UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

LA PARÁBOLA DESDE UNA MÉTRICA DISCRETA Y UNA MÉTRICA CONTINUA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:
MAICOL DANNOBER VILLA GARZÓN
SANDRA PATRICIA GONZÁLEZ
MARISOL PÉREZ ORTIZ

TRABAJO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS
MEDELLÍN
2018

LA PARÁBOLA DESDE UNA MÉTRICA DISCRETA Y UNA MÉTRICA CONTINUA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO

AUTORES:
MAICOL DANNOBER VILLA GARZÓN
SANDRA PATRICIA GONZÁLEZ
MARISOL PÉREZ ORTIZ

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Dra. MARCELA PARRAGUEZ GONZÁLEZ

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y
HUMANAS
MEDELLÍN,
JUNIO DE 2018

DEDICATORIA

Este trabajo de Maestría, culminado con mucho esfuerzo y amor está dedicado a nuestros hijos y estudiantes, que son el motivo y la razón que nos han llevado a seguir creciendo personal y profesionalmente día a día, para alcanzar nuestros ideales. Queremos con esto dejar a cada uno de ellos una enseñanza y es que cuando se quiere alcanzar algo en la vida, no hay tiempo ni obstáculo que lo impida.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darnos la vida, la fortaleza, la salud y el amor para seguir siempre adelante sin decaer en nuestros propósitos.

A nuestras familias por ser el más grande motivo de orgullo, respeto y admiración y por ser siempre un apoyo incondicional.

A nuestros compañeros, el tutor del programa Todos a Aprender del MEN, la rectora de la Institución Educativa Las Nieves y los estudiantes del grado décimo por su valioso apoyo en el transcurso de la práctica investigativa.

Al Ministerio de Educación Nacional MEN por la oportunidad que nos brindó para capacitarnos y fortalecer nuestros conocimientos a través del programa becas de la excelencia docente

A la Universidad de Medellín y en ella, a nuestros docentes quienes, con su profesionalismo y ética puesta de manifiesto en las aulas, contribuyen al mejoramiento de nuestra labor docente.

A nuestros asesores de investigación la Doctora Marcela Parraguez González y el Doctor Luis Albeiro Zabala Jaramillo por su motivación permanente, paciencia y sabias recomendaciones las cuales fueron indispensables en todo nuestro proceso de investigación.

Y en general a todas aquellas personas que de alguna u otra forma nos contribuyeron, con su espíritu e ideas a la presentación de este trabajo.

RESUMEN

La presente investigación muestra las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y una métrica continua, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría de los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska (2000). Tomando esta teoría como referente para el marco teórico y teniendo como diseño metodológico el estudio de caso de Stake (2010), se hace un avance en dar solución a la enseñanza desarticulada de La Parábola, pues ésta se ha abordado desde el Pensamiento Analítico (o componente variacional), que hace referencia a las relaciones mediante el lenguaje de símbolos algebraicos, aislado del Pensamiento Geométrico (o componente espacial–métrico), que se refiere a las representaciones mentales del objeto en el espacio, lo cual no permite el entendimiento de La Parábola como lugar geométrico.

Con base en un rastreo histórico–epistemológico, se logró levantar los Modos de Pensar La Parábola a través de dos métricas: por un lado, fue interpretada desde una métrica discreta en la Geometría del Taxista y por otro, en una métrica continua en La Geometría Analítica; conforme a esto se diseñaron las Guías de Aprendizaje y los instrumentos para la recolección de datos y su posterior análisis.

La investigación se enmarca dentro de un contexto empírico experimental con un enfoque cualitativo conformando un estudio de caso de 15 estudiantes del grado décimo, con edades entre los 15 y 18 años pertenecientes a la Institución Educativa Las Nieves, ubicada en la ciudad de Medellín, Colombia, que presentaban buenos desempeños en el área de matemáticas, a quienes se les aplicó dos cuestionarios, –uno para cada métrica–, a partir de los cuales se logró concluir que es posible articular los Pensamientos Algebraico y Geométrico en el estudio de La Parábola desde una perspectiva discreta hacia una continua, utilizando métricas diferentes y favoreciendo con esto, la *comprensión profunda de La Parábola* y el desarrollo de las competencias escolares básicas en matemáticas.

Palabras Claves:

Parábola, Modos de Pensamiento, Geometría del Taxista, Geometría Analítica, Articuladores.

ABSTRACT

The present investigation shows the implications of the teaching and learning of the Parabola from a discrete metric measurement and a continuous metric, when implementing a Didactic Unit based on the theory Modes of Thinking by Anna Sierpinska. (2000). Taking this theory as a reference for the theoretical framework and having as a methodological design the case study of Stake (2010), an advance is made in providing a solution to the teaching of the Parabola, since this has been approached from the Analytical Thinking (or variational component), which refers to the connections through the language of algebraic symbols, isolated from the Geometrical Thinking (or spatial-metric component), which refers to the mental representations of the object in space, which does not allow the understanding of the Parabola as a geometrical place. .

Based on a historical-epistemological tracking, we managed to find out the Parabola Thinking Modes through two metric measurements: on one hand, it was interpreted from a discrete metric measurement in the Taxicap Geometry, on the other, in a continuous metric measurement in Analytic Geometry; according to these findings the workshops and the instruments for data collection were designed to be analyzed.

The research is delimited within an experimental empirical context with a qualitative approach, creating in this way a case study made of 15 students from tenth grade, with ages between 15 and 18, who study in Institución Educativa Las Nieves, located in the city of Medellin, Colombia , who had good performance in the subject of mathematics, who took two questionnaires, -one for each metric measurement-, from which it was possible to conclude that it is possible to articulate the Algebraic and Geometric Thinking in the study of the Parabola from a discrete perspective towards a continuous one, by using different metric measurements and favoring with this, the deep understanding of the Parabola and the development of the basic mathematical competences.

Parabola, Modes of Thinking, Taxicap Geometry, Analytic Geometry,

Articulate.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de La Parábola se ha dado un tratamiento excesivo al componente numérico variacional, es decir, en un pensamiento analítico, desarticulado de su correspondencia del pensamiento métrico-espacial (Contreras, Contreras y García, 2002), lo que conlleva a prácticas de aula que desarrollan concepciones erróneas del objeto matemático dificultando su entendimiento profundo y el desarrollo de las competencias básicas matemáticas.

Esta investigación plantea un avance en dar respuesta a esta problemática, con base en un modelo de enseñanza y aprendizaje de La Parábola, basado en la teoría de los Modos de Pensamiento, cuyo desarrollo se presenta en los siguientes 6 capítulos:

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo inicia presentando la problemática de investigación, soportada en una búsqueda documental de investigaciones que han tratado aspectos asociados a los contenidos curriculares, prácticas de aula y concepciones erróneas en la enseñanza de La Parábola. Como resultado de este rastreo bibliográfico se encontraron también otros trabajos que muestran la enseñanza de La Parábola desde otras perspectivas teóricas, lo que permitió fundamentar la pertinencia de la presente investigación. Posterior al planteamiento de la problemática y los antecedentes, se presentan la pregunta y objetivos que trazarán la ruta para el desarrollo de todo el cuerpo del trabajo investigativo.

CAPÍTULO 2. ASPECTOS HISTÓRICOS –EPISTEMOLÓGICOS DE LA PARÁBOLA

En este capítulo se muestra una exploración de cómo fue la construcción conceptual de La Parábola a lo largo de diferentes momentos históricos, iniciando con los tres grandes problemas de la Matemática, pasando por las conceptualizaciones desde la Geometría clásica en manos de Menecmo y Apolonio, así como los primeros tratamientos de esta curva desde el Álgebra de Vieta, donde se soluciona la ruptura epistemológica que dio lugar al concepto actual de La Parábola como lugar geométrico, que se desarrolla desde la Geometría Analítica gracias a Descartes y Fermat. Estos aspectos históricos–epistemológicos sirvieron como fundamento para levantar los Modos de Pensar La Parábola y para el planteamiento de las actividades a implementar durante las fases del diseño metodológico.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

Este capítulo es el que fundamenta todo el proceso de investigación, en él se presenta la teoría Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska (2000) como el referente teórico a partir del cual se exponen los diferentes Modos de Pensar La Parábola tanto en la

Geometría del Taxista, como en la Geometría Analítica. Así mismo, se plantean los articuladores hipotéticos que permitirían el tránsito entre los diferentes Modos de Pensamiento en cada una de estas métricas –la discreta y la continua–. Estos Modos de Pensar La Parábola fueron el soporte de los análisis a priori y a posteriori que se realizaron para los cuestionarios, así como también de las actividades propuestas en la Unidad Didáctica.

