejes coordenados, pendiente o inclinación y gráfica, además reconocen la expresión analítica que define al objeto matemático en mención y en pocos casos, comprenden las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico.

- Las conexiones que establecen los participantes entre los Modos AA–FL→SG–FL, SG–FL→AA–FL, AA–FL→AE–FL, SG–FL→AE–FL se hacen evidentes, cuando a partir de la expresión analítica o de elementos de esta, logran representar gráficamente la Función Lineal; en la ecuación, cuando son capaces de tomar elementos de la gráfica y hallar la expresión analítica de la misma, y como lugar geométrico, cuando hacen uso de las propiedades de la línea recta para graficar o encontrar su ecuación.

- El tránsito entre los Modos SG–FL→AA–FL se evidencia en varios de los participantes utilizando el Articulador "**Coordenadas Cartesianas"** – **Ath.1**–mostrando que, a partir de la recta en el plano cartesiano, es posible identificar dos de las coordenadas que la conforman y, con base en estas, encontrar la expresión analítica que la representa. Este tipo de procedimiento es el que comúnmente se observa en los libros de texto, donde los docentes le dan mayor relevancia al momento de trabajar la Función Lineal.

- Otro de los tránsitos que se logra evidenciar en los participantes está dado entre los modos AA–FL→SG–FL haciendo uso del Articulador 2, representado en el **"Dominio y rango"–Ath.2–**, en donde el estudiante lo que hacen es, tomar la expresión analítica dada y darle valores a la variable x –dominio– para encontrar los de la variable y–rango–, las parejas formadas las representan en una tabla para posteriormente llevarlas al plano cartesiano y generar la recta. Esto conlleva a concluir que varios de los participantes son capaces de representar gráficamente la Función Lineal dada la expresión analítica, identificando características propias de esta que les permite diferenciarla de una función de grado dos.

- Un tránsito que no se consideró en el análisis a priori pero que surgió al momento de realizar el análisis a posterior, está dado entre los modos AE–FL→SG–FL propiciado por el Articulador emergente 8 –**Athe.8–**, el cual se enmarca en las **"Perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad".** Dicho tránsito se presenta en uno de los participantes quien utiliza el *software* Cabri mediador para lograr la articulación entre uno y otro modo. Este Articulador será objeto de indagación en la entrevista Semi–Estructurada que se aplicará al Caso 3.

- Aunque fueron pocos los participantes que mostraron tránsito entre los modos AA–FL→AE–FL, SG–FL→AE–FL, AE–FL→SG–FL, es importante resaltar que los pocos que lo logran evidenciar, utilizan el *software* Cabri como un mediador relevante en dichos tránsitos, lo que lleva a considerarlo como una herramienta esencial al momento de interpretar las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico.

- Otro elemento importante que se logra detectar es el Articulador emergente **–Athe.7–** representado en las "**Coordenadas Cartesianas",** a través de las cuales se propicia el tránsito entre los modos de pensar AA–FL→SG–FL, el cual se planteó inicialmente de manera hipotética como un generador del tránsito entre SG–FL→AA–FL y no en doble dirección como queda evidenciado en 4 de los participantes, quienes ponen de manifiesto el paso por este tránsito emergente, utilizando el articulador en mención. De manera similar sucede con los articuladores emergentes **–Athe.8– "Perpendicularidad de los puntos con respecto a los ejes cartesianos y colinealidad".** y **–Ate.9–** "**Punto de corte y el desplazamiento sobre los ejes con respecto a dicho punto de corte"**, quienes son utilizados por dos de los participantes. Los articuladores emergentes en mención, serán objeto de indagación en la entrevista Semi-Estructurada que se aplicará al caso 3.

- Es importante anotar que el tránsito entre AA–FL→AE–FL, no se da de manera directa, pues los participantes deben recurrir primero a lo gráfico para justificar lo Estructural, aun dando evidencias de comprender parte de AE–FL.

- En el caso 2, los participantes presentan grandes dificultades para pensar el concepto de Función Lineal en un Modo Analítico Estructural, así como en los tránsitos que se plantearon hipotéticamente entre este y otros Modos, evidenciándose en la poca cantidad de participantes que dan argumentos a partir de este modo, lo que lleva a pensar si faltó un mejor diseño de las preguntas del instrumento que movilizara esta forma de pensar el objeto matemático, por ello se requiere profundizar en este aspecto durante la entrevista.

- Comparando los casos 1 y 2, pareciera que el nivel de desempeño escolar influyera al momento de experimentar o no los tránsitos entre los Modos de pensar, es decir, en el caso 1 los participantes presentan niveles de desempeño escolar superior y alto, y mostraron mayores tránsitos; mientras que los del caso 2 cuyo desempeño es básico, evidencian menor número de tránsitos.

- Finalmente, luego del análisis en detalle del caso, se verifica que los participantes que lograron evidenciar situaciones o procedimientos objeto de indagación, deberán realizar entrevista directa con los investigadores como segundo instrumento de análisis, estos son: E6, E12, E15, E18 los cuales harán parte del caso 3.

5.3. CONFORMACIÓN DEL CASO 3

Como se definió en el diseño metodológico, los participantes de este caso son aquellos que luego de la aplicación del cuestionario a los casos 1 y 2 y del análisis a posteriori del mismo, evidenciaron una mayor y mejor articulación entre los modos de pensar la Función Lineal, además presentan un buen manejo del *Software* Cabri en relación con el objeto matemático, estos corresponden a E1, E3, E6, E9, E11, E12, E13, E15, E18 y E19. Es de anotar que el instrumento de análisis que se utiliza para estos estudiantes es la entrevista Semi-Estructurada a partir de una situación en contexto, y para efectos de esta se identifican los participantes de la siguiente manera: En_1, En_2, En_3, En_4, En_5, En_6, En_7, En_8, En_9, En_{10}; donde E_n corresponde al estudiante entrevistado y los números 1, 2,3…10 al orden en el que fueron realizados los análisis.

De otra parte, los estudiantes que no respondieron a las preguntas planteadas en el cuestionario, así como aquellos que presentaron un mínimo de tránsitos entre los modos de pensar sin presentar suficientes argumentos que permitan extraer información clara relacionada con la teoría Modos de Pensamiento, no se tendrán en cuenta en la conformación de este caso, en tanto que, según Stake (2010), sólo se retoman aquellos casos que ofrezcan las mejores y mayores oportunidades de aprendizaje con respecto a la problemática objeto de estudio.

5.4 ANÁLISIS A PRIORI DE LA ENTREVISTA SEMI–ESTRUCTURADA

La entrevista está enmarcada en verificar y profundizar dentro del marco de la teoría Modos de Pensamiento, que los articuladores hipotéticos planteados en el análisis a priori del cuestionario y los emergentes producto del análisis a posteriori del mismo, son efectivamente elementos de la matemática que propician el tránsito entre los modos de pensar la Función Lineal, así mismo, en confirmar cuáles son aquellos modos que más utilizan los estudiantes y los que definitivamente no se logran evidenciar.

La entrevista inicialmente consta de una situación en contexto (Ver figura 21) y una serie de preguntas secuenciales que el estudiante debe desarrollar, el investigador será un participante activo y podrá solicitar aclaraciones o hacer preguntas a lo largo de la misma.

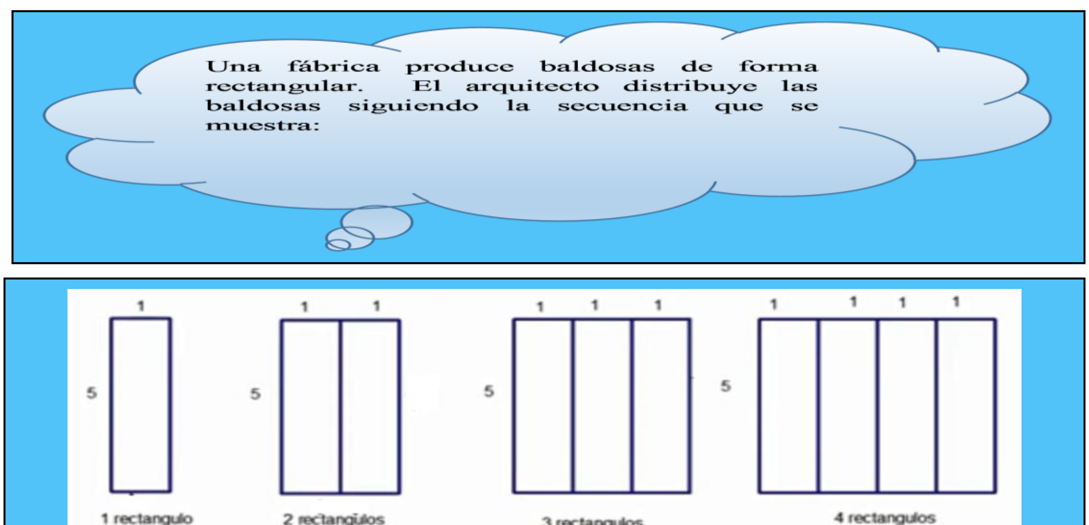


Figura 21: Recuperada de https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s, recuperado el 24 de febrero de 2017

Con base en la anterior situación, responder las siguientes preguntas:

1. Si se sabe que la primera baldosa está en la posición 1, y en la posición dos hay 2 baldosas; completa la secuencia hasta la posición 6, luego calcula el perímetro de las baldosas que forman la figura en cada posición (posiciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6) y construye una tabla de valores con la relación "número de baldosas" vs "perímetro".

*La intención es familiarizar al estudiante con la situación dada, ubicándolo en un modo Analítico-Aritmético (*AA–FL*) donde, a partir de secuencias numéricas y relaciones de proporcionalidad, es capaz de construir una tabla de valores. La siguiente tabla muestra las posibles relaciones que se pueden hallar* (Ver figura 22):

Numero de baldosas (x)	*Perímetro*(y)
1	*12*
2	*14*
3	*16*
4	*18*
5	*20*
6	*22*

Figura 22: relación entre el perímetro y el número de baldosas.

Utilizando los elementos ya encontrados en el punto anterior, explica cómo podrías realizar una representación gráfica de los datos, y determina, si es posible, el número exacto de puntos que conforman la recta. Justifica en detalle los procedimientos.

Esta pregunta tiene por intención profundizar en el articulador emergerte 7 (Athe.7), denominado "Coordenadas Cartesianas", el cual en el análisis a priori del cuestionario no fue tenido en cuenta en el tránsito ***AA*–FL→*SG*–FL**, *pero su uso fue puesto en evidencia en el análisis a posteriori; se espera que el estudiante identifique las variables a partir de la tabla y forme coordenadas, que llevará al plano cartesiano para generar la línea recta, la cual puede ser o no elaborada con la ayuda del Software Cabri, evidenciando así un tránsito entre los Modos* ***AA*–FL→*SG*–FL**.

De otra parte, se indaga en los modos de pensar la Función Lineal entre ***SG*–FL→*AA*–FL** *con el articulador hipotético 4 (**Ath.4)**, denominado "Relaciones de Proporcionalidad", y el articulador hipotético 3 (**Ath.3)**, correspondiente al "Ángulo de inclinación de la recta* *con respecto al eje x"; ya que ninguno de los dos fue utilizado por los participantes de los casos anteriores. A partir de la respuesta del estudiante, también se indaga por el articulador emergente 9 denominado "punto de corte de la recta en "y" con relación a su desplazamiento en "x" (**Athe.9)**, para darle validez o descartarlo.*

*El tránsito **SG**–**FL**→–**AA**–**FL** se evidencia cuando el estudiante, a partir del gráfico, identifica que existe una serie de coordenadas y que además guardan una proporción, permitiéndole ello establecer otras coordenadas cartesianas que, si bien no están en la tabla, también pertenecen al gráfico **(Ath.4).***

*En el caso del tránsito entre **SG**–**FL**→**AE**–**FL**, el estudiante, a partir de la gráfica, genera perpendiculares a los ejes cartesianos encontrando otras coordenadas y verificando que estas sean colineales.*

2. Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procesos utilizados.

Esta pregunta tiene por intención movilizar al estudiante por varios tránsitos:

*En primera instancia está el considerado entre los Modos **SG**–**FL**→**AA**–**FL**, donde se espera que el estudiante tome dos coordenadas del gráfico, calcule la pendiente y halle la expresión analítica con la fórmula punto-pendiente, esto mediante el articulador hipotético 1 **(Ath.1)**.*

*Un segundo tránsito está considerado entre **AA**–**FL**→**AE**–**FL**, donde el estudiante puede usar el software Cabri para verificar que las coordenadas marcadas en la gráfica son perpendiculares a los ejes y, a su vez, son colineales, lo cual le permite tomarlas para hallar la expresión analítica.*

*Un tercer tránsito se da entre **AE**–**FL**→**SG**–**FL** cuando el estudiante, a partir del plano cartesiano, traza rectas perpendiculares a los ejes y busca puntos colineales que le permitan generar una línea recta, utilizando el articulador 6 (Ath.6) denominado "plano cartesiano y condiciones de la línea recta como lugar geométrico".*

*Por último se da el tránsito de **AE**–**FL**→–**AA**–**FL** usando el articulador 6 **(Ath.6)**, cuando el estudiante, a partir del plano cartesiano, ubica coordenadas colineales y verifica que estas sean perpendiculares a los ejes coordenados, lo cual le permite hallar los elementos de la Función Lineal que le servirán para hallar la expresión analítica. Es de anotar que este último tránsito no fue considerado en los tránsitos hipotéticos durante el cuestionario, por ello se incluye en la entrevista para indagar su posibilidad.*

5.5. ANÁLISIS Y REGISTRO A POSTERIORI DE LA ENTREVISTA SEMI-ESTRUCTURADA UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

Antes de iniciar con el análisis, se debe aclarar que si bien en la entrevista se tomaron como punto de partida tres preguntas, en el registro del análisis sólo se enfatiza en las 2 y 3 debido a que la pregunta número uno, tiene como propósito poner de manifiesto el punto de partida de la entrevista, donde el estudiante demuestra comprensión de la situación ubicándose en un modo de pensar el objeto matemático, caso puntual el analítico aritmético. En el proceso de investigación este es un elemento muy valioso porque confirma las conclusiones de los casos anteriores, donde se resalta la importancia de situaciones en contexto que familiaricen al estudiante con el o los conceptos en particular que se quieren trabajar (Ver figura 23).

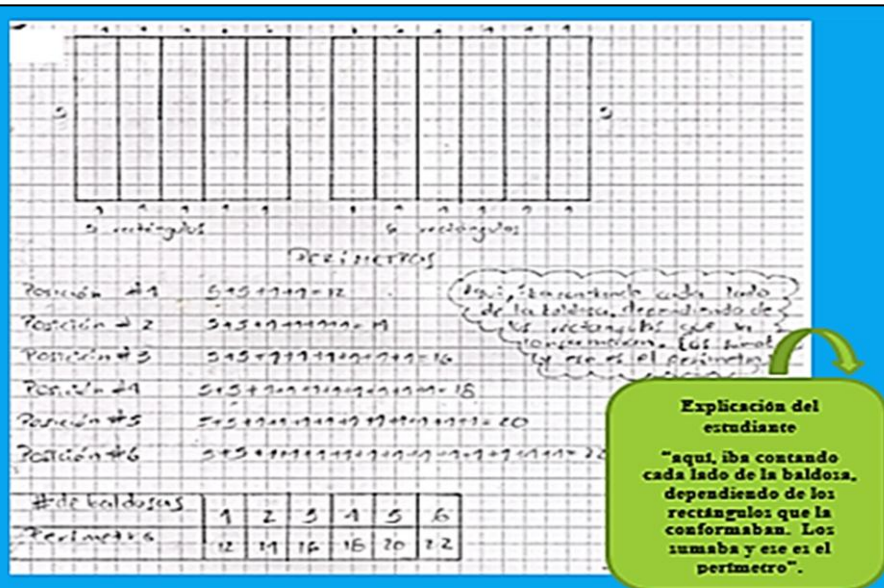


Figura 23: Interpretación de la situación propuesta para la entrevista del estudiante En_3.

5.5.1 REGISTRO Y ANÁLISIS APOSTERIORI DEL CASO 3

El registro a posteriori surge como un instrumento que permitió organizar la información proporcionada por los estudiantes en el cuestionario (Ver Anexo 11) , en éste se consignaron los tránsitos entre los Modos de pensar la Función Lineal, identificados luego de la entrevista realizada a los participantes que conforman el caso de estudio 3, aclarando que ya no se relacionarán los articuladores con un número específico como se venía haciendo en el transcurso de los análisis anteriores, sino que estos se tipifican de una manera general resaltando los elementos matemáticos que hacen parte de cada uno. Con respecto a los símbolos utilizados en el registro, se precisa que cuando se habla de En_1, se está haciendo referencia al entrevistado 1, en el caso de las preguntas se usa la abreviatura P_1 para el caso de la número 1, y los articuladores se representan por medio del símbolo Art.

A continuación, se realiza un análisis a las respuestas de los estudiantes entrevistados, mostrando información puntual que se obtiene a partir de los registros visuales y auditivos logrados por los investigadores. Para efectos del análisis, se referencia al investigador con la letra $\boldsymbol{I}$, acompañada por el número que representa la pregunta de la entrevista, por ejemplo, $\boldsymbol{2I}$ alude a la pregunta **2** de la entrevista Semi–Estructurada realizada por el investigador, de otra parte, la respuesta del estudiante a la pregunta es antecedida por el número que corresponde a la pregunta del investigador, es decir, en el caso de $\boldsymbol{2En_1}$, el **2** es la pregunta y $\boldsymbol{En_1}$ es el entrevistado 1 con el numeral del anonimato según lo establecido en el numeral 5.3 de la conformación del caso 3.

La estructura del análisis se fundamenta en la teoría Modos de Pensamiento a partir de los tránsitos que subyacen de la misma, resaltando la manera como se da el tránsito y el Articulador utilizado al momento de abordar el objeto matemático.

Tránsito entre los modos AA–FL→–SG–FL

El tránsito se presenta cuando dada la ecuación de una Función Lineal, el estudiante puede encontrar coordenadas cartesianas, llevarlas al plano y generar una línea recta.

El análisis que se muestra a continuación hace referencia al Articulador "**Coordenadas Cartesianas".**

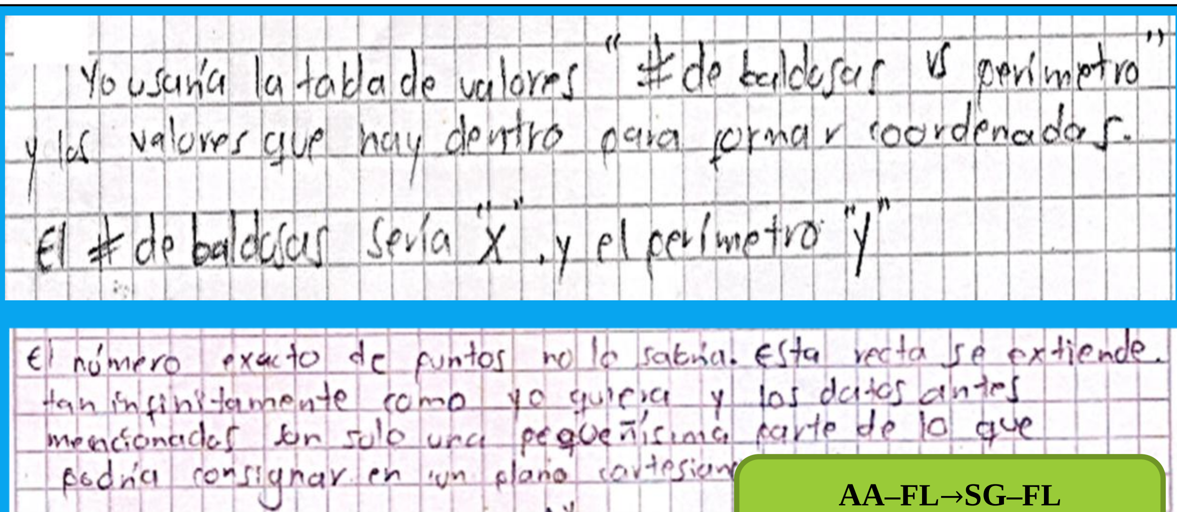
Enunciado 2

Utilizando los elementos ya encontrados en el punto anterior, explica cómo podrías realizar una representación gráfica de los datos, y determina, si es posible, el número exacto de puntos que conforman la recta. Justifica en detalle los procedimientos.

Para efectos del análisis se retoman algunos testimonios de los entrevistados, resaltando que todos los estudiantes del caso 3 hacen uso del este Articulador (Ver tabla 8).

$\boldsymbol{1I}$ ... ¿Se podrían ubicar sobre la misma recta otras coordenadas que se salgan del contexto de la situación planteada?

En las siguientes imágenes se registra evidencia física de las respuestas que proporcionaron algunos estudiantes.



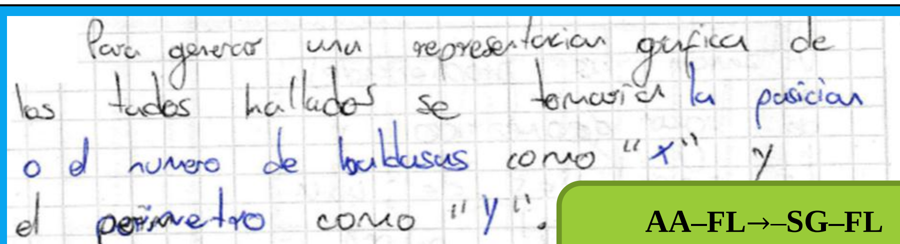
AA–FL→SG–FL

Coordenadas Cartesianas

Figura $1En_3$

En la respuesta del participante En_3, se deja ver un reconocimiento claro de la "**Coordenadas Cartesianas"** como aquel elemento que le permite pasar de lo aritmético a lo geométrico, así mismo comprende la línea recta como un conjunto de puntos infinitos, en donde las coordenadas halladas son solo una parte de esta.

Por su parte el participante En_8 ante la misma pregunta argumenta a partir de la situación inicial relacionando estas con las variables x e y (ver figura $1En_8$).



AA–FL→–SG–FL

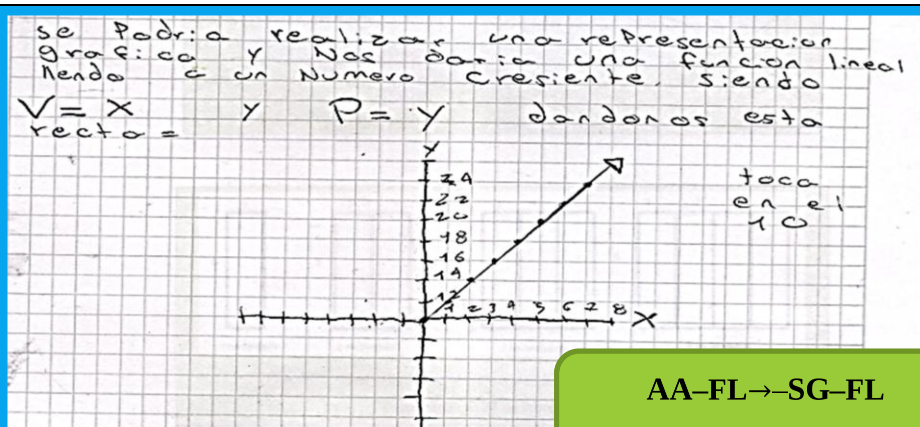
Coordenadas Cartesianas

Figura $1En_8$

Transcripción de audio En$_8$ … "la tabla la conformé simplemente con la posición que tiene cada baldosa y con el perímetro…" (Henao y Mena, 2018).

A la luz de la teoría Modos de Pensamiento, los entrevistados En_3 y En_8 evidencian el uso del Articulador "**Coordenadas Cartesianas"**, cuando logran relacionar los datos obtenidos en la situación como un conjunto de coordenadas que le permiten realizar una representación gráfica, además muestran claridad respecto a la infinidad de puntos que componen la recta cuando manifiestan que esta se extiende infinitamente.

1*I* ... ¿Se podrían ubicar sobre la misma recta otras coordenadas que se salgan del contexto de la situación planteada?



AA–FL→–SG–FL

Coordenadas Cartesianas

Figura $1En_4$

> ***Transcripción de audio En_4 ... "V es el número de baldosas que hay y P es el perímetro…entonces yo busque el perímetro de cada una de las baldosas y ahí pude sacar esta tabla…v=x y p=y porque el perímetro siempre es dependiente al número de baldosas igual la y es dependiente de x…" (Henao y Mena, 2018).***

El estudiante En_4 en sus argumentos evidencia un conocimiento amplio de características propias de la Función Lineal, como son la dependencia e independencia de las variables, y el concepto de función creciente, así mismo se observa una articulación entre los Modos Analítico Aritmético y Sintético Geométrico, mediante las "**Coordenadas Cartesianas"**.

En resumen, en los estudiantes del caso 3 se confirma el articulador **"Coordenadas Cartesianas**", como el elemento de la matemática que propicia el tránsito entre los Modos AA–FL→SG–FL, confirmando así la información obtenida en los casos 1 y 2.

Tránsito entre los modos SG–FL→AA–FL

Este tránsito se presenta cuando, a partir de la gráfica de una Función Lineal, el estudiante es capaz de identificar elementos de la recta que le permiten hallar la ecuación de la misma.

El análisis que se muestra a continuación hace referencia a los articuladores "**Coordenadas Cartesianas" y el "Desplazamiento sobre los ejes cartesianos con el punto de corte en $\boldsymbol{y}$"**.

Enunciado 3

Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procedimientos utilizados.

En el análisis que se muestra a continuación, se retoman los testimonios de estudiantes que logran evidenciar el tránsito entre SG–FL→AA–FL, producto de la situación aplicada y de las preguntas del investigador.

$\boldsymbol{2I}$ ... ¿Es posible, a partir del gráfico, determinar la pendiente de la recta sin utilizar la expresión conocida como: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$?

> ***Transcripción de audio $\boldsymbol{2En_6}$ … "la forma más fácil de hallar la expresión analítica es tomar dos coordenadas de la gráfica y luego hallar la pendiente con la formula…la $\boldsymbol{b}$ la saco de la intersección en $\boldsymbol{y}$ y obtengo la ecuación $\boldsymbol{y = 2x + 10}$". (Henao y Mena, 2018).***
>
> ***Transcripción de audio $\boldsymbol{2En_9}$… "la pendiente la encontré analizándola, por cada uno que avanza a la derecha sube dos hacia arriba entonces la pendiente es dos, entonces quedaría $\boldsymbol{y = 2x + 10}$ …por cada punto que avance a la derecha, por cada número que avance usted ya mira cuánto sube y esa es la pendiente…" (Henao y Mena, 2018).***
>
> ***Transcripción de audio $\boldsymbol{2En_8}$…"se multiplica por 2 la posición de las baldosas, se suman 10 que es el perímetro que hay al lado que siempre va a ser una constante, y el número de baldosas se multiplica por 2…a partir del ejemplo se puede sacar la expresión…" (Henao y Mena, 2018).***
>
> ***Transcripción de audio $\boldsymbol{2En_1}$…"como la recta pasa por el eje $\boldsymbol{y}$ y la intersecta en 10, ese es el valor de $\boldsymbol{b}$…la pendiente no está muy bien definida pero con la situación de las baldosas la $\boldsymbol{x}$ se multiplica por 2 obteniendo así el perímetro, el número 2 es la pendiente" (Henao y Mena, 2018).***

En el análisis vemos como los estudiante En_6 y En_9, evidencian un tránsito entre los Modos SG–FL→AA–FL cuando a partir del gráfico hallan la pendiente de la recta utilizando diferentes estrategias: "**Coordenadas Cartesianas"** en $\boldsymbol{En_6}$**,** y el **"Desplazamiento sobre los ejes cartesianos con el punto de corte en $\boldsymbol{y}$**" en En_9, ambos articuladores al combinarse con el punto de intersección de la recta con el eje y permiten encontrar la expresión analítica.

En el mismo sentido, y basados en la teoría Modos de Pensamiento, los estudiantes En_8 y En_1 evidencian un tránsito entre los modos SG–FL→AA–FL, cuando a través del análisis del gráfico, la deducción de la pendiente y el punto de intersección, logran encontrar la expresión analítica; en este caso el articulador que permite el tránsito es el denominado "**Relaciones de proporcionalidad**" que más adelante se convierte en la pendiente.

En resumen, los estudiantes En_1, En_6, En_8 y En_9 reconocen con claridad la expresión analítica de una Función Lineal y utilizan diferentes métodos y estrategias para determinar la pendiente, elemento que es muy importante en tanto que como investigadores nos permite validar sus soluciones y homologar dos conceptos de la matemática en uno solo: *pendiente = constante de proporcionalidad***.** Este hallazgo lleva a pensar en que cuando un estudiante determina la constante de proporcionalidad en el análisis de una secuencia lineal, realmente ha encontrado la pendiente que al combinarse con una coordenada permiten el tránsito entre SG–FL→–AA–FL.

Tránsito entre los modos AE–FL→–SG–FL

El tránsito ocurre cuando el estudiante a partir del plano cartesiano traza rectas perpendiculares a los ejes y busca puntos colineales que le permitan generar una línea recta.

El análisis que se muestra a continuación hace referencia al Articulador: **Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico.**

Enunciado 3

Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procedimientos utilizados.

$\mathbf{3}\boldsymbol{I}$ ... ¿Cuál fue la estrategia que utilizaste para representar la recta como un lugar geométrico?

Ante esta pregunta, ninguno de los estudiantes entrevistados dio cuenta de una respuesta que permita validar el tránsito entre los modos AE–FL→SG–FL.

Tránsito entre los modos SG–FL→AE–FL

El tránsito se evidencia cuando el estudiante, a partir de la gráfica, genera perpendiculares a los ejes cartesianos encontrando otras coordenadas y verifica que estas sean colineales.

El análisis que se muestra a continuación hace referencia al Articulador "**Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico".**

Enunciado 2.

Utilizando los elementos ya encontrados en el punto anterior, explica cómo podrías realizar una representación gráfica de los datos, y determina, si es posible, el número exacto de puntos que conforman la recta. Justifica en detalle los procedimientos.

1*I* ... ¿Se podrían ubicar sobre la misma recta otras coordenadas que se salgan del contexto de la situación planteada?

La respuesta del estudiante En_1 se presenta a continuación (Ver figura $1En_1$)

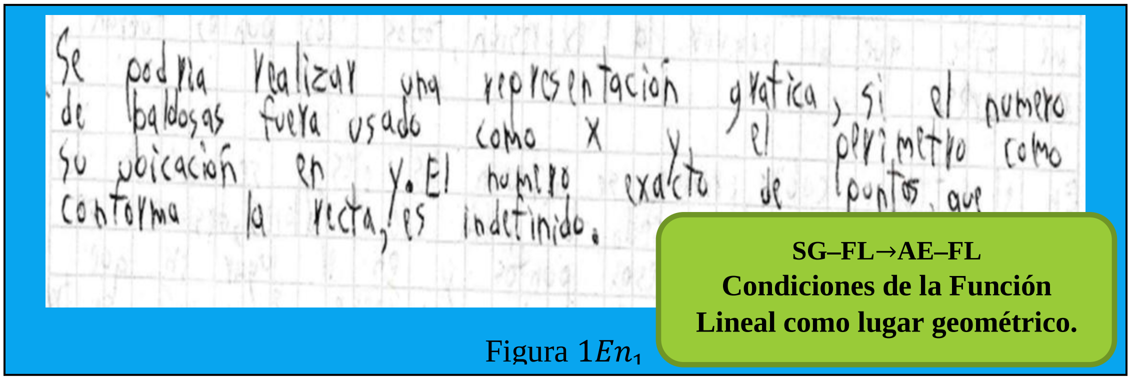


Figura $1En_1$

El estudiante En_8 evidencia una construcción similar a la del estudiante En_1 mostrando apropiación de la representación gráfica de la Función Lineal y de las propiedades como lugar geométrico (Ver figura $En_1, En_8,\ 1I$).

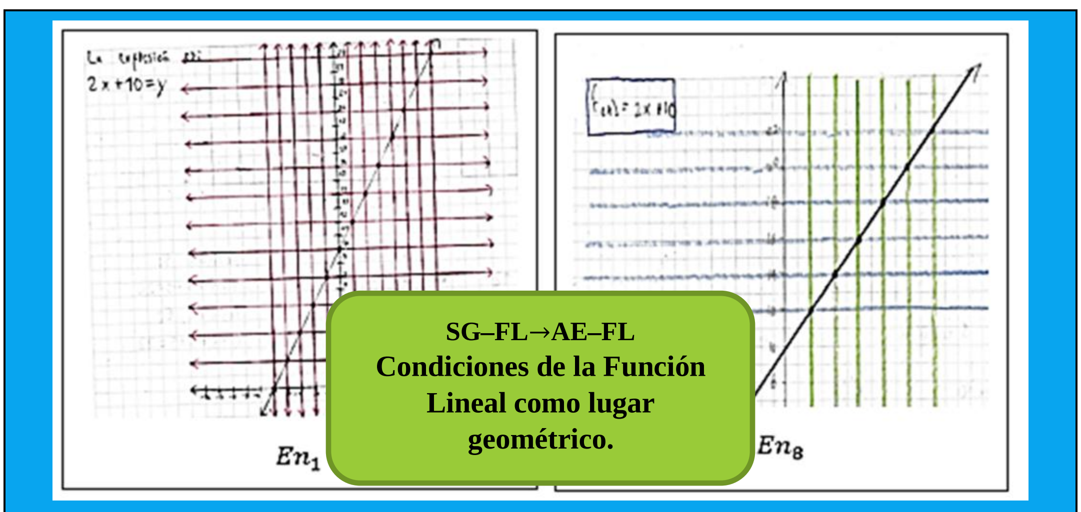


Figura $En_1, En_8,\ 1I$

A su vez, en el estudiante En_9 se evidencia una comprensión de la Función Lineal como un lugar geométrico, cuando hace uso de la perpendicularidad con respecto a los ejes y de la colinealidad de los puntos que representan las coordenadas, sin embargo, deja ver una falta de comprensión de las características de la representación gráfica de la Función Lineal, cuando expresa que “el número exacto de puntos es 6”, desconociendo que la recta está conformada por infinitos puntos.

En resumen, los estudiantes En_1, En_8 y En_9 desde la teoría Modos de Pensamiento, experimentan el tránsito entre los Modos **SG–FL→AE–FL→**, a través del Articulador **“Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico**”.

Enunciado 3

Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procedimientos utilizados.

$\boldsymbol{3I}$ ... ¿Cuál fue la estrategia que utilizaste para representar la recta como un lugar geométrico?

A continuación se presenta la respuesta del estudiante En_1 (Ver figura $3En_1$)

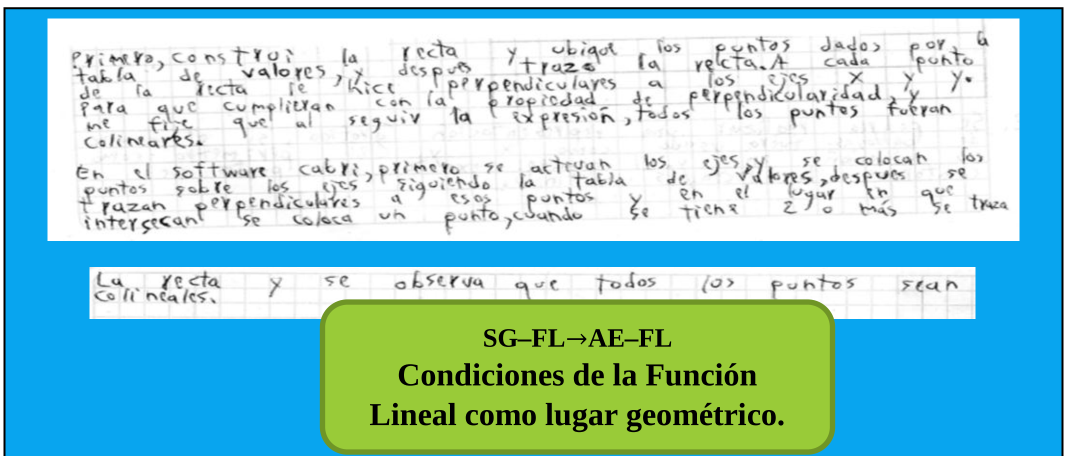


Figura $3En_1$.

El estudiante En_1 en la entrevista, desde la mirada de la teoría que tomamos para esta investigación, relata y muestra desde lo figural una apropiación de la Función Lineal como lugar geométrico, en tanto que no se limita a simplemente dibujar una recta sino que es capaz de analizar sus condiciones y hacer uso de ellas para argumentar. Por otro lado, vemos que asume el *software* Cabri como otra estrategia que le permite de igual forma corroborar las propiedades y utilizarlas para generar la gráfica.

Desde la observación del investigador y a partir de la construcción realizada por los estudiantes En_1 y En_8, se verifica que inicialmente trazan la línea recta con las coordenadas obtenidas en el análisis de la secuencia, luego encuentran perpendiculares a los ejes cartesianos desde las coordenadas dadas, además genera otras coordenadas que no están en el contexto inicialmente planteado, evidenciando apropiación de la colinealidad, así como la de los puntos infinitos sobre la recta, cuando manifiesta (Ver figura En_1,En_8, $3I$).

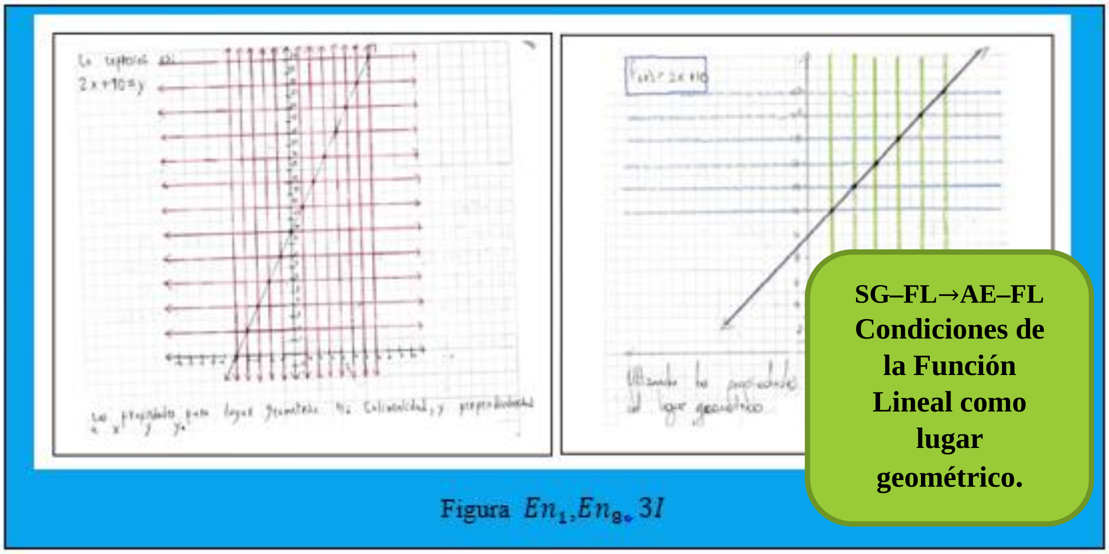


Figura En_1,En_8, $3I$

En conclusión, los estudiantes En_1, En_8 y En_9 desde la teoría Modos de Pensamiento experimentan el tránsito entre los Modos **SG–FL→AE–FL**, a través del Articulador denominado **"Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"**, confirmando la hipótesis plantada inicialmente en torno a dicho tránsito.

Tránsito entre los modos AE–FL→AA–FL

El tránsito ocurre cuando el estudiante, *a partir del plano cartesiano, ubica coordenadas colineales y verifica que estas sean perpendiculares a los ejes coordenados, lo cual le permite hallar los elementos de la Función Lineal que le servirán para hallar la expresión analítica.*

El análisis que se muestra a continuación hace referencia a la búsqueda de un elemento de la matemática que pueda servir como articulador, pues este tránsito no fue considerado en las hipótesis iniciales, las cuales son producto del análisis a priori del cuestionario (numeral 3.2.1), a pesar de ello emergió en un estudiante del caso 1 –E19–, por ello se incluyó en la entrevista aplicada al caso 3 la pregunta:

$4I$…¿Qué estrategias crees que se pueden utilizar para, a partir de las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico, encontrar la expresión analítica que la representa?

> ***Transcripción de audio $4En_1$…"sin graficar?...usando lo de las baldosas se podría conseguir la b, este número interseca con "y" porque las baldosas tienen un número que siempre se mantiene y es 5, la pendiente sería 2 porque en cada baldosa tiene un número y cada número se multiplica por 2 porque la baldosa***

tiene a ambos lados ese mismo número, entonces quedaría $2x+10$…no creo que sea posible solo con las propiedades como lugar geométrico" (Henao y Mena, 2018).