CAPÍTULO 4. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo, se describen las características de la investigación, así como el diseño metodológico del estudio de casos. Se presentan también, las diferentes etapas de investigación, cuál es su intencionalidad y cómo se van a desarrollar. Las etapas contemplan el análisis documental, donde se incluyen los antecedentes y el marco teórico; el diseño de las Guías de Aprendizaje y los cuestionarios con su respectivo análisis a priori; las intervenciones en el aula de clase, tanto con las Guías como con los cuestionarios y, por último, el análisis de los resultados.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo, se presenta el análisis a posteriori de los cuestionarios aplicados a los estudiantes del caso de estudio. Teniendo como referente los planteamientos teóricos, se indaga en las respuestas dadas por los estudiantes, con el fin de validar los Modos de Pensamiento de La Parábola que prevalecen, así como los articuladores hipotéticos planteados en el análisis a priori. Para dar cuenta del proceso, se toma evidencia de las respuestas de los estudiantes y se hace una descripción de los hallazgos sobre los aspectos teóricos que sobresalen en éstas, con el fin de concluir si las preguntas cumplieron con su intencionalidad de mostrar el tránsito que realizan los estudiantes entre los diferentes Modos de Pensar La Parábola, tanto en la Geometría del Taxista como en la Geometría Analítica.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

Este capítulo, corresponde a la etapa final de investigación, pues es donde se recoge todos los aspectos relevantes del trabajo investigativo y se establecen conclusiones a la luz del marco teórico soportadas en las evidencias documentales y en las aplicaciones realizadas; se validan los instrumentos de intervención, tanto las Guías de Aprendizaje y los cuestionarios, que posteriormente permitirán la construcción de la Unidad Didáctica.

Índice

CAPÍTULO 1 12
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN 12
1.1 PROBLEMÁTICA 13
1.2 ANTECEDENTES 16
1.3 HIPÓTESIS 20
1.4 PREGUNTA PROBLEMA 20
1.5 OBJETIVO GENERAL 20
1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 20
1.7 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 21
CAPÍTULO 2 22
ASPECTOS HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA PARÁBOLA 22
2.1 CONTEXTO HISTÓRICO 23
2.2 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 28
CAPÍTULO 3 30
MARCO TEÓRICO 30
3 MARCO TEÓRICO 31
3.1 LA TEORÍA 31
3.2 MODOS DE PENSAR LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA 33
3.2.1 ARTICULADORES DE LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA 34
3.3 MODOS DE PENSAR LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. 35
3.3.1 ARTICULADORES DE LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA 36
3.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 37
CAPÍTULO 4 38
DISEÑO METODOLÓGICO 38
4.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN 39
4.2 PARTICIPANTES 39
4.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN. 40
4.3.1 ETAPA 1. REVISIÓN DOCUMENTAL. 40
4.3.2 ETAPA 2. DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI. 41
4.3.3 ETAPA 3. INTERVENCIÓN Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS. 42
4.3.4 ETAPA 4. ANÁLISIS A POSTERIORI. 42
4.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO 43

CAPÍTULO 5 44
ANÁLISIS DE DATOS 44
5.1 ANÁLISIS A PRIORI 45
5.1.1 CUESTIONARIO I. GEOMETRÍA DEL TAXISTA 45
5.1.2 ANÁLISIS A PRIORI CUESTIONARIO II. GEOMETRÍA ANALÍTICA. 49
5.2 ANÁLISIS A POSTERIORI 54
5.2.1 ANÁLISIS A POSTERIORI CUESTIONARIO 1 GEOMETRÍA DEL TAXISTA 55
5.2.2 ANÁLISIS A POSTERIORI CUESTIONARIO II GEOMETRÍA ANALÍTICA. 69
5.3 HALLAZGOS CUESTIONARIO I EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA 80
5.4 HALLAZGOS CUESTIONARIO II EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. 84
5.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO. 85
CAPÍTULO 6 86
CONCLUSIONES 86
6.1 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN 87
6.2 CONCLUSIONES DESDE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN 87
6.2.1 DESDE EL OBJETIVO GENERAL 87
6.2.2 DESDE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS 88
6.3 CONCLUSIONES DESDE LO EPISTEMOLÓGICO 88
6.4 CONCLUSIONES TEÓRICAS 89
6.5 CONCLUSIONES DESDE LA UNIDAD DIDÁCTICA 90
6.6 CONCLUSIONES DE ABORDAR LA PARÁBOLA DESDE UNA MÉTRICA DISCRETA Y UNA MÉTRICA CONTINUA 91
6.7 PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN 92
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 94
ANEXO 1 98
INTENCIONALIDAD Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APRENDIZAJE GEOMETRÍA DEL TAXISTA 98
INTENCIONALIDAD Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APRENDIZAJE GEOMETRÍA ANALÍTICA 106
ANEXO 2 111
UNIDAD DIDÁCTICA 111
ANEXO 3 123
EVIDENCIAS DE LOS CUESTIONARIOS APLICADOS 123

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La problemática de investigación se centra en entender los paradigmas de enseñanza y aprendizaje alrededor del objeto matemático La Parábola definida como “el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ que equidistan de un punto fijo F llamado foco y una recta fija L llamada directriz” (Arancibia y Mena, 2007, p. 395). Para esto se realizó una exploración documental de investigaciones y tesis que presentan elementos importantes en la enseñanza de las cónicas, que permitió construir las siguientes categorías:

1. Pensamiento variacional desarticulado del pensamiento espacial.

2. Componente curricular.

3. Prácticas de aula.

4. Concepciones erróneas de La Parábola.

El siguiente esquema presenta un resumen de las categorías y las fuentes consultadas que sustentan la problemática de investigación:

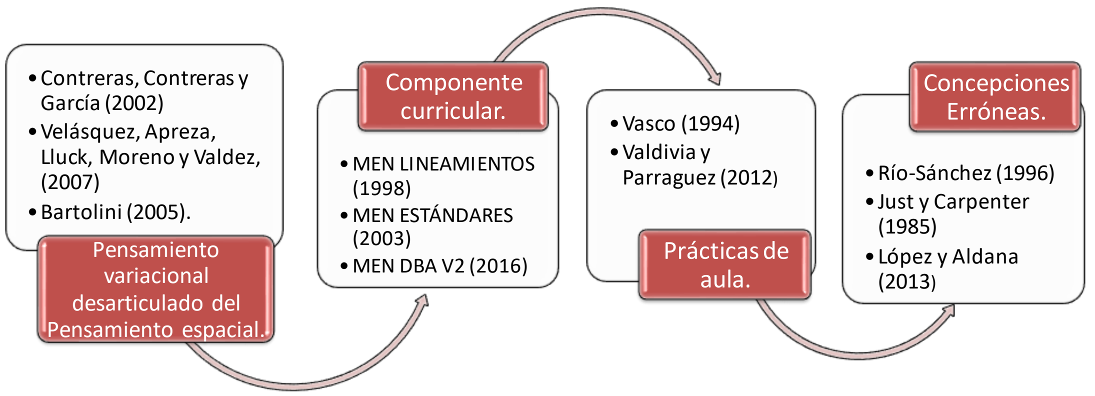


Figura 1. Categorías que sustentan la problemática de investigación.

1.1 PROBLEMÁTICA

Contreras, Contreras y García (2002), manifiestan que en la enseñanza de las cónicas se ha dado un tratamiento excesivo al componente numérico variacional, es decir, en un pensamiento analítico, *desarticulado* de su correspondencia del pensamiento métrico-espacial, lo que conlleva al estudiante a memorizar ecuaciones carentes de sentido y significados, idea que también está sustentada por Gómez y Carulla (2000), citado en López y Aldana (2013), en donde amplían que los estudiantes tienen dificultad para relacionar diversas escrituras algebraicas dado que carecen de procesos de análisis que no les permiten relacionar de forma lógica una representación algebraica y una geométrica.

De otra parte, Velásquez, Apreza, Lluck, Moreno y Valdez, (2007), citados en Fernández (2011), exponen que la manera tradicional de presentar la Geometría Analítica ha afectado negativamente su aprendizaje dado que esta mirada clásica, aborda los contenidos desde un punto de vista algebraico descuidando la formación de procesos y actitudes en los estudiantes, presentando dificultades para mirar las figuras geométricas como objetos y viceversa, además presentan que este enfoque no contribuye a desarrollar las habilidades matemáticas como los son el comprender, el visualizar y el comunicar.

Apoyando las ideas antes expuestas, Bartolini–Bussi (2005), citado en Fernández (2011) señala que:

> No es posible construir el significado de las cónicas a través de un único enfoque, como, por ejemplo, el más difundido, el algebraico. Esto debido a que no es suficiente con estudiar los aspectos analíticos dado que una gran cantidad de significados se pierde con solo este enfoque. (p. 39)

Además, Fernández (2011), sostiene que no se debe dejar de lado el sistema lógico deductivo de axiomas, postulados, definiciones y teoremas que se fueron desarrollando antes de Descartes, es decir, estas construcciones geométricas históricas permitirán mejorar el razonamiento y la comunicación de los saberes matemáticos buscando una mediación entre el pensamiento variacional y el pensamiento espacial.

Estas conclusiones presentadas abren el camino para darle una mirada histórica al contexto educativo colombiano con el fin de encontrar la desarticulación entre los pensamientos variacional y geométrico.

Desde el *Componente Curricular*, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN–, durante los últimos años, ha priorizado mejorar los procesos educativos, para lo cual ha implementado una serie de políticas tanto en cobertura como en calidad. En este último aspecto ha trabajado en dos componentes básicos, uno en la formación de los docentes y otro en el mejoramiento del componente curricular. En lo que respecta a éste, el primer paso se dio con la implementación de los Lineamientos Curriculares en el año 1998, entendiéndose éstos como las orientaciones pedagógicas y curriculares que se deben tener en cuenta en el momento de elaborar los Proyectos Educativos Institucionales –PEI– y sus correspondientes planes de estudios en los diferentes ciclos, niveles y áreas.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son orientadores y dependerán de la comprensión y el desarrollo investigativo de las comunidades educativas, pues se consolidan como un marco de referencia "en la cual se utilizan los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa" (MEN, 2003, p. 48).

Para el objeto matemático La Parábola, no aparece de manera formal en ninguna parte de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y así los demás objetos, por lo cual se requirió de una legislación que les diera mayor concreción a estos lineamientos, de manera que las instituciones escolares contaran con una información común para formular sus planes de estudio, respetando su autonomía. Dicha legislación se incorporó en el 2003 con Los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas, los cuales constituyen una guía que permite promover y orientar los procesos curriculares frente a aquello que los estudiantes deben aprender para saber y saber hacer en un nivel en particular.

Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2003), están estructurados de manera secuencial, por ciclos y pensamientos, pero no sugieren metodologías ni didácticas para el aprendizaje de los objetos matemáticos. En el caso de La Parábola se propone en los grados octavo y noveno, en el pensamiento variacional y en el grado décimo en el pensamiento espacial; esta estructura presenta una desarticulación entre pensamientos y ciclos que no permite su entendimiento profundo al no considerar La Parábola de una manera holística en todos sus componentes.

Como los Lineamientos Curriculares y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, de alguna manera quedaban en manos de la cualificación del docente para desarrollar el objeto matemático en particular, el MEN presentó en el año 2016 los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas –DBA v.2– como un mínimo requerido por el sistema educativo nacional, con saberes estructurantes de carácter obligante y que se regularizan por grado.

A pesar de la coherencia entre los DBA v.2 y los Estándares Básicos de Competencias, persiste la problemática de que el objeto matemático se enseña de una manera desarticulada, lejos de obtener una comprensión profunda del mismo; dificultad que se evidencia en el desempeño de los estudiantes en las pruebas estandarizadas aplicadas por el MEN, denominadas Pruebas Saber que son "evaluaciones aplicadas periódicamente para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica en Colombia, como seguimiento de calidad del sistema educativo" (MEN, 2010, p. 1)

La mirada fragmentada del objeto matemático previamente justificada en los estándares de competencia se ven reflejadas en las *prácticas de aula*; desde la experiencia docente los contenidos geométricos han quedado en un segundo plano en el plan de estudios, de hecho, hay una tendencia a dejar estos temas para el final del periodo o se enseñan de manera aislada de los demás pensamientos, tal y como lo sustenta Vasco (1994):

> Las reformas a las Matemáticas escolares de los años cincuenta y sesenta eliminaron la geometría como curso paralelo al álgebra; relegaron los temas geométricos para el final de los programas, en donde corrieron el riesgo de quedar sepultados por no llegarse nunca hasta allá en el desarrollo real de los programas en la mayoría de los establecimientos, y trataron de remplazar las pruebas de tipo sintético por elegantes pruebas de tipo algebraico que utilizaban poderosos teoremas del álgebra lineal, o de tipo analítico que aprovechaban propiedades de las funciones utilizadas para describir los lugares geométricos. (p. 187)

Esta tendencia desarticulada no le da una mirada global al objeto matemático, en el caso puntual de La Parábola, los esfuerzos se centran en un planteamiento algebraico con miras a desarrollar las ecuaciones de segundo grado y las funciones cuadráticas marginando los lugares geométricos, idea sustentada por Valdivia y Parraguez (2012).

Por último, Río–Sánchez (1996), citado en Fernández (2011), encuentra las siguientes *concepciones erróneas* sobre la parábola en un estudio realizado a 305 estudiantes españoles de una edad promedio de 17 años:

- ✓ La parábola se puede dibujar perfectamente utilizando sólo la regla y el compás.
- ✓ Una parábola no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia, por lo que esta concepción lleva a pensar que una curva no tiene infinitas ecuaciones según el sistema escogido, sino una sola ecuación.
- ✓ Los estudiantes no perciben relación entre La Parábola y la realidad.

- ✓ Las propiedades intrínsecas de La Parábola se obtienen de manera equivocada, es decir, los estudiantes manifiestan que una Parábola puede ser un arco con dos semirrectas tangentes en sus extremos. (p. 24)

Just y Carpenter (1985), citados en López y Aldana (2013), exponen que hay un reconocimiento de los estudiantes de las figuras cónicas desde un componente gráfico, pero al involucrar las propiedades, características y las aplicaciones de las curvas, éstos responden de manera incorrecta.

En conclusión, el sistema categorial de causas raíces asociadas a la problemática permite tener un panorama amplio de las diversas dificultades que han podido generarse a través de los años en la enseñanza aprendizaje de La Parábola, y cómo estas implicaciones han dificultado su *entendimiento profundo* y el desarrollo de las competencias básicas matemáticas.

1.2 ANTECEDENTES

La enseñanza de las Matemáticas ha abierto diversos caminos de investigación, no sólo sobre la construcción epistemológica de los objetos matemáticos sino también sobre su didáctica y esto precisamente es lo que ha permitido transformar las prácticas de aula.

Sobre el objeto matemático La Parábola, se han realizado varias investigaciones con registros que se pueden encontrar en tesis de pregrado, maestría y doctorado. A partir del rastreo bibliográfico realizado, se seleccionaron para el marco de antecedentes, ocho investigaciones cuyas publicaciones están comprendidas entre los años 2011 y 2016, en contextos como Chile, Perú, Argentina y Colombia. Se agruparon en tres categorías y en cada una se resaltan los aspectos que aportan a esta investigación.

En la primera categoría relacionada con el marco teórico Modos de Pensamiento, no se encontraron estudios propiamente del objeto matemático La Parábola. Sin embargo, se destacan dos trabajos realizados bajo este enfoque teórico que contribuyen al estudio de las cónicas utilizando otras métricas, sirviendo como referencia para la presente investigación, pues en éstos se logra adecuar y trabajar con otros objetos matemáticos este marco teórico que inicialmente estaba planteado por Sierpinska para elementos del Álgebra Lineal. Adicionalmente presentan otras métricas como la Geometría del Taxista que también fundamenta el desarrollo de las actividades planteadas en esta investigación.

En esta línea Bonilla (2012), en su tesis de maestría "*La Elipse desde la perspectiva de la teoría los Modos de Pensamiento*", plantea que el tratamiento analítico de la Elipse a través de ecuaciones cartesianas no permite su comprensión profunda, es decir, no facilita relacionar las distintas definiciones como sección cónica o como lugar geométrico y sostiene que "el sistema escolar carece de una real conexión entre los enfoques sintético y analítico de la geometría" (Bonilla, 2012, p. 10).

Para tratar de dar solución a esta problemática, realiza un estudio de caso sobre la comprensión del concepto Elipse con un grupo de 10 estudiantes entre 16 y 18 años de un establecimiento educativo chileno que ya habían estudiado las cónicas en sus cursos. A partir de la aplicación de diferentes cuestionarios donde los estudiantes daban cuenta de qué tipo de pensamiento predominaba al resolver ciertos planteamientos relacionados con dicha cónica, concluye que éstos logran una mayor comprensión del concepto cuando se enfrentan a situaciones donde interactúan los tres Modos de Pensar.

Basados en esta investigación Bonilla, Parraguez y Solanilla (2013), presentan para el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática –CIBEM–, una propuesta didáctica para el tratamiento de todas las cónicas –circunferencia, parábola, elipse e hipérbola–, utilizando como sistema de referencia el plano en la Geometría del Taxista. Sostienen que el trabajo con esta métrica "favorece la comprensión de los objetos matemáticos, a través de sus definiciones como estructuras, situación que trasciende a las representaciones" (Bonilla *et al*., 2013, p. 673). Además, permite que los estudiantes transiten entre los distintos Modos de comprender las cónicas: como figuras que las representan en el plano, como pares ordenados que satisfacen una ecuación y como lugar geométrico (Bonilla *et al*., 2013).

Una segunda categoría del marco de antecedentes agrupa investigaciones que han abordado el estudio de La Parábola desde otras teorías, con las cuales no sólo se amplía la perspectiva en términos teóricos y metodológicos, sino que se evidencia la pertinencia de estudiar La Parábola desde el Marco teórico y con el enfoque en las dos métricas que se plantea en esta investigación.

Una primera perspectiva es presentada por Lara (2016), en su tesis de maestría *"La Parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la teoría de registros de representación semiótica"* donde aborda el estudio de la parábola como lugar geométrico en Ambientes de Geometría Dinámica –AGD– para la formación continua de profesores de matemáticas. Se sustenta en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue, para plantear una secuencia de actividades con el uso del software Geogebra con el fin de establecer patrones en los elementos de La Parábola, la construcción de sus ecuaciones canónicas, así como sus transformaciones de acuerdo con el sistema de representación bien sea gráfico, algebraico y analítico y la coordinación entre éstos. A partir de las aplicaciones y análisis de dichas secuencias, el autor encuentra que el uso del software facilita "la movilización de los diversos saberes geométricos desde una perspectiva distinta al enfoque algebraico y ello permitió que los profesores comprendieran mejor las relaciones que hay en las propiedades de La Parábola como lugar geométrico" (Lara, 2016, p. 135). Sostiene que se alcanza una mayor comprensión del objeto matemático desde la coordinación entre al menos dos tipos de representación semiótica pues se logra la movilización de las nociones sobre el concepto.