Los demás estudiantes entrevistados no responden a dicha pregunta.

En este caso, se concluye que el tránsito AE–FL→AA–FL no es posible entre los modos de pensar la Función Lineal.

Tránsito entre los modos AA–FL→AE–FL

El tránsito se evidencia *cuando el estudiante, a partir del plano cartesiano, ubica coordenadas colineales y verifica que estas sean perpendiculares a los ejes coordenados, lo cual le permite hallar los elementos de la Función Lineal con los cuales puede hallar la expresión analítica.*

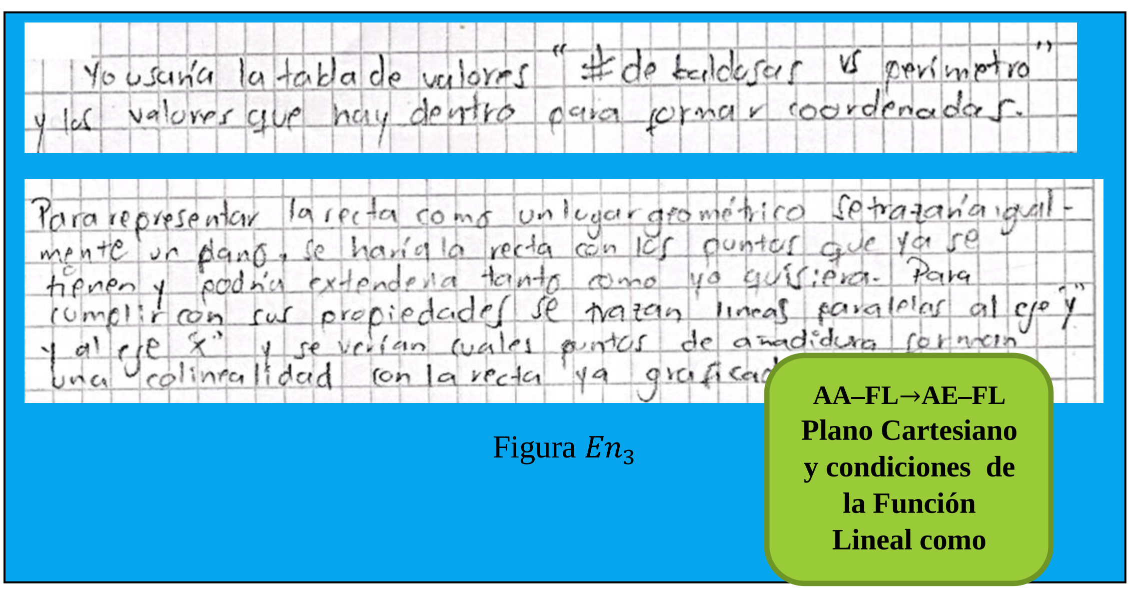
El análisis que se muestra a continuación hace referencia al articulador: plano cartesiano y propiedades de la recta como lugar geométrico.

Enunciado 3

Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procedimientos utilizados.

$\boldsymbol{3I}$ ... ¿Cuál fue la estrategia que utilizaste para representar la recta como un lugar geométrico?

La respuesta del estudiante En_3 se presenta a continuación (Ver figura $3En_3$)


Yo usaría la tabla de valores "# de baldosas vs perímetro" y los valores que hay dentro para formar coordenadas.

Para representar la recta como un lugar geométrico se trazaría igualmente un plano, se haría la recta con los puntos que ya se tienen y podría extenderla tanto como yo quisiera. Para cumplir con sus propiedades se trazan líneas paralelas al eje "y" y al eje "x" y se verían cuales puntos de añadidura forman una colinealidad con la recta ya grafica

Figura En_3

El estudiante En_4 con la ayuda del *software* Cabri y a partir de la expresión que logra hallar, realiza la construcción de la línea recta como un lugar geométrico, visualizando el desplazamiento de los puntos que la conforman de manera dinámica (Ver figura En_4, 3I).

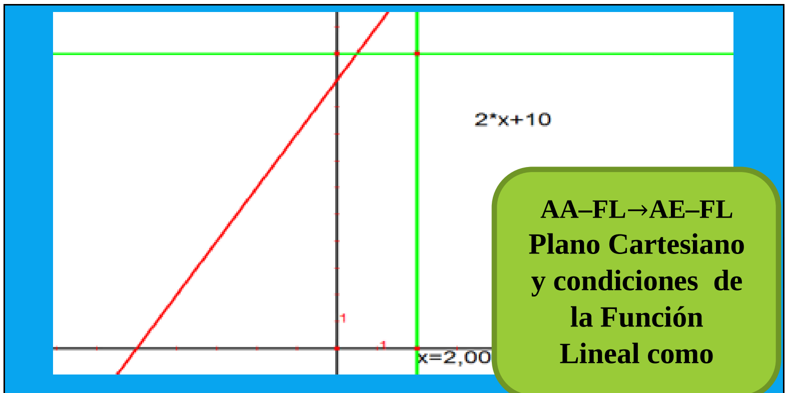


Figura En_4, 3I

En resumen y bajo la mirada de la teoría Modos de Pensamiento, los estudiantes En_3 y En_4 muestran el uso del **"Plano cartesiano y de las condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"**, como un Articulador que permite el tránsito entre los Modos AA–FL→AE–FL, corroborando lo encontrado en los caso 1 y 2.

5.5.2. HALLAZGOS DEL CASO 3

- A la luz de la teoría Modos de Pensamiento, la mayoría de los estudiantes de este caso , al igual que en los casos anteriores evidencian el uso del Articulador **"Coordenadas Cartesianas"**, cuando logran relacionar los datos obtenidos en la situación como un conjunto de coordenadas que le permiten realizar una representación gráfica, además muestran claridad respecto a la infinidad de puntos que componen la recta confirmando de esta manera el Articulador en mención, como el elemento de la matemática que propicia el tránsito entre los modos AA–FL→SG–FL, confirmando así la información obtenida en los casos 1 y 2.

- A partir de la comprensión de la situación dada los estudiantes logran establecer conexiones entre los modos SG–FL→AA–FL, cuando a partir del gráfico hallan la pendiente de la recta utilizando diferentes estrategias, que al combinar con el punto de intersección le permiten encontrar la expresión analítica, en este caso los articuladores que permiten el transito son los nombrados como "**Coordenadas cartesianas** y **Punto de corte en y con el desplazamiento sobre los ejes cartesianos".**

- En relación al tránsito SG–FL→AA–FL, los estudiantes reconocen con claridad la expresión analítica de una Función Lineal y utilizan diferentes métodos y estrategias para determinar la pendiente, elemento que es muy importante en tanto que como investigadores nos permite validar sus soluciones y homologar dos conceptos de la matemática en uno solo: *Pendiente = Constante de Proporcionalidad***.** Este hallazgo nos lleva a afirmar que cuando un estudiante determina la constante de proporcionalidad en el análisis de una secuencia lineal, realmente ha encontrado la pendiente que al combinarse con una coordenada permiten el tránsito entre SG–FL→AA–FL.

- Ninguno de los estudiantes de este caso da cuenta de una respuesta coherente y clara, que permita validar el tránsito entre los modos AE–FL→SG–FL, descartando así este tránsito como emergente de los casos anteriores.

- El estudiante En_1 en la entrevista, desde la mirada de la teoría que tomamos para esta investigación, relata y muestra desde lo figural una apropiación de las propiedades de la Función Lineal, en tanto que no se limita a simplemente dibujar una recta sino que es capaz de analizar sus propiedades y hacer uso de ellas para argumentar. Por otro lado, vemos que asume el *software Cabri* como otra estrategia que le permite de igual forma corroborar las propiedades y utilizarlas para generar la gráfica.

- En el análisis encontramos que los estudiantes En_1, En_8 y En_9 desde la teoría Modos de Pensamiento experimentan el tránsito entre los Modos SG–FL→AE–FL, a través del Articulador denominado "**Condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"**, confirmando la hipótesis plantada inicialmente en torno a dicho tránsito.

- Ningún estudiante de este caso logra relatar o evidenciar el uso de algún elemento de la matemática que permita validar el tránsito entre AE–FL→AA–FL.

- Desde la teoría Modos de Pensamiento, se concluye que los estudiantes En_3 y En_4 muestran el uso del Articulador "**Plano cartesiano y condiciones de la Función Lineal como lugar geométrico"**, como un Articulador que permite el tránsito entre los Modos AA–FL→AE–FL corroborando lo encontrado en los caso 1 y 2. En la tabla que se presenta a continuación se resumen los tránsitos y articuladores evidenciados en el caso 3 (Ver tabla 7).

Tabla 7: Resumen de articuladores presentes en el caso 3.

TRANSITOS ENTRE LOS MODOS DE PENSAR LA FUNCIÓN LINEAL	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AA–FL→AE–FL**
ARTICULADORES	$\xrightarrow[\text{Corrdenadas Cartesianas}]{Art}$	$\xrightarrow[\text{Pendiente de la recta y punto de intersecto en "y".}]{Art}$	$\xrightarrow[\text{condiciones como lugar geométrico}]{Art}$	$\xrightarrow[\text{Plano Cartesiano y condiciones como lugar geométrico}]{Art}$

		$\overrightarrow{Art_{\substack{Corrdenadas \\ Cartesianas}}}$		

5.6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El análisis realizado a los tres casos de estudio, parte de las respuestas e interpretaciones de los estudiantes que son producto del cuestionario de preguntas semi-abiertas como de la entrevista Semi-Estructurada, arrojan elementos importantes que permiten identificar la manera como los estudiantes transitan entre un modo de pensar y otro, poniendo de manifiesto los elementos de la matemática que permiten dicho tránsito. Este proceso de análisis se realiza bajo la mirada de la teoría Modos de Pensamiento, comprobando una clara existencia del tránsito AA–FL→SG–FL mediante el Articulador "**Coordenadas Cartesianas"**, el cual es un concepto que si bien se trabaja en el grado noveno, no se le da el estatus que debería tener dada su importancia para generar el cambio de una interpretación a otra.

Así mismo se evidencia el transito inverso SG–FL→AA–FL, a través de dos articuladores independientes que actúan por separado, donde se retoma nuevamente a las "**Coordenadas Cartesianas"** confirmando la fuerza de este concepto a la hora de trabajar la Función Lineal. Por otra parte surge un segundo articulador denominado, "**Pendiente y Punto de Intersección con el eje y**", el cual en las hipótesis iniciales no fue definido en estos términos, pero logra ser evidenciado con tal claridad que la gran mayoría de los estudiantes hacen uso de este mediante diversas formas.

Una fortaleza importante del análisis, radica en el uso que dieron los estudiantes al Modo Analítico Estructural, a través del *software* Cabri como mediador, permitiendo una mejor comprensión de los Modos de pensar y la articulación entre SG–FL→AE–FL**,** así como entre AA–FL→AE–FL. El primer transito fue posible utilizando el Articulador denominado "**Condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico",** y el segundo haciendo uso del "**Plano Cartesiano y condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico".**

Así mismo se indaga en la búsqueda de algún elemento de la matemática que permitiera validar el tránsito entre AE–FL→AA–FL, así como AE–FL→SG–FL, sin embargo no se logra relatar o evidenciar.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En el capítulo que se narra a continuación, se presentan los resultados obtenidos producto del estudio realizado a los casos 1, 2 y 3 como parte de un proceso investigativo, en torno a las implicaciones presentes en la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, al implementar una Unidad Didáctica, fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento.

6.1 DESDE LO EPISTEMOLÓGICO

La Función Lineal es un concepto que aparece en escena luego de un largo proceso de construcción epistemológica, donde no solo se ha dado por definición, sino que ha requerido de evoluciones matemáticas para convertirse hoy en la herramienta que permite la descripción de diferentes fenómenos de variación y que han sido aplicados a diferentes disciplinas del conocimiento científico –como la química, física, biología, economía–. Así mismo, se hace necesario que al abordar su estudio se fortalezca la comprensión del concepto a partir de situaciones en contexto que acerquen al estudiante a la creación de modelos, que más adelante le permitan hacer generalizaciones, esta recomendación invita a no iniciar con la definición formal, permitiendo al estudiante ser partícipe de su propia construcción garantizando así apropiación y comprensión del mismo.

6.2 DESDE LA TEORÍA

A través de la teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000), se logró identificar y describir la manera como los estudiantes transitan entre un Modo de pensar y otro, poniendo de manifiesto los elementos de la matemática que propician dicho tránsito.

Con la investigación se comprobó que todos los estudiantes utilizan el Articulador **Coordenadas Cartesianas** para transitar del modo Analítico-Aritmético al Sintético-Geométrico, para ello se apoyan de la expresión analítica y reemplazando la variable independiente generan las coordenadas que luego llevan al plano cartesiano para visualizar la graficar, este si bien es un proceso común en las aulas de clase, nos permitió validar el tránsito AA–FL→SG–FL.

Así mismo se logra evidenciar el transito inverso entre SG–FL→AA–FL, a través de dos articuladores independientes que actuaron por separado, el primero hace referencia a las **Coordenadas Cartesianas** como un elemento de la matemática que permite pasar de una interpretación a otra, esto cuando a partir del grafico el estudiante toma coordenadas y halla la expresión analítica, confirmando la fuerza de este articulador a la hora de trabajar la Función Lineal.

De otra parte, se confirma la existencia de un segundo Articulador en el mismo tránsito de SG–FL→AA–FL denominado, **Pendiente y Punto de Intersección con el eje y,** el cual en las hipótesis iniciales no fue definido en estos términos, pero logra ser evidenciado con tal claridad que una gran mayoría de los estudiantes hacen uso de este mediante diversas formas –desplazamiento de x respecto a y desde la gráfica, ángulo de inclinación, constante de proporcionalidad y fórmula tradicional–, así queda en evidencia como la pendiente de la recta junto con el intersecto en el eje y, son elementos de la Función Lineal que juegan un papel importante en el estudio de esta.

De acuerdo con la investigación, consideramos que el Modo AE–FL es posible incorporarlo en el currículo escolar, pues permitió que los estudiantes a través del *software* Cabri hicieran uso de algunas propiedades del objeto matemático, internándose en el reconocimiento de estructuras más complejas que llevan a una mejor comprensión. Con este Modo se destacaron los tránsitos SG–FL→AE–FL así como AA–FL→AE–FL; el primero fue posible utilizando como articulador las **Condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico –**perpendicularidad de las coordenadas a los ejes cartesianos y colinealidad- , y el segundo haciendo uso del **Plano Cartesiano junto con las Condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico,** ambos articuladores fueron fortalecidos con la ayuda de un *software* de geometría dinámica como Cabri.

Con respecto a las conexiones entre los modos AE–FL→ AA–FL, al igual que entre AE–FL →SG–FL**,** en las tres unidades de análisis los estudiantes presentaron dificultades al momento de hallar la expresión analítica o trazar la gráfica, a partir del uso de las condiciones del objeto matemático como lugar geométrico. Ninguno de los estudiantes mostró evidencias en sus argumentos de algún elemento de la matemática que permitiera validar dichos tránsitos. Consideramos que esto se debe primordialmente, a las bases conceptuales adicionales que requieren los estudiantes para entender plenamente el objeto matemático como lugar geométrico.

6. 3 DESDE LOS OBJETIVOS

Al inicio de esta investigación nos planteamos como objetivo general: analizar las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento en las prácticas de aula. A partir de la revisión de este, y del estudio de la pregunta de investigación, se concluye que se cumplió a cabalidad, ya que el análisis realizado y la estructuración de la Unidad Didáctica resumida en un análisis didáctico, permitieron el reconocimiento de estrategias puntuales que nos permiten llegar a esta conclusión.

Respecto a los objetivos específicos planteados se llega a las siguientes conclusiones:

El primero hace referencia a la caracterización de los Modos de Pensamiento para la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal. Esta caracterización fue posible a través de las diferentes intervenciones de aula –medición inicial– y del análisis a priori y a posteriori tanto al cuestionario como a la entrevista, que permitieron poner en evidencia los tránsitos y articuladores entre los Modos de pensar el objeto matemático. Como resultado encontramos lo siguiente (Ver figura 24).

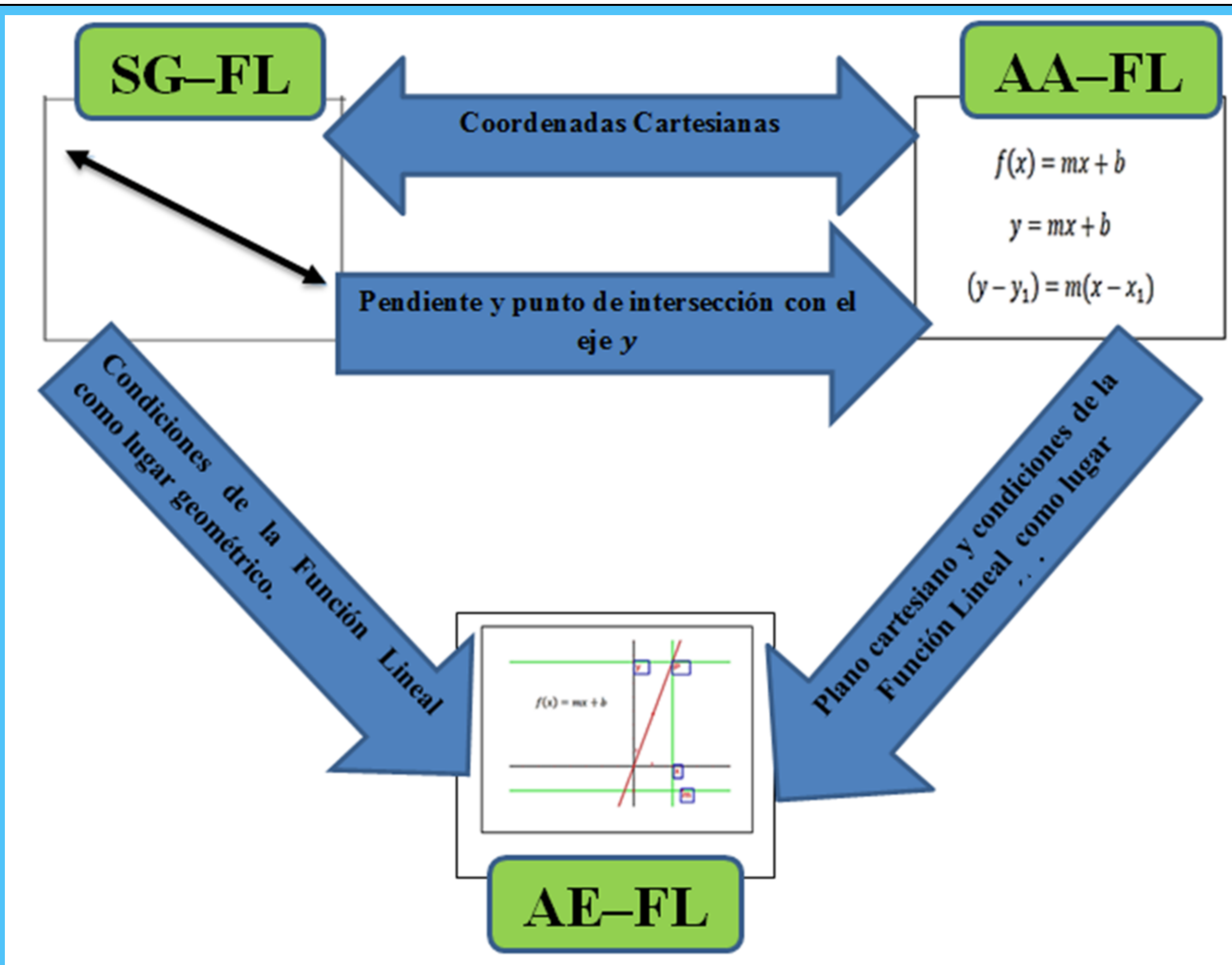


Figura 24: Articuladores y tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal.

Respecto al segundo objetivo que plantea el diseño de una Unidad Didáctica (UD), que propicie el tránsito entre los Modos de pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, construimos un documento fundamentado en la teoría Modos de Pensamiento que se consolidó como el producto final de la investigación. En esta UD se integraron actividades que fueron validadas en las prácticas de aula verificando su efectividad.

Un tercer objetivo está relacionado con la implementación de actividades en el aula para estudiantes del grado 9°, que propicien el tránsito entre los Modos de Pensamiento en la práctica de la Función Lineal. Al respecto se desarrollaron actividades que permitieron la movilización de los Modos de pensar así como los tránsitos y articuladores entre estos. Dichas actividades fueron diseñadas a partir de situaciones en contexto y de una serie de interrogantes que permitieron diversas interpretaciones del objeto matemático.

Finalmente se planteó contribuir con el mejoramiento de los componentes Numérico-Variacional y Geométrico–Métrico en los resultados de las Pruebas Saber mediante la implementación de una Unidad Didáctica. Si bien este objetivo es a mediano y largo plazo, consideramos que el trabajo realizado impactó positivamente en los resultados obtenidos en estas pruebas así como en el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE), donde se observa que la Básica Secundaria y la Educación Media mejoran gradualmente el desempeño mostrando progreso de un año a otro.

6.4 DESDE LOS DOCENTES

La investigación demostró que al abordar el concepto de Función Lineal, es pertinente que el docente parta de situaciones en contexto involucrando crecimientos lineales; a su vez, el trabajo en el aula debe estar acompañado por diversas actividades que propicien el tránsito entre las diferentes interpretaciones del objeto matemático.

A partir de la implementación de la propuesta didáctica que arroja esta investigación hemos comprobado que la teoría Modos de Pensamiento nos brinda una mirada desde diferentes facetas que permite un pensamiento más amplio y versátil, actuando como una herramienta muy importante para los docentes en tanto que le brinda la posibilidad de presentarle al estudiante un mismo objeto desde múltiples interpretaciones, fortaleciendo una verdadera comprensión del objeto matemático.

El uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, especialmente el *software* de geometría dinámica Cabri, resultó exitoso en la búsqueda de la interpretación estructural del objeto matemático, permitiendo tanto al docente como al estudiante la visualización, manipulación y construcción del objeto, llevándolos a un conocimiento más amplio y profundo de este.

6.5 DESDE LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO

Hemos comprobado que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal se vio fortalecido, en tanto que los estudiantes pudieron interpretar desde diferentes Modos el mismo objeto matemático, saliendo de la enseñanza tradicional donde sólo se abordaba dos tipos de interpretación –Aritmética y Geométrica– dejando de lado las relaciones existentes entre estas; de otra parte, se abre la posibilidad de tener una tercera interpretación que es la Estructural, permitiendo un análisis más profundo desde las propiedades y axiomas del objeto, aspecto que fortalece notoriamente la investigación llenando el vacío de la misma al no haber sido considerada, dicha interpretación, en el currículo nacional. Con este Modo de pensar se presentaron los tránsitos SG–FL→AE–FL al igual que AA–FL→AE–FL, los cuales se dieron mediante los articuladores **Condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico** y el **Plano Cartesiano junto con las condiciones de la Función Lineal como Lugar Geométrico,** respectivamente.

El tránsito entre estas interpretaciones, aspecto fundamental de la teoría Modos de Pensamiento, brindó la oportunidad de acercarse a la flexibilización en la forma de pensar del estudiante, abriéndole otras opciones para acceder de manera significativa a un concepto que es fundamental en el desarrollo del componente variacional en el currículo escolar.

6.6. DESDE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El diseño e implementación de la UD, permitió la movilización del aprendizaje de la Función Lineal y el desarrollo del pensamiento Numérico–variacional y Geométrico–Métrico. La riqueza de la propuesta se evidencia en que no se limitó a un listado de actividades, sino que estuvo acompañada de un sustento teórico y de un análisis didáctico, que la validan como una estrategia metodológica valiosa y adecuada para integrar en el currículo.

Una de las fortalezas de la propuesta está enmarcada en la implementación de la teoría Modos de Pensamiento, la cual orienta y marca un camino claro de aplicación, donde se incluyeron situaciones contextualizadas que posibilitaron al estudiante interpretar el objeto matemático de diversas maneras, logrando con ello una comprensión profunda del concepto.

Como valor agregado de la investigación, la Unidad Didáctica en mención será publicada a la comunidad académica, brindando una herramienta de uso didáctico en la enseñanza de la matemática.

6.7. DESDE EL ESTADO ACTUAL DE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Respecto a la pregunta de investigación que referenciamos a continuación: **¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal en el grado 9°, al implementar una unidad didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias Matemáticas?**, una vez concluida la aplicación de la Unidad Didáctica que registra dicha pregunta, encontramos que un aporte importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, se evidencia en la definición del Modo Analítico Estructural (FL), basado en la interpretación del objeto matemático como lugar geométrico, a partir del uso de condiciones como Perpendicularidad de la recta con el eje x, Perpendicularidad de la recta con el eje y, y Colinealidad, las cuales estuvieron mediadas por el *software* Cabri, permitiendo que el estudiante avanzara en la comprensión del Modo AE–FL y su articulación con los otros Modos, internándose en el reconocimiento de estructuras más complejas que llevan a una mejor comprensión del objeto de estudio, logrando una contribución significativa al currículo nacional y a la comunidad académica en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta (2011). *La Noción de Linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y cultural.* Tesis doctoral no publicada. Instituto Politécnico Nacional. Cenco de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

Acosta y Joya (2013) Ingeniería Didáctica para la Enseñanza de la Función Lineal: análisis preliminar. *Revista El Astrolabio,* 115-127.

Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev y otros (1981). El concepto de función. En La matemática: su contenido, métodos y significado (pp. 100-107). México Ed. McGRAW-HILL.

Allendoerfer y Oakley (1971). Funciones. En Introducción Moderna a la Matemática Superior. (pp. 201-205). Estados Unidos. Ed. McGRAW-HILL.

Allendoerfer y Oakley (1988). Fundamentos de Matemáticas Universitarias. (pp. 241-409). Estados Unidos. Ed. McGRAW-HILL.

Apóstol, (1988). Calculus. Editorial Reverté Colombiana. Bogotá

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.*), Research in Collegiate Mathematics Education* II (1–32). U.S.A.: American Mathematical Society

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid; Síntesis.

Bonilla, (2012). *La Elipse desde la perspectiva de la teoría los Modos de Pensamient*o. Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de matemáticas. Chile.

Boyer, C. B. (1946). Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept. *Scripta Mathematica*. (12), 5-13

Boyer, C. B. (1968). *A history of Mathematics*. New York: Wiley y Sons Inc.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Trabajos de Matemática No. 19 Serie B.* Facultad de Matemática Astronomía y Física, (versión castellana). Universidad Nacional de Córdoba.

Buendía, Ferrari y Martínez (2015). *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*. Ediciones Díaz de Santos, S.A. México.

Cantoral y Montiel (2001), *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. Prentice Hall, México.

Cifuentes y Salazar. (2010). *Hipertexto Matemáticas 10°.* Editorial Santillana S.A. Bogotá. Colombia.

Cifuentes, W. (2011). *Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Colombia.

Collette, J. (1998). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.
Crombie, A. (1979). *Historia de la Ciencias: de San Agustín a Galileo*. (Vol. 1). Madrid: Alianza Editorial.

Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cuevas y Delgado (2015). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante?. *Revista el Cálculo y su Enseñanza* 7 (7), 108-119.

De Contret, R. (1988). Un etude sur les representations graphiques du mouvement. Petit X, 17, 5-27.

Díaz, E. (2009). *Geometría Dinámica con Cabri-Géomètre*. Editorial Kali. Metepec, Estado de México.

Díaz, G. (sf). *El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones.* Recuperado el 24 de febrero de 2017 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf.

Duval, R. (1998). *Investigaciones en Matemática Educativa II. Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, (pp. 173-201). Editorial Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.

Euclides (1956) *The thirteen books of The Elements*. Trad. Sir Thomas L. Heath. Vol. 2, Books III-IX. New York: Dover

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. México. UTHEA.

Fabra y Deulofeu (2000), Construcción de gráfico de funciones: “continuidad y prototipos”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 2(3), p. 207-230.
Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fiol y Fortuny (1990). *Proporcionalidad Directa. La forma y el número.* Madrid: Sintesis.

Función Lineal desde Patrones (sf). Recuperado el 24 de febrero de 2017 de https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroompractice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.

Giraldo, B. (2012). *Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Medellín.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. En Godino, J y Ruiz, F Didáctica de la Geometría para Maestros Capítulo 1: Figuras Geométricas (297-299). Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

González, M. (sf). *Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales*. Extraído el 21 de febrero de 2017. Disponible en http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc [en línea].

Grossman, S. (1996). *Algebra Lineal*. Editorial McGraw Hill. México.

Guzmán (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal*. Tesis de Pregrado no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. Facultad de Matemáticas.

Henao y Mena (2018). Audio En_4 en *https://youtu.be/BJWM0rLCFtY*

Henao y Mena (2018). Audio En_8 en https://www.youtube.com/watch?v=oWEI40z7JE4

Henao y Mena (2018). Audio $2En_1$ en *https://youtu.be/mnI6kSq3aPw*

Henao y Mena (2018). Audio $2En_8$ en *https://youtu.be/N_TtOh8JWpU*

Henao y Mena (2018). Audio $2En_9$ en *https://youtu.be/G2g7b-tMkEw*

Henao y Mena (2018). Audio $4En_1 en$ *https://youtu.be/cOvhXUTyliI*

Herrera, A. (2014). *Diseño de una Unidad Didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto de mol y número de abogadro utilizando herramientas virtuales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Manizales.

Hitt, F., (1996) *Investigaciones en Matemática Educativa, Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*, (pp. 245-246). Ed Iberoamérica. México.

Hoffman, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Editorial Limusa.

Hughes H, gleason, A. M., & AL., E. (1997). Cálculo. San Juan Tlihuaca, México: Compañía Editorial Continental.

Ibarra y Moreno (2010). *Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Medellín. Colombia.

Icfes, (2016). Resultados I. E. Monseñor Francisco Cristóbal Toro. Medellin.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*. 20 (20), 282-300.

Larson, R., Hostetler, P., Edwards, B. (1999) *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw Hill, México.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press México. México D.F.

Martínez R. (2011) Métodos de investigación cualitativa. *Revista Silogismos de investigación*. 08 (1).

MEN (2010). Ministerio de Educación Nacional. Portal educativo Colombia aprende. Conoce las Pruebas Saber. recuperado el 10 de octubre de 2016. de *http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-89525.html*

MEN (2016). Ministerio de Educación Nacional. Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Santafé de Bogotá. Colombia.

MEN (2017). Ministerio de Educación Nacional. Reporte de la Excelencia. Mineducación. Colombia.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia: Magisterio.

Métodos y Técnicas de Investigación. (sf). Recuperado el 18 de septiembre de 2016 dehttp://www.gestiopolis.com/metodos-y-tecnicas-de-investigacion-cientifica/

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia: Magisterio.

Ministerios de Educación Nacional (2010). *Estándares de matemáticas* (2010). Recuperado el 15 de septiembre de 2016 de http:// www.mineducacion.gov.co

Muñoz, Piedrahita y Jessie (2012). Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC. *Revista de la Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia*. (01), 22-33.

Muñoz, Q. (2002). Introducción a la teoría de conjuntos. *Revista de la Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia*. Cuarta edición.

Ospina, G. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales. Departamento de Educación.

Parraguez y Randolph (2017). *Comprensión del sistema de los números complejos desde los modos de pensamiento*. Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Parraguez, G. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas PUCV. Chile.

Parraguez, M. & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R2 y R3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*.

Patrones y Funciones Lineales. (sf). Recuperado el 30 de mayo de 2017 de https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s

Peterson, John A. y cols. (1969). *Teoría de la aritmética*. Ciudad de México, México: Editorial LimusaWiley.

Pinto-Rojas y Parraguez (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. Revista IEJM-MATHEMATICS EDUCATION 12 (10), 873-898.

Posada y Villa (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Medellín. Colombia.

Quevedo R. y Castaño C. (2012). Introducción a la Metodología de Investigación Cualitativa. Revista de psicodidáctica (14), 5-39.

Quintero y Cadavid (2009). Construcción del concepto de función en estudiantes del grado octavo. 10° *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Universidad de Antioquia.

RAE (2017). Real Academia Española. Recuperado el 25 de noviembre de 2017 de http://www.rae.es/.

René de Cotret, S. (1985). Etude Historique de la notion de function: Analyse epistemologique et experimetation didactique. Memoire de Maitrise en Mathématiques. Montreal: Université du Ouebec.

René de Cotret, S. (1988). Un etude sur les representations graphiques du mouvement. *Petit X*, 17, 5-27.

Roldán, C. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá. Colombia.

Ruiz, E. y Valdemoro, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 299-324.

Ruiz, H. (1998). *La noción de Función: análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén. Unión tipográfica. Centro de publicaciones.

Ruting, D. (1984). Some Definitions of the concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki. The Mathematical Intelligenciar. Vol. 6, No. 4.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Student´s thining in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds), The Teaching of Linear Algebra In Question (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Sierpinska,(1992). On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical. Association of America (25), 23-58.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Quinta edición. Ediciones Morata., Madrid.

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas.* (2a ed.). [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México: Instituto Politécnico Nacional.

Suárez-Álvarez (2016). Funciones Lineales. Álgebra Lineal (pp. 29-57). This work is licensed under a Creative Commons.

Thomas, (1979). *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.* Editorial Aguilar. Sexta Edición. Madrid.

Un poco de historia sobre la Función Lineal. (sf). Recuperado el 15 de septiembre de 2016 de https://b303ac73d278f80872c3a99828a5a1e5203bdf77.googledrive.com/host/0Bwyv0Pr7ZsdzcGV1M1VaeXlueW8/un_poco_de_historia_sobre_funciones.html

Vargas, (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad, Ciencias. Bogotá.

Vasco, C. E. (1999). *Didáctica de las Matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Youschkevitch, A. (1976). The Concept of Funtion up to the Middle of the 19 Century. Arch. Hist. Ex. Sci. (16) 37-85.

Zabala, L. (2015). *Construcciones y Mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes*. Tesis Doctoral no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas. Valparaíso.

ANEXO 1

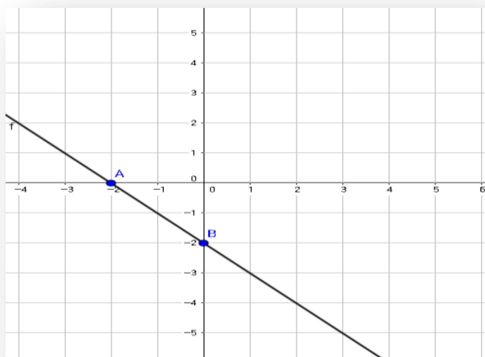
CUESTIONARIO

LA FUNCIÓN LINEAL DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

Estudiante: ____

Grado: _____________ Fecha: ____

1. A partir del gráfico dado, determina la ecuación de la recta. Justifica, en detalle, el procedimiento que has realizado.



2. Selecciona cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Función Lineal, luego construye una tabla de valores representando los datos de la misma en el plano cartesiano generando la recta, verifica si las coordenadas obtenidas son perpendiculares a los ejes y cumplen la propiedad de colinealidad. Explica cómo llegaste a la respuesta.

a. $y + 2x^2 = 9$ b. $y - 3x = 4$ c. $y = 4x + 3$

3. Encuentra la ecuación de la recta que intercepta el eje "y" en el punto (0,3) el cual es perpendicular a los ejes coordenados y tiene por pendiente 4. Justifica tu respuesta.

4. Dadas las coordenadas $(1, -3)$ y $(2,0)$, graficar y hallar otras coordenadas perpendiculares y colineales que pertenezcan a la gráfica que pasa por dichos puntos (utilizar el software Cabri).

5. Dada la ecuación $y + x = -1$, representarla gráficamente y comprobar que dicha gráfica cumple las propiedades de la Función Lineal como lugar geométrico. Explica el procedimiento utilizado (utilizar el *software* Cabri).

ANEXO 2

GUÍA 1: Bitácora familiar

Docentes: Ana Luisa Mena Romaña y Freddy Henao Restrepo

Eje conceptual: Concepto de relación

Objetivo: abordar el concepto de relación desde un contexto familiar en la formalización del concepto de Función.

Uno de los ejemplos más comunes en la que se encuentra el concepto de relación está en la familia. En la siguiente descripción se presenta una familia con las siguientes características: Andrea y Raúl tuvieron 4 hijos cuyos nombres son Juan, Carlos, Gloria y Jairo. Los tres primeros se casaron. La esposa de Juan es María y tuvieron tres hijos y una hija: Mateo, Andrés, Julián y Verónica. Carlos se casó con Inés y tuvieron dos hijos y una hija: Wilson, Peter y Claudia. Gloria se casó con Gabriel y tuvieron tres hijos: Sergio, Jonathan, y Gerónimo.

Con base en la anterior situación, resolver:

1. Construir un diagrama o árbol genealógico que represente las relaciones entre los integrantes de la familia.

2. Responder los siguientes interrogantes:

A. ¿Quiénes son primos de Julián?

B. ¿Quiénes son los sobrinos de Carlos?

C. ¿Entre María y Carlos qué relación hay?

D. ¿Qué relación observas entre Sergio y Raúl?

E. ¿Quiénes son tíos de Wilson?

F. ¿Cuántos nietos tienen Andrea y Raúl?

G. ¿Entre Jonathan y Peter qué relación hay?

Es posible establecer múltiples relaciones entre los miembros de la familia. Por ejemplo, en el siguiente diagrama sagital se muestra la relación “ser padre de” que se escribe P= {(x,y): “x” es padre de “y”}.

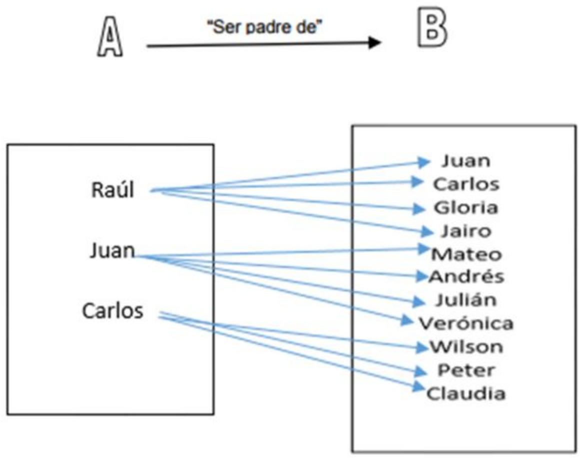


Figura 1: Diagrama de la situación "Bitácora familiar". Roldán, 2013.

CONCEPTOS DE DOMINIO Y RANGO

De acuerdo con el ejemplo en la relación "ser padre de", al conjunto A pertenecen los que son padres. El conjunto "A" hace las veces de conjunto de salida y se denomina *dominio*. El conjunto B hace de conjunto de llegada, está formado por los que son hijos y en este caso se denomina ***rango*** *"y"* es igual al conjunto de llegada.

H. Determinar el dominio y rango de la relación "ser tío de" denotada por ***T*={(*x*, *y*) : *x* es tío de *y*}**. Luego elaborar la representación sagital de la relación vinculando las parejas que la cumplen entre los dos conjuntos.

I. Determine el dominio y rango de las parejas que cumplen la relación "ser abuelo de" denotada por N={(x, y) : x es abuelo de y}. Luego elaborar la representación sagitalde la relación.

J. Representar por medio de un diagrama sagital las relaciones "ser esposo de" y "ser esposa de". Establecer algunas diferencias entre los diagramas sagitales encontrados en los puntos H, I, y el diagrama elaborado en el punto J. ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

K. ¿Qué otras relaciones se podrían establecer de tal manera que sus diagramas sagitales tengan características similares al del punto J?

L. Si sabemos que los diagramas de los puntos H e I representan el concepto de RELACIÓN, mientras que el diagrama del punto J corresponde al concepto de FUNCIÓN, escribe una definición de lo que es una RELACIÓN y lo que es una FUNCIÓN.

ANEXO 3

GUÍA 2: "Siguiendo Patrones"

Docentes: Ana Luisa Mena Romaña y Freddy Henao Restrepo

Eje conceptual: La función Lineal y sus representaciones

Objetivo: Identificar regularidades en un conjunto de figuras y a partir de estas, determinar la expresión general.