Por su parte, López y Aldana (2013) en su tesis de doctorado "*La comprensión del concepto de parábola: un estudio de caso*" abordan la manera como los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Universidad del Quindío comprenden el concepto de Parábola y las dificultades que tienen en su construcción conceptual. Apoyados en el marco teórico de las situaciones didácticas de Chevallard junto con la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue y el uso del software Geogebra, diseñan y aplican un conjunto de secuencias didácticas, cuyo análisis posterior los lleva a concluir que los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones y por esto tienen dificultad en relacionar las diversas representaciones –algebraica, geométrica y gráfica–; así mismo, aseveran que cuando se proponen actividades sobre cónicas que involucran la movilización de sus representaciones, características y propiedades, se evidencian dificultades de interpretación y reconocimiento de sus elementos. A partir de esto aseguran que la implementación de secuencias de enseñanza mediadas por entornos informáticos permite crear los ambientes de aprendizaje necesarios para que los sujetos se apropien de forma consciente, real y progresiva del concepto de Parábola.

Del mismo modo, Moncayo, Pantoja y Fernández (2012), en su propuesta didáctica "*Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus*" exponen una experiencia de aula que aporta a la didáctica de la geometría escolar, a través de una secuencia de actividades que constituyeron un elemento motivador y facilitador a los estudiantes de grado noveno, en la comprensión del concepto de Parábola como lugar geométrico al interactuar con el ambiente Cabri Géomètre II Plus. El marco teórico utilizado fue la metodología de micro-ingeniería didáctica de Artigue y las situaciones didácticas de Brousseau. La experiencia estimuló en los estudiantes procesos cognitivos como la exploración, observación, realizar conjeturas y la verificación de las propiedades, lo cual les facilitó la conceptualización de La Parábola como lugar geométrico; a partir de esto los autores concluyen que, al implementar diferentes situaciones mediadas por el uso del software, los estudiantes logran interactuar con relaciones geométricas y otros conceptos desde una perspectiva dinámica lo que les permite hacer una transición entre la percepción visual y la construcción teórica llevándolos a conectar las representaciones algebraicas y gráficas con las representaciones geométricas.

Por último, Valdivia y Parraguez (2012) en el artículo para el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa –CLAME– dan a conocer su investigación "*Evolución cognitiva del concepto parábola como Lugar geométrico: una mirada desde la teoría APOE*" en la cual realizan un estudio sobre la construcción del concepto parábola -como lugar geométrico- y sus elementos principales. La investigación se lleva a cabo con 5 estudiantes de una universidad chilena y se enmarca bajo la teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto y Esquema–, como marco teórico y metodológico; además utilizan tres métricas distintas: la euclidiana, la del taxista y la del máximo, con el propósito de poder identificar y analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes en el proceso de construcción del objeto Parábola –como lugar geométrico– y describir su evolución. Los resultados que surgen de esta investigación dan cuenta de tres aspectos fundamentalmente: el primero, los cambios que se producen en la forma geométrica de La Parábola cuando es estudiada con métricas distintas a la usual; segundo, que sus elementos permanecen invariantes ante una u otra métrica que se utilice y tercero que, en alguna medida, se ha perdido la definición de Parábola como un lugar geométrico, ya que el concepto queda asociado a una figura geométrica determinada o a una ecuación cuadrática. De aquí entonces que no se logre una relación entre la representación algebraica y la forma geométrica del concepto.

Una última categoría donde se enmarcan los antecedentes corresponde a las estrategias metodológicas en la enseñanza de las Cónicas, considerando el hecho de que La Parábola es una de estas curvas. Las investigaciones aquí citadas, presentan esta temática desde la modelación hasta el uso del material concreto y permiten ampliar la forma como se puede abordar el objeto matemático diversificando las actividades de intervención en el aula para favorecer una mayor comprensión en los estudiantes.

El primer aporte de esta categoría se encuentra en Pérez (2012), quien en su tesis de maestría "*Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica*" conceptualiza la Elipse, Parábola e Hipérbola con una perspectiva geométrica teniendo como referente teórico los principios de la Educación Matemática Realista del matemático holandés Hans Freudenthal. Mediante el diseño e implementación de una unidad didáctica para los estudiantes de décimo grado, plantea el estudio de las aplicaciones de las cónicas desde tres situaciones: cortes del cono, captura del cono y cónicas desplazadas, y utiliza la formulación y resolución de problemas cotidianos relacionados con éstas, mediante el proceso de *modelación*, apoyado también del software Graph. La metodología consiste en el análisis de la situación, identificar los aspectos relevantes, relacionar sus componentes y traducirlos entre los diferentes sistemas de representación, permitiendo así establecer conexiones entre los sistemas verbal, visual-gráfico, algebraico y numérico. Esta estrategia permite observar y determinar regularidades y propiedades como la reflexión y excentricidad de las curvas, como parte fundamental del estudio de estos conceptos matemáticos desde una visión analítica.

Por su parte, Santa, Bedoya y Jiménez (2007) en su trabajo de pregrado "*Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características*" abordan el problema de que "la enseñanza tradicional del tema secciones cónicas no permite una verdadera apropiación y aplicación del conocimiento en los estudiantes" (Santa *et al.*, p. 10). Para dar la solución al problema realizan su estudio con 50 estudiantes del grupo 10°C de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado con edades entre los 14 y 17 años. Para esto se apoyan en la Concepción Constructivista del Aprendizaje escolar y diseñan la estrategia del doblado de papel aplicado en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la construcción de las secciones cónicas, a partir de la elaboración de guías que permiten, mediante un instructivo, construir las diferentes secciones cónicas y estudiar las características más relevantes de las mismas. Los autores concluyen que "proveer un material gráfico que guía la construcción e identificación de las características más relevantes de las secciones cónicas, se puede utilizar como mediador para promover procesos de visualización más elevados en diferentes contextos" (Santa *et al*., p. 176) ya que permite hacer una transición entre lo concreto y lo abstracto en el estudio de estas curvas al considerarlas como lugar geométrico con infinitos puntos dada la imposibilidad de doblar infinitamente el papel; del mismo modo se da un acercamiento de lo discreto a lo continuo desde la construcción manual hasta la conceptualización y estudio de propiedades en el plano cartesiano. Dejando esto evidencia de que los estudiantes logran generalizaciones a partir de la interacción con material concreto.

Un último aporte en esta categoría lo realiza Ramírez (2013), en su trabajo de especialización "*Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico*" donde presenta un tratamiento de las secciones cónicas desde dos aspectos: el primero, corresponde a un recorrido histórico en el que muestra la construcción de las cónicas desde las ideas más intuitivas hasta su formalización, retomando para esto diferentes enfoques teóricos y prácticos. El segundo aspecto está relacionado con el análisis de un texto escolar, con el propósito de establecer cuál es la forma en que se presentan las secciones cónicas en éste, cuáles son las situaciones problema que se plantean para abordarlas, así como los conceptos y procedimientos asociados. Todo lo anterior con el objetivo de proponer algunas ideas diferenciadoras para la enseñanza de las cónicas en la educación secundaria, entre éstas, el uso de software de geometría dinámica, pues permiten un mejor abordaje y entendimiento de las cónicas a partir de la combinación de distintos registros –gráfico, simbólico, verbal– y a partir de esto concluye que "la inserción de nuevas herramientas promueven un mejor entendimiento y construcción de conceptos, a la vez que invitan a la exploración, en busca de propiedades y características singulares de cada cónica o de sus elementos" (Ramírez, 2013, p. 51)

Este análisis de antecedentes proporciona soportes para considerar que la problemática planteada en la investigación ha sido motivo de estudio en otros contextos y que es por medio de la Didáctica de las Matemáticas, que se producen las estrategias necesarias para dotar de significado el aprendizaje de los objetos matemáticos. Para el caso de la presente investigación se adopta la teoría Modos de Pensamiento de Ana Sierpinska (2000), la cual estará definida en el capítulo 3 y como producto de esta tesis se tendrá la construcción de una unidad didáctica que según Sanmartí, (2000) es el conjunto de actividades estructuradas y relacionadas en torno a unos ejes articuladores para lograr objetivos establecidos.

1.3 HIPÓTESIS

Esta investigación se propone articular desde los Modos de Pensamiento las interpretaciones del objeto matemático La Parábola desde una métrica discreta en la Geometría del Taxista y desde una métrica continua en La Geometría Analítica.

1.4 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua en el grado 10° al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias matemáticas?

1.5 OBJETIVO GENERAL

Analizar el tránsito que propicia una modelo de enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua, al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en los Modos de Pensamiento (Sintético–Geométrico, Analítico–Aritmético y Analítico–Estructural), en las prácticas de aula.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Caracterizar los Modos de Pensamiento para la enseñanza y el aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua.
- ✓ Diseñar una Unidad Didáctica que propicie el tránsito entre los Modos de Pensamiento en los procesos enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua.

- ✓ Implementar actividades de aula para los estudiantes del grado 10º que propicien el tránsito entre los Modos de Pensamiento en la práctica de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua.