Una fábrica produce baldosas de forma rectangular. El arquitecto distribuye las baldosas siguiendo la secuencia que se muestra:

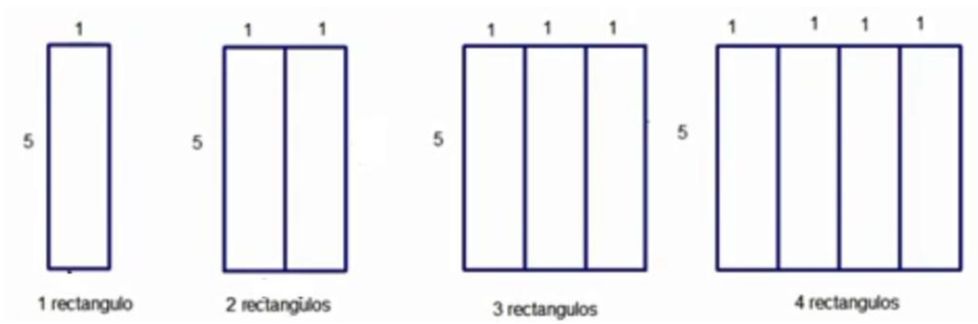


Figura 1: Tomado del video "Función Lineal desde Patrones" recuperado el 24 de febrero de 2017 de https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s

Con base en la anterior situación, responder las siguientes preguntas:

1. Si se sabe que la primera baldosa está en la posición 1, y en la posición dos hay 2 baldosas; completa la secuencia hasta la posición 6. Justificar.
2. Calcula el perímetro de las baldosas que forman la figura en cada posición (posiciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6).
3. Construye una tabla de valores que relacione el número de baldosas de cada posición con el perímetro de cada una.
4. Responda sin dibujar, si el perímetro es 40 unidades, ¿cuántas baldosas necesitaría el arquitecto?
5. ¿Se podría distribuir el número de baldosas en cada posición de manera diferente manteniendo el perímetro?
6. En la relación número de Baldosas vs Perímetro se evidencia que una depende de la otra. La que depende se denomina variable dependiente, la otra se conoce como variable independiente. Explicar de acuerdo a la tabla construida anteriormente, ¿cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

7. Representa por medido de un diagrama sagital las relaciones establecidas en la tabla de valores, luego ubica cada coordenada en el plano cartesiano uniendo los puntos resultantes.
8. A partir de la gráfica obtenida en el plano, responde las siguientes preguntas:
   A. ¿Qué otro punto se puede ubicar sobre la recta generada?
   B. ¿Es posible determinar el número exacto de puntos que se pueden ubicar? Explicar.
   C. ¿Cómo es la inclinación de la recta con respecto al eje “x”?
   D. ¿En qué coordenada toca la recta el eje “y”?
   E. Si se le pide ubicar en el plano cartesiano la coordenada (10, 30), ¿qué significado tiene el 10 y el 30 en la situación de las baldosas?

Encontrando la expresión general

9. ¿Qué regularidades encuentras respecto a los lados de las figuras en las secuencias?

Figura 1:

Figura 2:

Figura 3:

Figura 4:

Figura n:

10. ¿Cuál es la fórmula o expresión general que corresponde al perímetro en cualquier posición? Compruébala con el perímetro de las figuras 2 y 5.

ANEXO 4

GUÍA 3: “Una mirada estructural de la Función Lineal mediada por el *software* Cabri”

Docentes: Ana Luisa Mena Romaña y Freddy Henao Restrepo

Eje conceptual: La Función Lineal desde su estructura

Objetivo: comprender la Función Lineal como lugar geométrico desde la representación estructural.

MOMENTO 1: Conducta de entrada

1. Consultar cuáles son las funciones de Cabri.
2. Buscar veinte herramientas de Cabri Geometry II plus y decir cuál es la función de cada una.
3. Buscar un video tutorial de Cabri Geometry II plus, observarlo y hacer un resumen de su contenido.
4. Ingresar al programa Cabri y aplicar las herramientas consultadas en el punto 2.

MOMENTO 2: Gráfica y expresión analítica de la Función Lineal

1. Ubicar en el plano cartesiano los puntos representados por las siguientes coordenadas $(1,2)$ y $(2,3)$.
2. Trazar la línea recta que pasa por los dos puntos ubicados.
3. Hallar, con ayuda de Cabri, la expresión que representa dicha recta, luego realizar el procedimiento matemático que permita comprobar que la expresión ya encontrada es la correcta.

MOMENTO 3: Construcción de la recta como lugar geométrico

1. Insertar los ejes
2. Ubicar un punto sobre el eje x y hallar su coordenada.
3. Trazar una perpendicular al eje x que pase por el punto encontrado.
4. Escribir la expresión obtenida en el momento 2.
5. Aplicar el valor de “x” en la expresión del punto 4.
6. Transferir sobre el eje y el resultado obtenido en el punto 5.
7. Trazar una perpendicular al eje y que pase por el punto transferido.

8. Aplicar Lugar geométrico dando click al punto de intersección entre las dos perpendiculares y el punto inicial colocado en el eje y.

9. Hallar la ecuación que representa la recta construida.

ANEXO 5

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

ENTREVISTA

SITUACIÓN:

Una fábrica produce baldosas de forma rectangular. El arquitecto distribuye las baldosas siguiendo la secuencia que se muestra:

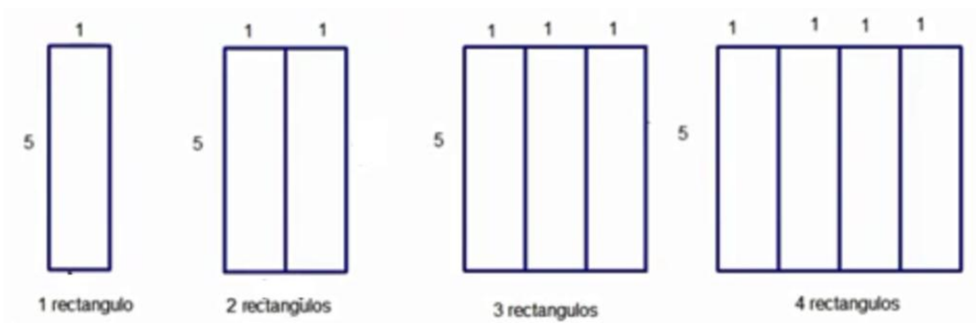


Figura 1: https://www.youtube.com/watch?v=eM8bQzNg_bo&t=329s,

Recuperado el 24 de febrero de 2017

Fundamentados en la anterior situación, responde y resuelve las siguientes preguntas, justificar tus procedimientos escribiendo en detalle lo realizado:

1. Si se sabe que la primera baldosa está en la posición 1, y en la posición dos hay 2 baldosas; completa la secuencia hasta la posición 6, luego calcula el perímetro de las

baldosas que forman la figura en cada posición (posiciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6) y construye una tabla de valores con la relación "número de baldosas" vs "perímetro"

2. Utilizando los elementos encontrados, explica cómo podrías realizar una representación gráfica de los datos, y determina, si es posible, el número exacto de puntos que conforman la recta. Justifica en detalle los procedimientos.

3. Encuentra una expresión analítica que represente la recta generada en el punto anterior, represéntala como un lugar geométrico a partir de sus propiedades, además explica las estrategias a utilizar en dicha construcción. Justifica los procesos utilizados.

ANEXO 6
UNIDAD DIDÁCTICA

Funcionando con Funciones

Autores	Ana Luisa Mena Romaña Freddy Henao Restrepo
Nombre de la Institución Educativa	Monseñor Francisco Cristóbal Toro
Área	Matemáticas
Ciudad y país	Medellín, Colombia
Grado	Noveno
Objeto Matemático	Función Lineal

Resumen de la Unidad Didáctica

En la presente UD se encuentra una propuesta dirigida a fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático en mención, abordándolo desde sus diferentes representaciones –gráfica, algebraica, tabular, lenguaje natural– enfocado desde la teoría de Modos de Pensamiento.

Se desarrollan diferentes actividades que permiten comparar el crecimiento lineal o aritmético con otros modos de crecimiento, el paso de una tabla o gráfica a la expresión algebraica de una función, graficación de funciones lineales analizando expresiones de la forma $f(x) = mx$ y $f(x) = mx + b$, situaciones en contexto que implican el uso de funciones lineales en las que el estudiante pueda darse cuenta de su utilidad en el mundo real.

Temas

- Plano Cartesiano.
- Concepto de función y relación.

- Línea recta.
- Interpretaciones de la Función Lineal.
- Elementos y propiedades de la Función Lineal.

Estándares

- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

- Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla f, que a cada valor x, le asigna un único valor $f(x)$ y reconoce que su gráfica está conformada por todos los puntos $(x, f(x))$.
- Comprende que una función sirve para modelar relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- Reconoce que la gráfica de y = mx + b es una línea recta.
- Usa su conocimiento sobre funciones lineales $f(x) = mx + b$ para plantear y solucionar problemas
- Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de las familias de funciones lineales $f(x) = mx + b$ al igual que los cambios que los parámetros m y b producen en la forma de sus gráficas.
- Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica.

Objetivos de aprendizaje

- Modelar situaciones en contexto fundamentadas en la teoría Modos de Pensamiento, que propicien el tránsito entre los diferentes modos de pensar.
- Fortalecer los elementos articuladores que permiten interpretar y representar la Función Lineal desde diferentes modos de pensar.
- Contribuir al mejoramiento de los componentes Numérico-Variacional y Geométrico-Métrico en los resultados de las PRUEBAS SABER a corto y mediano plazo.

Contexto social

La población estudiantil está en un rango de edades entre los 14 y 17 años. En general muestran respeto hacia los docentes propiciando un ambiente escolar armónico y un espacio agradable, hecho que permite un desarrollo adecuado de las actividades académicas; además favorece notoriamente el cumplimiento de los objetivos trazados en cada una de estas.

Es importante resaltar que no todos los estudiantes presentan desempeño académico avanzado, sin embargo, se evidencia buena disposición para desarrollar las diferentes propuestas didácticas en torno al aprendizaje de la matemática. Lo anterior favorece los procesos cognitivos al interior del aula proyectando una mejor cualificación académica de la población.

El Modelo Pedagógico es Humanista e Incluyente, por ello la inclusión es un elemento esencial dentro de la filosofía institucional, favoreciendo la atención de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (N.E.E.), comunidad LGTBI, afro descendientes y diferentes credos, los cuales se integran a la comunidad educativa sin inconveniente. El acompañamiento tanto de psicología como de la maestra de apoyo, permite realizar las adecuaciones curriculares necesarias en el desarrollo del proceso formativo.

Prerrequisitos

- Los números Reales.
- Reconocimiento del plano cartesiano.
- Ubicación de los números Reales en la recta numérica.
- Ubicación de parejas ordenadas en el plano cartesiano.
- Operaciones y propiedades en el conjunto de los números Reales.
- Interpretación de un enunciado matemático en lenguaje natural y lenguaje algebraico.
- Concepto de proporcionalidad.

Lugar

- Aula de clase
- Aula de sistemas

Tiempo

2 meses

Fundamento teórico de la Unidad Didáctica

El referente teórico de la Didáctica de la Matemática empleado para fundamentar la Unidad Didáctica son los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), porque provee de elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes comprenden los objetos matemáticos, en este caso la Función Lineal. Además, estos Modos de pensar permiten describir e interpretar los enfoques (Aritmético, Geométrico y Estructural) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos.

Anna Sierpinska identifica tres Modos de Pensamiento que implican maneras de análisis diferentes, clasificándolos de la siguiente forma: el Sintético–Geométrico (SG) que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE), que se relacionan con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000, citada en Parraguez, 2012).

El Modo Sintético–Geométrico (SG) permite que los objetos matemáticos se puedan analizar desde una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc., resaltando como aspecto fundamental la visualización (Parraguez, 2012). Este modo de pensamiento va de la mano con el modelo cognitivo de razonamiento geométrico, donde se plantea que los procesos de razonamiento son posibles gracias a la interacción de tres procesos: visualización, construcción y razonamiento (Duval, 2004).

El Modo Analítico-Aritmético (AA) presenta la posibilidad de pensar los objetos matemáticos por medio de "relaciones numéricas", donde, el plano cartesiano ya se ve como puntos formados por parejas ordenadas de números reales y las rectas son vistas desde las ecuaciones (Parraguez, 2012). Este modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el modo SG por considerar otras relaciones que no son de tipo espacial.

El Modo Analítico-Estructural (AE) apunta a la interpretación por medio de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos (Cifuentes, 2011), lo que llevaría a plantear que es un modo de pensar más avanzado donde se exigen otras relaciones, buscando generalizar elementos que ya se habían considerado en los modos SG y AA.

El marco teórico en mención fue una estrategia didáctica, que permitió abordar la problemática identificada en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Función Lineal, ello se ve reflejado en la Unidad Didáctica, en donde se plantean actividades de construcción y aplicación del objeto matemático, buscando hacer un recorrido por los tres modos de pensamiento, que el estudiante tenga suficientes elementos para llegar a la comprensión del concepto, haciendo énfasis en el uso de las tic como herramienta integradora en el desarrollo del proceso matemático.

Secuencia de Aprendizaje

Tabla 1: Actividades Unidad Didáctica

#	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO
1	Indagación de conocimientos previos (prueba	2 horas

	diagnóstica)	
2	“Bitácora Familiar”	3 horas
3	“Agua con sabor a…”	4 horas
4	Llenado de Tanques	2 horas
5	“Los Resortes”	3 horas
6	“La Ruleta Panorámica”	3 horas

PROPUESTA DIDÁCTICA

Actividad 1: Indagación de conocimientos previos
Objetivo: Identificar los conocimientos que traen los estudiantes en torno a la problemática de estudio.
Descripción: se aplica una prueba diagnóstica virtual que contiene diferentes elementos conceptuales relacionados con el objeto de estudio, los cuales hacen parte de los conceptos previos (Henao y Mena, 2018).

Actividad 2: Bitácora Familiar
Objetivo: abordar el concepto de relación desde un contexto familiar en la formalización del concepto de Función.
Descripción: se plantea a los estudiantes la siguiente situación:
La familia Pérez está conformada por: dos abuelos, dos abuelas, 2 primas, un primo, 3 hijos, 3 hijas, 4 padres, 3 madres, un yerno, una nuera, 2 suegros, 2 suegras, 2 tíos, una tía, 2 hermanas, dos hermanos, 2 sobrinas, un sobrino, 2 nietas y un nieto..

A partir de la situación proponen las siguientes actividades.

A. Realiza una representación gráfica del árbol genealógico de la familia Pérez
B. Escribe las relaciones de la familia “ser hijo de…” ¿quiénes la cumplen?.
C. Pedro, que no es de la familia afirma que la familia Pérez es muy numerosa pues suman el doble de una veintena. Es esta afirmación verdadera, y de no ser así ¿Cuántos son los integrantes de la familia?
D. Construye tu propio árbol genealógico hasta la tercera generación y determina las relaciones que cumples en tu familia.
E. Determine el dominio y rango de las parejas que cumplen la relación “ser abuelo de” denotada por N={(x, y): x es abuelo de y}. Luego elaborar la representación sagital de la relación.
F. Representar por medio de un diagrama sagital las relaciones “ser esposo de” y “ser esposa de”.
G. Si sabemos que el diagramas del punto E representan el concepto de RELACIÓN, mientras que el diagrama del punto F corresponde al concepto de FUNCIÓN, escribe una definición de lo que es una RELACIÓN y lo que es una FUNCIÓN.

Actividad 3: “Agua con sabor a…”
Objetivo: Aplicar el concepto de proporcionalidad en la solución de diferentes situaciones.
Descripción: Se plantea a los estudiantes el siguiente enunciado: “en la escuela de Juan están preparando jugos de distintos sabores para una fiesta. Para la naranjada se requiere el jugo de 20 naranjas, 10 tazas de agua y 2 tazas de azúcar. Con esta fórmula se obtienen 30 vasos de naranjada” (Posada y Villa, 2006). Con estos datos se debe:

- Completar la información requerida en torno a la cantidad de ingredientes necesarios para preparar ciertos vasos de jugo, así como la cantidad de jugo que puede surgir a partir de ciertos ingredientes.

Vasos de naranjada	Cantidad de Naranjas	Tazas de azúcar	Tazas de agua
4			
	25		
30			
40			

Figura 1: Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional (Posada y Villa, 2006).

A. Representar la información de manera gráfica relacionando las siguientes variables: vasos de naranjada y cantidad de naranjas.
B. ¿A partir de los datos de la tabla qué otras variables se pueden relacionar? Representarlas gráficamente.
C. Utilizando el gráfico encuentra otras coordenadas que cumplan las propiedades de perpendicularidad con respecto a los ejes cartesianos y que además sean colineales.
D. Determinar la constante de proporcionalidad (Pendiente de la línea recta) entre las relaciones establecidas.
E. Encontrar una expresión analítica que represente cada una de las gráficas elaboradas.

Actividad 4: Llenado de Tanques
Objetivo: Analizar los argumentos que presentan los estudiantes cuando llevan al plano cartesiano una situación en contexto.
Descripción: se presentan varios envases de distintas formas, pero de igual capacidad, se vierte lentamente la misma capacidad de líquido hasta llenarlos y se muestran cuatro tipos de graficas distintas, se lleva a que el estudiante relacione gráficamente la forma de llenado de cada envase e interprete el tipo de movimiento que ocurre, además el reconocimiento de la representación gráfica de cada llenado.

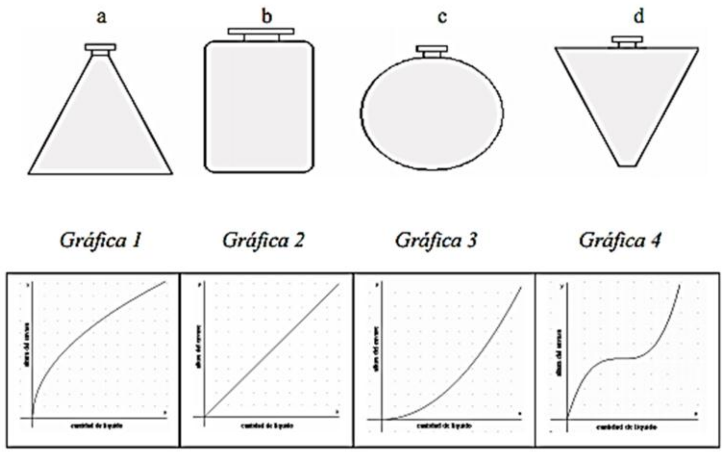


Figura 2: Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal. Guzmán, R. (2006)

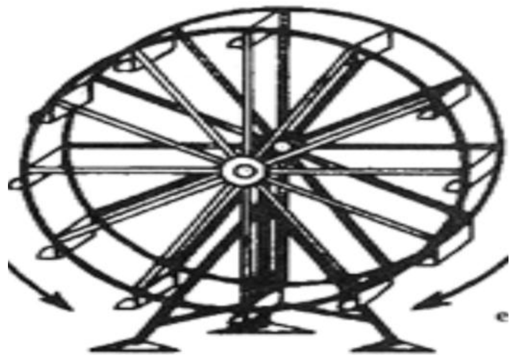
- ¿Cuál crees que correspondería a cada gráfica?
- Explica con tus palabras lo que aprecias y porqué lo relacionas de esa manera
- ¿Alguna de éstas gráficas representa una Función Lineal, por qué?

Actividad 5: La Ruleta Panorámica

Objetivo: Fortalecer los elementos conceptuales de la función lineal a través de escenarios simulados en contextos cotidianos y a partir de ellos potencializar las interpretaciones aritméticas, geométricas y estructurales de la Función Lineal.

Descripción:

El director de mantenimiento de un parque de atracciones mecánicas al supervisar el funcionamiento de la ruleta panorámica que mantiene el ritmo todo el tiempo, verificó la velocidad de la misma varias veces; él tomó datos del tiempo que tarda en dar un número de vueltas o giros en cada una de esas ocasiones. Al tratar de organizar la información en una tabla se percató que muchos de los datos estaban incompletos pues registró en unos casos el tiempo pero olvidó el número de giros o viceversa.



Tiempo en Minutos			12		20				36				52				
Número de giros			3				7							14			…20

Figura 3: Adaptación de Roldan, 2013.

1. Completa la tabla anterior y responde las siguientes preguntas? Explica el procedimiento utilizado en cada caso:

A. ¿En 32 minutos cuantos giros da la ruleta?

B. Explica el razonamiento que empleaste para determinar el tiempo que dura al dar 20 giros.

2. ¿Será posible encontrar una fórmula o ecuación que relacione el tiempo con los giros?, es decir, que permita calcular el número de giros para cualquier tiempo empleado. Si tu respuesta es afirmativa encuéntrala.

3. Represente la información de la tabla en un plano cartesiano, genera la gráfica y describe las propiedades que se cumplen en la misma.

A. ¿Qué disposición tienen los puntos obtenidos? ¿Se podrían determinar más puntos? ¿Cuántos?

B. ¿Qué información brinda cada uno de esos puntos?

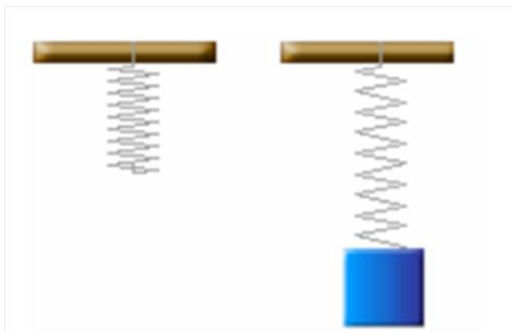
C. ¿Cuántos giros exactamente da la rueda en 22 minutos? ¿Coincide esta información con la gráfica?

4. ¿Podrías representar los datos obtenidos en Cabri como un lugar geométrico? ¿Cómo lo harías?

Actividad 6: "Los Resortes"

Objetivo: Analizar el comportamiento de una variable en función de otra, a través de situaciones reales.

Descripción: De un resorte se cuelgan diferentes objetos y se registran sus pesos en una tabla con el alargamiento que produce cada peso los cuales son directamente proporcionales. Se solicita a los estudiantes representar la información de diferentes formas (tablas, gráficas, expresión analítica) propiciando un primer acercamiento a la construcción del concepto de función y función lineal.



Peso (gramos)	Alargamiento (cm.)
10	2
15	
	4
	5
30	

Figura 4: Representación de la situación sobre los resortes (Guzmán, 2006, p. 67).

Con base en la figura 4 responde:

A. Completa la tabla y halla otras parejas que relaciones las variables peso Vs alargamiento.
B. Encuentra la constante de proporcionalidad (pendiente de la recta).
C. Graficar en el plano cartesiano los datos obtenidos
D. Utilizando el *software* Cabri, hallar la representación gráfica como un lugar geométrico y halla la expresión analítica.

Recursos:

- Video Beam.
- Computadores con conexión a internet.
- Plataforma Educativa Thatquiz.
- *Software* Cabri.
- Aula de clase.
- Aula de sistemas.
- Fotocopias

Referencias

Cifuentes, W. (2011). *Propuesta y enseñanza para el aula: ecuaciones y modelos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.

Guzmán, R. (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Henao y Mena, (2018). Cuestionario en www.thatquiz.org código U7HQN857

Ministerios de Educación Nacional. *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).* Recuperado el 29 de octubre de 2016 de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86404.

Ministerios de Educación Nacional. *Estándares Curriculares de Matemáticas*. Recuperado el 29 de octubre de 2016 dehttp://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf.

Parraguez, G. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas -PUCV. Chile.

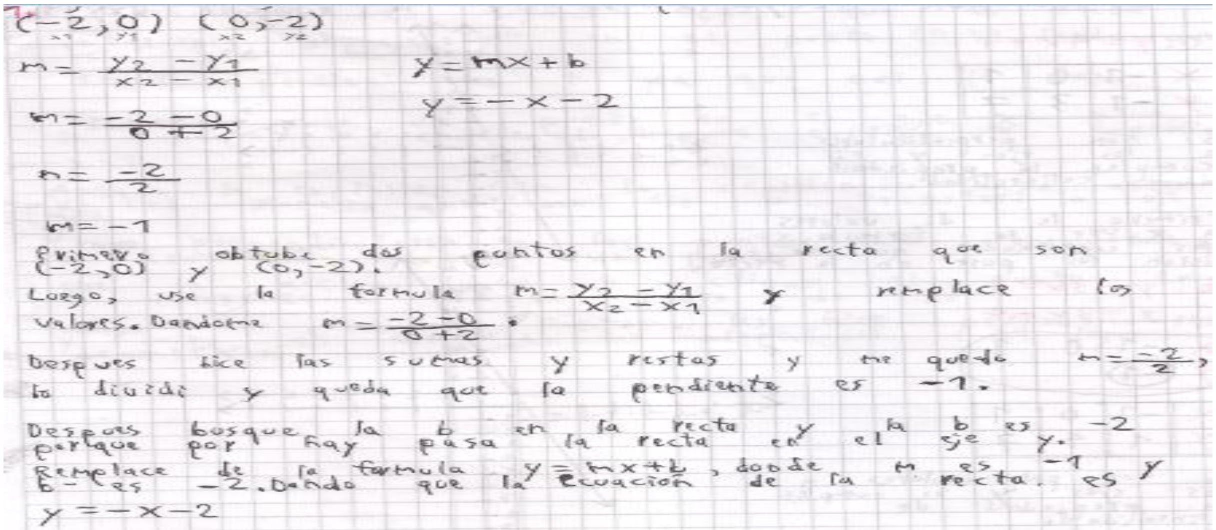
Posada B., y Villa (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín.

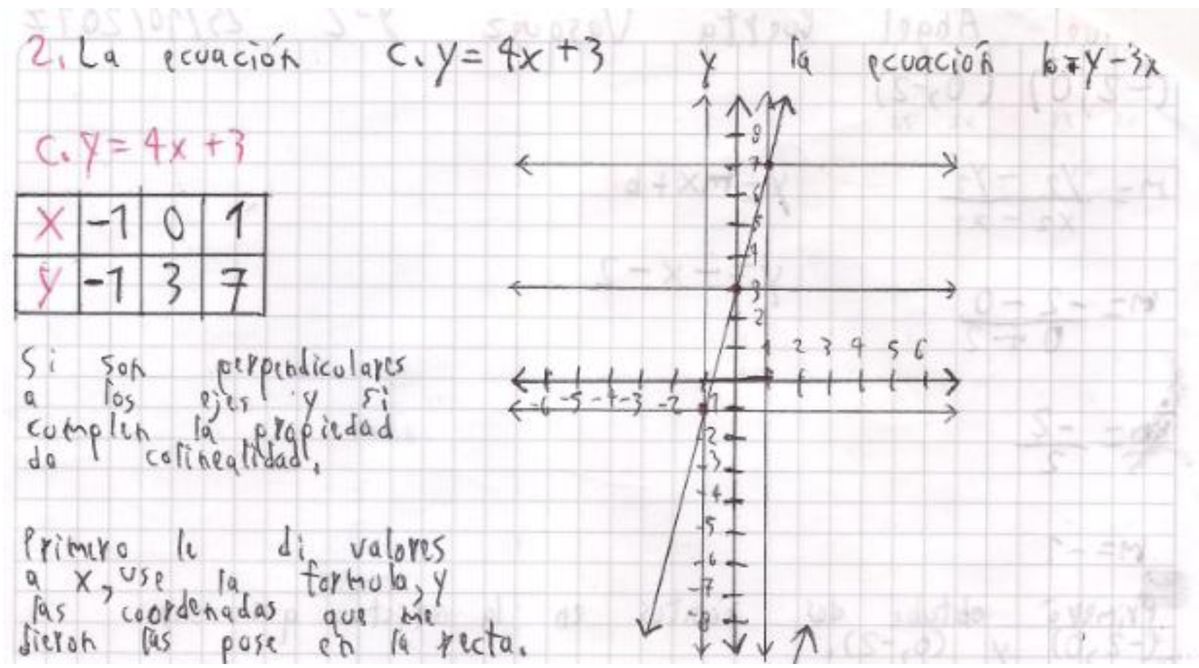
Roldán, C. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá.

Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Student´s thining in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds), The Teaching of Linear Algebra In Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publisher. Netherlands.

ANEXO 7
EVIDENCIAS APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

E1…





3. La ecuación es $y=4x+3$, ya que la recta intercepta al eje "y" en el punto (0,3), dando que este sea b, y la pendiente es 4 ya que nos la dan.

5. Primero puse un punto en el eje x y le saque la coordenada, despues escribi la expresión $y=-x-1$.

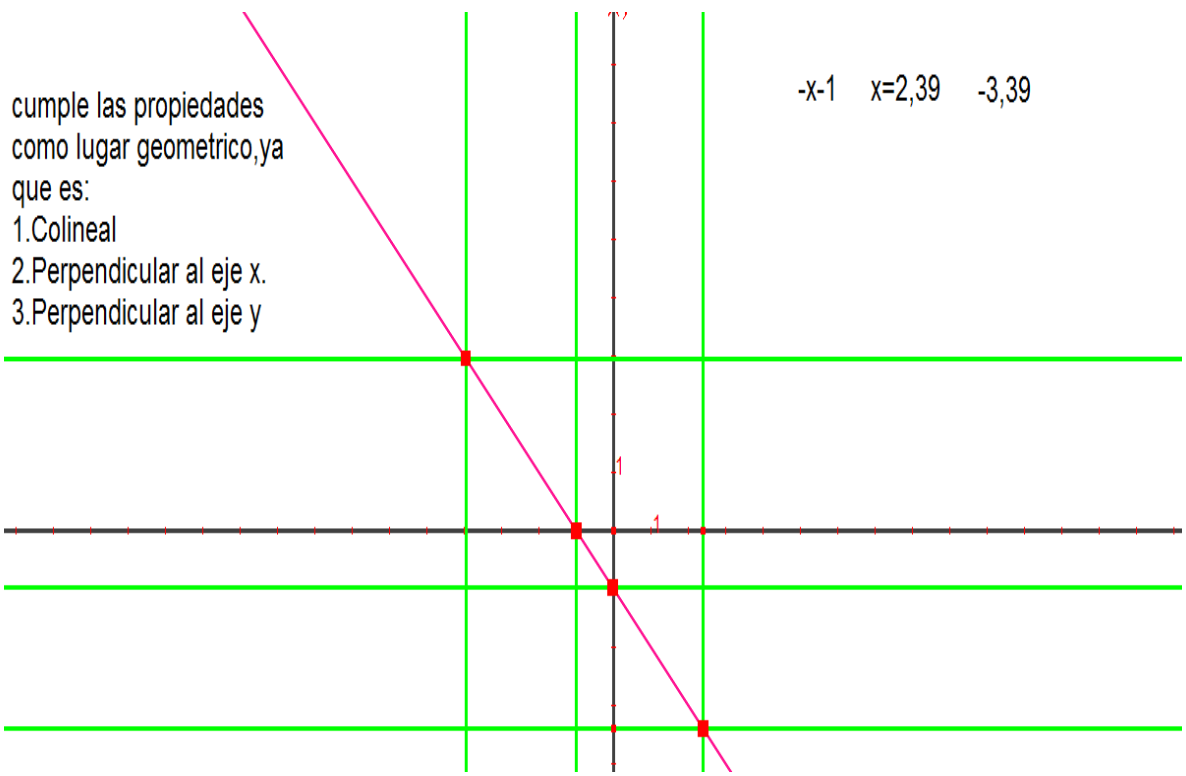
Aplique la expresion en la coordinada dada antes y el numero que me dio lo transferi al eje "y".

trace perpendiculares a los puntos dados y donde se cruzaban coloque un punto.

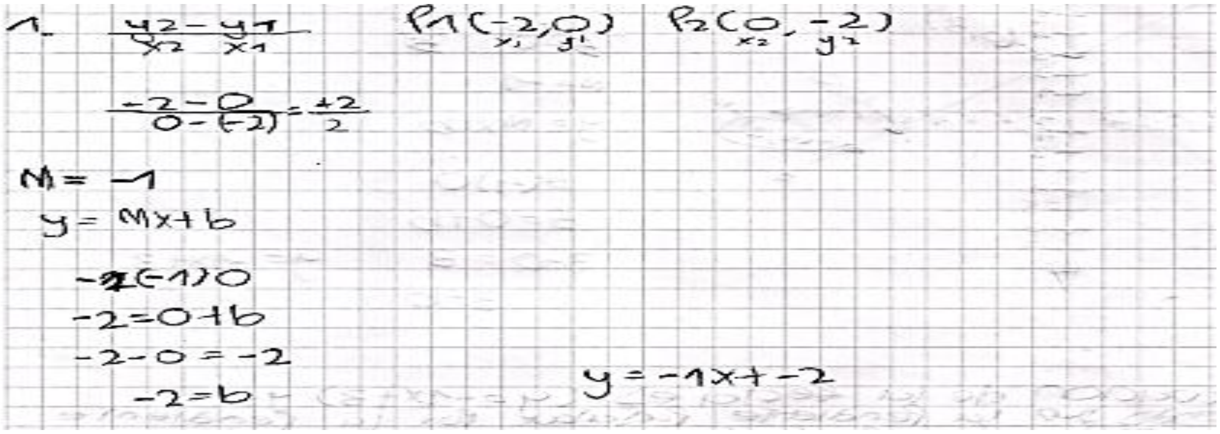
use la acción lugar y clique el punto en la intersección y el punto de x.

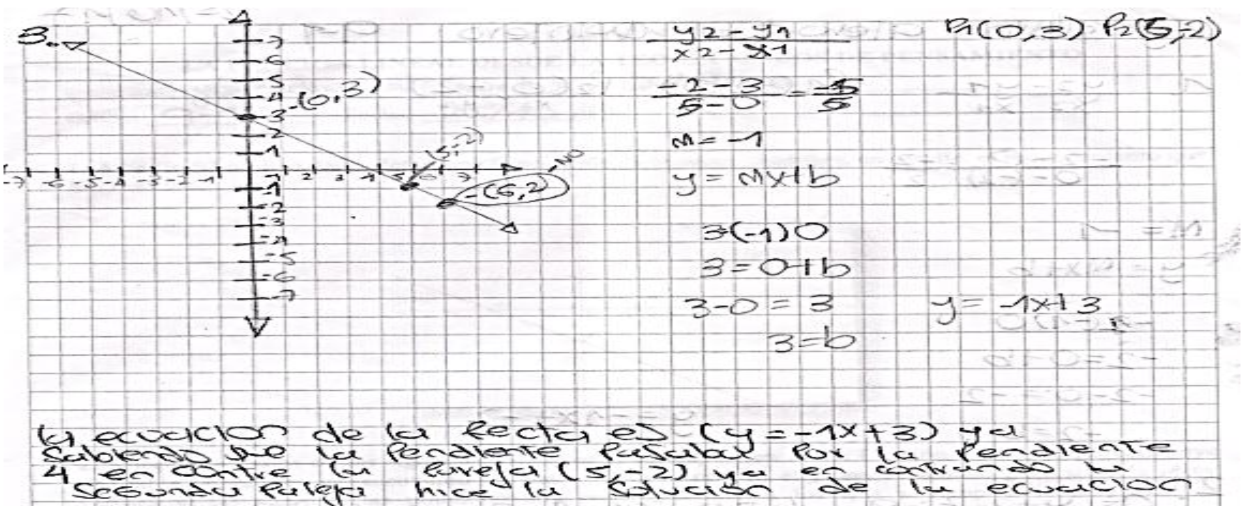
Luego coloque más puntos les hice perpendiculares y mire si cumplian las propiedades del lugar geometrico.

Construcción en Cabri

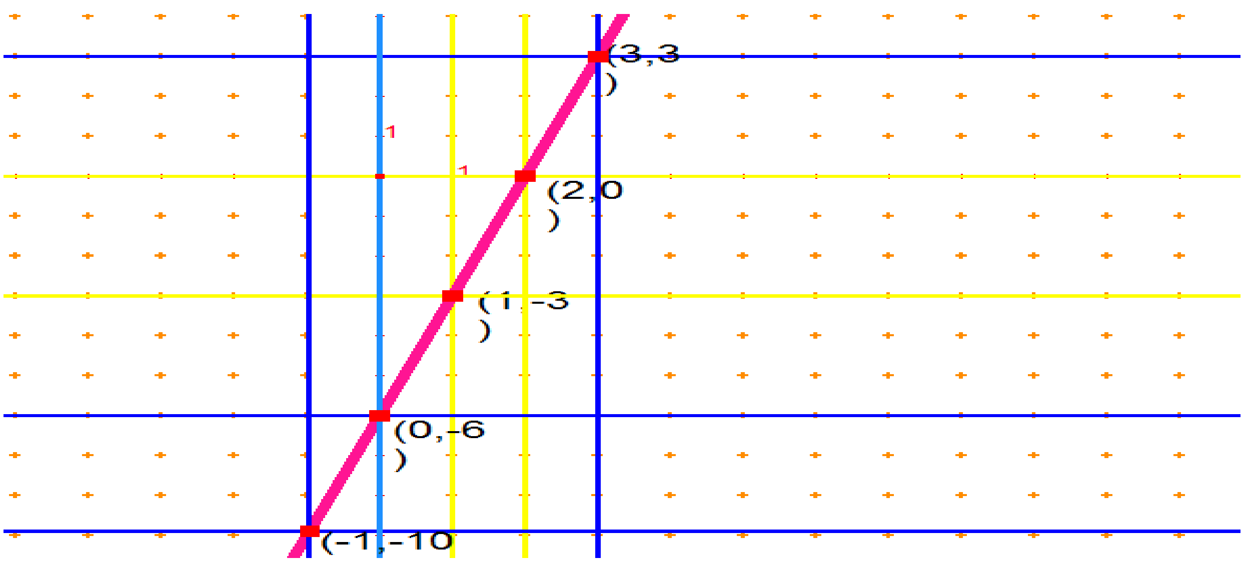


E2…

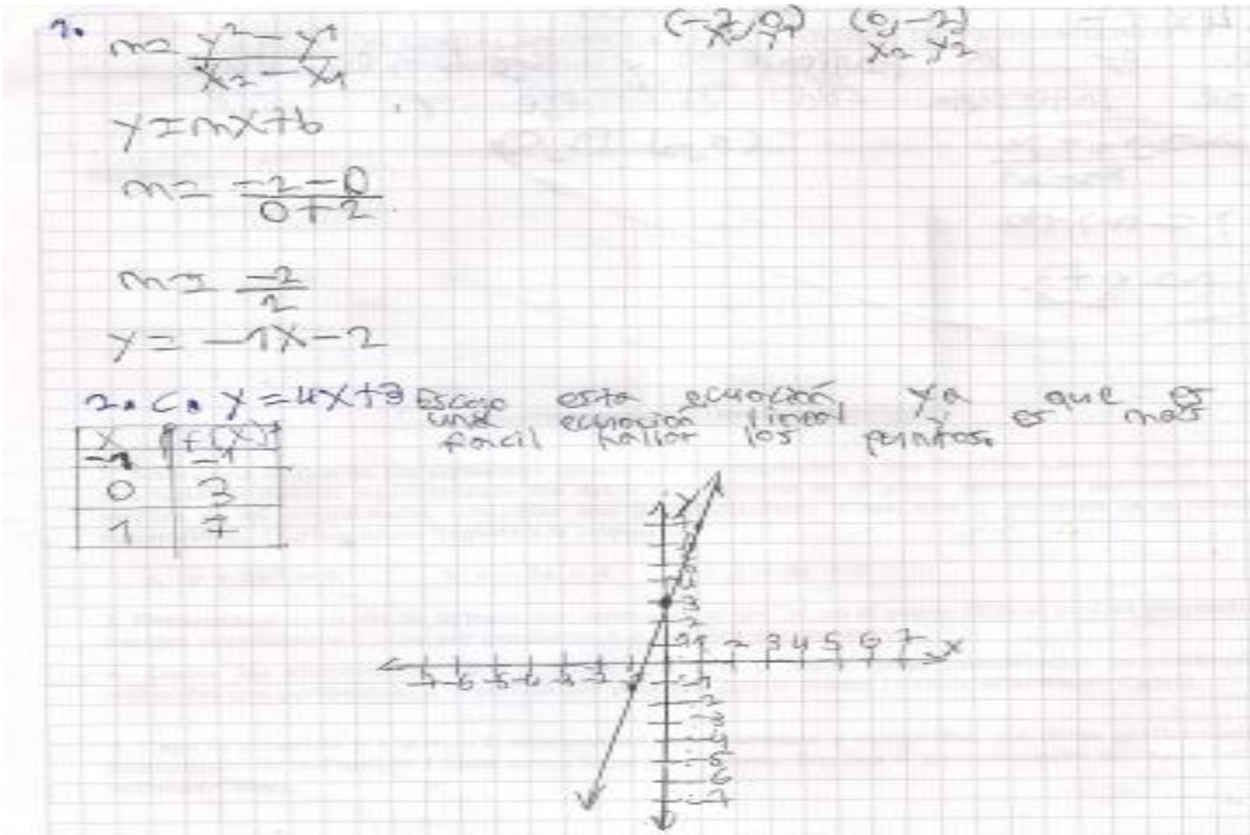




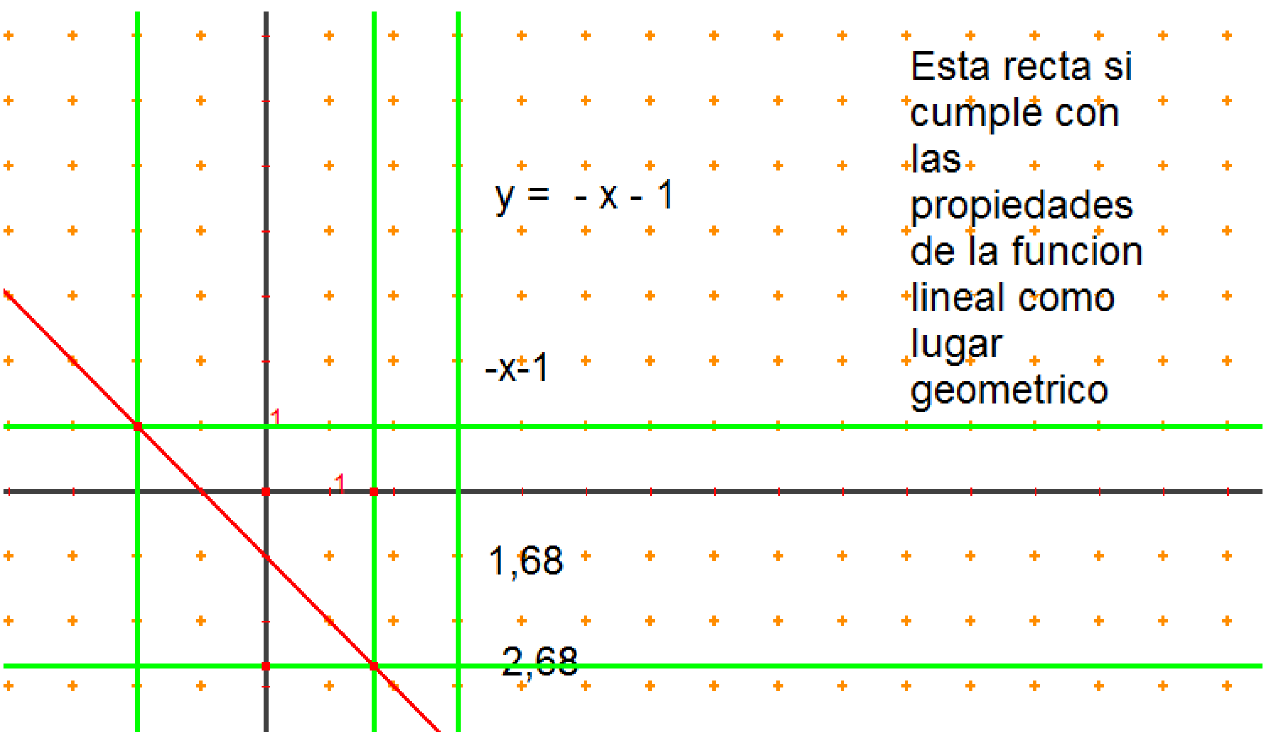
Construcción en Cabri



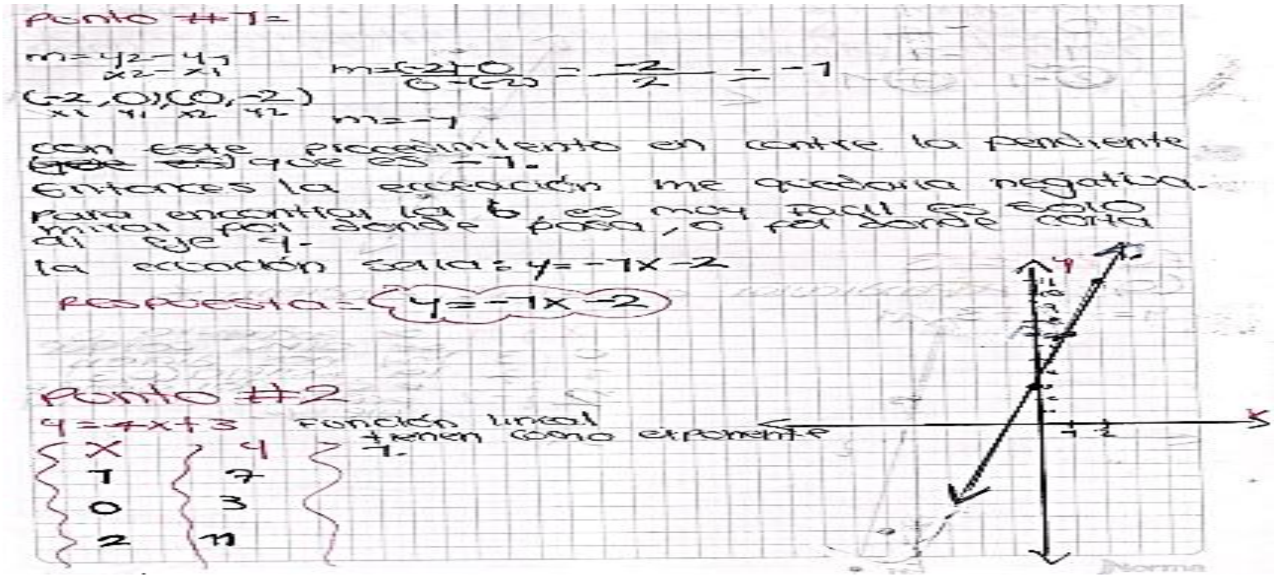
E3…

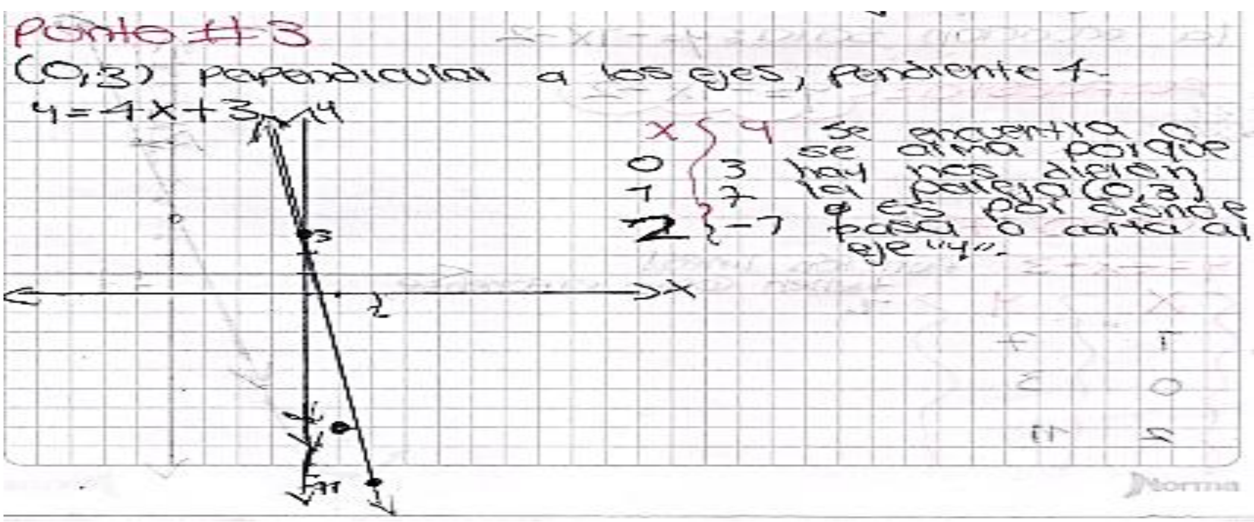


Construcción en Cabri

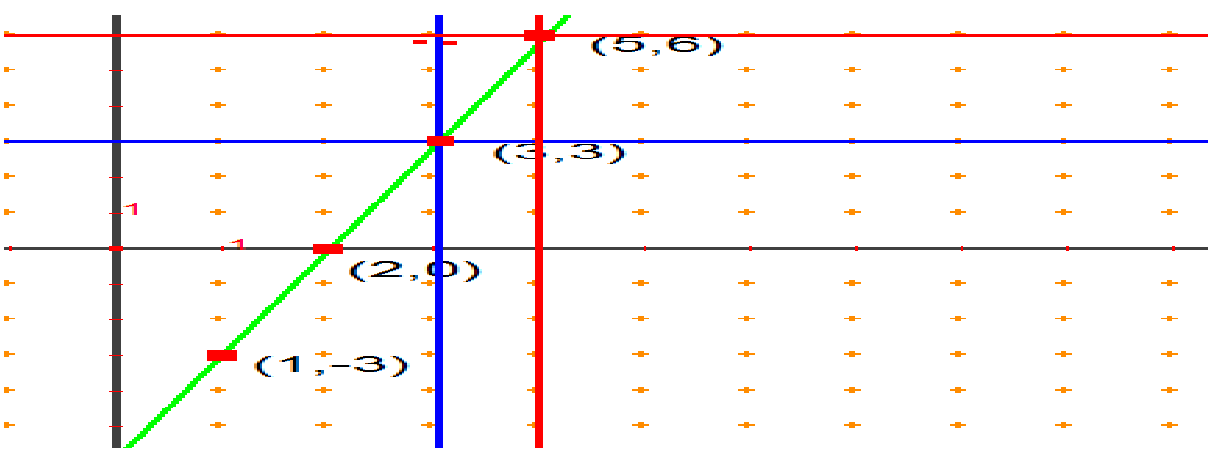


E4…

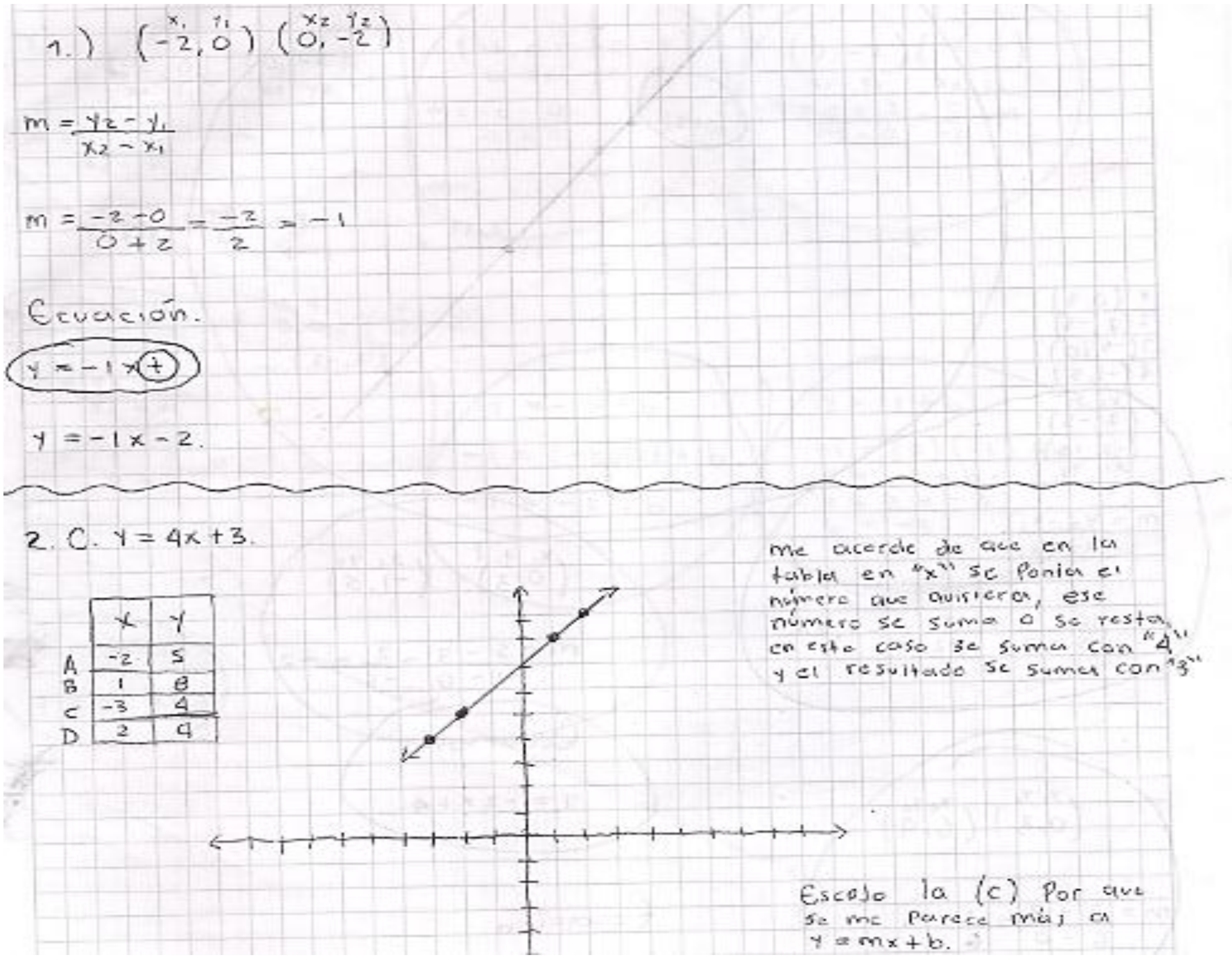




Construcción en Cabri



E5…


1.) $\overset{x_1\ \ y_1}{(-2, 0)}$ $\overset{x_2\ \ y_2}{(0, -2)}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-2 - 0}{0 + 2} = \frac{-2}{2} = -1$

Ecuación.

$y = -1x +$

$y = -1x - 2.$

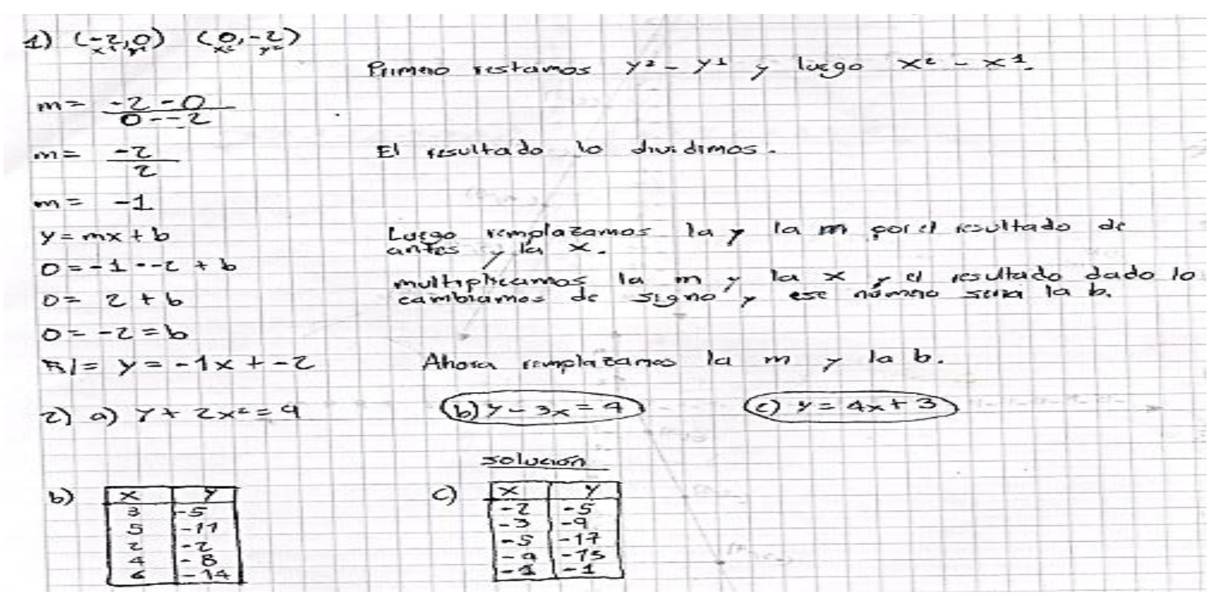
2. C. $Y = 4x + 3.$

	x	y
A	-2	5
B	1	8
C	-3	4
D	2	9

me acorde de que en la tabla en "x" se ponia el número que quisiera, ese número se suma o se resta, en este caso se suma con "4" y el resultado se suma con "3"

Escojo la (c) Por que se me Parece más a $y = mx + b$.

E6…


1) $\underset{x^1\ y^1}{(-2, 0)}$ $\underset{x^2\ y^2}{(0, -2)}$

Primero restamos $y^2 - y^1$ y luego $x^2 - x^1$.

$m = \frac{-2 - 0}{0 - -2}$

$m = \frac{-2}{2}$ El resultado lo dividimos.

$m = -1$

$y = mx + b$ Luego remplazamos la y la m por el resultado de antes y la x.

$0 = -1 \cdot -2 + b$ multiplicamos la m y la x y el resultado dado lo cambiamos de signo y ese número sera la b.

$0 = 2 + b$

$0 = -2 = b$

$R/ = y = -1x + -2$ Ahora remplazamos la m y la b.

2) a) $y + 2x^2 = 9$ b) $y - 3x = 4$ c) $y = 4x + 3$

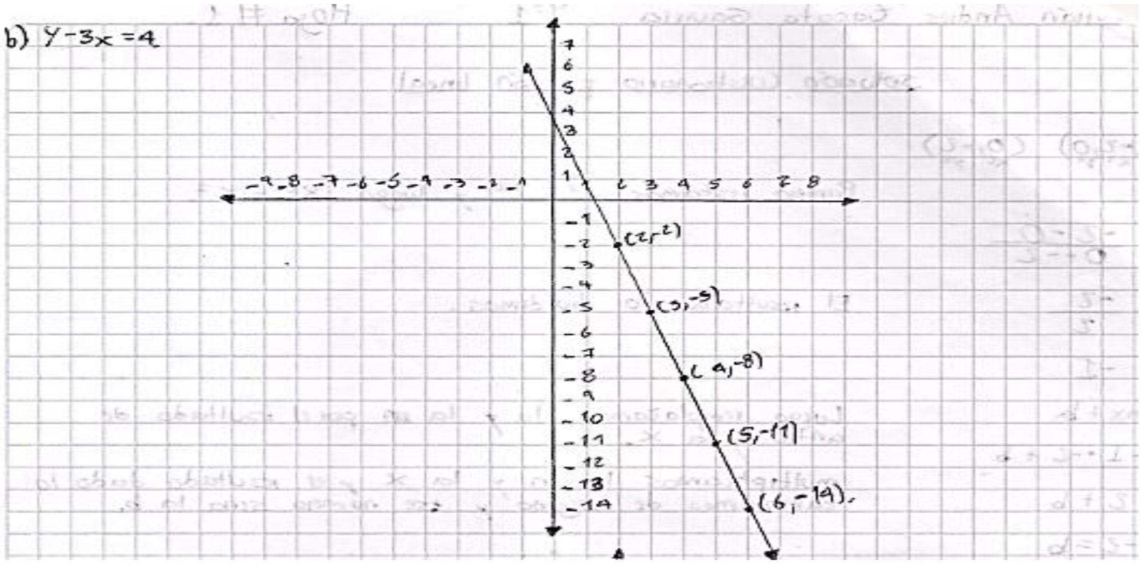
b)

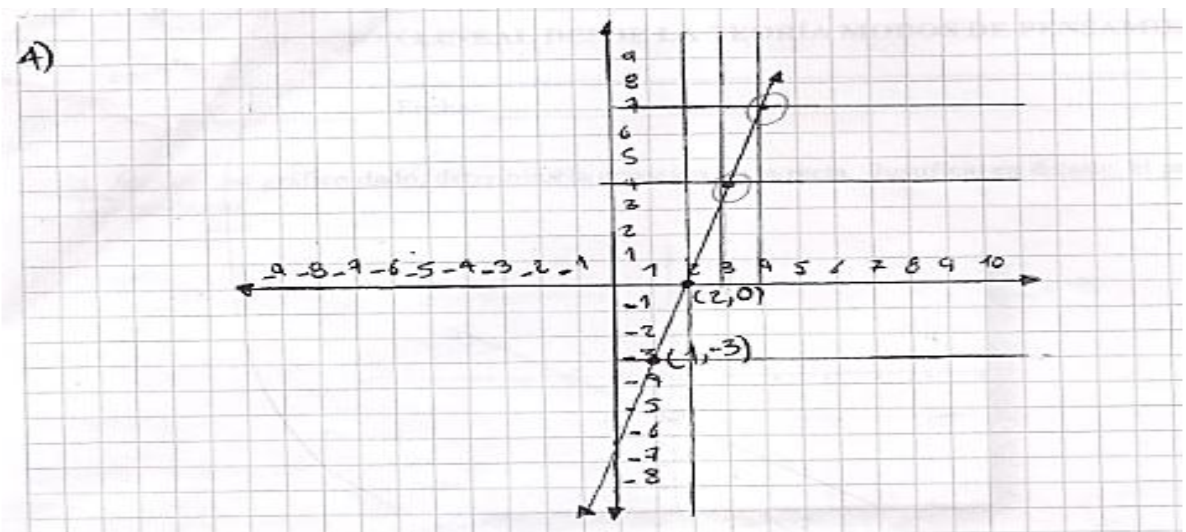
x	y
3	-5
5	-11
2	-2
4	-8
6	-14

solución

c)

x	y
-2	-5
-3	-9
-5	-17
-4	-15
-1	-1





E7…

$(\underset{x^1}{-2}, \underset{y^1}{0})$ $(\underset{x^2}{0}, \underset{y^2}{-2})$

$m = \frac{-2-0}{0-2} = \frac{2}{0} = 0$

$y = mx + b$

$\cdot 0 = (0) \cdot (2)$

$\cdot 0 = 0 + b$

$\cdot 0 - 0 + b$

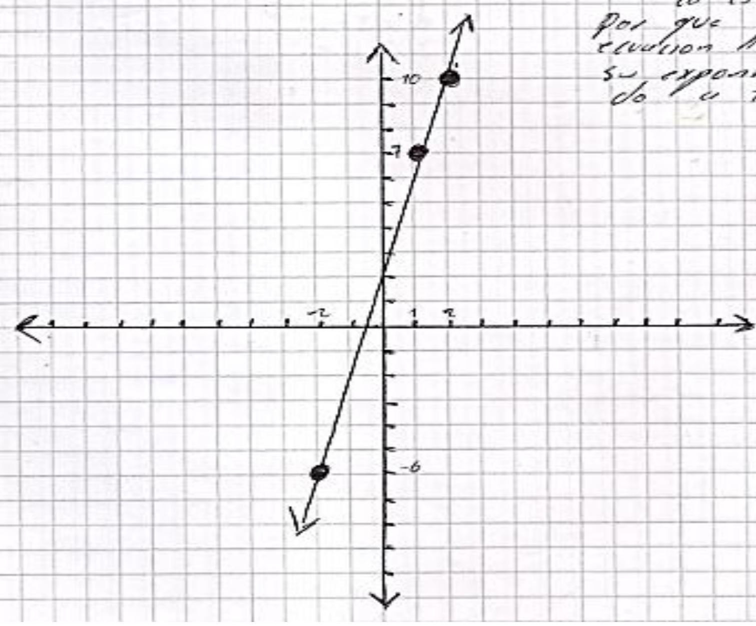
$\cdot \ 0 = b$

$y = 0x + 0$

B) $y - 3x = 4$

$y = 4 + 3$

x	y
2	10
-2	-6
1	7



la escojo por que toda ecuacion lineal tiene su exponente elevado a 1

Correccion punto 1:

Procedimiento: Hice el proceso $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y con el resultado dado reemplace en la formula ($y = mx + b$), de ahi hice dicha simplificacion para obtener el resultado final

$(-2, 0)$ $(0, -2)$
x^1 y^1 x^2 y^2

$m = \frac{-2-0}{0+2} = \frac{2}{2} = 1$

$y = mx + b$

$-1 = (1) \cdot (-2)$

$-1 = -2 + b$

$-1 - 2 + b$

NO

SI

$0 = (1)(-2) + b$

$0 = -2 + b$

$0 - 2 + b$

$-2 = b$

$y = x - 2$

3

$y = 4x + 3$

E8…

1) (0,-2) (-2,0)

$$\frac{-2-0}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$y = 1x + b$

$$y = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{0}{-2} = 0$$

$y = 1x + -2$

se pone en la formula las numeros dados de acuerdo a la formula, se hace la operación y el resultado se divide.

se pone el -2 de acuerdo a las parejas y se divide con el resultado y así es la ecuación.

2) c) $= y = 4x + 3$

0,3 1,7 2,-11

B) $y - 3x = 4$

a) $y + 2x^2 = 4$

x	y
3	6
2	6
3	5

para poder llegar mire en el plano que podia coger de parejas, luego las obligue y todas me dieron perpendiculares a los ejes.

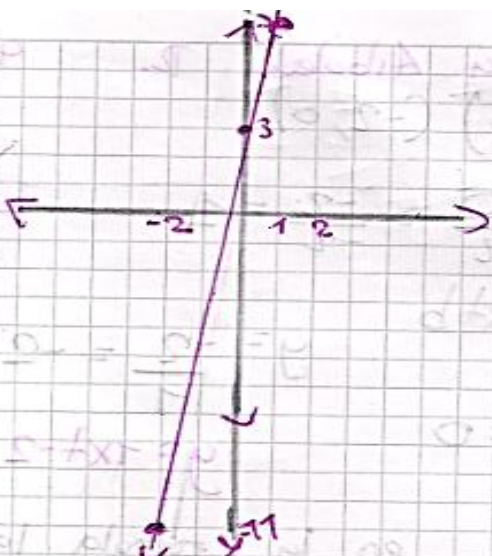
(3)

escogí estas ecuaciones por que son las que me parecen a mi una función lineal y si se hace el procedimiento con esas ecuaciones.

3) (0,3)

c) $y = 4x + 3$

x	y
0	3
1	7
2	-11

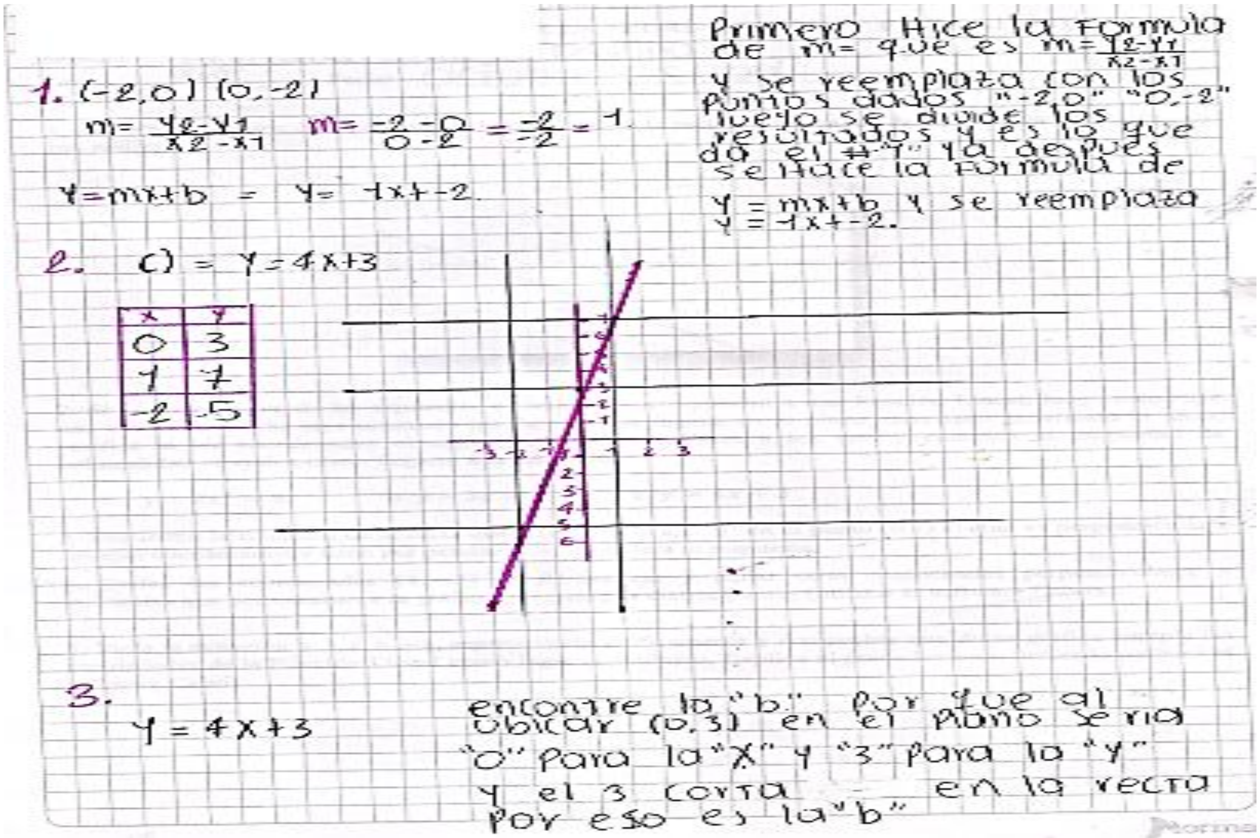


hace la tabla y buscan las parejas ubican en el plano traza la perpendicular y las dan perpendicularmente

y = 0 $y = 4x + 3$

con la pendiente que es 4 se puede halla la ecuación y con solo tener el intercepto en el punto y (0,3)

E9…



1. (-2,0) (0,-2)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{-2-0}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

$Y = mx+b$ = $Y = 1x+-2$

Primero Hice la Formula de m= que es $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ y se reemplaza con los puntos dados "-2,0" "0,-2" luego se divide los resultados y es lo que da el #"1" ya despues se Hace la Formula de $Y = mx+b$ y se reemplaza $Y = 1x+-2$.

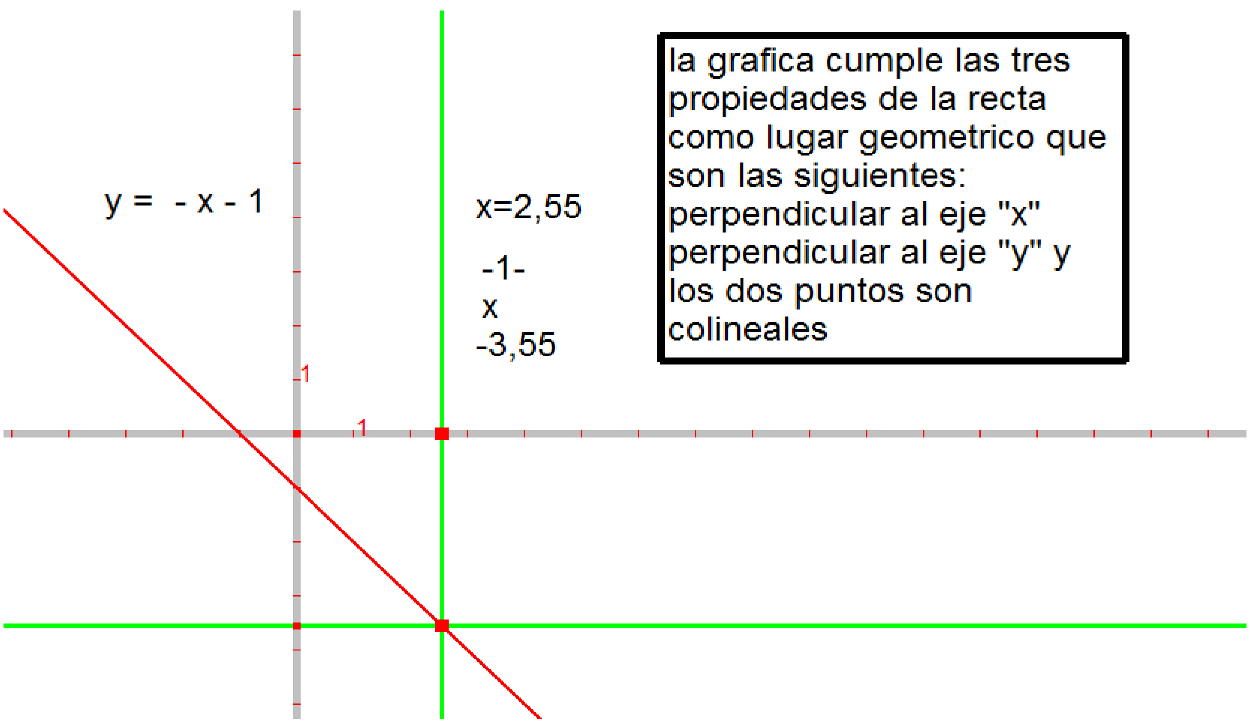
2. c) = $Y = 4x+3$

x	y
0	3
1	7
-2	-5

3. $Y = 4x+3$

encontre la "b" por que al ubicar (0,3) en el plano seria "0" para la "X" y "3" para la "y" y el 3 corta en la recta por eso es la "b"

Construcción en Cabri



E10…

1) $P_1\ (\underset{x_1}{-3}, \underset{y_1}{7})$ $P_2\ (\underset{x_2}{7}, \underset{y_2}{-3})$

$m = \frac{-3-7}{7-(-3)}$

$m = \frac{-3-7}{7+3}$

$m = \frac{-4}{4} = -7$

$y = mx+b$

$7 = (-7)(-3)+b$

$7 = 3+b$

$-3+7 = b$

$-2 = b \quad = y = -7x-2$

Escogi dos coordenadas por los cuales pasaba la recta, luego halle el valor de la "m" con la ecuacion $m = \frac{2y-y1}{2x-7x}$ $m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$, con lo cual me salio el valor de la "m" que es igual a uno. luego escogi una coordenada y reemplace la y, la x y la x en la ecuacion $y = mx+b$, con lo cual me salio el valor de la b que es igual a -2 y forme la ecuacion de la recta que es igual $y =$ $y = -7x-2$

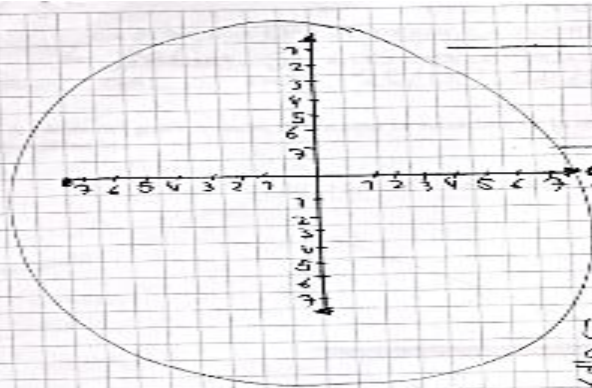
2) $y - 3x = 4$ $\begin{cases} y-3x=4 \\ y-4x=3 \end{cases}$

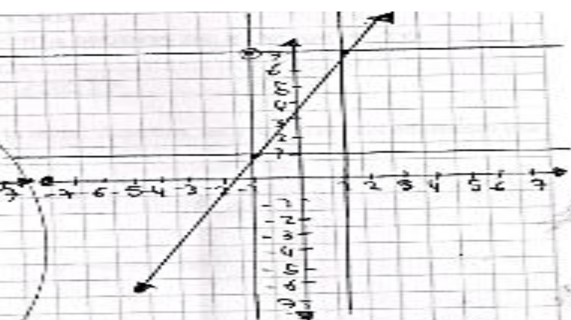
$y - 4x + 3$

b = $y = 4+3x$

x	y	x	y
7	7	7	7
-7	-7	-7	7

(la a no es colineal
la b y la c son colineales)





• Son perpendiculares puesto a que al juntarse las lineas forman un angulo de 90°

Le di un valor a la "x" y la reemplaze en la ecuacion $y = 4+3x$ con la cual me dio la tabla de valores la "y" valor de y me dio dos coordenadas que puse en el plano cartesiano

$P_1 = \underset{x}{0}, \underset{y}{3})$

c) $y = 4x+3$

3) la pendiente es $m = 4$

$y = mx+b$

$3 = (4)(0)+b$

$3 = 0+b$

$3 = b \quad = y = 4x+3$

en la ecuacion me dieron la pendiente, asi que solo tuve que hallar el valor de la b reemplazando la "y" y la x por la coordenada (0,3)

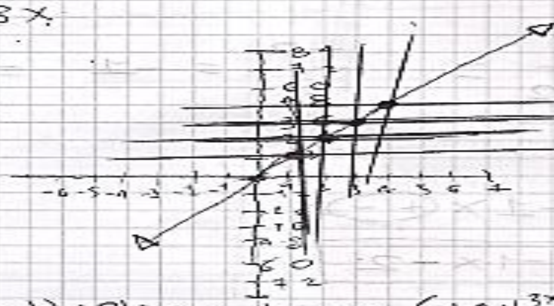
E11…

a. No es lineal, ya que desde (el) inicio vemos un número elevado (a^2) lo cual dice que es cuadrática

b. $Y - 3x = 4$

$= Y = 4 + 3x$

x	Y
1	-12
2	24
3	36
4	48

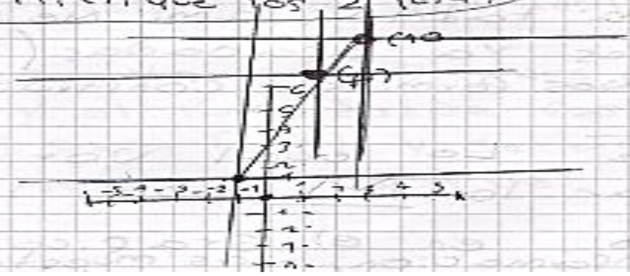


Error = multipliqué los 2 (el 4 y 3x)

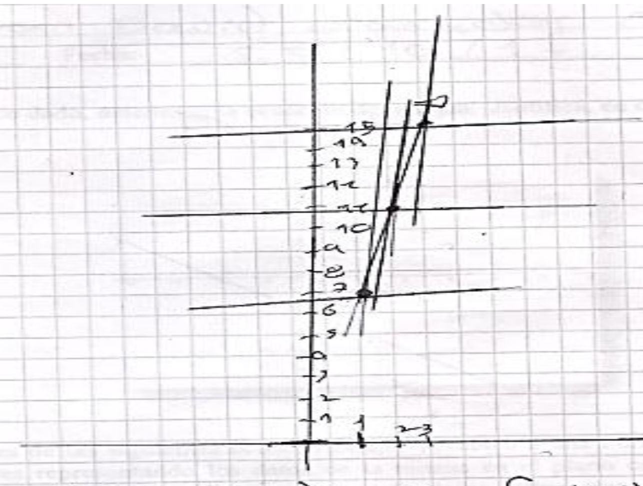
c. ~~Y = 4x + 3~~

$Y = 4 + 3x$

1	7
-1	1
2	10



x	y
1	7
2	11
3	15



Corresponde a f. lineal

3= $Y = 4x + 3$, ya que ya nos dan la pendiente y el punto donde pasa la Y el cual sería (0,3) y en una ecuación sería 3 positivo.

1. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ f(o)

$(-2, 0)$ x_1 y_1

$(0, -2)$ x_2 y_2

$\frac{-2 - 0}{0 - -2} = \frac{-2}{2} = -1 = m = -1$

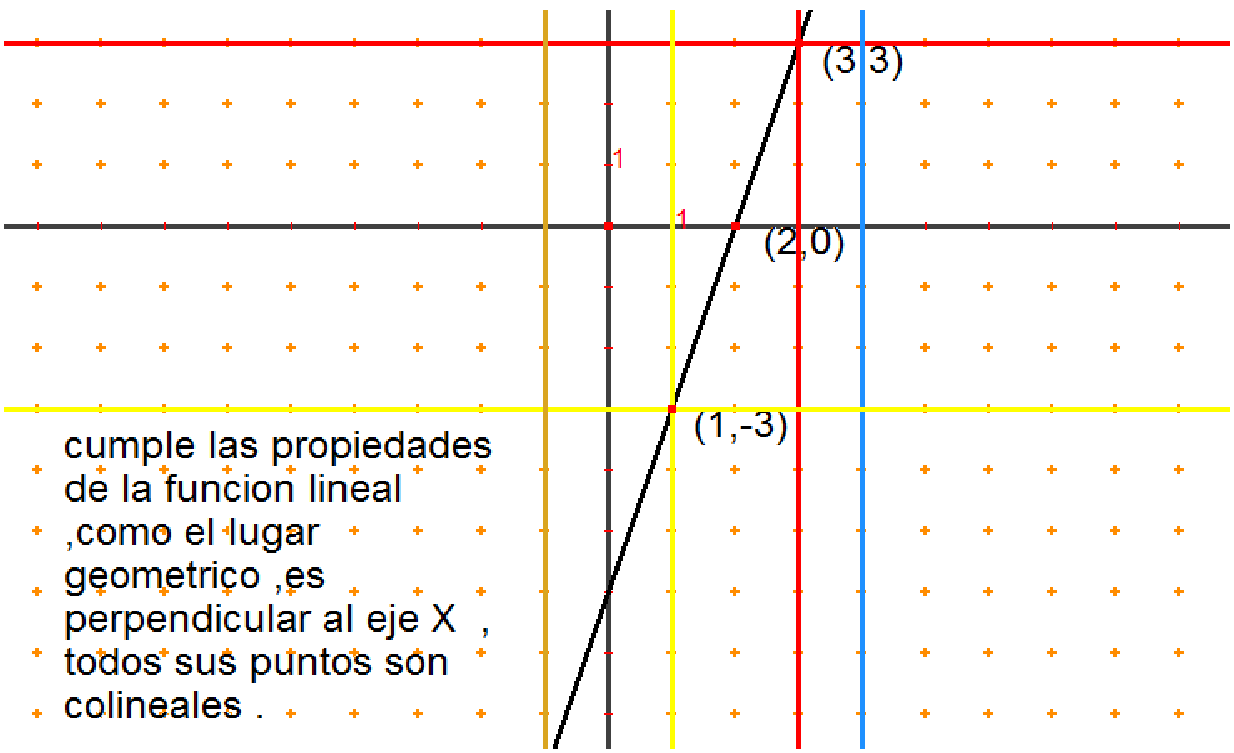
$Y = mx + b$

$Y = m$ $\quad Y = -1x + -2$

R=// $\boxed{Y = -1x - 2}$

Segun la tabla, a mi me muestra 2 pareses ya acordadas ((−2,0),(0,−2)) lo cual nos permite construir la ecuacion $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_2}$ Lo cual nos permite encontrar la M de la ecuacion $Y = mx + b$, en el grafico nos muestra otra información, nos muestra la b la cual es −2, ya que la recta de la grafica pasa por ella, y es el numero es donde toca la Y (eje y)

Construcción en Cabri



E12…

1. $(-2,0)(0,-2)$
$x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2$

Formula: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{-2-0}{0-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

- $y=mx+b$
- $0=(1)(-2)+b$
- $0=-2+b$
- $0-2=b$

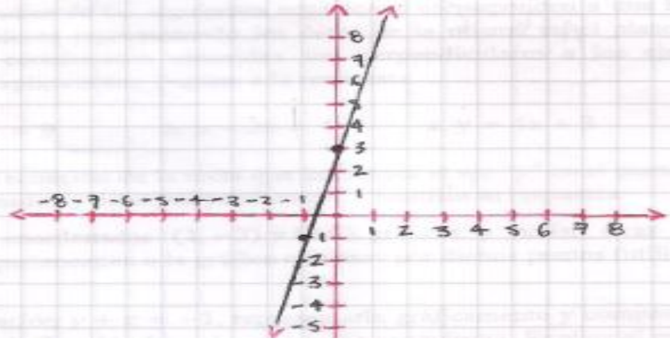
R// $y=x-2$

2. La respuesta es la c: $y=4x+3$ lo escojo ya que respeto el orden de la formula $= y=mx+b$.

X	Y
0	3
1	7
−1	7

−1

$= y=4\cdot 0+3 = y=3$
$= y=4\cdot 1+3 = y=7$
$= y=4\cdot -1+3 = y=7 \; -1$



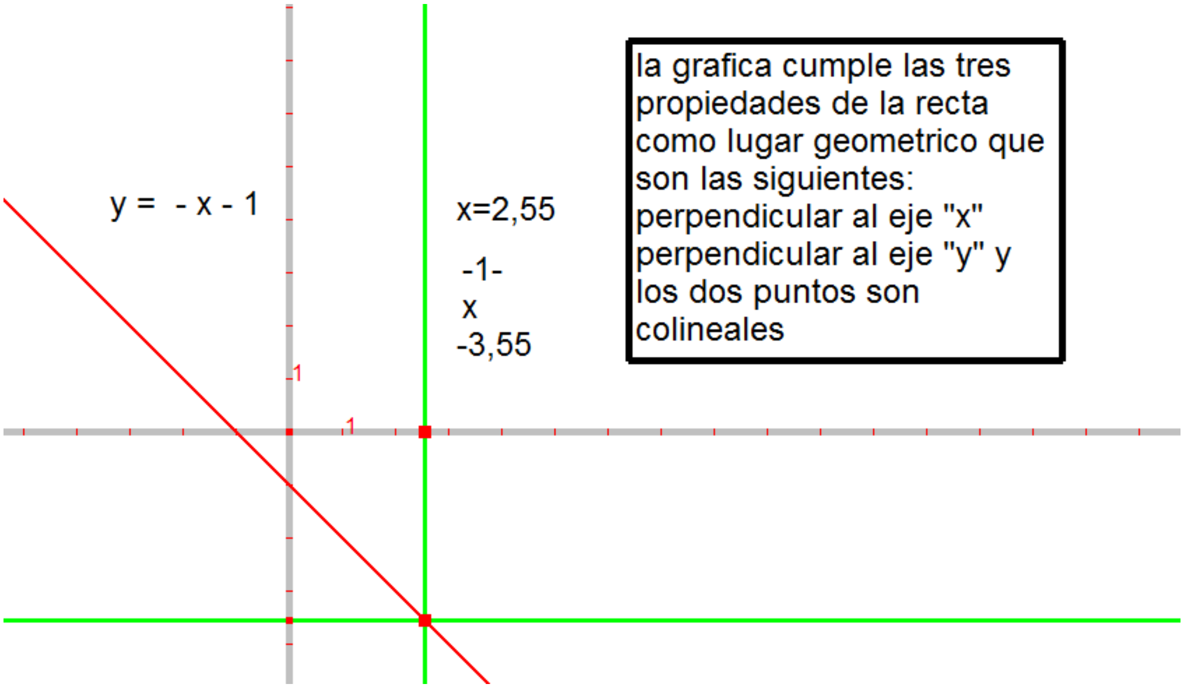
3. $(0,3)$ $m=4$
x_1, y_1

Se reemplazaria en $y=mx+b$ lo cual daria: $y=4x+3$
Ecuacion

4.
1. mostrar ejes
2. Marcar los puntos (los parejas)
3. Hacer la recta
4. Sumarle otros puntos dandole valores a la x y a la y
5. Hacer perpendiculares sobre estos puntos.

5.
1. mostrar ejes
2. Marcar cualquier punto sobre x y darle a la opcion coord. o ecuacion sobre ese punto
3. Aplicar la expresion
4. Darle a la opcion aplicar una expresion sobre los dos textos y el resultado marcarlo
~~5~~. sobre "y" con la opcion transferencia de medidas.
5. Hacer la recta y marcar las perpendiculares. (la recta se hace con la opcion lugar) marcando el punto de interseccion y el punto de la X.

Construcción en Cabri



E13…

(1) $y = mx + b$ $\quad P^1(\underset{x^1}{-2},\underset{y^1}{0})$ $\quad P^2(\underset{x^2}{0},\underset{y^2}{-2})$

$M = \dfrac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$

$M = \dfrac{-2 - 0}{0 + 2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$y = -1x - 2$

$y = -x - 2$

(2)

(3) Intercepta en el eje "y" en el punto (0,3) y su pendiente es 4

$y = mx + b$

$y \quad 4x + 3$

④ ⑥ $(1,-3)$ y $(2,0)$ $\quad x^1\ y^1 \quad x^2\ y^2$

Pendiente = -6

$m = \frac{y2 - y1}{x2 - 1}$ $\quad m = \frac{0+3}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

$y = mx + b$

$y = 3x - 6$

⑤ Solo copiamos la ecuacion en cabri y ponemos el punto en "x" utilizamos la opcion coord o ecuacion y aplicamos la ecuacion y traperimos el valor que nos da para "y"

② b $y - 3x = 4$

$y = 4 + 3x$

x	y
1	7
0	4
-2	-2

$y = 4 + 3(1)$

$y = 4 + 3$

$y = 7$

—— // ——

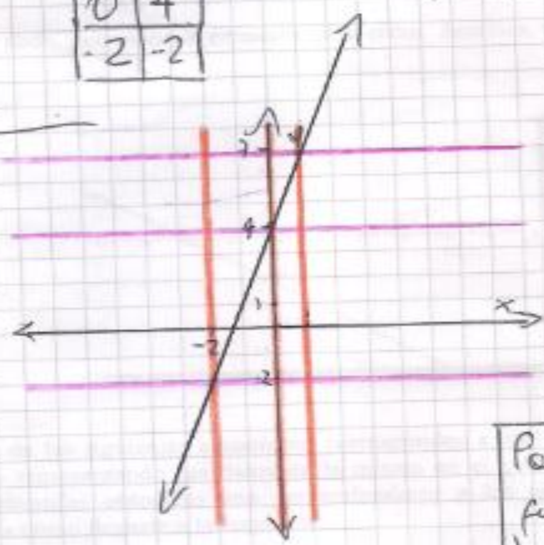
$y = 4 + 3(0)$

$y = 4$

$y = 4 + 3(-2)$

$y = 4 - 6$

$y = -2$



c) $y = 4x + 3$

$y = 4(1) + 3$

$y = 4 + 3$

$y = 7$

—— // ——

$y = 4(0) + 3$

$y = 0 + 3$

x	y
1	7
0	3
-1	-1

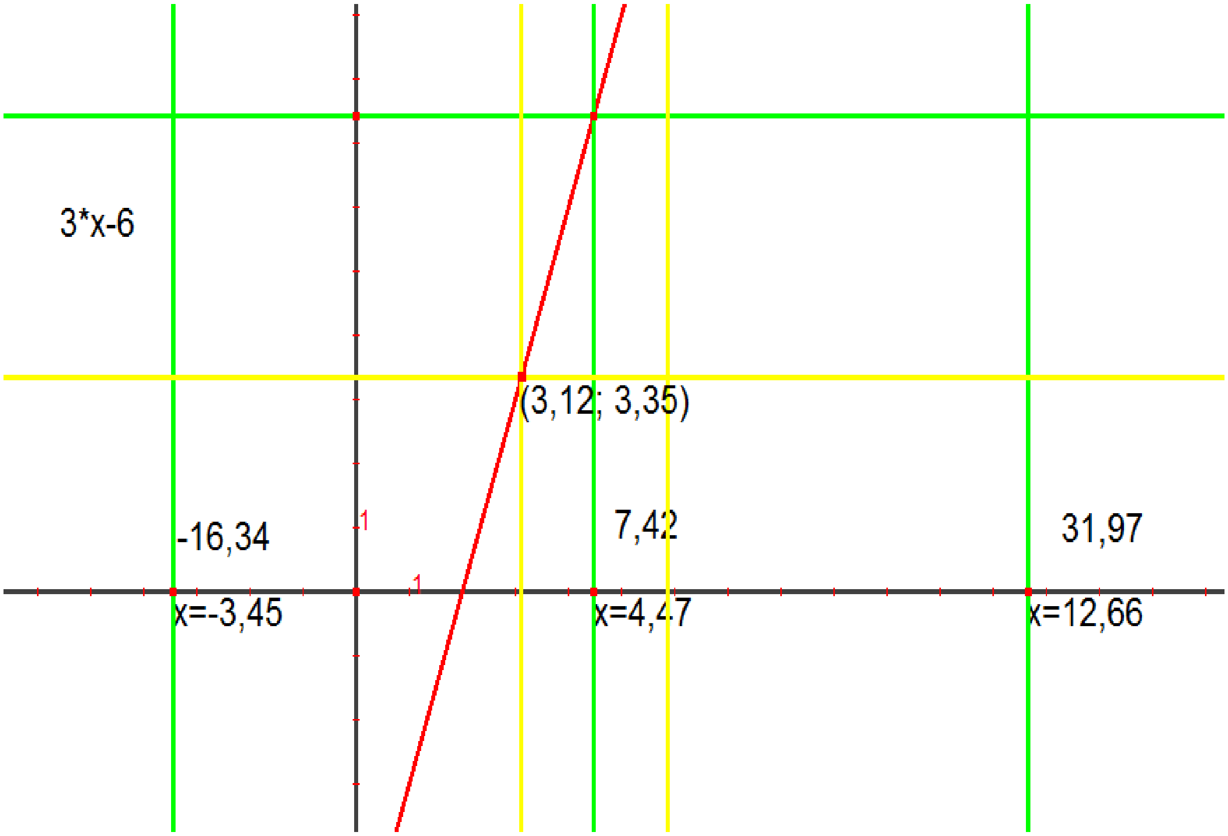
$y = 4(-1) + 3$

$y = -4 + 3$

$y = -1$

Por que en una funcion lineal la variable debe tener exponente 1

Construcción en Cabri



E14…

① $(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{-2}), (\overset{x_2}{0},\overset{y_2}{-2})$ $m = \frac{-2-2}{0-0} = \frac{-2}{-2} = 1 = y+x=1$

$-2 = m = 0+1$ $\quad -2 = 1 0+0$

② a) ~~$y+2x^2=9$~~ b) $y-3x=4$ c) $y=4x+3$

x	y

R/ Escogí las ecuaciones B y C porque la A está elevada a la x^2 y todavía no cuenta como función lineal

③ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\quad y = mx+b$

$y = 4x+3$

E15…

Solución

① $(0,-2)$ y $(-2,0)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$y=mx+b$

$m \rightarrow (\underset{x_2}{0}, \underset{y_2}{-2})$ y $(\underset{x_1}{-2}, \underset{y_1}{0})$

$m=\frac{-2-0}{0-(-2)}=\frac{-2}{-2}$

$m=1$

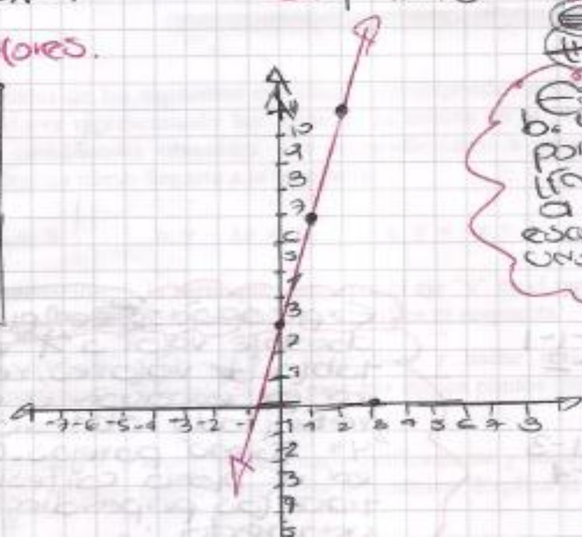
$y=mx+b$
$-2=(1)(0)+b$
$-2=0+b$
$0+2=b$
$2=b$

$y=1x+2$

② b. $y-3x=4$ C. $y=4x+3$

Tabla de valores.

x	y
0	3
1	7
2	11



Explicación:

~~Escogí la ecuación~~

Explicación:

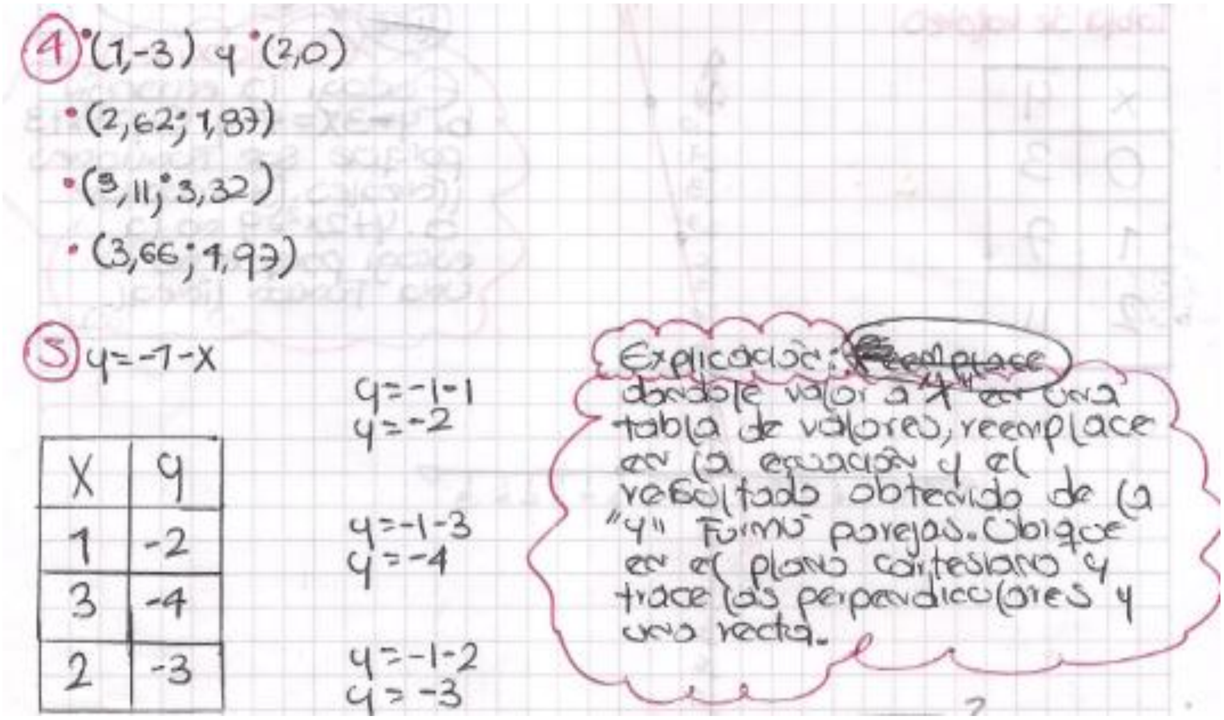
Escogí la ecuación b. $y-3x=4$ y C. $y=4x+3$ porque son funciones lineales. La ecuación a. $y+2x^2=9$ no la escogí porque no es una función lineal.

③ $m=4$
$b=(3)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

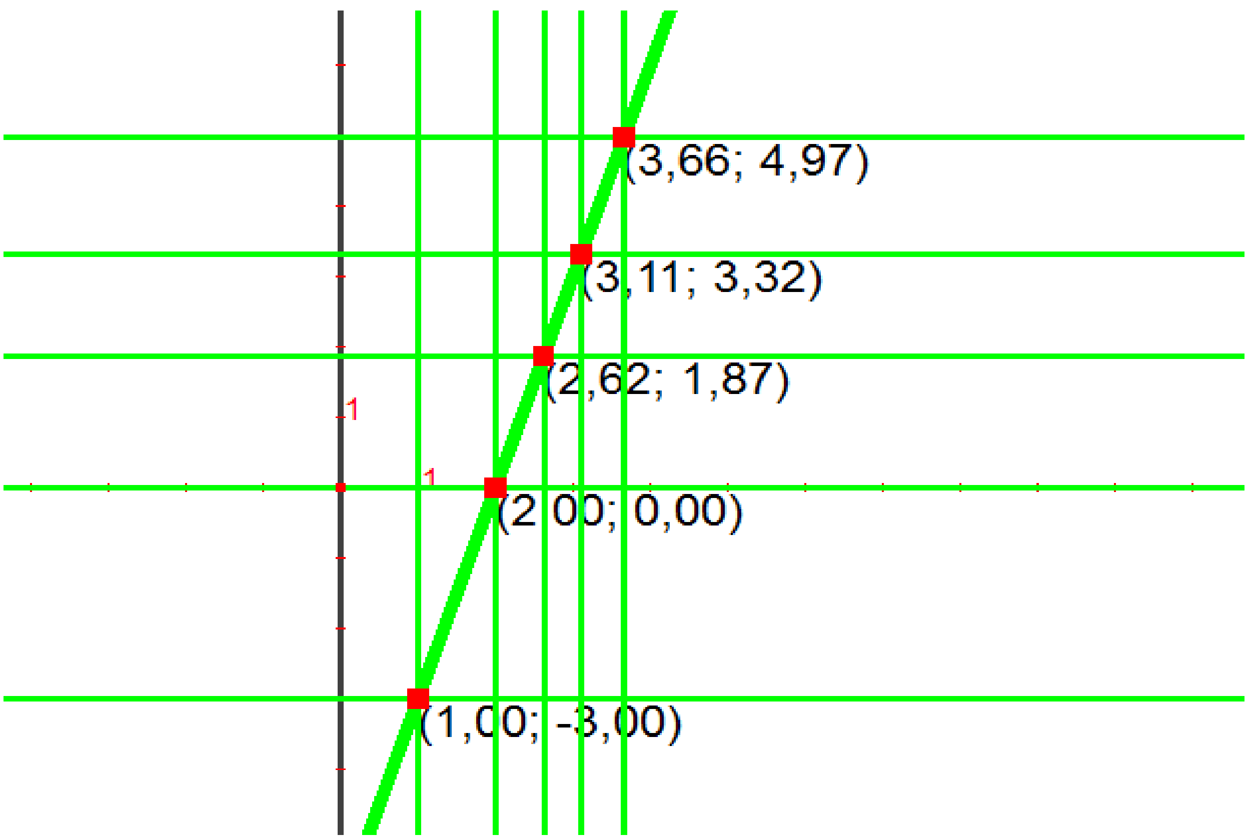
$y=mx+b$

$y=4x+3$ — Ecuación



X	y
1	-2
3	-4
2	-3

Construcción en Cabri



E16…

1. Para hallar la ecuación de la recta se usan las fórmulas

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siendo 'm' la pendiente, y los demas los valores que se asignan a las coordenadas

$y - y_1 = m(x - x_1)$, obteniendo luego como resultado '$y = mx + b$'

$A = (-2, 0)$ $B = (0, -2)$

x_1, y_1 x_2, y_2

Para hallar la pendiente

$m = \frac{-2-0}{0-(-2)} = \frac{-\cancel{2}}{-\cancel{2}} = \boxed{1}$

$y - 0 = 1(x - (-2))$

$y - 0 = 1x + 2$

$y = -1x + 2 + 0 = \boxed{y = -1x + 2}$

3. $(0, 3)$ $m = 4$

x_1, y_1

Como tengo el valor de la pendiente, procedo a resolver la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 0)$

$y - 3 = 4x - \cancel{0}$ ⇒ como no tiene valor, puedo suprimirlo y continuar

$\boxed{y = 4x + 3}$

4. Coordenadas iniciales → $(1, -3)$ $(2, 0)$ (Archivo = Punto 4, Mariana Alvarez Sanchez)

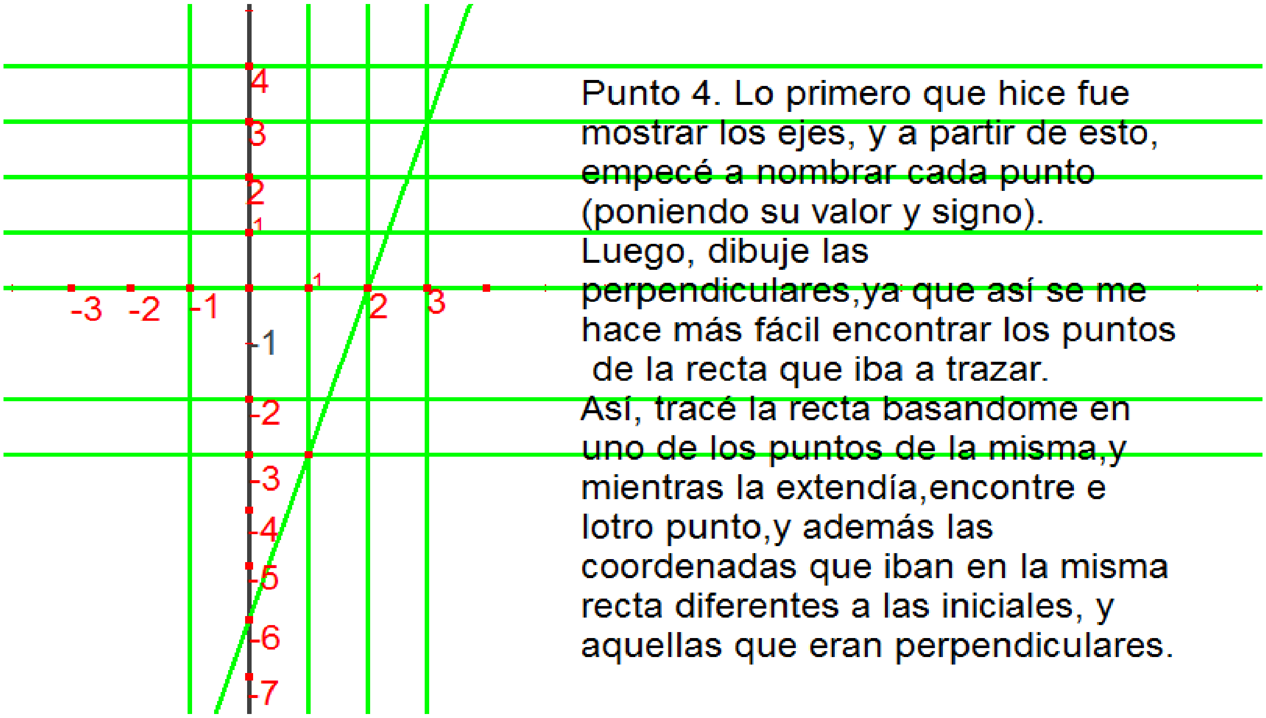
Coordenadas perpendiculares:

$(2, 1)$ $(2, 2)$ $(2, -4)$ … infinitas

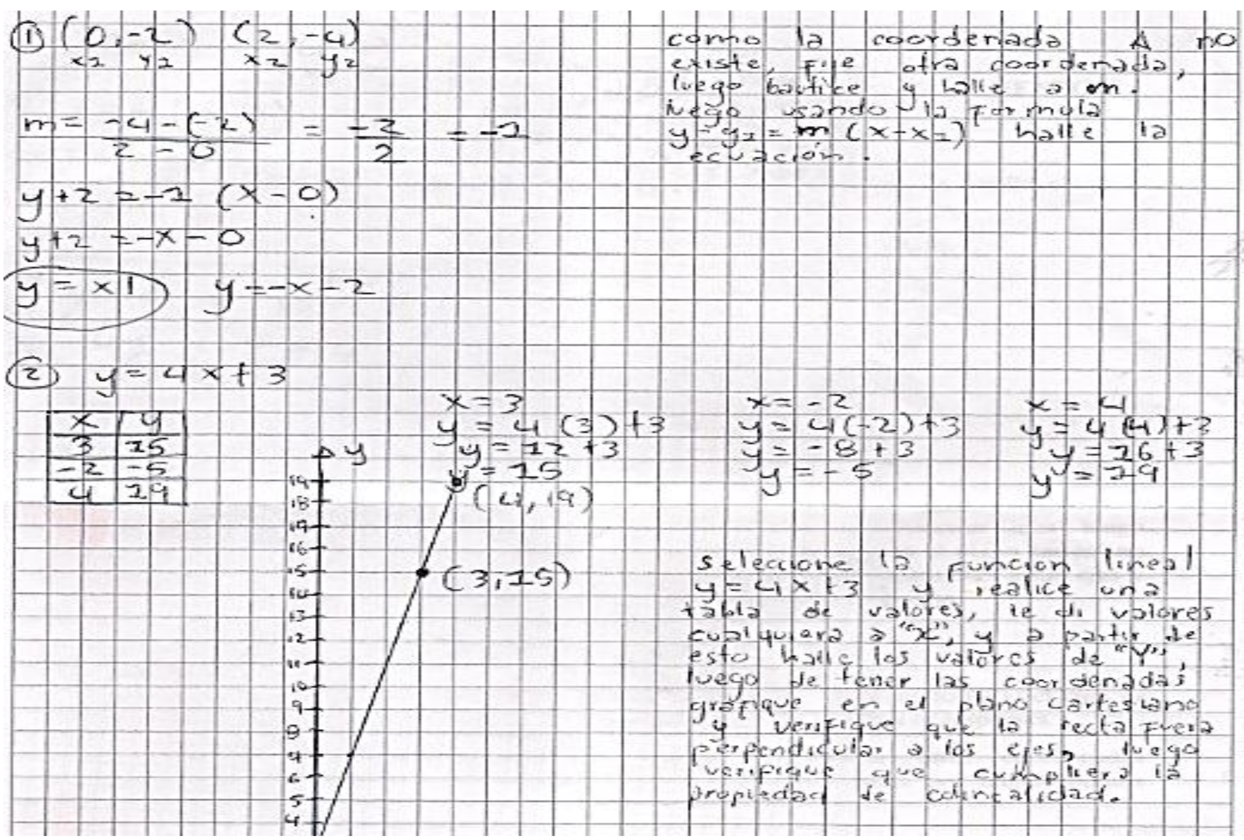
Coordenadas colineales:

$(0, -6)$ $(-1, -9)$ … infinitas, ya que la recta puede extenderse infinitamente

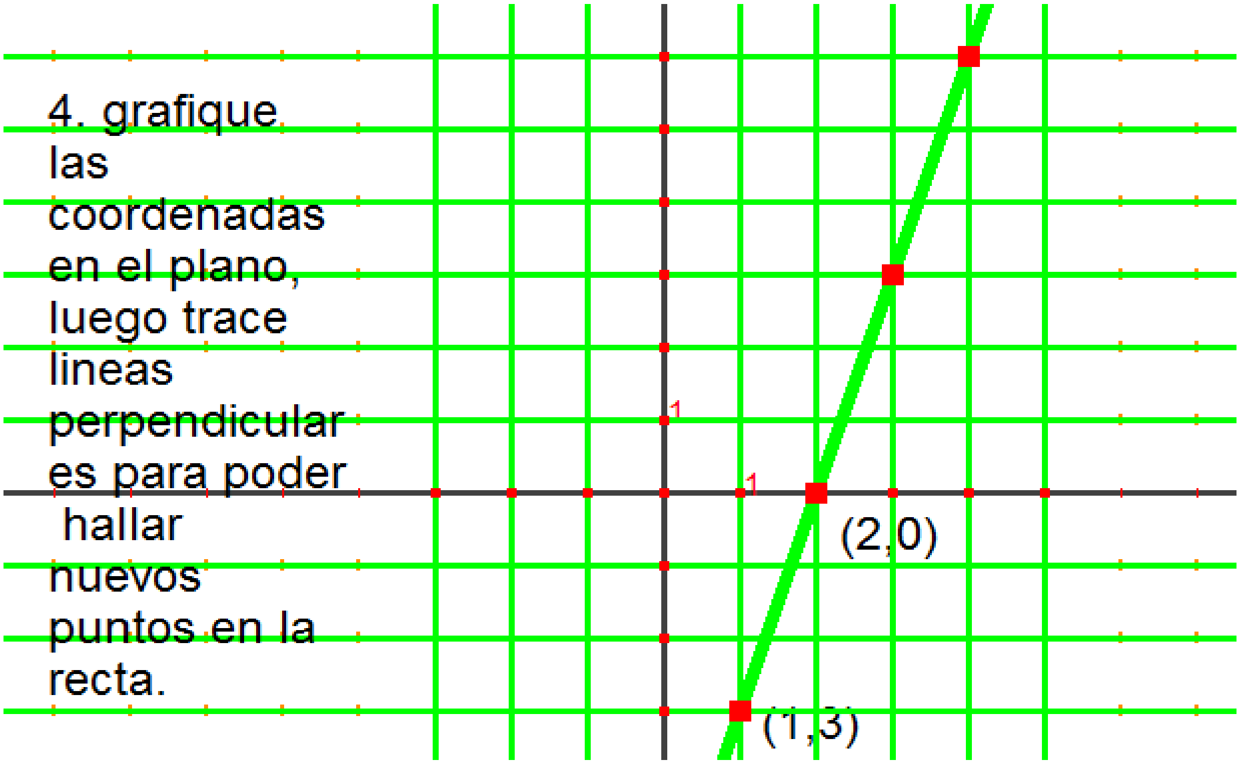
Construcción en Cabri



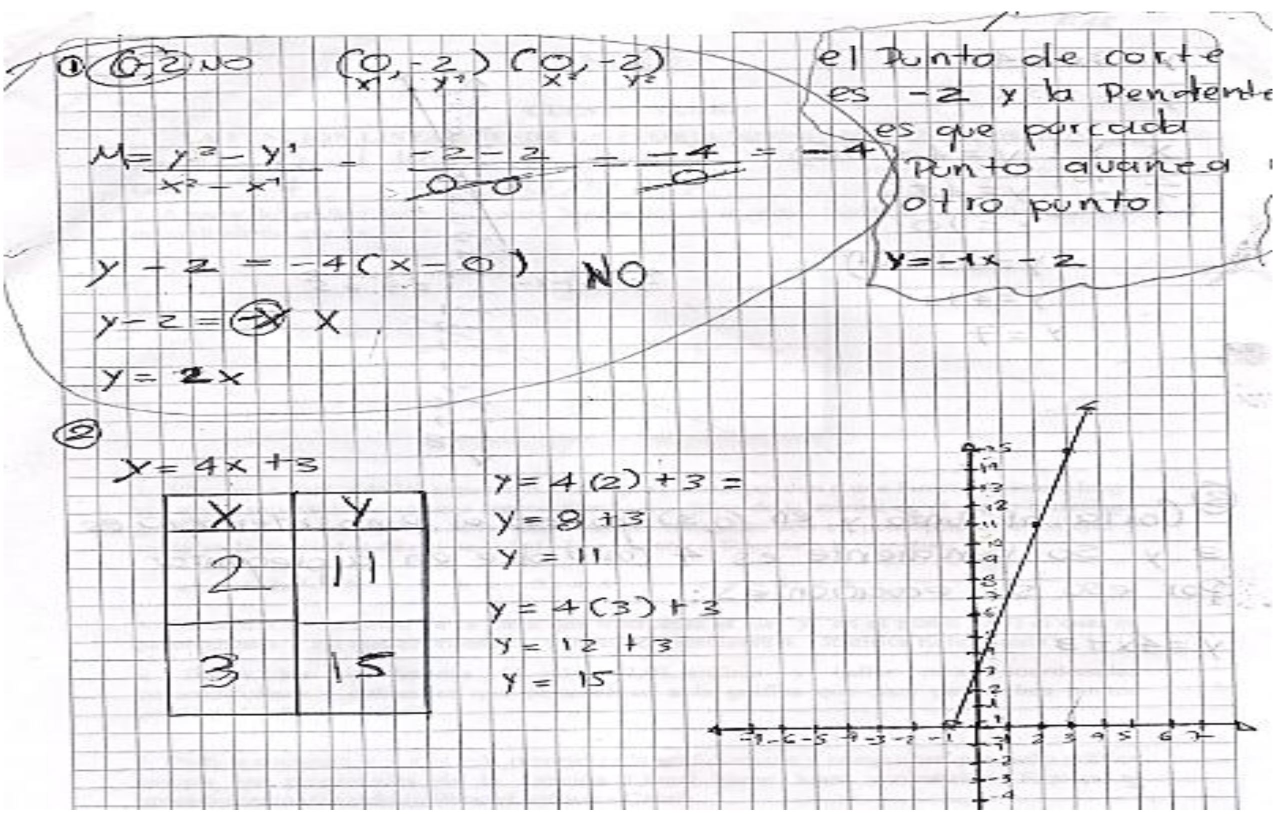
E17…

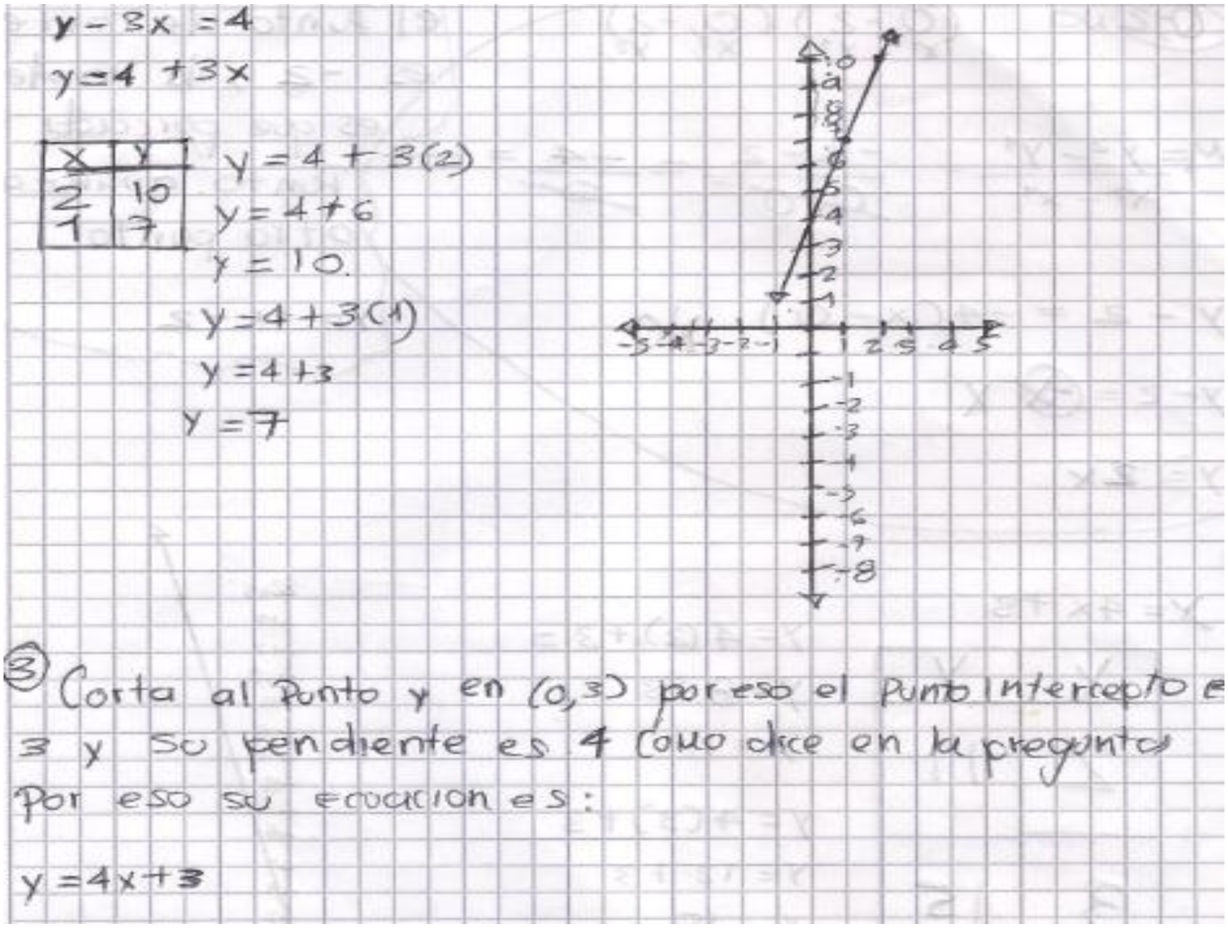


Construcción en Cabri



E18…





$y - 3x = 4$

$y = 4 + 3x$

x	y
2	10
1	7

$y = 4 + 3(2)$

$y = 4 + 6$

$y = 10.$

$y = 4 + 3(1)$

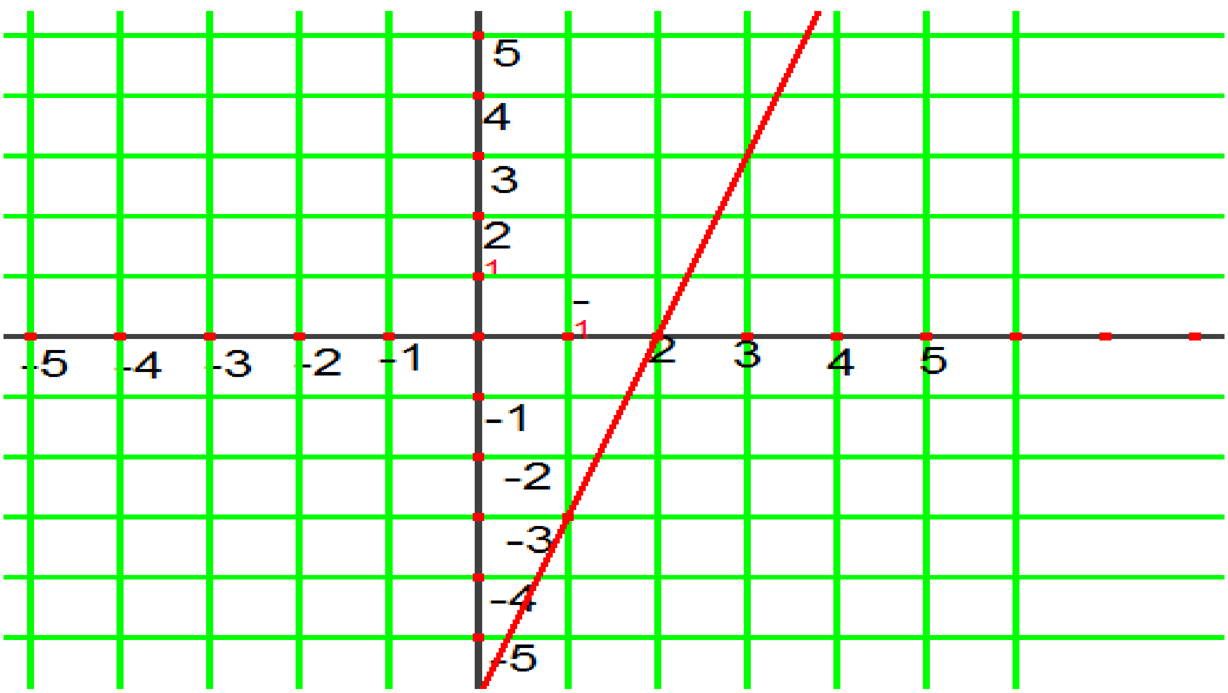
$y = 4 + 3$

$y = 7$

③ Corta al Punto y en (0,3) por eso el punto intercepto e
3 y su pendiente es 4 como dice en la pregunta
Por eso su ecuacion es:

$y = 4x + 3$

Construcción en Cabri



E19…

1. $(-2, 0)$ $(0, -2)$
x_1 y_1 x_2 y_2

$m = \frac{-2 - 0}{0+2} = \frac{-2}{2} = -1$

$y - 0 = -1(x+2)$
$= y - 0 = -x + (-2)$
$= y = -x - 2 + 0$
$= y = -x - 2$

R/: $y = -x - 2$

Comencé nombrando las coordenadas que vi en la imagen, luego hallé la pendiente y luego hallé la ecuación. y luego verifiqué el resultado en cabri.