1.7 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El estado del arte presentado en este capítulo fundamenta que la enseñanza de La Parábola ha sido pensada desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas buscando las estrategias que permitan a los estudiantes, comprenderla en todas sus concepciones. Se considera pertinente adoptar para la investigación el marco teórico Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska (2000), el cual proporciona elementos importantes para resolver la problemática de la enseñanza desarticulada del objeto matemático, que sólo ha generado aprendizajes aislados unos de otros llevando a los estudiantes a prevalecer en el pensamiento geométrico y en sus representaciones algebraicas (Parraguez, 2012) sin lograr una comprensión global y profunda que, a su vez, fortalezca el desarrollo de competencias matemáticas en el aula.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA PARÁBOLA

Considerando la importancia de la historia para reconocer las construcciones conceptuales del hombre alrededor de los objetos matemáticos, se hará un recorrido por los diferentes aportes que llevaron a la formalización de La Parábola como lugar geométrico, centrando la atención en los elementos que dieron inicio al desarrollo de las cónicas. Sin embargo, en esta búsqueda es posible encontrar algunas nociones que están asociadas a La Parábola y que, de una u otra manera, constituyen una base conceptual importante en su epistemología.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Basados en el trabajo de Campos (2003), Lemus, Ponce y Reyes (s.f), refieren que los tres problemas históricos de las Matemáticas: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, constituyeron una base fundamental en la epistemología de La Parábola; fueron pensados por varios matemáticos de la época, entre ellos Hipócrates de Quío (siglo V a. c.) quien realizó la primera contribución importante a los problemas de cuadrar el círculo y duplicar el cubo, pero sus demostraciones incluían métrica, es decir, no se podían hacer con una regla no graduada y un compás, lo cual se convertía en un obstáculo para la geometría de entonces dado que la regla y el compás se consideraban como las únicas herramientas válidas para hacer las demostraciones, pues los entes geométricos ideales eran, según Platón, la recta y la circunferencia.

Según los autores, en la búsqueda por resolver estos problemas matemáticos, los griegos descubren *La cuadratriz*, que se le atribuye al sofista Hipias de Elis hacia finales del siglo V a. c., con la cual planteó una solución al problema de la trisección del ángulo y un siglo más tarde, Dinostrato y Nicomedes ratifican el uso de esta curva para solucionar la cuadratura del círculo. Sin embargo, esta curva "tuvo sus críticas por suponer como conocida la propiedad buscada, que se requería saber la relación entre una línea y un arco de círculo" (Lemus, Ponce y Reyes, s. f, p. 4)

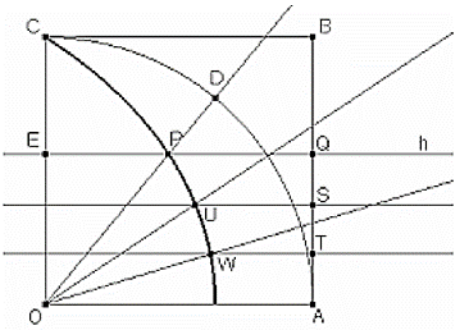


Figura 2. La cuadratriz. (Lemus *et al.*, s.f, p. 3)

Con relación a la duplicación del cubo, fue Hipócrates quien desarrolló una idea para la solución a este problema:

> Encontró que si entre dos rectas, una doble de la otra, se insertan dos medias proporcionales, se duplicará el cubo, el cual se convirtió en una dificultad en otra no menor. Él resuelve el problema al hallar la intersección de dos parábolas o una parábola y una hipérbola (Lemus *et al.*, s. f, p. 5)

Esta quizá es una de las primeras apariciones de La Parábola, anterior al estudio de Apolonio sobre las secciones cónicas, cuyo descubrimiento, según González (2007) se le atribuye a Menecmo, hermano de Dinostrato, hacia el año 350 a. c. En la búsqueda de una mejor solución a la duplicación del cubo, este matemático descubre las curvas que se conocieron entonces como la *Tríada de Menecmo*, que más adelante recibirían el nombre de Parábola, Elipse e Hipérbola en el trabajo de Apolonio.

De acuerdo con Mora (2010), Menecmo utilizó procedimientos aritméticos y algebraicos que lo llevaron a plantear dos soluciones, una basada en las propiedades de La Parábola y la Hipérbola juntas, y la otra en las propiedades de La Parábola, coincidiendo ambas en que la solución a la duplicación del cubo quedaba reducida a un problema de medias proporcionales. A continuación, se muestra una de las soluciones planteadas por Menecmo, traducida al lenguaje de la Geometría Analítica actual:

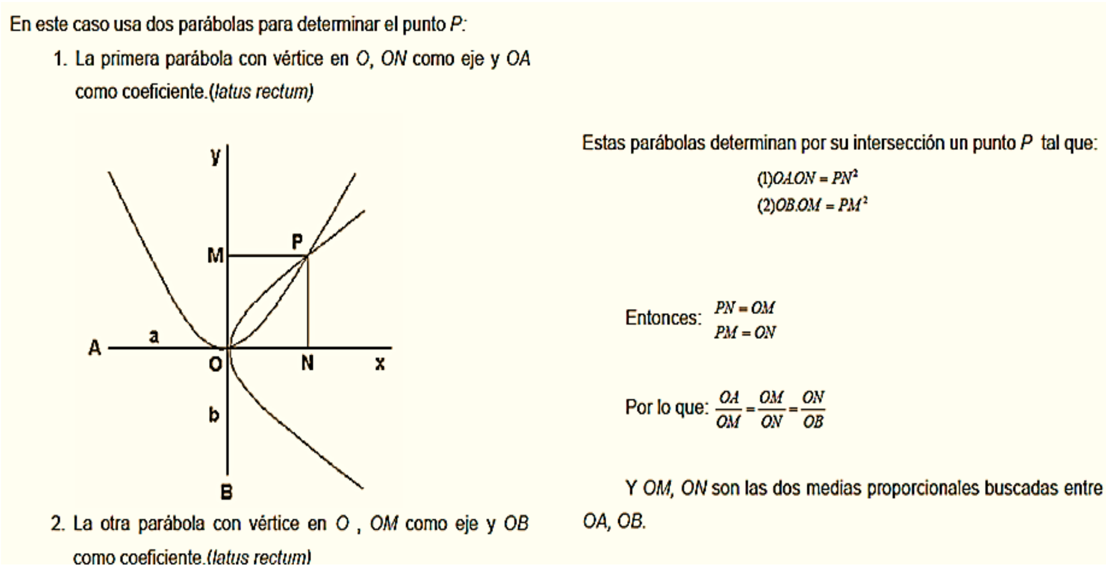


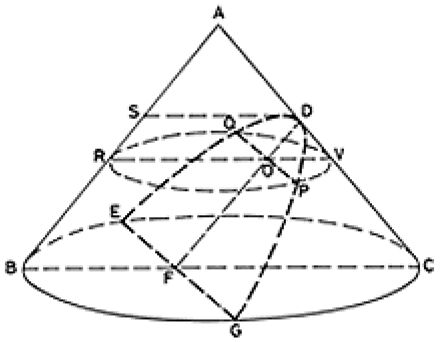
Figura 3. Solución de Menecmo de la duplicación del cubo a partir de las propiedades de La Parábola. (Mora, 2010, p. 21-22)

De este modo, tratando de encontrar curvas cuyas propiedades le permitieran resolver el problema de la duplicación del cubo, introduce las cónicas "obtenidas como sección por un plano perpendicular a una generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice sea agudo, recto u obtuso; por eso La *Parábola* fue llamada *sección de cono rectángulo"* (González, 2007, p. 207; Tapia, 2002, p. 3).

Es de aclarar que para el tiempo en que se descubren estas curvas, se desconocía el simbolismo algebraico, sin embargo, logra aplicar técnicas para abordarlas sin tener un sistema de coordenadas lo que, según González (2007), da indicios a algunos historiadores de que este geómetra ya tenía algunas nociones de Geometría Analítica. Según Boyer (1986), Menecmo plantea las primeras expresiones relacionadas con La Parábola, partiendo de relaciones proporcionales así:

> Sea ABC el cono y sea EDG la curva que se obtiene al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D a la generatriz ADC del cono. Por un punto cualquiera P de la curva sección pasa un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia

PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva (la Parábola) con esta circunferencia.



Por razones de simetría se tiene que $PQ \perp RV$ en el punto O, de modo que OP es la media proporcional entre RO y OV. Por tanto $OP^2 = RO \cdot OV$.

Ahora, de la semejanza de los triángulos OVD y BCA se tiene que $\frac{OV}{DO} = \frac{BC}{AB}$ y de la semejanza de los triángulos SDA y ABC se tiene que $\frac{SD}{AS} = \frac{BC}{AB}$

Tomando $OP = y$ y $OD = x$, como «*coordenadas*» del punto P, se tiene que $y^2 = RO \cdot OV$, de modo que sustituyendo:

$$y^2 = OP^2 = RO \cdot OV = SD \cdot OV = AS \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AS \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

En vista de que los segmentos AS, BC y AB son los mismos para todos los puntos P de la curva EQDPG, podemos escribir la *ecuación de la curva* o «*sección del cono rectángulo*» en la forma $y^2 = lx$, donde *l* es una constante que más tarde se llamaría el «*latus rectum*» (p. 133)

De esta manera logra mostrar que las cónicas tenían "importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas –equivalentes a nuestras *ecuaciones*–, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades" (González, 2007, p. 207).