2. R/: C. $y = 4x + 3$

coordenadas $(2, 11)$ $(1, 7)$

x	y
2	11
1	7

$y = 4(2) + 3 = 8 + 3 = 11$
$y = 4(1) + 3 = 4 + 3 = 7$

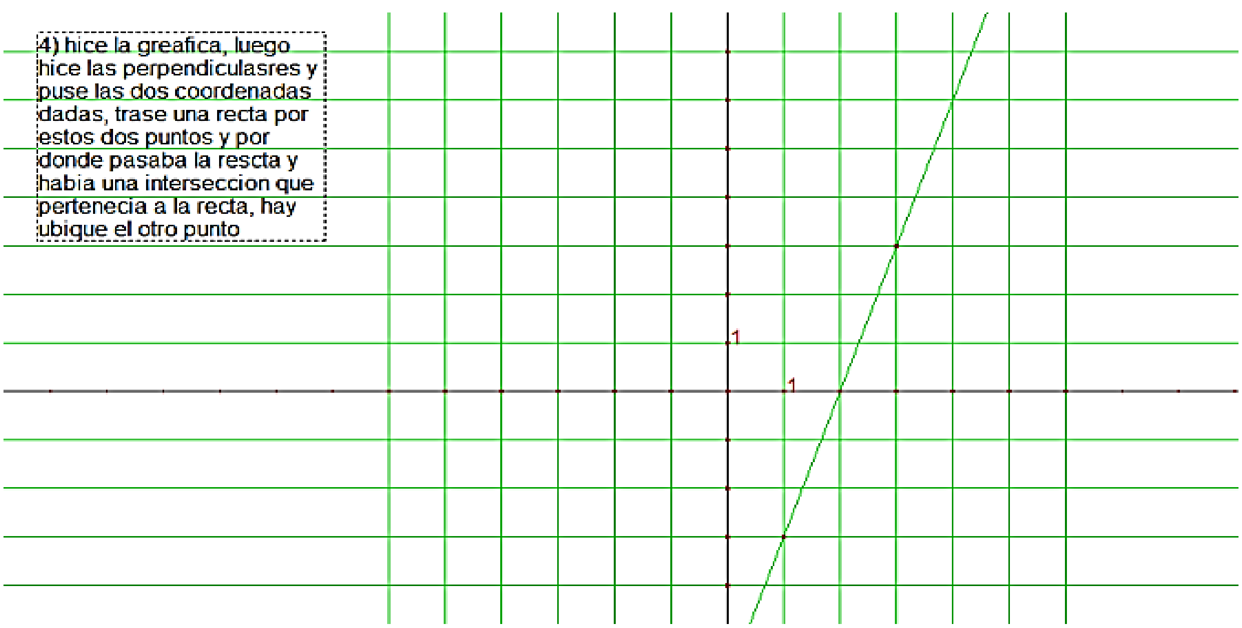
hice una tabla de valores, en x puse dos numeros cualquiera y luego con la operacion dada empezé a darle valores a y.

3. $(0, 3)$ $m = 4$
x_1 y_1
$y - 3 = 4(x - 0)$
$= y - 3 = 4x - 0$
$= y = 4x - 0 + 3$
$= y = 4x - 3$

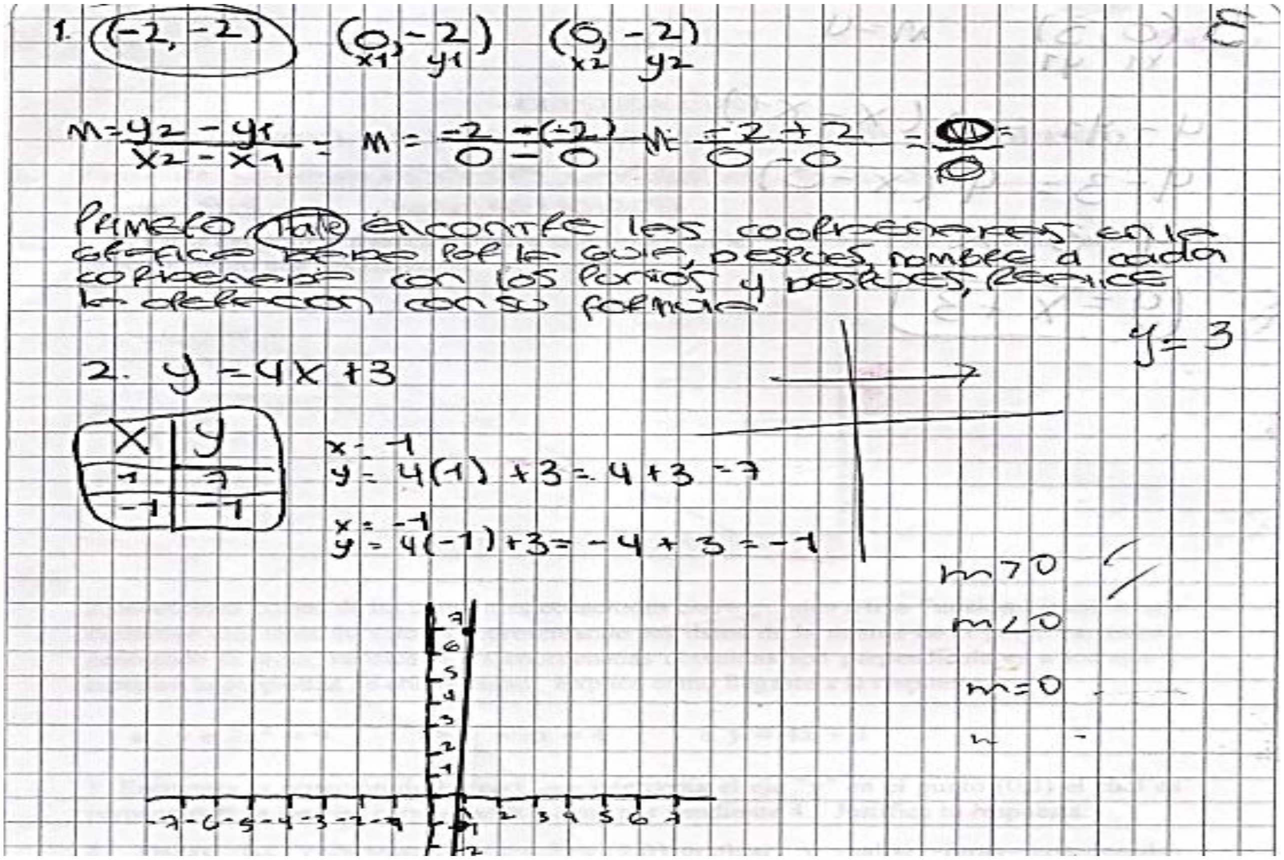
R/: $y = 4x - 3$

5. $y + x = -1$ $(y =)$

Construcción en Cabri



E20…



1. (-2, -2) $(\underset{x_1}{0}, \underset{y_1}{-2})$ $(\underset{x_2}{0}, \underset{y_2}{-2})$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \frac{-2-(-2)}{0-0}$ $m = \frac{-2+2}{0-0} = \frac{0}{0}$

Primero (Taller) encontre los coeficientes en la grafica despues por la guia, despues nombre a cada coeficiente con los puntos y despues realice la definicion con su formula

2. $y = 4x + 3$

x	y
1	7
-1	-1

$x = 1$
$y = 4(1) + 3 = 4 + 3 = 7$

$x = -1$
$y = 4(-1) + 3 = -4 + 3 = -1$

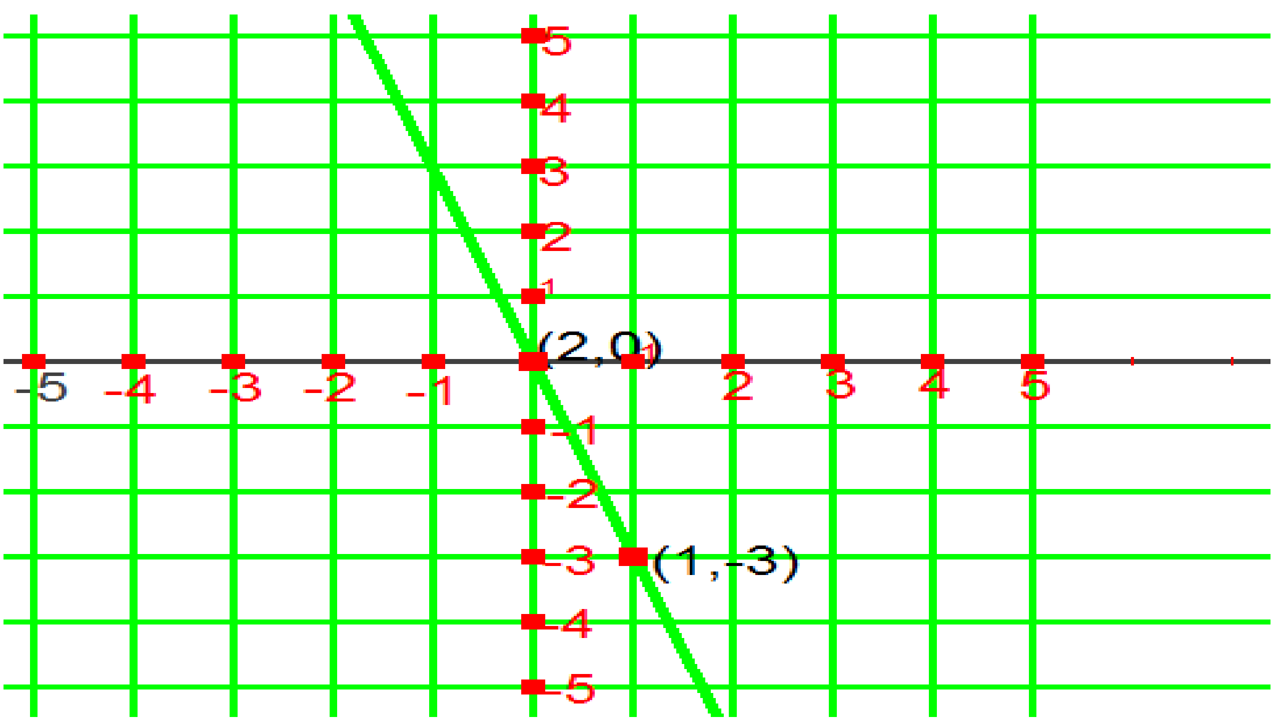
$y = 3$

$m > 0$

$m < 0$

$m = 0$

Construcción en Cabri



E21…

R2 = $y = mx + b$

x	y
4	7
4	11

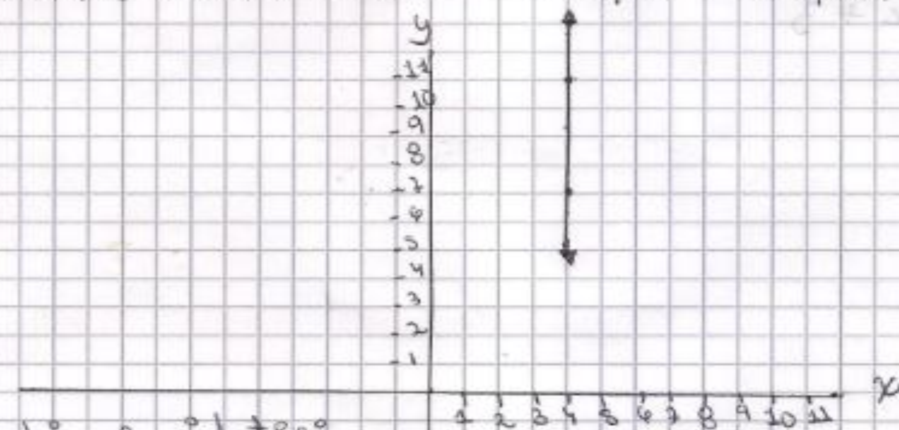
x	y
1	7
2	11

Respuesta: C.. $y = 4x + 3$

$y = 1(4) + 3 = 4 + 3 = 7$

$y = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11$

Coordenadas: $(4,7)$ $(4,11)$



Lo que hice fue identificar la formula de la ecuación lineal que me parecía correcta luego realice la tabla de valores, en la x coloque los numeros que yo elegí y luego lo reemplace con los numeros de la ecuacion $y = x + 3$, saque mis 2 coordenadas y luego realice el grafico.

R3 = Pendiente: 4 Punto: $(0, 3)$ x_1 y_1

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x)$

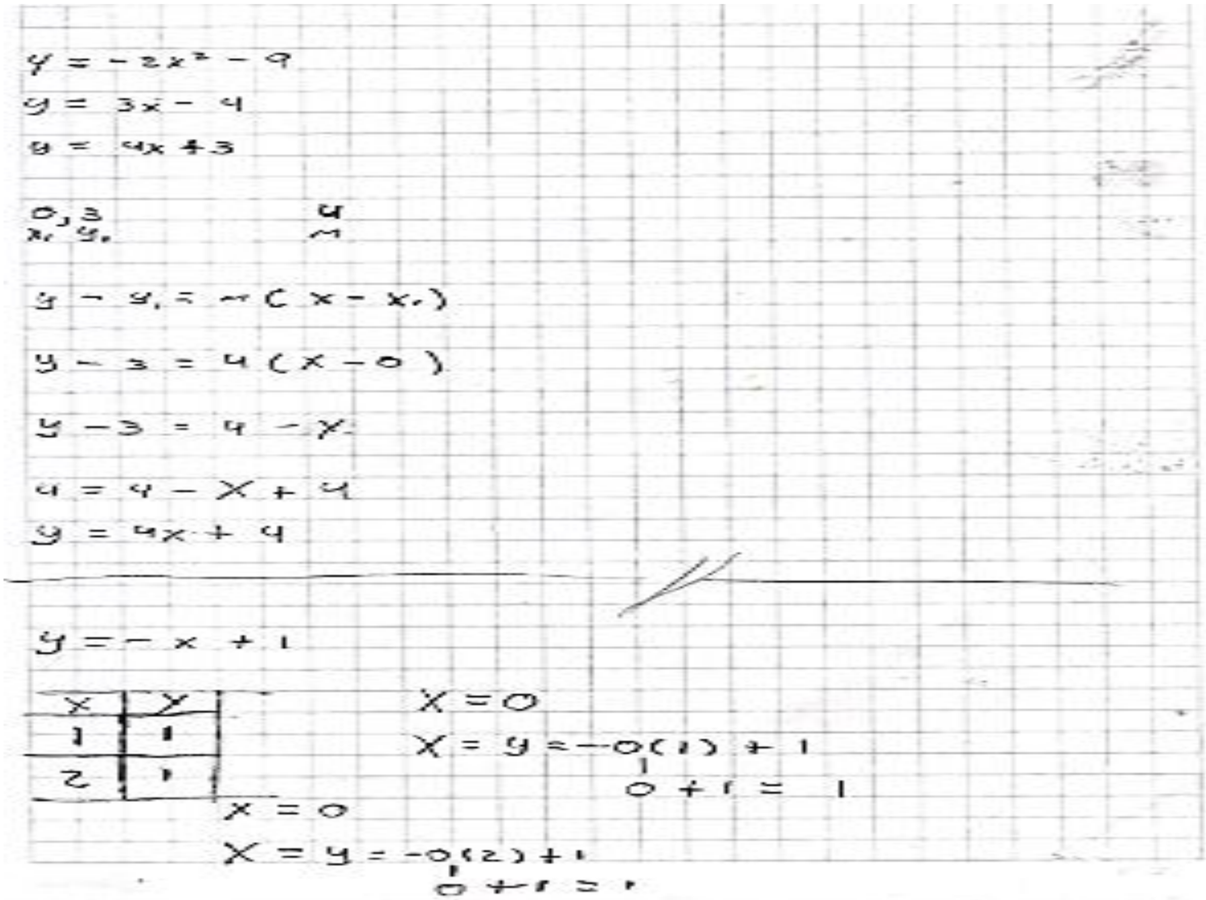
$y - 3 = 4(x - 0)$

$y - 3 = 4x - 0$

$y = 4x + 3$

Bueno lo que hice fue identificar mi pendiente y colocar el punto $(0,3)$ con x_1 y y_1 para poder utilizar la formula, luego reemplazo y despejo la y para que me de al final del ejercicio la ecuacion

E22…



$y = -2x^2 - 9$

$y = 3x - 4$

$y = 4x + 3$

$0, 3 \qquad 4$

$x_1\ y_1 \qquad m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 0)$

$y - 3 = 4 - x$

$y = 4 - x + 4$

$y = 4x + 4$

$y = -x + 1$

x	y
1	1
2	1

$X = 0$

$X = y = -0(1) + 1$

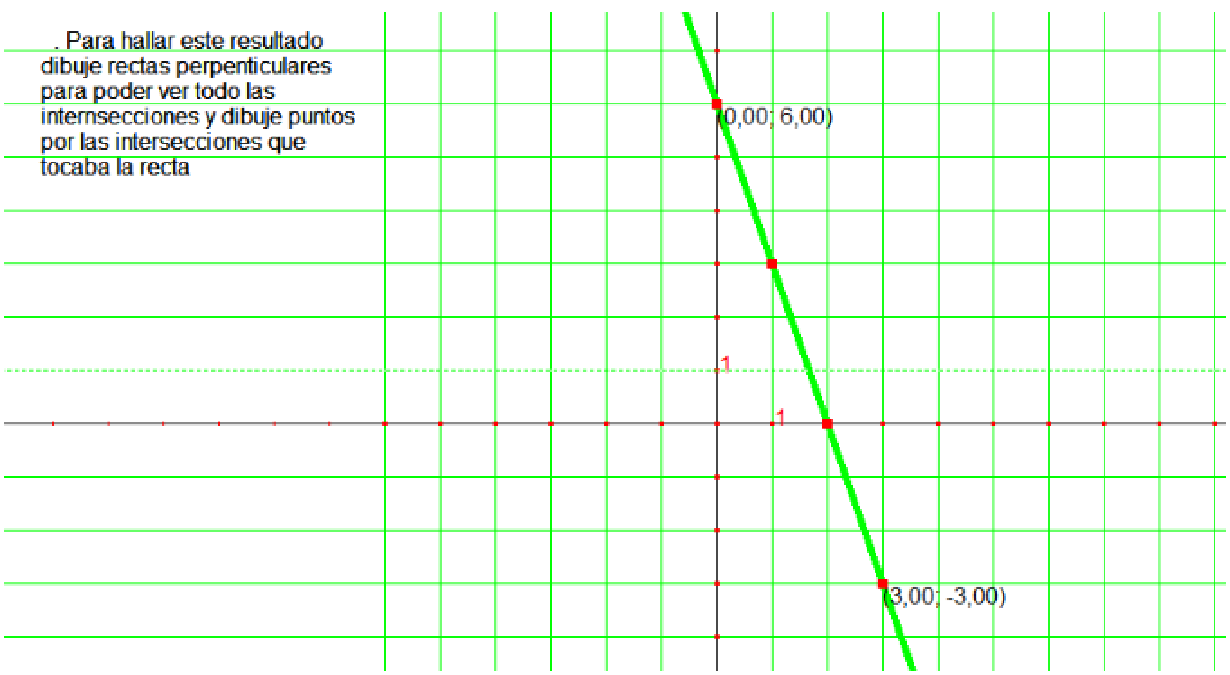
$0 + 1 = 1$

$x = 0$

$X = y = -0(2) + 1$

$0 + 1 = 1$

Construcción en Cabri



E23…

① $(0,-2)$ $(-2,0)$

x_1 y_1 x_2 y_2

$m = \frac{0-(-2)}{-2-0} = \frac{2}{-2}$

$y - y_1 = m = (x - x_1)$

$y - (-2) = \frac{2}{-2}(x - 0)$

$y - (-2) = \frac{2}{-2}x + \frac{0}{0}$

$y = \frac{2}{-2}x + \left(\frac{0}{0} + \frac{-2}{1}\right)$

$y = \frac{2}{-2}x + \frac{0}{0}$

④ los puntos encontrados estan en la misma recta son colineales y pueden extenderse hasta cierto punto.

③ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $m = 4$

$y - 3 = 4(x - 0)$

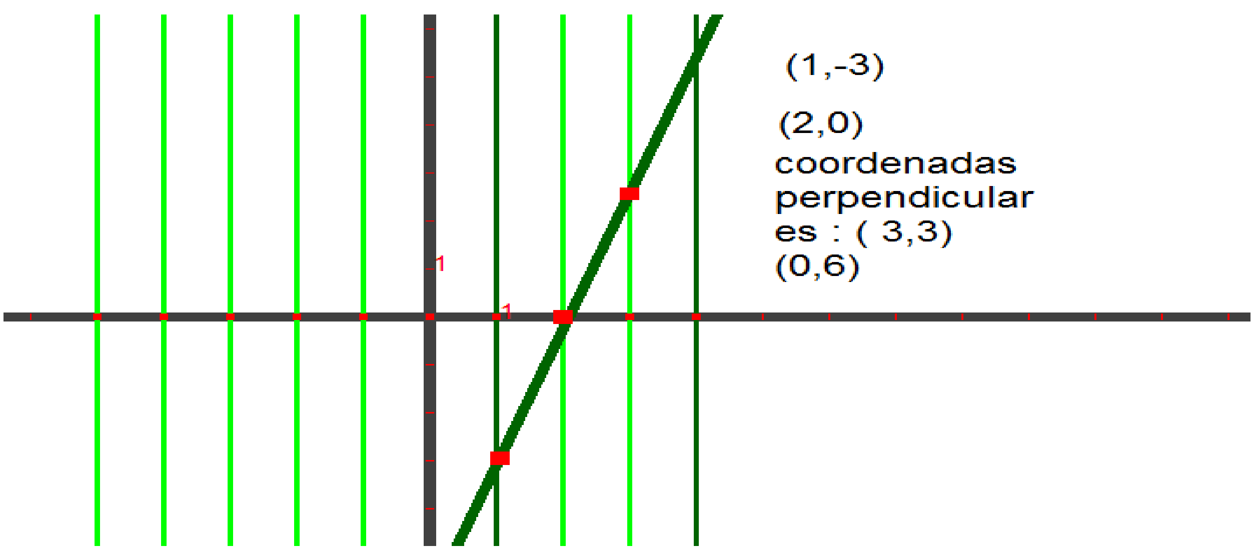
$y - 3 = 4x - 0$

$y = 4x - 0 + 3$

$y = 4x + 2.$

cuando se tiene una coordenada y la pendiente se le asigna el nombre $(x_1, x_2)(y_1, y_2)$ a la misma coordenada. Se busca la pendiente y se hace el procedimiento.

Construcción en Cabri



E24…

1. (0, -2) (2, 0) (0, -2)

m = (0; 2) (0, -2)
x_1 y_1 x_2 y_2

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-2-(2)}{0-0} = \left(\frac{-0}{0}\right) \frac{-4}{0} = -4$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -4(x - 0)$

$y - 2 = -4x - 0$

$y = -4x + 2 - 0$

$y = -4x - 2$

$y - 2 = x$

$y = x + 2$

$y - 3x = 4$

$y = 4 + 3x$

x	y
1	7
0	4

$y = 4 + 3(1) = 7$

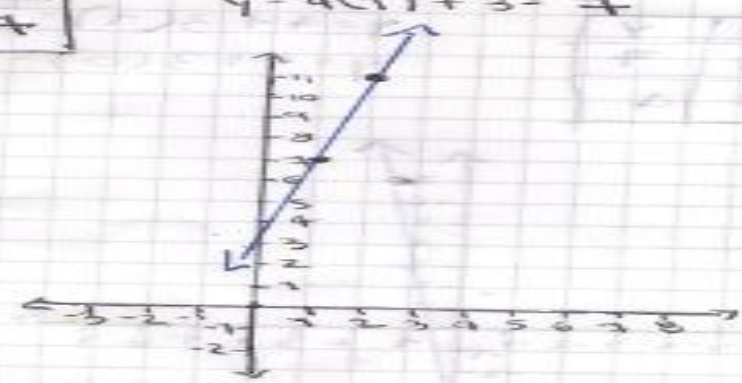
$y = 4 + 3(0) = 4$

$y = 4x + 3$

x	y
2	11
1	7

$y = 4(2) + 3 = 11$

$y = 4(1) + 3 = 7$



3. $(0,3)$ $m = 4$
$x_1 \; y_1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 0)$

$y - 3 = x$

$\boxed{y = x + 3}$

se nombran las coordenada dada como x1 y y1, se utiliza la formula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para hallar la ecuación de la recta, se reemplazan los valores y x hace la operación para al final obtener el resultado.

E25…

① $(-2, 0) - (0, -2)$
$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$m = \frac{-2-0}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$

$y - (-2) = -1(x+2)$
$y = 2 =$

$y - (-2) = -1(x - (-2))$

$y + 2 = -x + 2$

$y = -x + \left(\frac{-2}{1} \; \frac{1}{1}\right) = \frac{-3+1}{1} = \frac{-2+1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$

$y = -1m$ $\quad y = -1x + ($

$y = -1x - 1$

en este ejercicio halle la ecuacion de la recta utilizando las formulas:

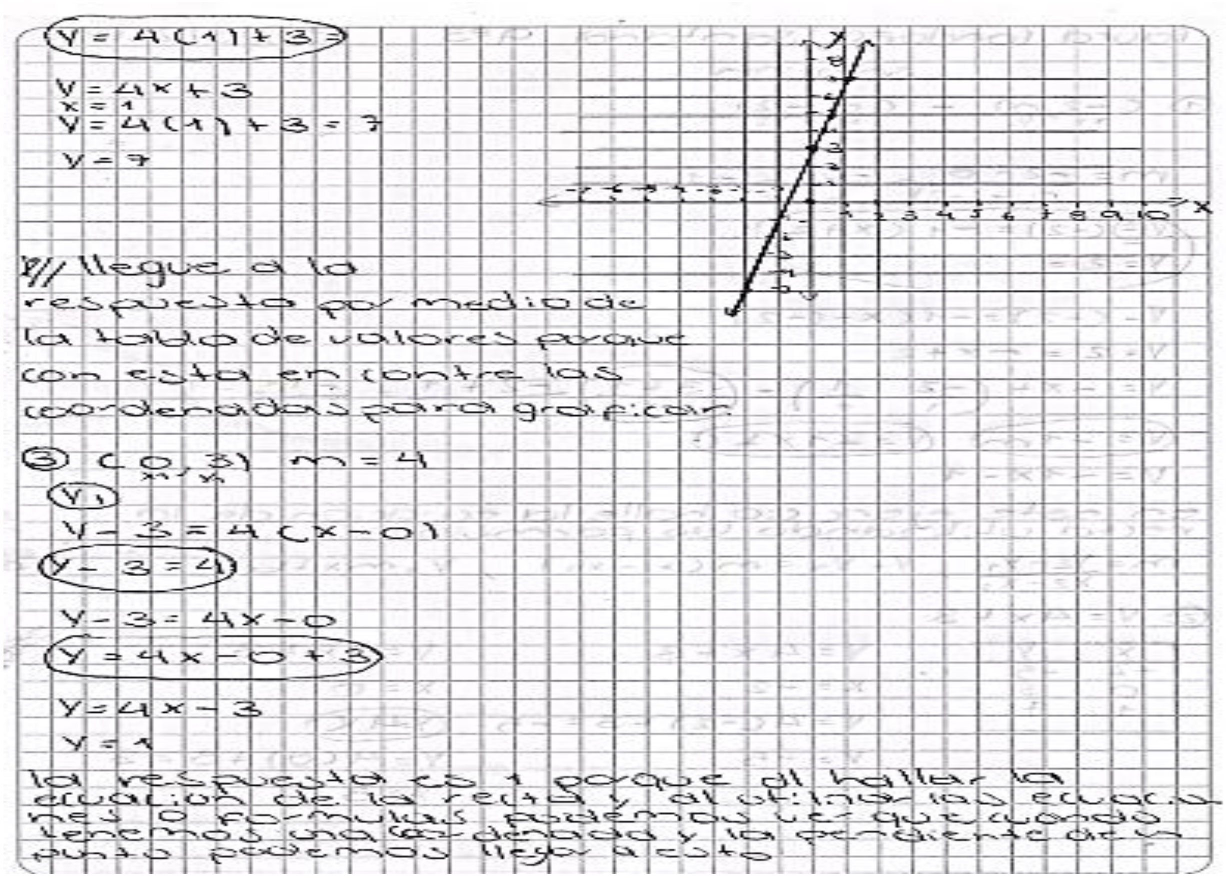
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, $y = mx + b$

② $y = 4x + 3$

x	y
-2	-5
0	3
1	7

$y = 4x + 3$
$x = -2$
$y = 4(-2) + 3 = -5$
$y = -5$

$y = 4x + 3$
$x = 0$
$y = 4x$
$y = 4(0) + 3 = 3$
$y = 3$



$Y = 4(1) + 3$

$Y = 4x + 3$
$x = 1$
$Y = 4(1) + 3 = 7$
$Y = 7$

R// llegue a la respuesta por medio de la tabla de valores porque con esta en contre las coordenadas para graficar

③ $(0, 3)$ $m = 4$

Y_1

$Y - 3 = 4(x - 0)$

$Y - 3 = 4$

$Y - 3 = 4x - 0$

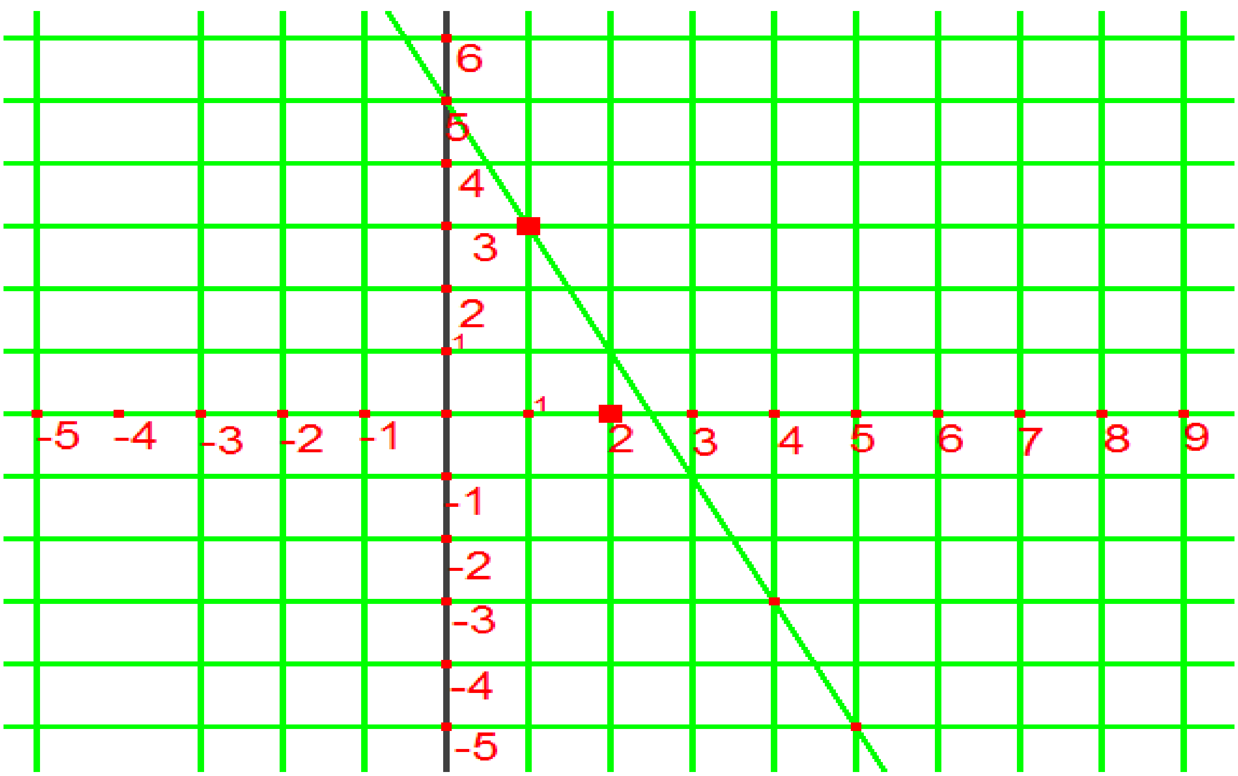
$Y = 4x - 0 + 3$

$Y = 4x - 3$

$Y = 1$

la respuesta es 1 porque al hallar la ecuacion de la recta y al utilizar las ecuaciones o formulas podemos ver que cuando tenemos una coordenada y la pendiente de un punto podemos llegar a esto

Construcción en Cabri



E26…

1. Ecuación de la recta $(-2, 0)$ $(0, -2)$

$m =$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad m = \frac{-2-0}{0-2} = \frac{-2}{-2}$

$y - (0) = \frac{-2}{-2}(x - (-2)) =$

$y - (0) = \frac{-2}{-2}x + \left(\frac{4}{4}\right) = 1$

$y - (0) = \frac{-2}{-2}x + \left(\frac{1}{1} + \frac{0}{1}\right) = \frac{0+1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

R//: $y = \frac{-2}{-2}x + 1.$

2. $y + 2x^2 = 9$ $\quad F(x) = -2x^2 + 9$ $\quad$ las funciones lineales son: b. $y - 3x = 4$ $\quad$ c. $y = 4x + 3$

tabla de valores de la función b.

$F(x) = 3x + 4$ $\quad x = 1$

$y = 3(1) + 4 = 3 + 5 = 8$

x	y
1	8
0	4
−1	1

$x = 0$

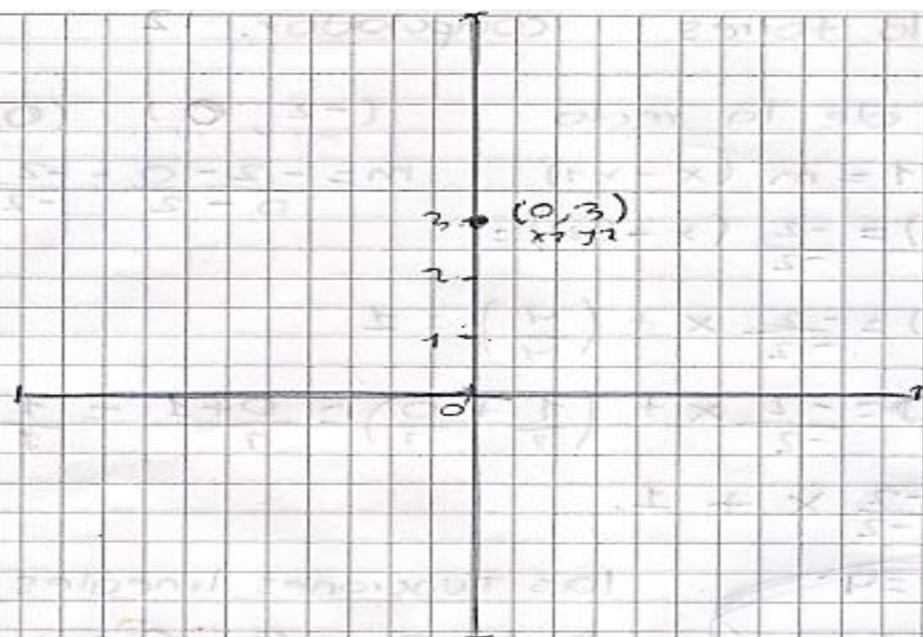
$y = 3(0) + 4 = 0 + 4 = 4$

$x = -1$

$y = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1$

viendo las opciones que tenia vi, que la opción (b) tenia las caracteristicas de una función lineal en cuanto a su exponente, luego hice el procedimiento adecuado y con los resultados la tabla de valores

3.

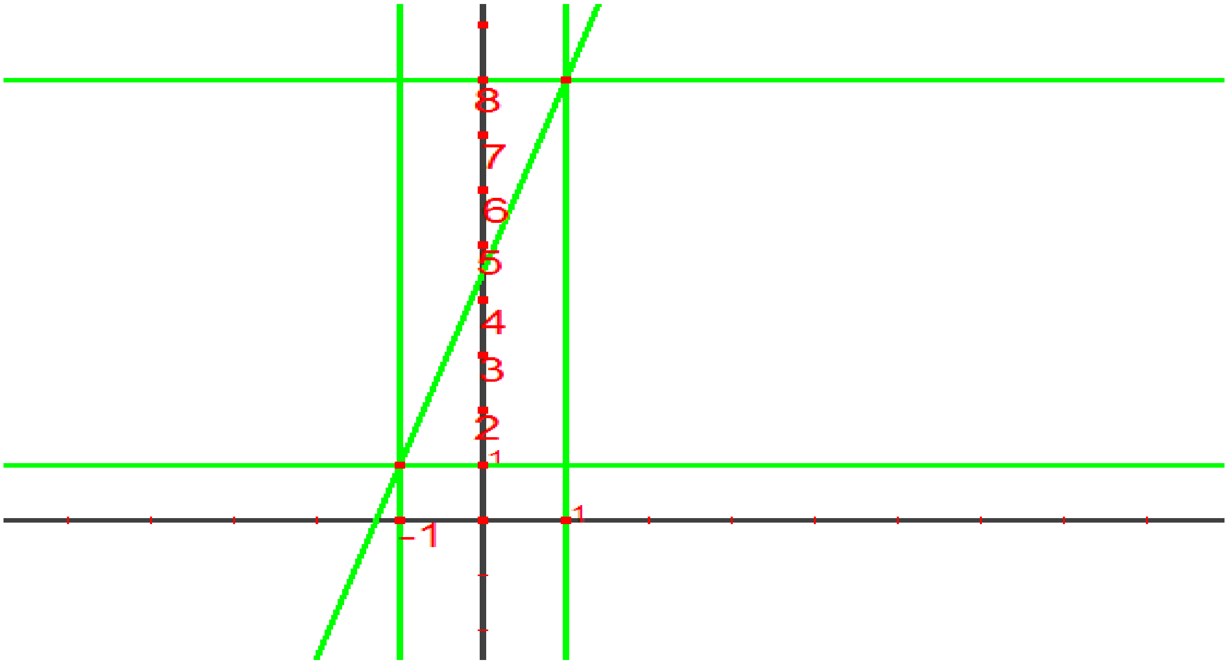


· $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 0)$

$y - 3 = 4$

Construcción en Cabri



E27…

1_(-2,0) (0,-2)

y-0=1(x-(-2))

y-0=1x+2

y=1x+2+0

y=1x+2

El procedimiento que hize fue coji el (y-0); ya que el 0 era negativo lo pase a positivo y quedo y=1x+2+0 y ya que el cero no vale nada el resultado de la operacion queda y=1x+2

2_

3_ (0,3) m=4

y=4x+3

y-3=4(x-0)

y-3=4x-0

y=4x-0+3

y=4x-3

El 4 vendria siendo la m que es pendiente; y haci Hallamo la ecuación, el -3 lo cambiamos por positivo, ya que era negativa y pues el 0 no suma, ni resta el resultado quedaria.

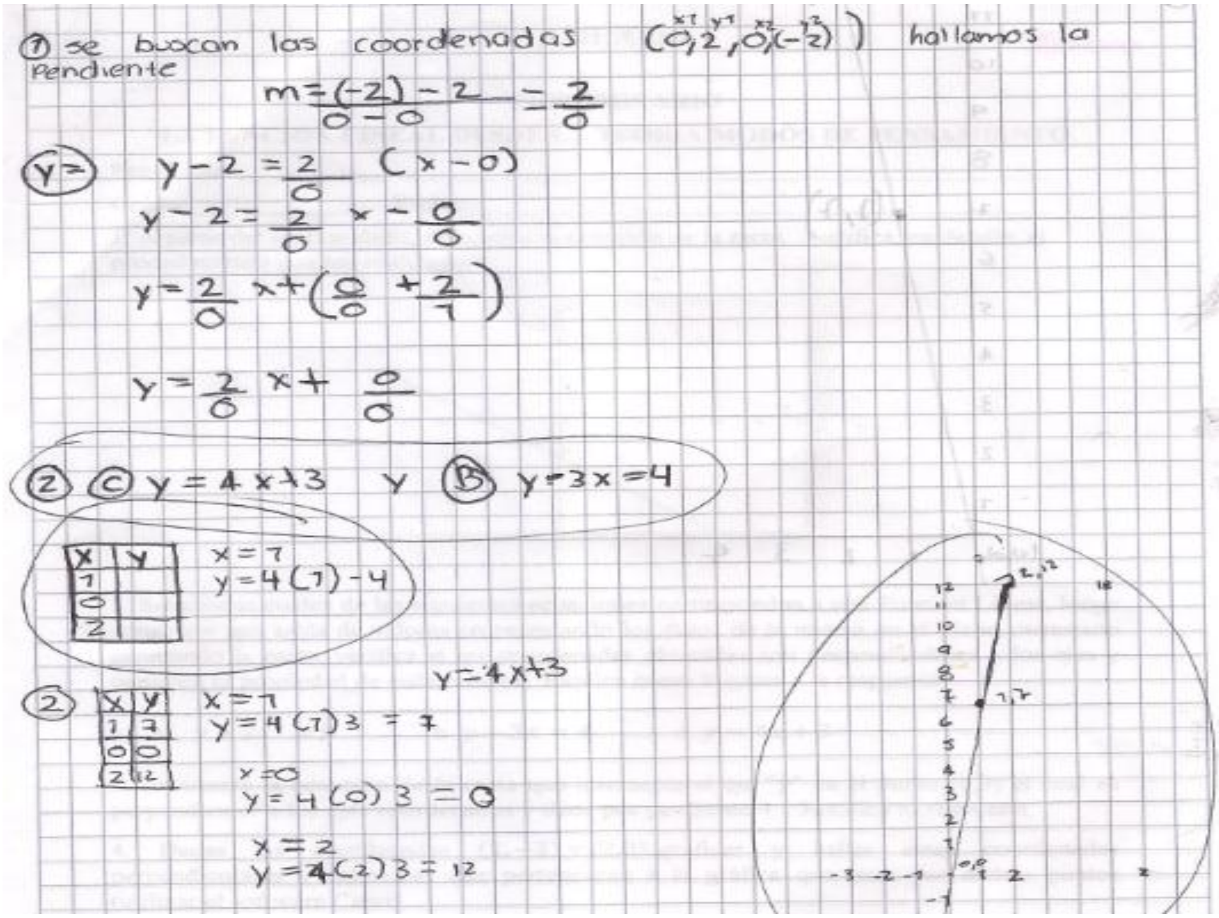
y=4x-3

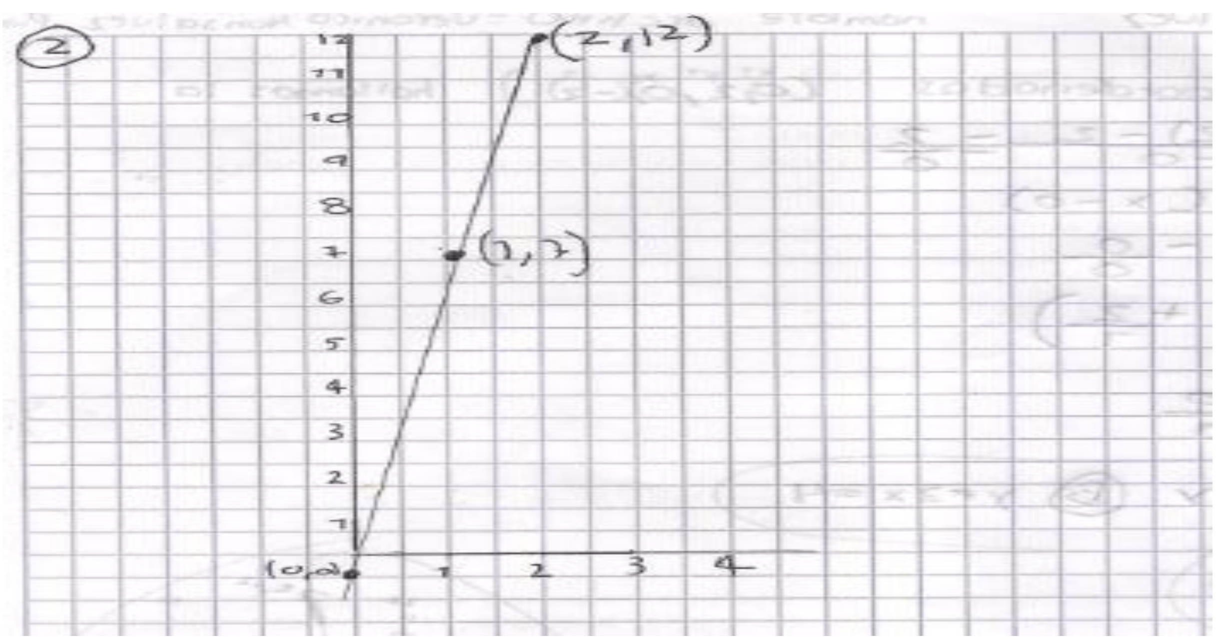
Guardo Disco D

El punto a

figura n°1 Salome duque, Punto 4.

E28…



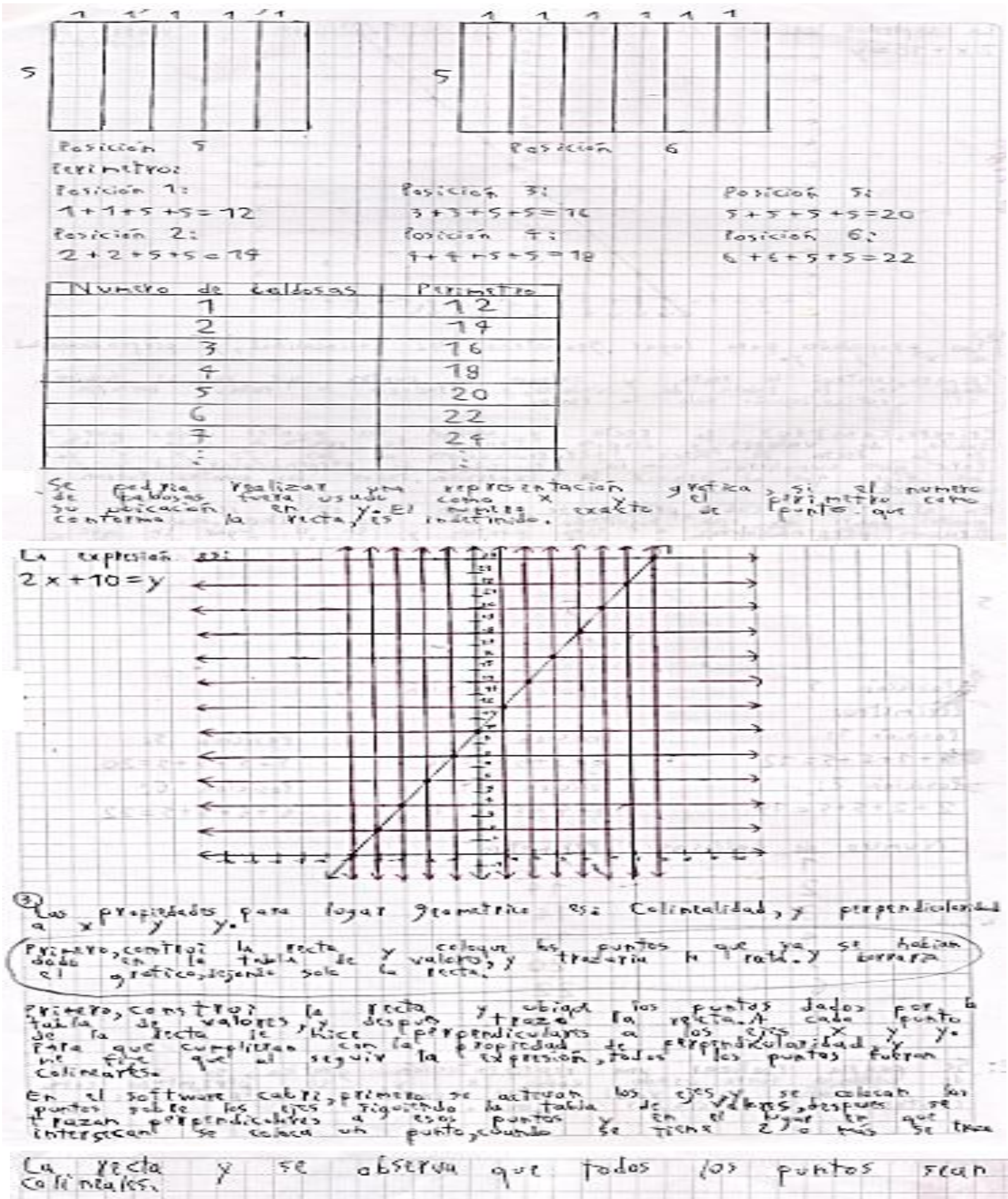


E29 y E30 no presentan evidencias.

ANEXO 8

EVIDENCIAS APLICACIÓN DE LA ENTREVISTA SEMI- ESTRUCTURADA

Entrevista 1 – En_1–


Posición 5

Posición 6

Perimetro:

Posición 1:
$1+1+5+5=12$

Posición 2:
$2+2+5+5=14$

Posición 3:
$3+3+5+5=16$

Posición 4:
$4+4+5+5=18$

Posición 5:
$5+5+5+5=20$

Posición 6:
$6+6+5+5=22$

Numero de baldosas	Perimetro
1	12
2	14
3	16
4	18
5	20
6	22
7	24
⋮	⋮

Se podria realizar una representación grafica, si el numero de baldosas fuera usado como x y el perimetro como su ubicación en y. El numero exacto de puntos que conforma la recta, es infinito.

La expresión es:
$2x+10=y$

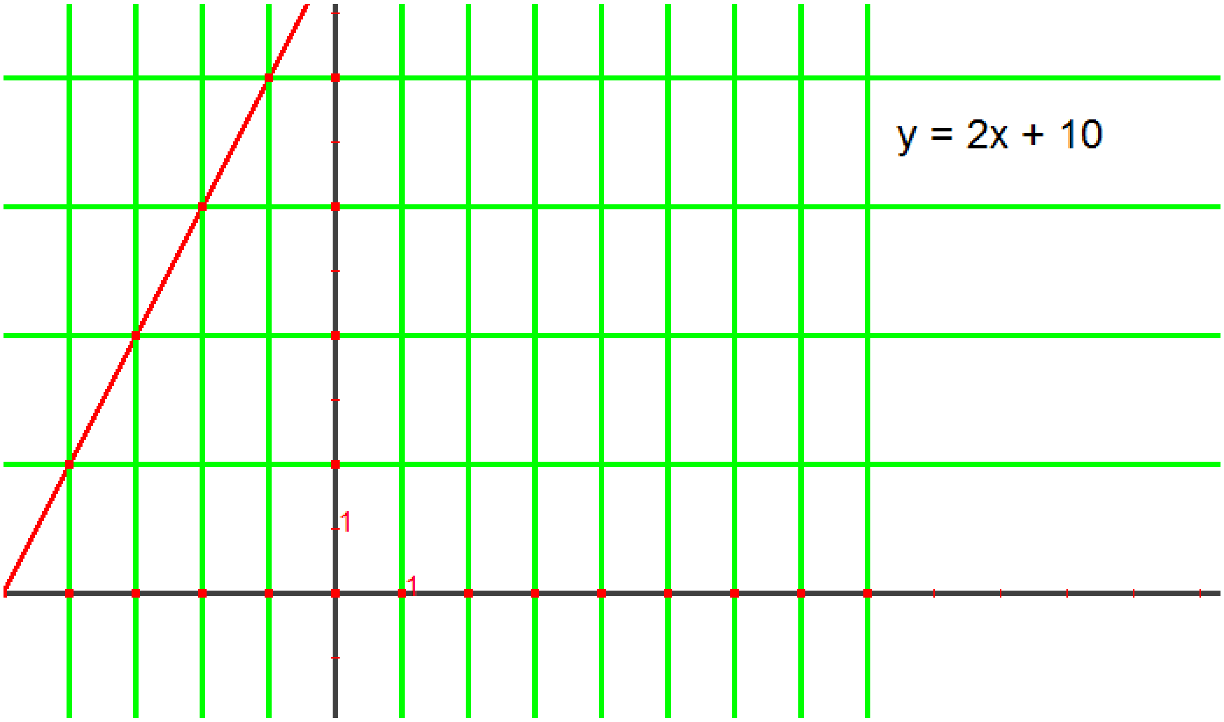
③ Las propiedades para lugar geometrico es: Colinealidad, y perpendicularidad a x y y.

Primero, construi la recta y coloque los puntos que ya se habian dado en la tabla de valores, y trazaria la recta. Y borraria el grafico, dejando solo la recta.

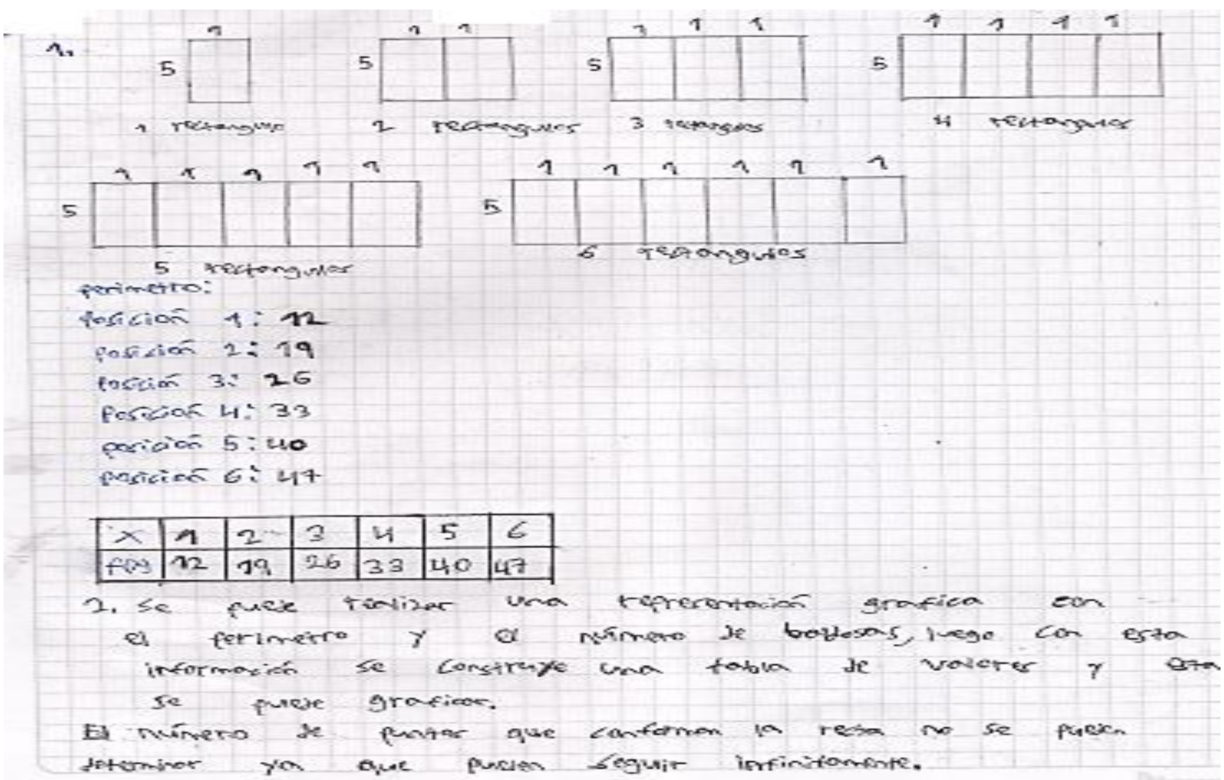
Primero, construi la recta y ubique los puntos dados por la tabla de valores, y despues trace la recta. A cada punto de la recta le hice perpendiculares a los ejes x y y. Para que cumplieran con la propiedad de perpendicularidad, y me fije que al seguir la expresión, todos los puntos fueran colineales.

En el software cabri, primero se activan los ejes, y se colocan los puntos sobre los ejes siguiendo la tabla de valores, despues se trazan perpendiculares a esos puntos y en el lugar en que intersecan se coloca un punto, cuando se tiene 2 o más se traza la recta y se observa que todos los puntos sean colineales.

Construcción en Cabri



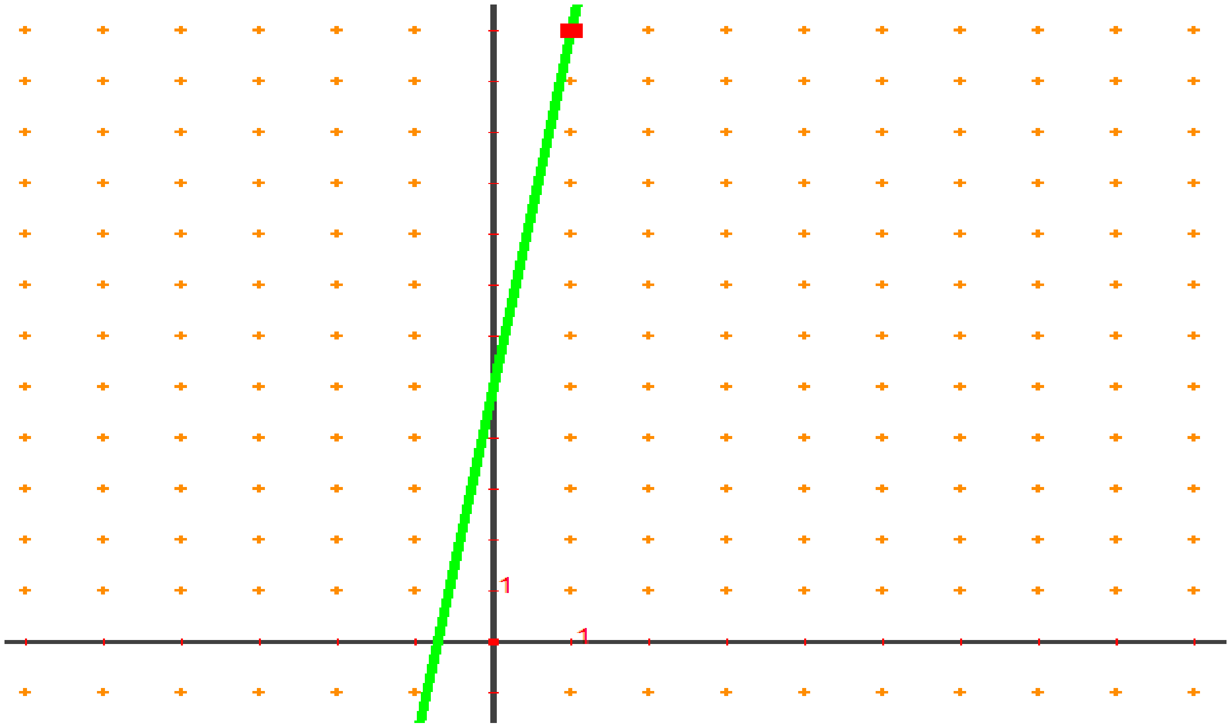
Entrevista 2 – En_2–



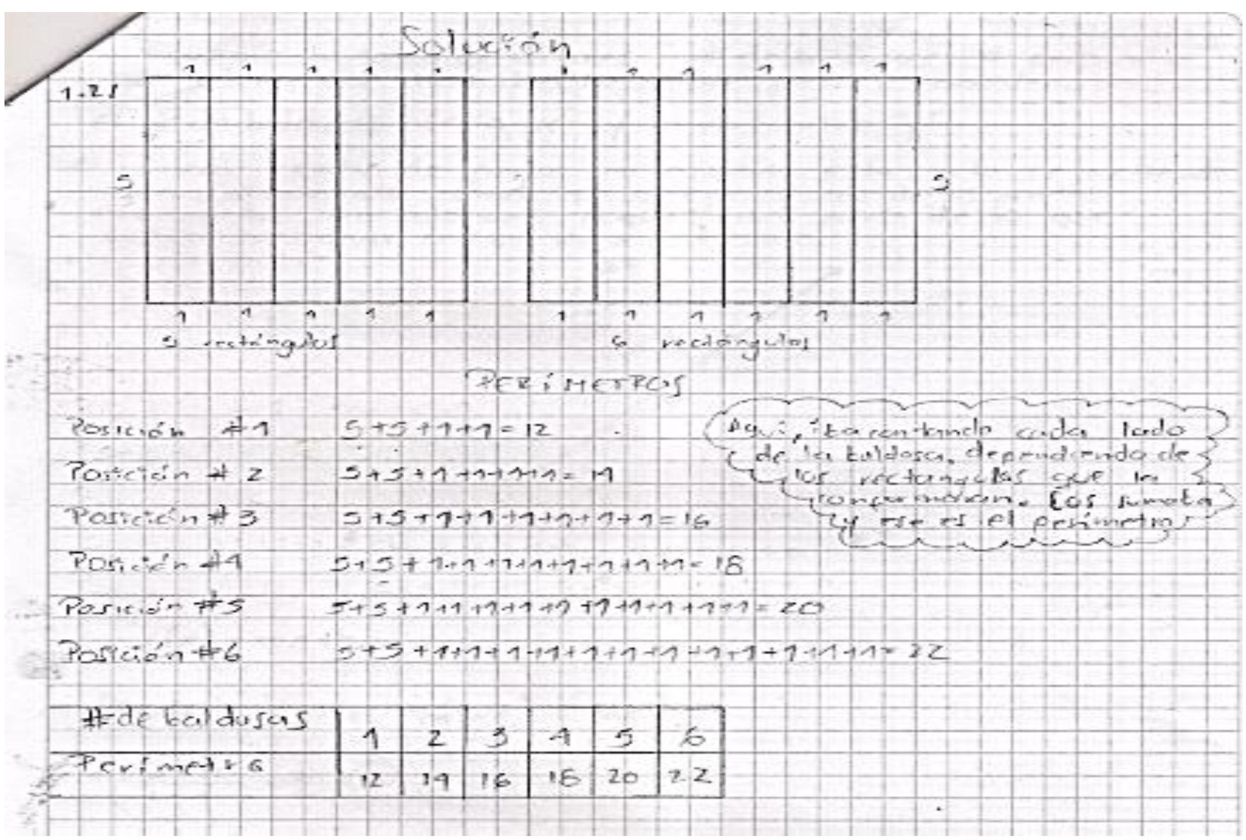
X	1	2	3	4	5	6
f(x)	12	19	26	33	40	47

2. Se puede realizar una representación grafica con el perimetro y el número de baldosas, luego con esta información se construye una tabla de valores y esta se puede graficar.

El número de puntos que conforman la recta no se pueden determinar ya que pueden seguir infinitamente.



Entrevista 3 – En_3–



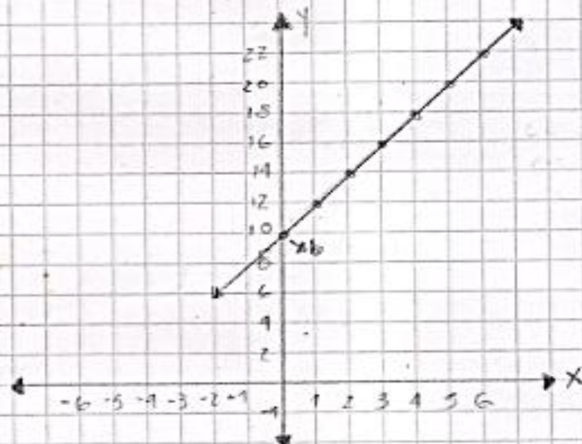
#de baldosas	1	2	3	4	5	6
Perímetro	12	14	16	18	20	22

2.R/

Yo usaría la tabla de valores "# de baldosas vs perímetro" y los valores que hay dentro para formar coordenadas.

El # de baldosas sería "x". y el perímetro "y"

El número exacto de puntos no lo sabría. esta recta se extiende tan infinitamente como yo quiera y los datos antes mencionados son solo una pequeñísima parte de lo que podría consignar en un plano cartesiano.



3.R/

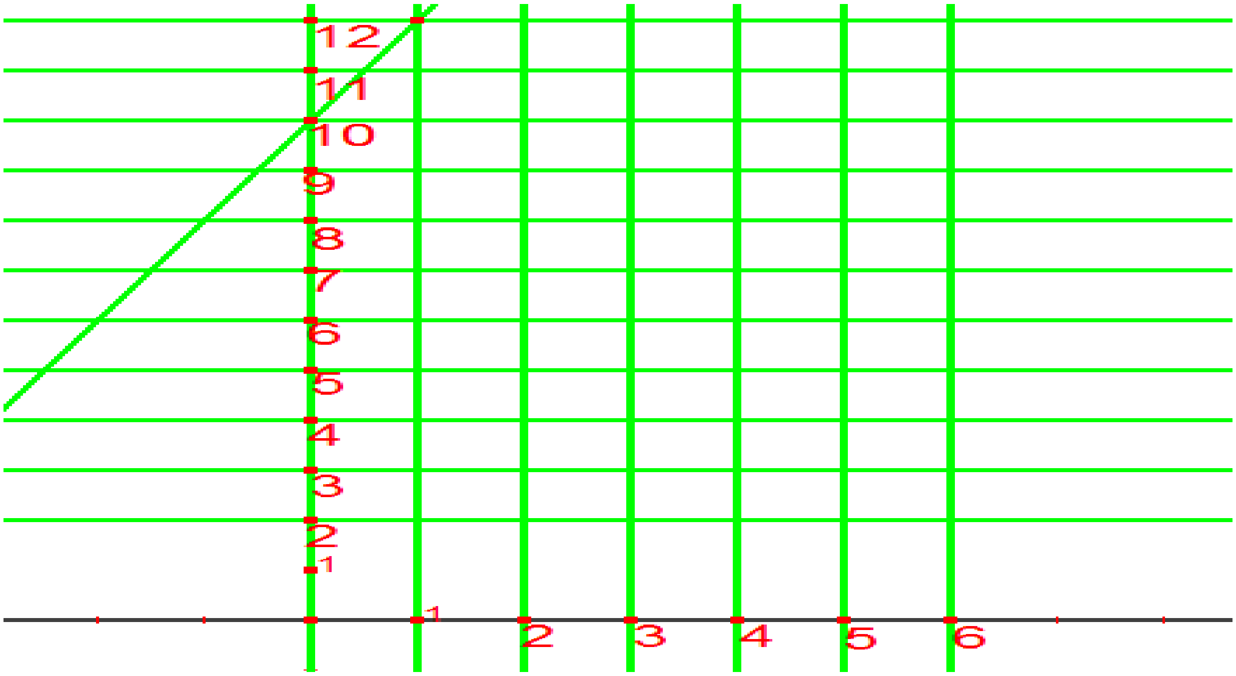
$$f(x) = mx+b$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) = (1, 12) \quad (2, 14)$$

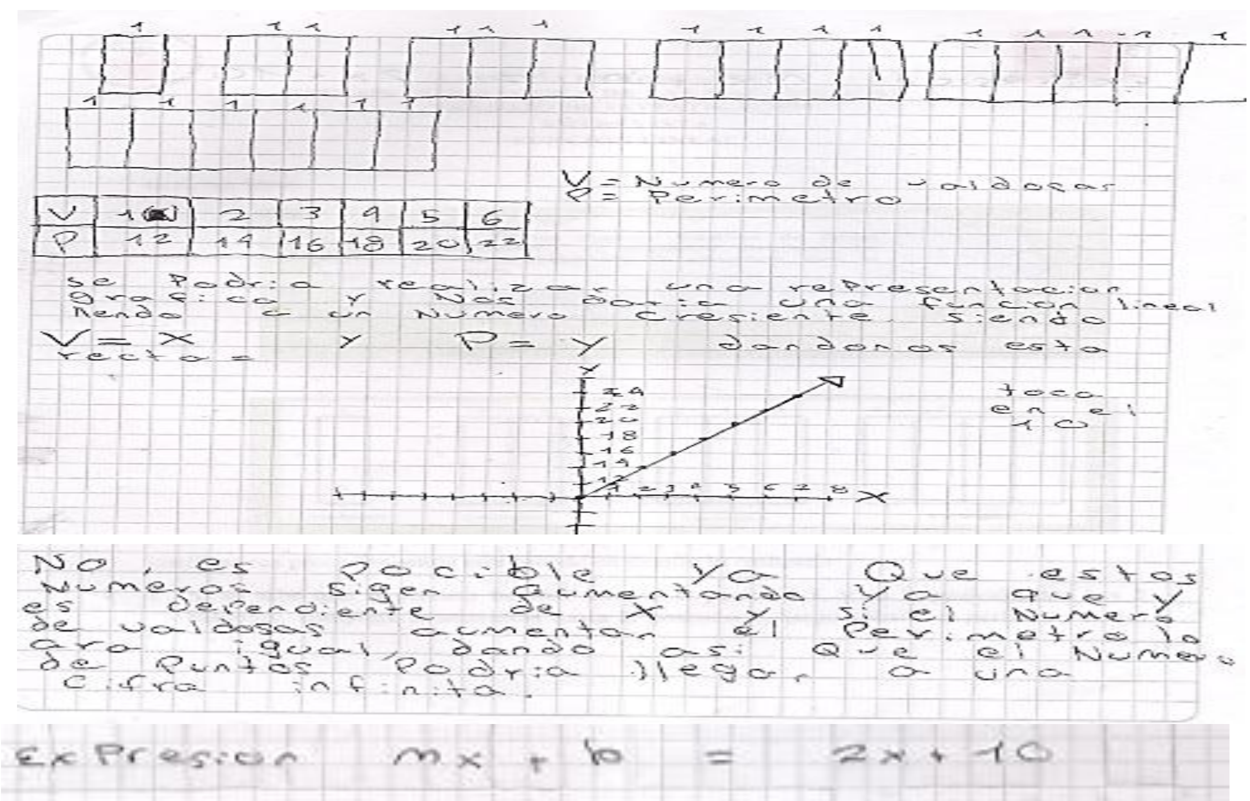
$$m = \frac{14-12}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(x) = 2x+0$$

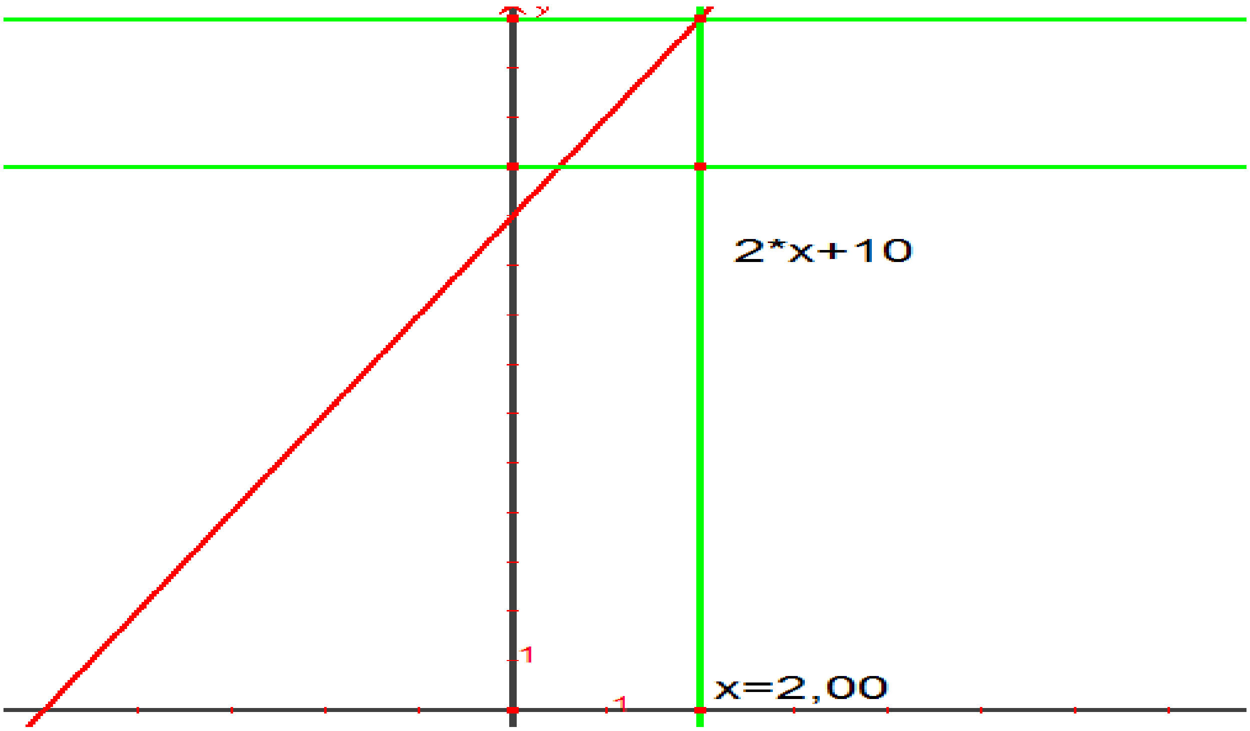
Para representar la recta como un lugar geométrico se trazaría igualmente un plano, se haría la recta con los puntos que ya se tienen y podría extenderla tanto como yo quisiera. Para cumplir con sus propiedades se trazan líneas paralelas al eje "y" y al eje "x" y se verían cuales puntos de anadidura forman una colinealidad con la recta ya graficada



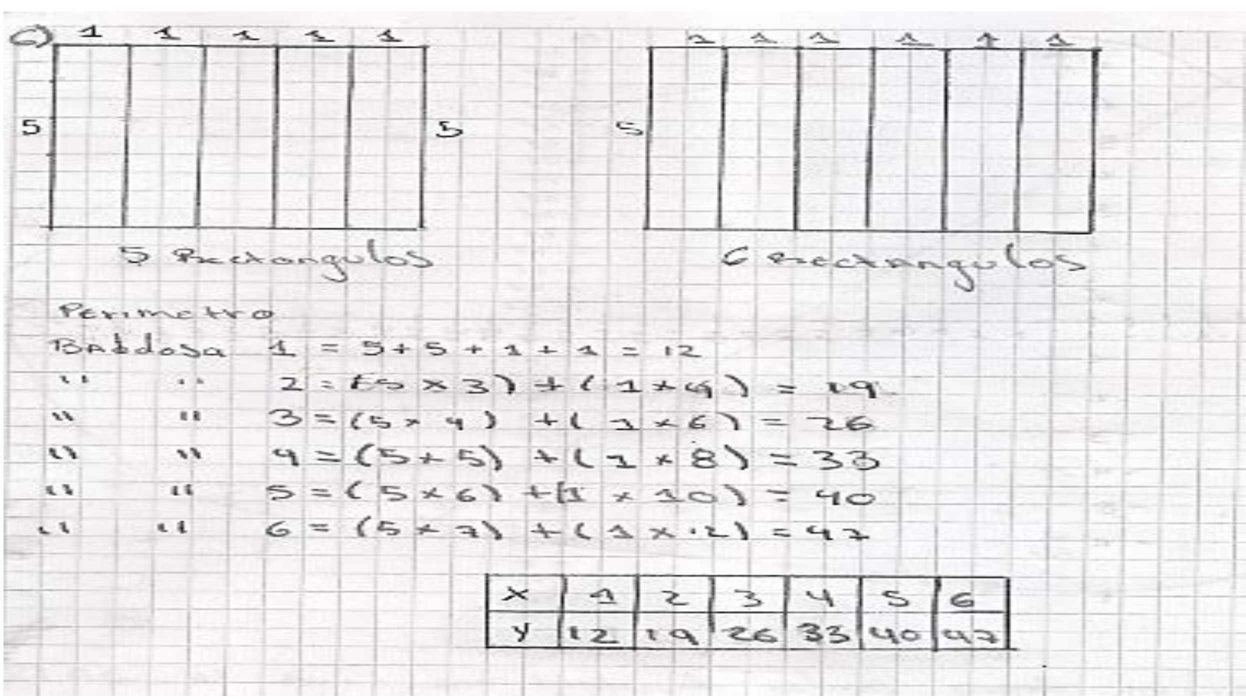
Entrevista 4 – En_4–

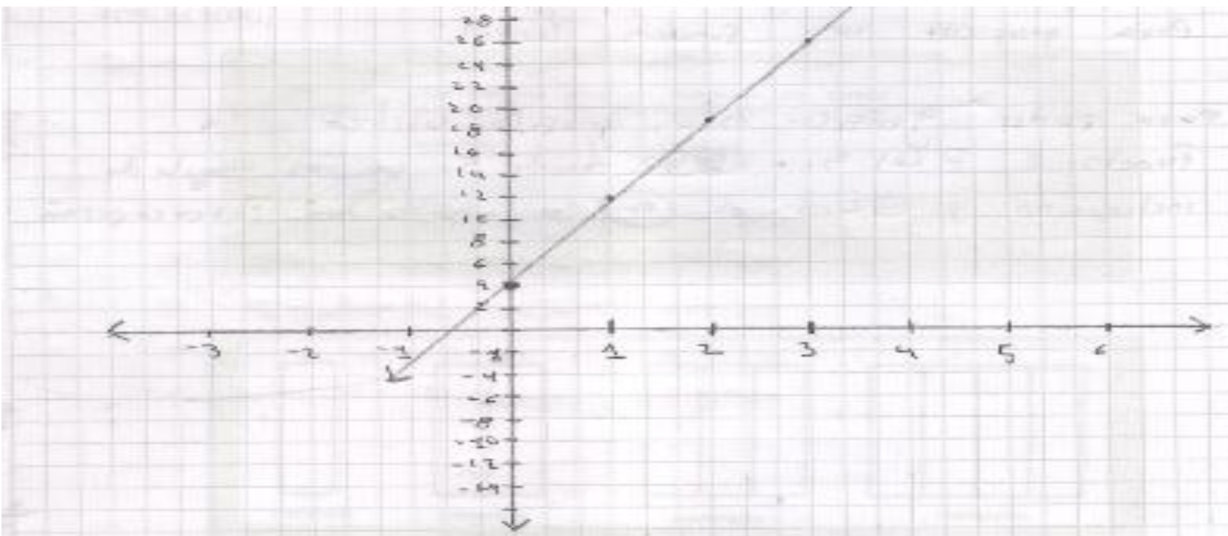


Construcción en Cabri



Entrevista 5 – En_5–





2) R/ Al tener una tabla de valores puedo graficar por que obtengo Cordenadas y estos me ayudan a formar funciones. En este caso es una función lineal por que es una linea recta que tiene punto de intercepción con el eje "y"

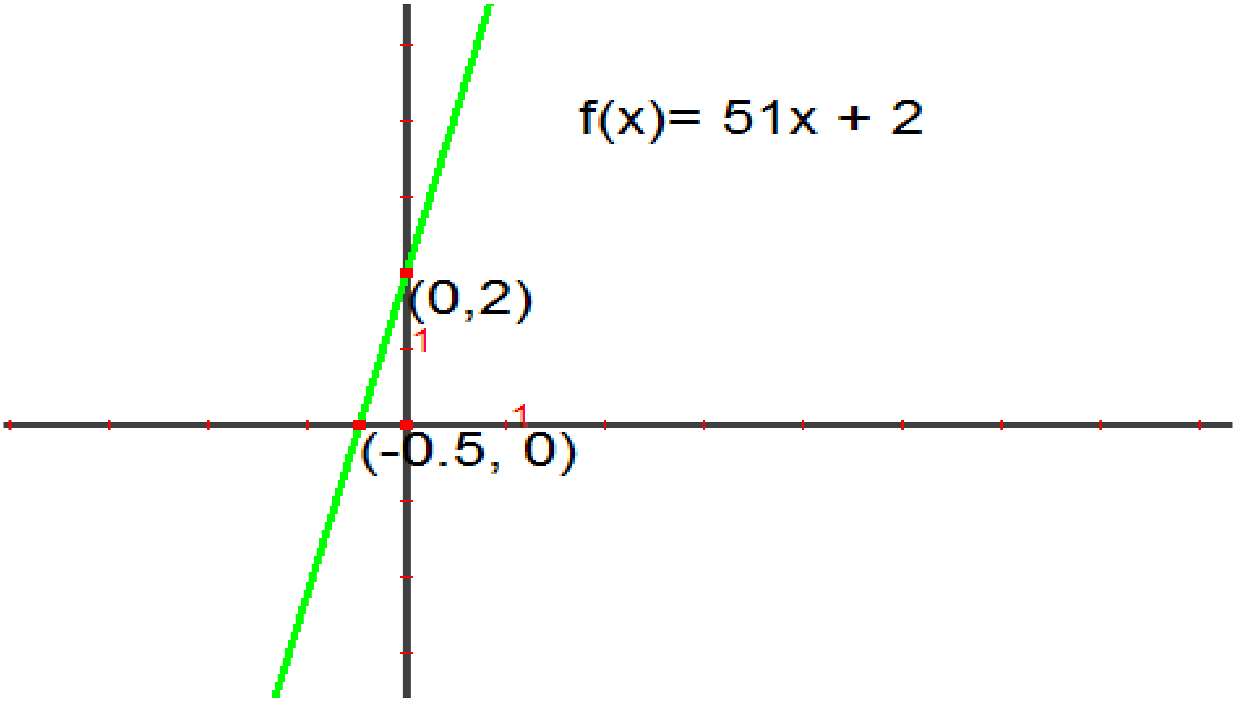
3) $F(x) = 5.1x + 2$

R/Para Construir esta espreción utilice el transportador y encontre el Angulo de inclinación + el punto de intercepción.