Posterior a estos hallazgos, Tapia (2002) expone que el siguiente en escribir sobre las cónicas es Aristeo a finales del siglo IV a. c. En su obra *Los lugares Sólidos,* que Según Boyer (1986) era el nombre griego para las secciones cónicas, se refiere a La Parábola como *sección del cono de ángulo recto*; se categorizan además los lugares geométricos en tres tipos: los *lugares planos,* los *lugares lineales* y los *lugares sólidos,* describiendo estos últimos como "aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos" (Tapia, 2002, p. 21). De acuerdo con Boyer (1986), el hecho de que las cónicas no se consideraran como lugares planos, según la clasificación en la obra de Aristeo, inducía a pensar que el tratado de éstas se hacía con figuras en el espacio y no en el plano.

También a finales del siglo IV a. c., Euclides hace sus aportes al desarrollo geométrico a partir de su obra *Los Elementos*, donde "no estaba incluido el estudio de las cónicas ni de las curvas planas superiores, porque esto formaba parte de la matemática más avanzada" (Boyer 1986, p. 145). Sin embargo, su contribución fue importante para la geometría griega dado que el Álgebra Geométrica que presenta en su Libro II, se consolidó como "un eficaz instrumento para la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante el método de la Aplicación de las áreas". (González, 2007, p. 206).

Varios autores coinciden en la posibilidad de que Euclides se refiriera a las cónicas en otra de sus obras, pero, que al igual que los escritos de Aristeo, no se hallaron registros posteriores, quizá porque fueron completados más adelante por Apolonio.

Más adelante las propiedades de las cónicas fueron retomadas por Arquímedes, cuyos escritos muestran su dominio en el estudio de estas curvas al considerar que "era posible determinar cualquier tipo de cónica a partir de cualquier cono que tuviera secciones circulares" (Coolidge, 1968 citado en Lugo, 2014, p. 9). El trabajo con las cónicas permitió a Arquímedes un estudio exhaustivo de las propiedades de La Parábola y el trabajo con el cálculo de áreas, de allí que en el libro *Sobre las espirales*, desarrolla un tratado de *La cuadratura de La Parábola*, donde demuestra que "el área K de un segmento parabólico APBQC, es igual a cuatro tercios del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura" (Boyer, 1986, p. 174).

Cabe aclarar que Arquímedes no utiliza el nombre de Parábola, sino el de "*Ortotoma*" o "sección de cono rectángulo", como la llamaba Menecmo y como la llamarían sus predecesores al igual que las otras secciones, según las descripciones de cómo habían sido descubiertas, "*Oxitoma*" o "sección de un cono agudo" y "*Amblitoma*" o "sección de un cono obtuso" (Boyer, 1986).

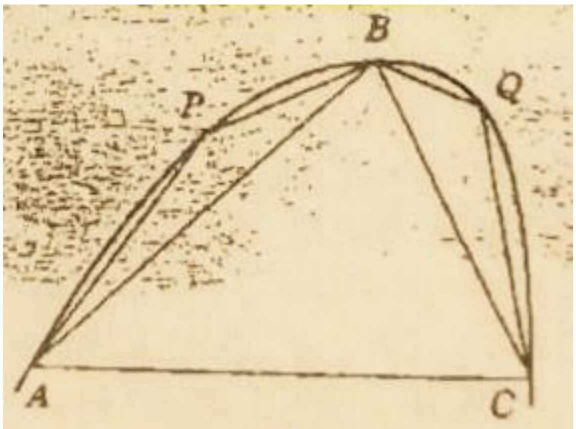


Figura 4. Trabajo de Arquímedes sobre La cuadratura de La Parábola (Boyer, 1986, p. 174)

Los hallazgos que habían realizado Menecmo, Aristeo, Euclides y Arquímedes son retomados de una manera más organizada y con un lenguaje más sintetizado por Apolonio de Perga hacia el 240 a. c. en su obra *Las Cónicas*, cuyos primeros cuatro libros constituyen una introducción elemental sobre estas curvas, que hasta entonces habían sido tratadas a partir de diferentes tipos de conos según el ángulo del vértice fuera agudo, recto u obtuso. Por esto, la primera contribución de Apolonio fue demostrar que las tres secciones se podían obtener a partir de un mismo cono al variar la inclinación del plano que lo secciona, incluso podía no ser un cono circular recto, podía considerar también el cono circular oblicuo o escaleno y por ende las propiedades de cada curva permanecían invariantes. (C.f., González, 2007; Tapia, 2002; Boyer, 1986).

De acuerdo con Boyer (1986), adaptando la terminología utilizada por los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas a partir de la aplicación de áreas, Apolonio asigna los nombres de las secciones cónicas como se les conoce:

> *Ellipsis,* que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado –u otra figura dada–. Mientras que la *Hyperbola* –de "avanzar más allá"– se adoptó para el caso en que el área excedía el segmento dado y, por último, la palabra *Parábola* –de "colocar al lado" o "comparar"– indicaba que no había ni deficiencia ni exceso. (p. 195)

Según González (2007), "el cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes", pero estos procedimientos eran considerados por Apolonio dentro de un sistema coordenado inseparable a cada curva, utilizando algunas líneas de referencia –diámetro tangente o diámetros conjugados–, en función de las cuales define las propiedades geométricas de cada una, equivalentes a su definición como lugar geométrico, pero aún no estaban definidas en un sistema para todos los puntos del plano.

Pese a estas limitaciones, la obra de Apolonio es considerada "el primer hito en la Historia de la Matemática sobre la aplicación de coordenadas al estudio de las propiedades de las curvas" (González, 2007, p. 208), pues sin tener las herramientas con que se cuenta actualmente de la Geometría y el Cálculo, logra profundizar en el estudio de las secciones cónicas dando paso a la generalización que más tarde constituirían los fundamentos de la Geometría Analítica.

Por otro lado, González (2007), expone que el geómetra griego Pappus, hacia el siglo IV d. c., recopila en su obra *La Colección Matemática* todas las explicaciones de la geometría griega que se tenían hasta su época. Presentó también algunas soluciones propias a los problemas de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, así como una clasificación definitiva de los problemas geométricos en *planos, lineales y sólidos*, siendo estos últimos aquellos que pueden resolverse a partir de cónicas, lo que dio paso a nuevos estudios que extienden las propiedades de las secciones cónicas definiéndolas como lugares geométricos en relación a un punto y a una recta, razón por la cual se atribuye a este matemático la primera mención del *foco* de La Parábola y de las *directrices* de las secciones cónicas, tal y como se enuncia en el siguiente teorema de su autoría:

> TEOREMA 1. El Lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón entre las distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es constante, es una sección cónica. Si la razón es igual a la unidad la sección será una parábola, si la razón es menor que la unidad sería una elipse y si es mayor una hipérbola. (Heath, 1921 citado en Lugo 2014, p. 12)

Junto con este y otros teoremas, se plantea también el conocido *Problema del lugar geométrico de las n rectas,* que ya había sido pensado por Apolonio para el caso de cuatro rectas y cuya solución no era otra cosa que una cónica. Sin embargo, en un análisis más profundo, Pappus "propone una generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta" (González, 2007, p. 211), siendo esta una solución que dio paso al posterior desarrollo de la Geometría Analítica.

A pesar de esta gran contribución, González (2007), plantea que el trabajo de Pappus estaba desprovisto aún del método sintético y no sería hasta la aparición de Vieta en 1591 que se tendrían los elementos algebraicos necesarios para abordar el tratamiento de problemas geométricos complejos, gracias a que "las cantidades simbólicas, al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico" (González, 2007, p. 217)

Según González (2003), en el *Arte Analítica*, Vieta perfecciona el álgebra Sincopada de Diofanto, pasando de las proporciones al planteamiento de ecuaciones, al introducir *los parámetros* que permitían obtener "la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas en relación con los parámetros" (González, 2003, p. 11). Sin embargo, en el trabajo que hace este matemático no se encuentra el uso de coordenadas, por esto, en las aplicaciones no aparecen representaciones gráficas de ecuaciones en un sistema coordenado.

Vieta, a diferencia de sus antecesores, contaba con las herramientas algorítmicas del Álgebra Simbólica que le permitió reconstruir el Análisis geométrico clásico; su trabajo fue una base fundamental para desarrollo que posteriormente harían Descartes y Fermat, conjugando dos elementos: la introducción de coordenadas y el Álgebra Simbólica aplicados a lugares definidos por una ecuación de dos variables, permitiendo así el estudio de ecuaciones a través del significado de las curvas y del mismo modo, el estudio de las curvas definidas por ecuaciones. (C.f. González, 2003; Hernández, 2002)

De acuerdo con González (2007), el trabajo realizado por Fermat y Descartes fue la síntesis de todo el desarrollo matemático de los siglos XVI y XVII, de los cuales destacan los aportes de Apolonio sobre las secciones cónicas y de Vieta con el Álgebra Simbólica. Tanto "*La Isagoge* de Fermat como *La Geometría* de Descartes tienen su anclaje en la Geometría griega, pero se plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales" (González, 2007, p. 221).