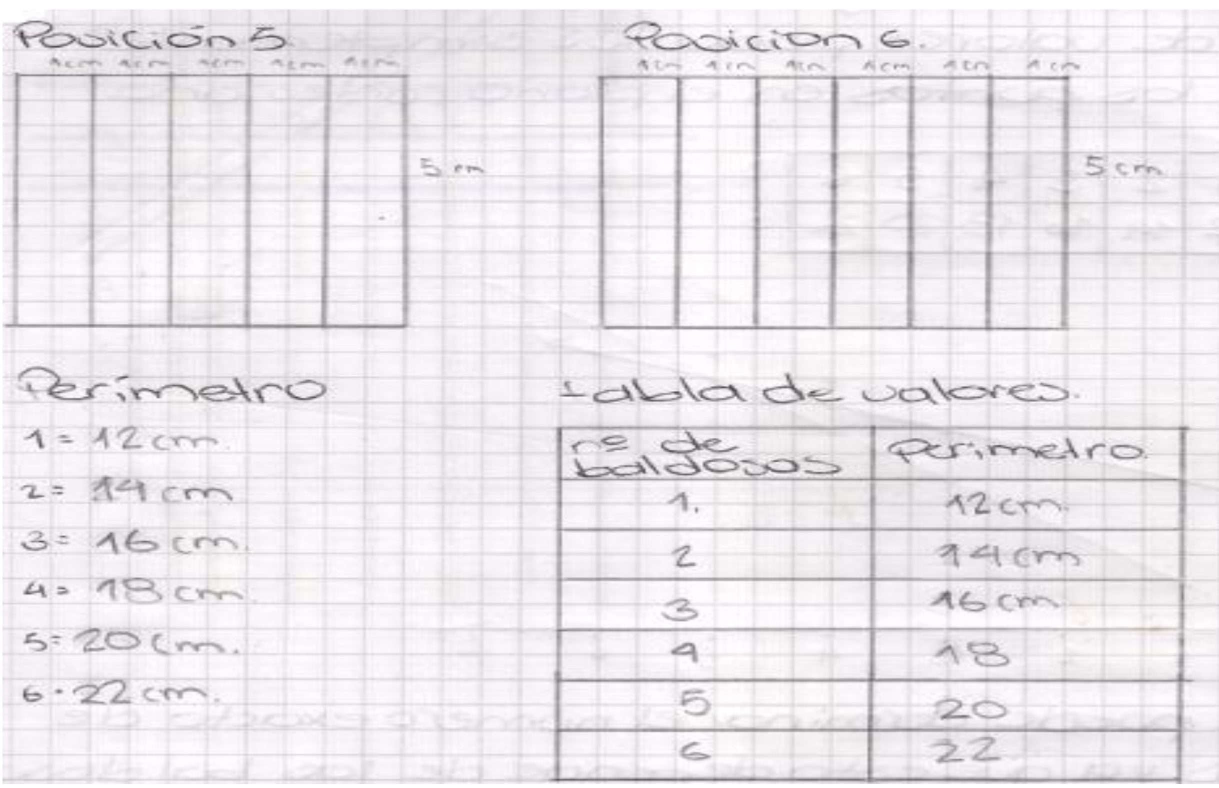
utilice CABri para graficarlo usando sus funciones para graficar una función lineal

Para poder graficar esta grafica utilice la función: F(x) 5.1x + a2 donde 5.1 es el Angulo de inclinación y a2 es el Ang el punto de intercepción.

Construcción en Cabri



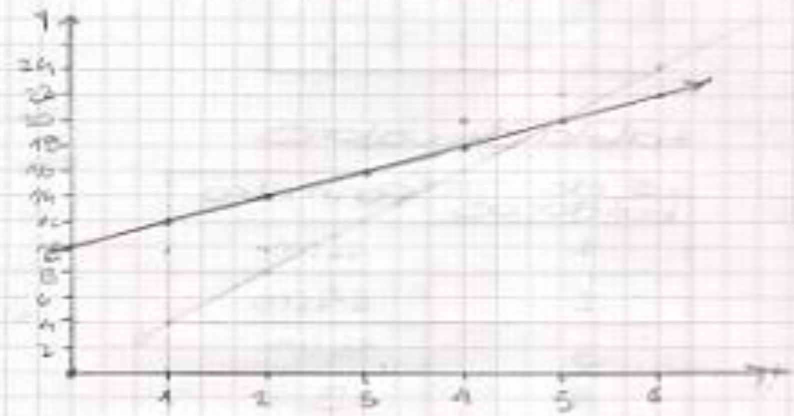
Entrevista 6 – En_6–



Justificación:
al interpretar la secuencia por simple logica complete la secuencia. Para el perimetro solo sume los lados de cada una de las posiciones. En la tabla de valores puse como variable independiente el # de baldosas ya que el perimetro depende de las mismas.

②. Si es posible graficar ya que al tener la tabla de valores podemos simplemente poner los puntos en el plano cartesiano

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	14	16	18	20	22



Si se puede derminar el número exacto de puntos ya que esto depende de las baldosas.

③ $(1, 12) - (2, 14)$

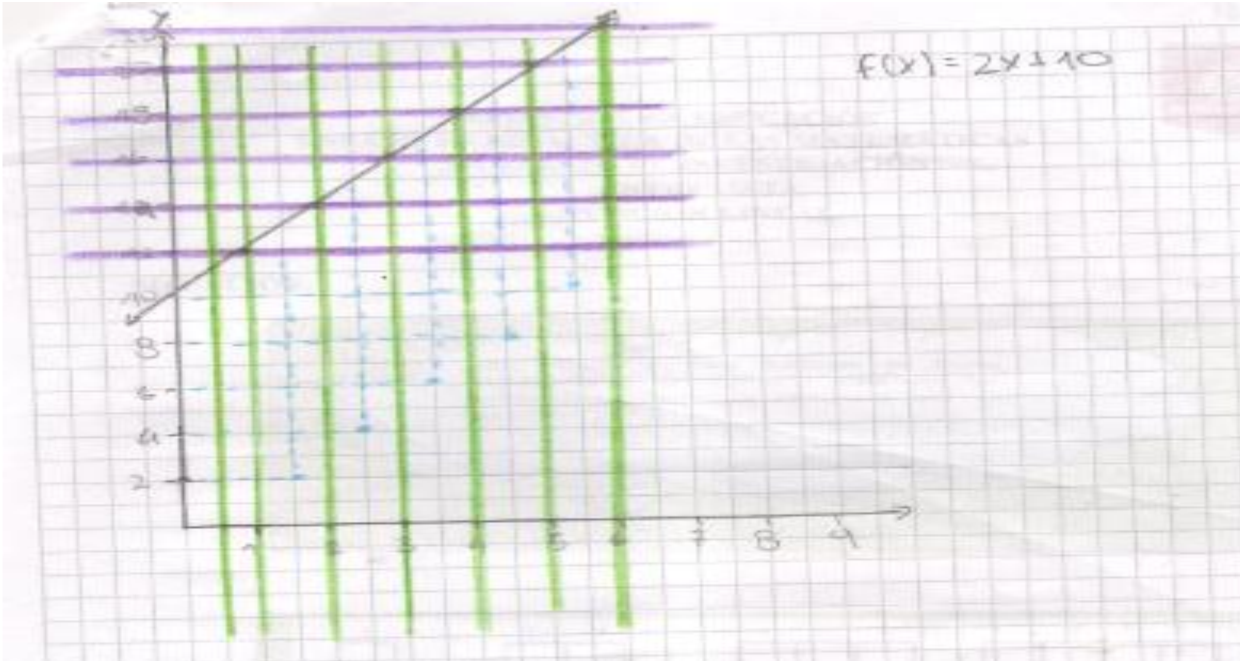
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{14 - 12}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$

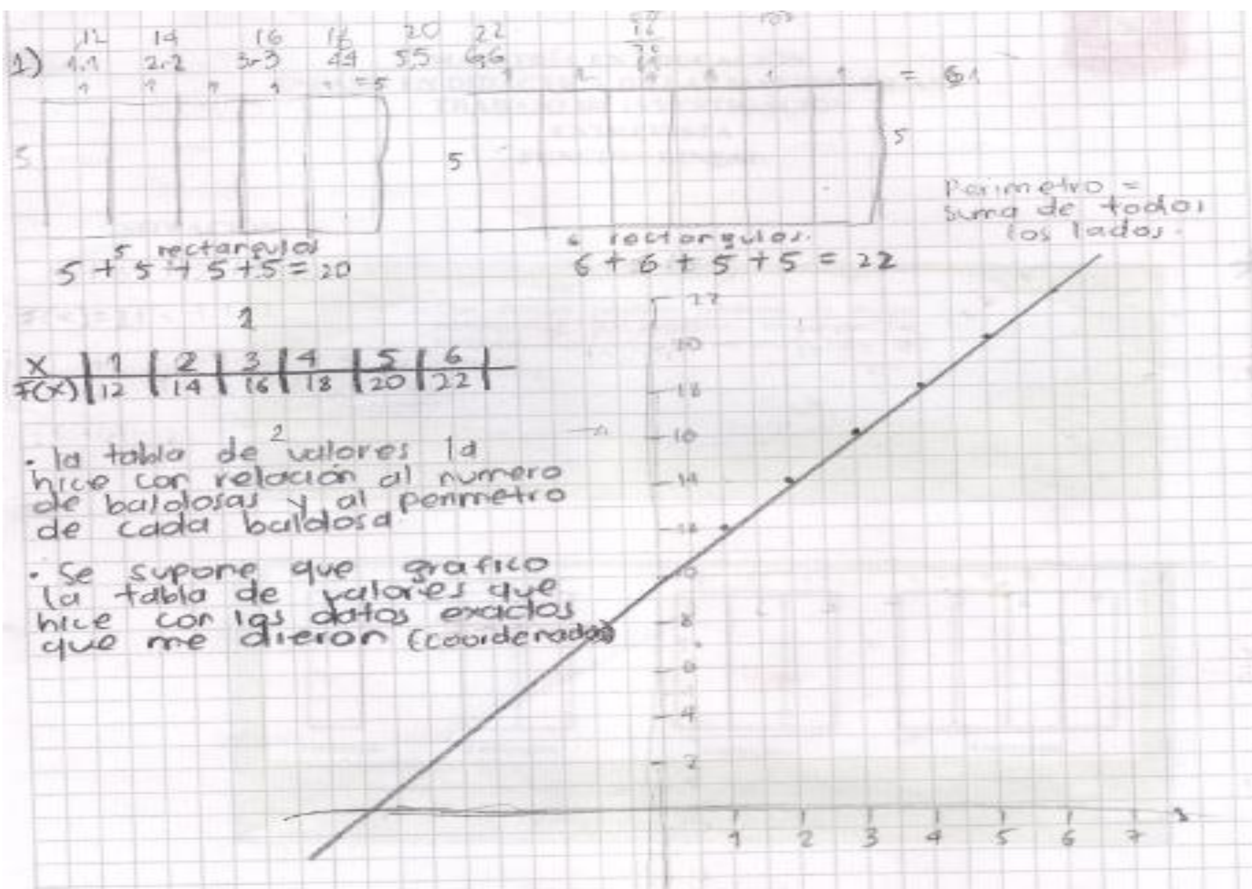
$m = 2$

$f(x) = 2x + 10$

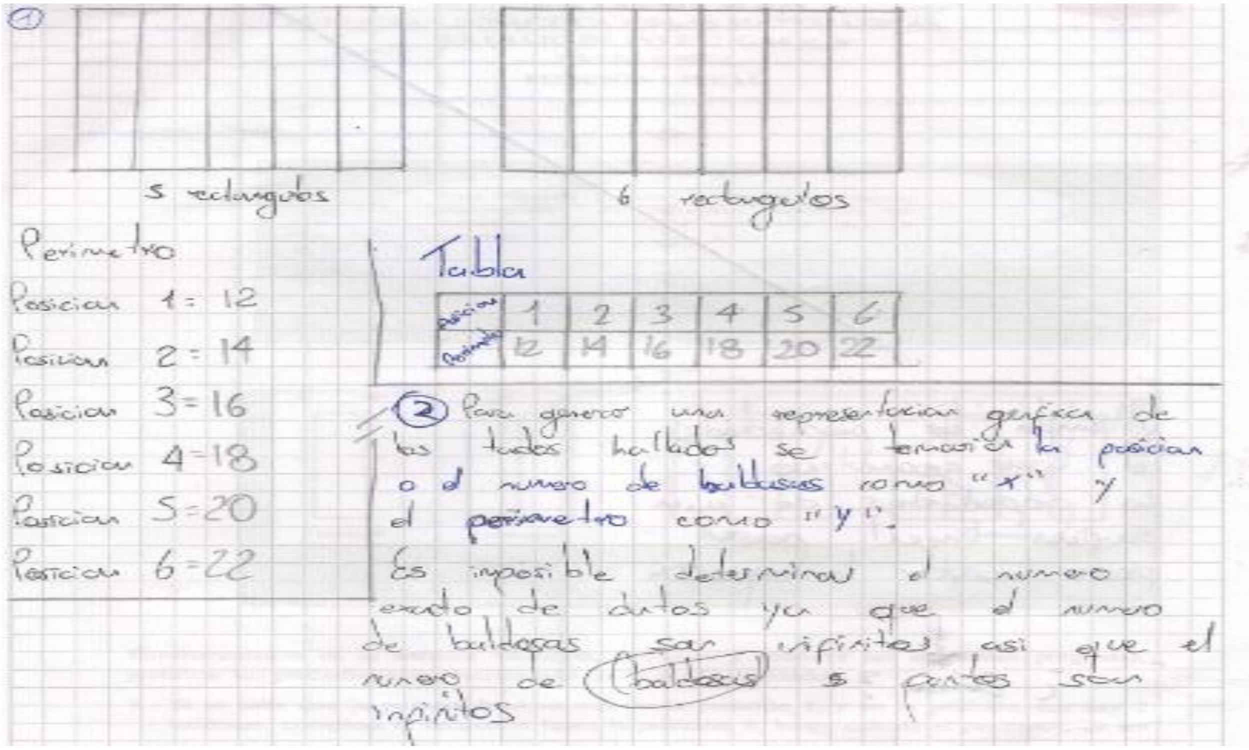
R/ Para hallar la expresion analitica es necesario saber la pendiente el punto de corte con el eje "y".

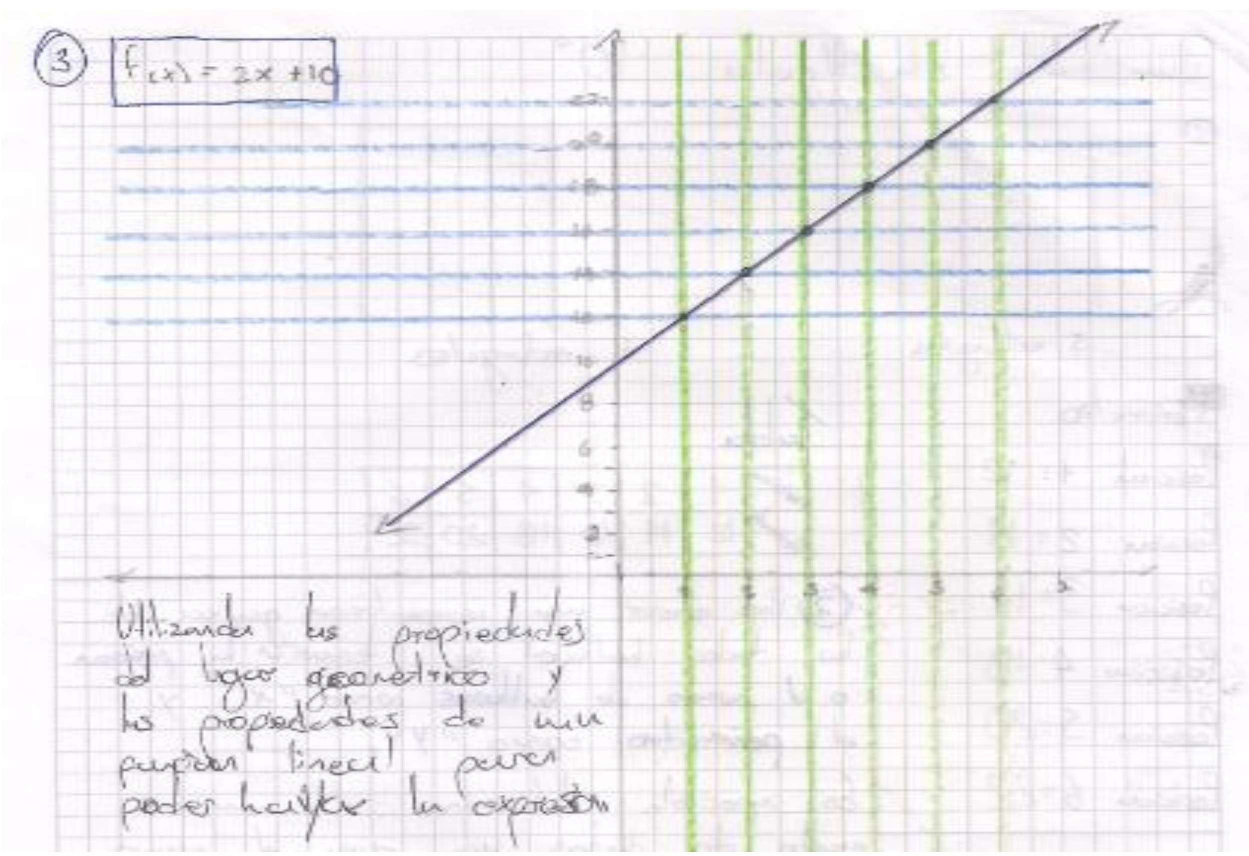


Entrevista 7 – En_7–

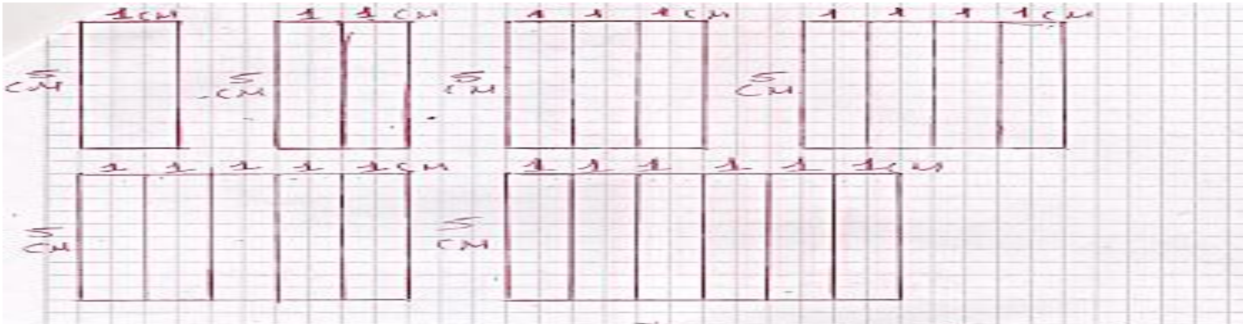


Entrevista 8 – En_8–



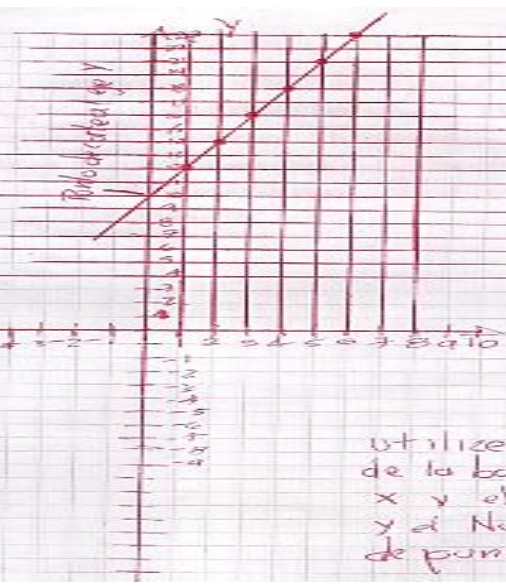


Entrevista 9 – En_9–



Posicion	# de Baldosas	Perimetro
1	1	12 CM
2	2	14 CM
3	3	16 CM
4	4	18 CM
5	5	20 CM
6	6	22 CM

X	Y
1	12
2	14
3	16
4	18
5	20
6	22



utilize la posicion de la baldosas como x y el Perimetro como y el Numero exacto de puntos es 6

$\boxed{2x+10}$ expresion analitica

halle la expresion analizando la grafica encontrando que la recta cortaba al punto y en 10 y que la pendiente era que por cada punto que avanzaba hacia la derecha subia 2 coordenadas y al se hacia la derecha es positivo dando que la expresion $\boxed{2x+10}$

ANEXO 9

REGISTRO APOSTERIORI DEL CASO 1

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato para entrevista
E1 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}}$			
E1 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}}$ $\overrightarrow{Ath\ 7_{\substack{Coordenadas\\ Cartesianas}}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{\substack{Plano\\ Cartesiano\ y\\ propiedades\\ lugar\\ geométrico}}}$	$\overrightarrow{Ath\ 5_{\substack{Propiedades\\ lugar\\ geométrico}}}$	Forma coordenadas.
E1 (P3)		X						Se queda en al AA, utiliza los elementos matemáticos de la FL (intercepto en “y” y pendiente).
E1 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{\substack{Coordenadas\\ Cartesianas}}}$				

E1 (P5)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2}_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6}_{\substack{Plano\\ Cartesiano\ y\\ propiedades\\ lugar\\ geométrico}}$		
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones** Candidato para entrevista
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E3 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1}_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}$			
E3 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2}_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}$				
E3 (P3)		X						No hubo articulación
E3 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7}_{\substack{Coordenadas\\ Cartesianas}}$				
E3 (P5)		X				$\overrightarrow{Ath\ 6}_{\substack{Plano\\ Cartesiano\ y\\ propiedades\\ lugar\\ geométrico}}$		

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato para entrevistar
E9 (P1)	X							Errores aritméticos.
E9 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				
E9 (P3)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$				Obtener más información del punto 3.
E9 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$				
E9 (P5)		X				$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		Indagar por lo estructural.
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato para entrevistar

E11 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			
E11 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				
E11 (P3)		X						No transitó
E11 (P4)		X				$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
E11 (P5)		X				$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		¿Por qué no graficó?
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato para entrevistar
E13 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			
E13 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				¿Hay claridad en lo estructural? ¿Cómo comprueba la colinealidad?

E13 (P3)		X						No transitó
E13 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
E13 (P5)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E16 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			
E16 (P2)		X						
E16 (P3)		X						
E16 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$				
E16 (P5)								No responde
PARTICIPANTE	**Modos de Pensar la Función**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**

	Lineal							
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	Candidato para entrevistar
E19 (P1)	X			$\overrightarrow{Ath\ 7}_{\text{Coordenadas Cartesianas}}$	$\overrightarrow{Ath\ 1}_{\text{Corrdenadas Cartesianas}}$			
E19 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2}_{\text{Dominio y rango}}$ $\overrightarrow{Ath\ 7}_{\text{Coordenadas Cartesianas}}$			$\overrightarrow{Ath\ 5}_{\text{Propiedades lugar geométrico}}$	
E19 (P3)		X						
E19 (P4)			X				$\overrightarrow{Ath\ 8}_{\text{Coordenadas perpend. y Colinealidad}}$ AE-SG	¿Qué criterio usó al utilizar las perpendiculares para ubicar las coordenadas?
E19 (P5)								En blanco
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	

E21 (P1)								No responde
E21 (P2)		X						No transitó
E21 (P3)		X						No transitó
E21 (P4)								No responde
E21 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E23 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			Errores aritméticos.
E23 (P2)								No responde
E23 (P3)		X						
E23 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{Coordenadas\ Cartesianas}}$				
E23 (P5)								No responde

PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E24 (P1)	X							
E24 (P2)		X		$\xrightarrow[\substack{Dominio \\ y\ rango}]{}$ $Ath\ 2$				
E24 (P3)		X						
E24 (P4)								No responde
E24 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 1	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E25 (P1)	X							Errores aritméticos.
E25 (P2)		X		$\xrightarrow[\substack{Dominio \\ y\ rango}]{}$ $Ath\ 2$				
E25 (P3)		X						No responde

E25 (P4)		X						No responde
E125 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E26 (P1)	X							Errores aritméticos
E26 (P2)		X						Errores aritméticos
E26 (P3)		X						No transitó
E26 (P4)								No responde
E26 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 1	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E27 (P1)	X							Errores aritméticos

E27 (P2)								No responde
E27 (P3)		X						No transitó
E27 (P4)								No responde
E27 (P5)								No responde

ANEXO 10

REGISTRO APOSTERIORI DEL CASO 2

PARTICIPANTE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E2 (P1)	X				$\xrightarrow[\text{Ath } 1_{\text{Corrdenadas Cartesianas}}]{}$			
E2 (P2)		X						No responde
E2 (P3)	X				$\xrightarrow[\text{Ath } 1_{\text{Corrdenadas Cartesianas}}]{}$			
E2 (P4)		X				$\xrightarrow[\text{Ath } 6 \ \text{Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico}]{}$		
E2 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	

E4 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}}$			
E4 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}}$				
E4 (P3)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}}$				
E4 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{\substack{Coordenadas\\ Cartesianas}}}$				
E4 (P5)								No Responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E5 (P1)		X			$\overrightarrow{Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}}$			
E5 (P2)		X						Errores aritméticos.
E5 (P3)								No responde
E5 (P4)								No responde

E5 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato para entrevista
E6 (P1)	X				$\xrightarrow[Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}]{}$			
E6 (P2)		X		$\xrightarrow[Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}]{}$	$\xrightarrow[Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}]{}$			
E6 (P3)								No responde
E6 (P4)		X				$\xrightarrow[Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}]{}$		
E6 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	

E7 (P1)	X							Errores aritméticos.
E7 (P2)		X						Errores aritméticos.
E7 (P3)		X						No transitó
E7 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 7_{\substack{Coordenadas\\ Cartesianas}}}$				
E7 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E8 (P1)	X							Errores aritméticos.
E8 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}}$				
E8 (P3)		X						No transitó.
E8 (P4)								No responde.
E8 (P5)								No responde.
PARTICIPANTE	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**

	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E10 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}}$			Tiene claridad que sobre la recta hay infinitos puntos al coger dos coordenadas del plano diferentes a las indicadas (puntos negros) en el plano.
E10 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{\substack{Dominio\\ y\ rango}}}$				
E10 (P3)		X						Encuentra la ecuación solicitada pero no evidencia ningún tránsito.
E10 (P4)								No responde
E10 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato a entrevista
E12 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{\substack{Corrdenadas\\ Cartesianas}}}$			

E12 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				
E12 (P3)		X						Plantea la ecuación, pero no transita.
E12 (P4)		X		$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
E12 (P5)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E14 (P1)	X							Errores aritméticos
E14 (P2)		X						Elige las opciones correctas pero no evidencia ningún tránsito.
E14 (P3)		X						Halla la ecuación pero no evidencia ningún tránsito.

E14 (P4)								No responde
E14 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato a entrevista
E15 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			
E15 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$				
E15 (P3)		X						Plantea la ecuación pero no transita.
E15 (P4)	X	X			$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$	$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$	$\overrightarrow{Ath\ 5_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$	¿Cómo construyó la gráfica en Cabri?
E15 (P5)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$		$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$	$\overrightarrow{Ath\ 8_{Coordenadas\ perpend.\ y\ Colinealidad}}$ **AE–FL→SG–FL**	¿Cuáles son los criterios para trazar la perpendicularidad?

PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E17 (P1)	X				$\overrightarrow{Ath\ 1_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			
E17 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2_{Dominio\ y\ rango}}$			$\overrightarrow{Ath\ 5_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$	
E17 (P3)		X						No responde
E17 (P4)		X				$\overrightarrow{Ath\ 6_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		
E17 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	Candidato a entrevista

E18 (P1)	X				$\overrightarrow{Ate\ 9\ \text{Punto de corte en eje "y", ,desplazamiento en " x"}}$			
E18 (P2)		X		$\overrightarrow{Ath\ 2\ \text{Dominio y rango}}$				
E18 (P3)		X						Plantea la ecuación pero no transita.
E18 (P4)		X		X			$\overrightarrow{Ath\ 7\ \text{Coordenadas Cartesianas}}$	
E18(P5)								En blanco

PARTICIPANE CASO 2	Modos de Pensar la Función Lineal			Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)				Observaciones
	SG	AA	AE	AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA –FL	AA–FL→AE–FL	SG–FL→AE–FL	
E20 (P1)	X							Errores aritméticos.
E20 (P2)		X						Errores al graficar.
E20 (P3)		X						Errores aritméticos al hallar la ecuación.
E20 (P4)		X						No transitó

E20 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E22 (P1)								No responde
E22 (P2)								No responde
E22 (P3)		X						Errores aritméticos al hallar la ecuación.
E22 (P4)		X						Presenta errores aritméticos.
E22 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E28 (P1)	X							Errores aritméticos
E28 (P2)		X						Errores aritméticos

E28 (P3)								No responde
E28 (P4)								No responde
E28(P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E29 (P1)								No responde
E29 (P2)		X						Elige la opción correcta pero no transita
E29 (P3)								No responde
E29 (P4)								No responde
E29 (P5)								No responde
PARTICIPANTE CASO 2	**Modos de Pensar la Función Lineal**			**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**				**Observaciones**
	SG	**AA**	**AE**	**AA–FL→SG–FL**	**SG–FL→AA –FL**	**AA–FL→AE–FL**	**SG–FL→AE–FL**	
E30 (P1)								No responde

E30 (P2)								No responde
E30 (P3)								No responde
E30 (P4)								No responde
E30 (P5)								No responde

ANEXO 11

REGISTRO APOSTERIORI DEL CASO 3

PARTICIPANTE	CASO 3	Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)						Observaciones
		AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA–FL	AE–FL→SG–FL	SG–FL→AE–FL	AE–FL→AA–FL	AA–FL→AE–FL	
En_1	P_2	$\overrightarrow{Art_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$		$\overrightarrow{Art_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$				El estudiante no realiza visualmente el grafico pero describe a la perfección su construcción, verificando el transito
	P_3		$\overrightarrow{Art_{Relaciones\ de\ proporcionalidad}}$		$\overrightarrow{Art_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$		$\overrightarrow{Art_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$	
PARTICIPANTE	CASO 3	Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)						Observaciones
		AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA–FL	AE–FL→SG–FL	SG–FL→AE–FL	AE–FL→AA–FL	AA–FL→AE–FL	
En_2	P_2	$\overrightarrow{Art_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$						

	P_3							
PARTICIPANTE	**CASO 3**	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_3	P_2	$\overrightarrow{Art_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$			$\overrightarrow{Art_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$			El tránsito SG-AE lo evidencia mediante la explicación escrita del procedimiento aunque no lo lleva a cabo numéricamente.
	P_3		$\overrightarrow{Art_{Corrdenadas\ Cartesianas}}$	$\overrightarrow{Art_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$		$\overrightarrow{Art_{Plano\ Cartesiano\ y\ propiedades\ lugar\ geométrico}}$	$\overrightarrow{Art_{Propiedades\ lugar\ geométrico}}$	
PA RTI CIP		**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**

		AA–FL→SG–FL	SG–FL→AA–FL	AE–FL→SG–FL	SG–FL→AE–FL	AE–FL→AA–FL	AA–FL→AE–FL	
En_4	P_2	$\overrightarrow{Art_{\substack{Corrdenadas\\Cartesianas}}}$						
	P_3		$\overrightarrow{Art_{\substack{Corrdenadas\\Cartesianas}}}$	$\overrightarrow{Art_{\substack{Plano\\Cartesiano\ y\\propiedades\\lugar\\geométrico}}}$		$\overrightarrow{Art_{\substack{Plano\\Cartesiano\ y\\propiedades\\lugar\\geométrico}}}$	$\overrightarrow{Art_{\substack{Plano\\Cartesiano\ y\\propiedades\\lugar\\geométrico}}}$	
PARTICIPANTE	**CASO 3**	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_5	P_2							Traza la gráfica de manera errada debido a que presenta dificultades para hallar las coordenadas cartesianas.
	P_3							Plantea haber usado el ángulo de inclinación pero encuentra una expresión analítica errada. No muestra

								procedimientos.
PARTICIPANTE	CASO 3	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_6	P_2	$\overrightarrow{Art}_{\substack{Corrdenadas\\Cartesianas}}$						
	P_3		$\overrightarrow{Art}_{\substack{Corrdenadas\\Cartesianas}}$ $\overrightarrow{Art}_{\substack{Punto\ de\ corte\ y\\desplazamiento}}$					
PARTICIPANTE	CASO 3	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_7	P_2	$\overrightarrow{Art}_{\substack{Corrdenadas\\Cartesianas}}$						

	P_3							
PARTICIPANTE	**CASO 3**	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_8	P_2	$\overrightarrow{Art_{\text{Corrdenadas Cartesianas}}}$			$\overrightarrow{Art_{\text{Propiedades lugar geométrico}}}$			
	P_3		$\overrightarrow{Art_{\text{Relaciones de proporcionalidad}}}$	$\overrightarrow{Art_{\text{Plano Cartesiano y propiedades lugar geométrico}}}$	$\overrightarrow{Art_{\text{Propiedades lugar geométrico}}}$	¿??		
PARTICIPANTE	**CASO 3**	**Tránsitos entre los Modos de Pensar la Función Lineal (FL)**						**Observaciones**
		AA–FL→SG–FL	**SG–FL→AA–FL**	**AE–FL→SG–FL**	**SG–FL→AE–FL**	**AE–FL→AA–FL**	**AA–FL→AE–FL**	
En_9	P_2	$\overrightarrow{Art_{\text{Corrdenadas Cartesianas}}}$			$\overrightarrow{Art_{\text{Propiedades lugar geométrico}}}$			

	P_3		$\overrightarrow{Art}_{\textit{Punto de corte y desplazamiento}}$					

ANEXO 12

PERMISOS DE LOS ESTUDIANTES QUE PARTICIPARON DE LA ENTREVISTA SEMI–ESTRUCTURADA

Institución Educativa MONSEÑOR FCO. CRISTOBAL TORO

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE MATERIAL AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO DIDÁCTICO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, LOS DOCENTES ANA LUISA MENA Y FREDY HENAO ESTUDIANTES DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante Johan David Granados [illegible], identificado(a) con tarjeta de identidad número 1001221444, alumno de la Institución Educativa MONSEÑOR FRANCISCO CRISTOBAL TORO para que su voz, aparezca en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video (audio), es evidenciar las formas como los estudiantes desarrollan y argumentan sus procedimientos cuando se enfrentan a diferentes actividades relacionadas con competencias matemáticas. Estos tendrán un uso pedagógico y didáctico y sus fines son netamente didácticos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

Jhon Fredy Granados
Nombre del padre/madre de familia o acudiente

71'669976 m
Cédula de ciudadanía

Johan David Granados
Nombre del estudiante

1001221444 9
Tarjeta de Identidad

Fecha:____ /Mayo/ 2018

Institución Educativa

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE MATERIAL AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO DIDÁCTICO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, LOS DOCENTES ANA LUISA MENA Y FREDY HENAO ESTUDIANTES DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante Laura Londoño Santana identificado(a) con tarjeta de identidad número 1.000.756.542 alumno de la Institución Educativa MONSEÑOR FRANCISCO CRISTOBAL TORO para que su voz, aparezca en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video (audio), es evidenciar las formas como los estudiantes desarrollan y argumentan sus procedimientos cuando se enfrentan a diferentes actividades relacionadas con competencias matemáticas. Estos tendrán un uso pedagógico y didáctico y sus fines son netamente didácticos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

[illegible] Santana
Nombre del padre/madre de familia o acudiente

30.578.082
Cédula de ciudadanía

Laura Londoño
Nombre del estudiante

1.000756.542
Tarjeta de Identidad

Fecha:____ /Mayo/ 2018

Institución Educativa MONSEÑOR FCO. CRISTOBAL TORO

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE MATERIAL AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO DIDÁCTICO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, LOS DOCENTES ANA LUISA MENA Y FREDY HENAO ESTUDIANTES DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante Mariana Alvarez Sanchez, identificado(a) con tarjeta de identidad número 1000440536, alumno de la Institución Educativa MONSEÑOR FRANCISCO CRISTOBAL TORO para que su voz, aparezca en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video (audio), es evidenciar las formas como los estudiantes desarrollan y argumentan sus procedimientos cuando se enfrentan a diferentes actividades relacionadas con competencias matemáticas. Estos tendrán un uso pedagógico y didáctico y sus fines son netamente didácticos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

Natalia Sánchez R — 43'165.753

Nombre del padre/madre de familia o acudiente — Cédula de ciudadanía

Mariana Álvarez Sánchez — 1000440536

Nombre del estudiante — Tarjeta de Identidad

Fecha:____ /Mayo/ 2018

Calle 43 No. 57 - 14 Centro Administrativo Nacional, CAN, Bogotá, D.C.
PBX: +57 (1) 222 2800 - Fax 222 4953
www.mineducacion.gov.co - atencionalciudadano@mineducacion.gov.co

Institución Educativa Monseñor Fco. Cristobal Toro

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE MATERIAL AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO DIDÁCTICO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, LOS DOCENTES ANA LUISA MENA Y FREDY HENAO ESTUDIANTES DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante Miguel Angel Puerta Vasquez, identificado(a) con tarjeta de identidad número 1000.760.164, alumno de la Institución Educativa MONSEÑOR FRANCISCO CRISTOBAL TORO para que su voz, aparezca en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video (audio), es evidenciar las formas como los estudiantes desarrollan y argumentan sus procedimientos cuando se enfrentan a diferentes actividades relacionadas con competencias matemáticas. Estos tendrán un uso pedagógico y didáctico y sus fines son netamente didácticos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

Alba Doris Vasquez T.	43010513
Nombre del padre/madre de familia o acudiente	Cédula de ciudadanía
Miguel Angel Puerta V.	1000.760.164
Nombre del estudiante	Tarjeta de Identidad

Fecha 23 /Mayo/ 2018

Institución Educativa Monseñor Fco. Cristóbal Toro

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE MATERIAL AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO DIDÁCTICO

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, LOS DOCENTES ANA LUISA MENA Y FREDY HENAO ESTUDIANTES DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante Yhoan Sebastian Suarez S., identificado(a) con tarjeta de identidad número 1007 053 620 alumno de la Institución Educativa MONSEÑOR FRANCISCO CRISTOBAL TORO para que su voz, aparezca en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio mencionado.

El propósito del video (audio), es evidenciar las formas como los estudiantes desarrollan y argumentan sus procedimientos cuando se enfrentan a diferentes actividades relacionadas con competencias matemáticas. Estos tendrán un uso pedagógico y didáctico y sus fines son netamente didácticos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos.

Autorizo,

Sandra Milena Sanchez — 43828632
Nombre del padre/madre de familia o acudiente — Cédula de ciudadanía

Yhoan Sebastian Suarez S. — 1007053620.
Nombre del estudiante — Tarjeta de Identidad

Fecha:____ /Mayo/ 2018