De manera simultánea, ambos desarrollaron aspectos complementarios de la Geometría Analítica, así pues, "mientras que Descartes comúnmente empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente" (Hernández, 2002, p. 40)

2.2 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El análisis Histórico-Epistemológico de La Parábola permite evidenciar la construcción conceptual que tuvo que desarrollarse para consolidar las propiedades que permiten estudiarla en la actualidad como lugar geométrico. Es importante resaltar que los primeros hallazgos dan cuenta de un pensamiento geométrico dominante que permitió fundamentar las raíces históricas de este objeto matemático. Posteriormente, se da el desarrollo de un pensamiento de tipo aritmético y a partir de un estudio más exhaustivo, los matemáticos de la época descubren características de esta curva como sección cónica, que gracias a los aportes del Álgebra, pudieron sintetizarlas y representarlas a partir de ecuaciones, pero sólo con el desarrollo de la Geometría Analítica este lenguaje algebraico dotó de rigurosidad y significado el estudio de estas curvas, para finalmente reconocer su estructura como lugar geométrico, permitiendo así que sus aplicaciones se extendieran a campos como el Cálculo y la Física.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Teniendo como referente la problemática de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de La Parábola, se considera pertinente adoptar la teoría Modos de Pensamiento propuesta por Sierpinska (2000), como fundamento para el Marco Teórico, porque proporciona los elementos necesarios para la *comprensión profunda* de este objeto matemático; además, permite describir e interpretar los Modos de Pensar que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las relaciones que logran establecer entre ellos.

3 MARCO TEÓRICO

Los Modos de Pensamiento es una teoría de la Didáctica de las Matemáticas propuesta por la doctora Anna Sierpinska, quien, a partir de un estudio realizado con estudiantes de nivel superior, identifica algunas dificultades en los procesos de razonamiento de conceptos del Álgebra Lineal y a partir de allí, realiza aportes teóricos para interpretar dichas dificultades.

Esta teoría postula que existen tres Modos de Pensar los conceptos asociados al Álgebra lineal: Analítico-Aritmético –**AA**–, Sintético-Geométrico –**SG**– y Analítico-Estructural –**AE**–, que pueden verse como "el resultado de una superación de dos posiciones dogmáticas opuestas: una, que rechaza los números dentro de la geometría y la otra, que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético" (Parraguez, 2012 p. 15). Estos Modos no constituyen un desarrollo secuencial del pensamiento algebraico, más bien cada uno es igualmente útil al momento de hacer referencia a un objeto matemático de acuerdo con su propósito y según el contexto en el que se pretenda abordar.

3.1 LA TEORÍA

Los Modos de Pensamiento, hacen referencia a "las formas de ver y entender los objetos matemáticos. Estos dependen de los tipos de relaciones y objetos que evoquemos al momento de pensar en un objeto algebraico o al intentar resolver una situación matemática" (Parraguez 2012, p. 21). De esta manera, los objetos matemáticos adquieren un significado conforme al Modo en el que se esté desarrollando.

De acuerdo con Pinto y Parraguez (2015), la teoría de Modos se desarrolla a partir de dos tipos de pensamiento:

> un *pensamiento práctico*, definido como una acción inmediata entre el sujeto y el objeto, alusivo a hechos observables y un *pensamiento teórico*, referido a la comprensión como la reflexión de los resultados de una acción, que considera la producción de sistemas conceptuales internos coherentes, sustentados en un sistema lógico de signos, por tanto, reflexivo, sistémico y analítico. (p. 613)

Estos dos pensamientos constituyen la base para los Modos Sintético y Analítico, que según Parraguez (2012) se diferencian en que, en el primero, los objetos son descritos de manera natural, representados con la figura correspondiente sin necesidad de definir las propiedades, mientras que, en el Modo Analítico los objetos son construidos por la definición de sus propiedades, relaciones numéricas o simbólicas.

Anna Sierpinska identifica tres Modos de Pensamiento que implican maneras de análisis diferentes, clasificándolos de la siguiente forma: el Sintético-Geométrico que se relaciona con el pensamiento práctico y los Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural, que se relacionan con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000, citada en Parraguez, 2012).

A continuación, se describe de manera detallada cada uno de los Modos de Pensamiento:

El Modo Sintético-Geométrico –SG– permite que los objetos matemáticos se puedan analizar desde una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc., resaltando que en este Modo es fundamental la visualización (Parraguez, 2012). Este Modo de Pensamiento va de la mano con el modelo cognitivo de razonamiento geométrico, donde se plantea que los procesos son posibles gracias a la interacción de la visualización, la construcción y el razonamiento. (Duval, 1998, citado por Cifuentes, 2011).

El Modo Analítico-Aritmético –AA– presenta los objetos matemáticos por medio de "relaciones numéricas", donde, el plano cartesiano ya se ve como puntos formados por parejas ordenadas de números reales que satisfacen ciertas condiciones, que son escritas mediante ecuaciones o desigualdades (Parraguez, 2012). Este Modo plantea la posibilidad de interpretar el objeto desde otro punto de vista, lo que implica poner en consideración elementos que no están presentes en el Modo **SG** por considerar otras relaciones que no son de tipo espacial.

El modo analítico-estructural –AE– define los objetos matemáticos por medio de propiedades y axiomas que "sintetizan los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales" (Parraguez, 2012, p.21), lo que llevaría a plantear que es un Modo de Pensar más avanzado donde se exigen otras relaciones, buscando generalizar elementos que ya se habían considerado en los modos **SG** y **AA**.

Cada uno de estos Modos de Pensamiento constituye un camino para abordar los objetos matemáticos, "aunque la coordinación y tránsito entre ellos, permite, por un lado, un pensamiento más versátil, y por otro, ver diferentes facetas del objeto matemático, ofreciendo diferentes aspectos según el registro donde se ubique" (Parraguez, 2012, p. 17), lo cual dotará de herramientas heurísticas al estudiante para resolver problemas.

Cabe mencionar que, aunque la teoría los Modos de Pensamiento fue diseñada por Sierpinska para describir la comprensión de objetos matemáticos del Álgebra Lineal, en esta investigación se hace una extensión de ella a otros a objetos matemáticos –que no son propios del Álgebra Lineal–, pero que se pueden interpretar desde este constructo teórico.

Para levantar los Modos de Pensar La Parábola se tuvo en cuenta el estudio de la problemática, el análisis de antecedentes y los aspectos históricos-epistemológicos desarrollados en los capítulos anteriores, por lo cual se plantea la caracterización de este objeto matemático desde dos sistemas de referencia: la ***Geometría del taxista*** (ver figura 5) y la ***Geometría Analítica*** (ver figura 8), dando cumplimiento con esto al primer objetivo de la investigación.

3.2 MODOS DE PENSAR LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA

Según Bonilla *et al*. (2013) "la Geometría del Taxista es una estructura matemática (algebraica y topológica) definida para el producto cartesiano $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, entendido como una versión discreta del plano cartesiano de las parejas ordenadas de números enteros" (p. 781)

Teniendo en cuenta la definición de la Geometría del Taxista y de lugar geométrico, se presentan los Modos de Pensar La Parábola desde una perspectiva discreta:

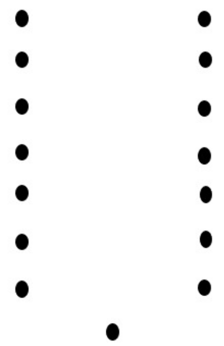
Sintético – Geométrico **SG–P$_{GT}$**	**Analítico – Aritmético** **AA–P$_{GT}$**	**Analítico – Estructurado** **AE–P$_{GT}$**
	Conjunto de pares ordenados (x, y) del plano $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ que satisfacen la ecuación: $$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}\|+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}\|$$ **Donde:** $\alpha(z)=(z,c)$: $Directriz\ de\ la\ parábola$ $Donde\ c\ es\ una\ constante\ entera\ y$ $z\ \in\ \mathbb{Z}$	La Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano discreto $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz

Figura 5. Modos de comprender La Parábola en la Geometría Discreta del Taxista.

La figura 5, describe los Modos de Pensar La Parábola en la métrica discreta, donde el Modo **SG–P$_{GT}$** es la representación mental que el estudiante debe construir al momento de darle significado a La Parábola en el plano discreto. Cabe resaltar que esta representación geométrica es el resultado de realizar los cortes a la pirámide con un plano paralelo a su directriz, como bien lo presenta Laatsch (1982) en su artículo *Pyramidal Sections in Taxicab Geometry*.

El Modo **AA–P$_{GT}$**, permite representar y validar La Parábola desde las relaciones numéricas usando un lenguaje algebraico, en este caso, el estudiante deberá plantear y/o verificar la ecuación a partir de los pares ordenados en el sistema de coordenadas del plano discreto, considerando para esto, el valor absoluto de las distancias.

Por último, el Modo **AE–P$_{GT}$**, identifica La Parábola desde su propiedad como lugar geométrico en el plano $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, teniendo en cuenta que en éste no fue considerada la noción de recta como tal sino la secuencialidad de puntos que se encuentran ubicados en una misma calle o carrera.

Sierpinska (2000) plantea que existe una comprensión profunda del objeto matemático cuando el estudiante es capaz de transitar de un Modo de Pensar a otro, para lo cual son necesarios unos elementos articuladores entre ellos. En el desarrollo de esta investigación, se entenderá por elemento ***Articulador,*** a los conceptos o definiciones matemáticas que el estudiante necesita para transitar de un Modo de Pensamiento a otro y que le facilita *la comprensión profunda* del objeto matemático. (Pinto y Parraguez, 2015).

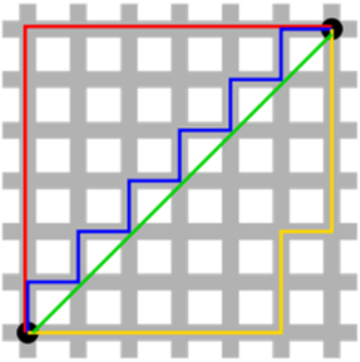
3.2.1 ARTICULADORES DE LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA

Para dar evidencia del tránsito entre los Modos de Pensamiento de La Parábola en la Geometría Discreta del Taxista, se plantean como *articuladores hipotéticos* los siguientes elementos (ver Figura 5):

Articulador 1. Distancia entre dos puntos en la Geometría del Taxista, el cual se denominará así: ***Art.***$_{\mathbf{\mathit{1Distancia\ GT}}}$

Se define como la representación gráfica de la distancia más corta entre dos puntos en el plano cartesiano discreto $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$. (Ver figura 6).

Este articulador permite el tránsito del Modo **AE–P**$_{\mathbf{GT}}$ al Modo **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$ de manera bidireccional, ya que podrá comprobar gráficamente la definición de La Parábola como lugar geométrico, así como a partir de sus propiedades podrá construir su representación en el plano.



Las líneas amarilla, azul y roja tienen la misma longitud (12) en la geometría del taxista, por su parte la línea verde tiene una longitud de 6 x $\sqrt{2}$ = 8.48 y representa la distancia Euclidiana.

Figura 6. Articulador 1. Distancia entre dos puntos en la Geometría Discreta del Taxista

Articulador 2. Fórmula para calcular la distancia en la Geometría del Taxista, que se denominará así: ***Art.***$_{\mathbf{\mathit{2\ Fórmula\ DGT}}}$

En el cual, la distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ está definida como:

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Este articulador permite el tránsito del Modo **AE–P**$_{\mathbf{GT}}$ al Modo **AA–P**$_{\mathbf{GT}}$ de manera bidireccional, ya que, a partir de la definición de lugar geométrico y el uso de la fórmula de distancia, se construye la ecuación canónica de La Parábola, de igual manera que a partir de ésta se pueden identificar los elementos y propiedades del objeto matemático.

Articulador 3. Sistemas de coordenadas en la Geometría del Taxista: que se denominará así: ***Art.***$_{\mathbf{\mathit{3\ Sis.\ Coord.\ GT}}}$

Este corresponde a todos los puntos del plano discreto con $(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, donde $\boldsymbol{x}$ representa las calles y $\boldsymbol{y}$ las carreras.

Este articulador permitirá al estudiante asociar que, si un punto pertenece a la representación de La Parábola en el plano discreto Modo **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$ éste satisface la ecuación Modo **AA–P**$_{\mathbf{GT}}$ y que, si al validar un punto éste satisface la ecuación, entonces pertenece a La Parábola.

Estos articuladores se resumen en el siguiente esquema (Ver Figura 7):

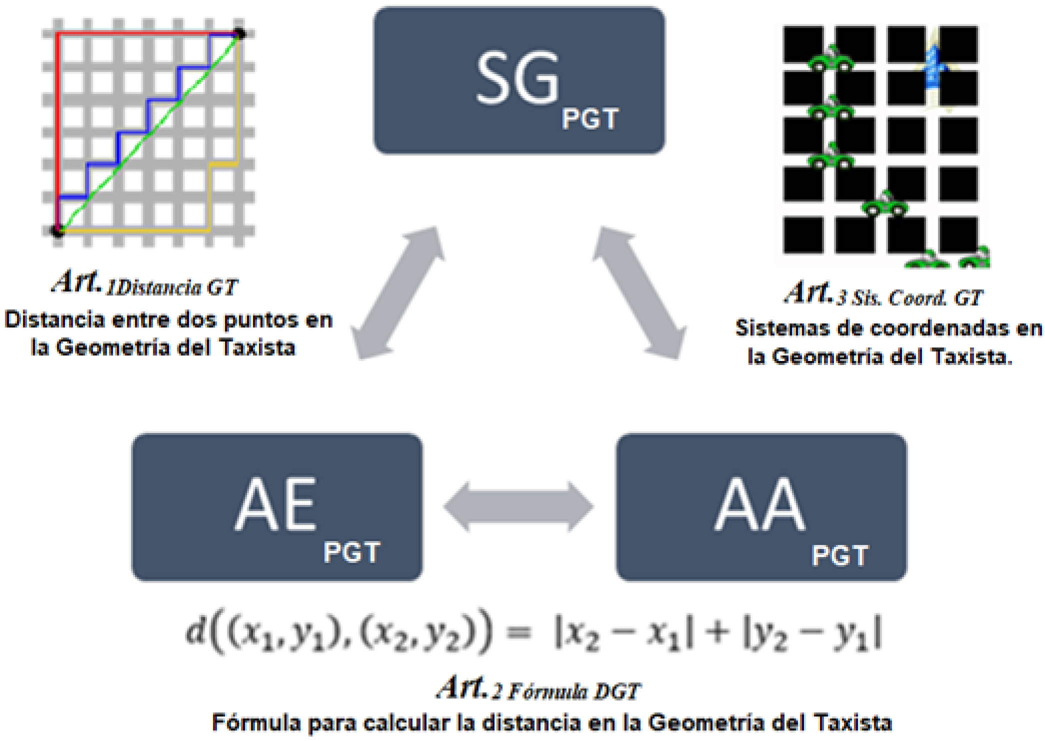


Figura 7. Articuladores hipotéticos que permiten comprender La Parábola en la Geometría Discreta del Taxista.

La Figura 7, resume los articuladores (anteriormente descritos) en interacción con los Modos de Pensar La Parábola en la Geometría Discreta del Taxista, los cuales son hipotéticos y que es preciso, en el transcurso del desarrollo de la investigación validar, refinar o refutar.

3.3 MODOS DE PENSAR LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

La Geometría Analítica es una rama de las Matemáticas que estudia la Geometría Euclidiana desde otra perspectiva; asocia una curva con una ecuación y utiliza el eje cartesiano como referencia, por lo que, González (2007) expone que:

> Con la fusión del Análisis Geométrico griego y la síntesis algebraica de Vieta, Fermat y Descartes dan a luz la Geometría Analítica, una herramienta revolucionaria dotada del potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, propia de las ecuaciones del Álgebra, que reemplaza la rigidez de las ingeniosas construcciones geométricas del Álgebra Geométrica de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica, como poderoso instrumento de exploración e investigación. (p. 25)

A continuación, se presentan los Modos de Pensamiento de La Parábola en la Geometría Analítica, que de acuerdo con los estándares de competencia del MEN, debe estudiarse en el grado décimo de la educación media colombiana.

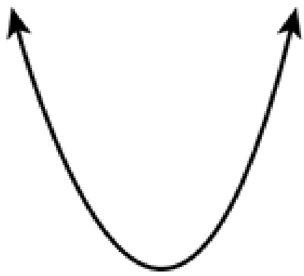
Sintético – Geométrico **SG–P$_{GA}$**	**Analítico – Aritmético** **AA–P$_{GA}$**	**Analítico – Estructurado** **AE–P$_{GA}$**
	Conjunto de pares ordenados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que satisfacen la ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Donde: (h, k): *Es la coordena del vertice de la parábola* p: *Distancia del vertice al foco*	La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

Figura 8. Modos de comprender La Parábola en la Geometría Analítica.

La figura 8, describe los Modos de Pensar La Parábola en la métrica continua, donde el Modo **SG–P$_{GA}$** es la representación mental que el estudiante debe construir al momento de darle significado a La Parábola reconociendo su continuidad en el plano cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.

El Modo **AA–P$_{GA}$**, permite representar y validar el objeto matemático desde las relaciones numéricas usando un lenguaje algebraico, es decir, el estudiante deberá plantear y/o verificar la ecuación canónica de La Parábola a partir de los pares ordenados en el sistema de coordenadas cartesianas y el Modo **AE–P$_{GA}$**, identifica La Parábola desde su propiedad como lugar geométrico en el plano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.

3.3.1 ARTICULADORES DE LA PARÁBOLA EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Los articuladores hipotéticos que darán evidencia del tránsito de un Modo de Pensar a otro en esta métrica Euclidiana, son:
Articulador 1. Distancia euclidiana entre dos puntos, denominada así: ***Art.1*** ***Distancia Eu.***

Se define como la distancia más corta entre dos puntos medida en línea recta.

Este articulador es bidireccional ya que el estudiante puede medir la distancia entre puntos en el plano y luego validar la definición de lugar geométrico –Modo **AE–P$_{GA}$** –, o también a partir de ésta logra construir la curva en el Modo **SG–P$_{GA}$**

Articulador 2. Fórmula analítica para calcular la distancia euclidiana, denominada así: ***Art.2*** ***Fórmula D. Eu.***

Un estudiante aplica este articulador al utilizar la expresión

$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ partiendo del Modo **AE–P$_{GA}$** y de esta manera encontrar la **ecuación canónica** de La Parábola e interpretar sus parámetros.

Articulador 3. Sistema de coordenadas cartesianas, el cual se denominará ***Art.*** ***3 Sis. CC***

Este corresponde a todos los puntos del plano con $(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$ y permitirá al estudiante asociar la representación de La Parábola tanto en el Modo **SG–P**$_{\mathbf{GA}}$ como en el Modo **AA–P**$_{\mathbf{GA}}$, dado que, si un punto pertenece a la curva que la representa en el plano, éste satisface la ecuación y viceversa.

Estos articuladores se resumen en el siguiente esquema (Ver Figura 9):

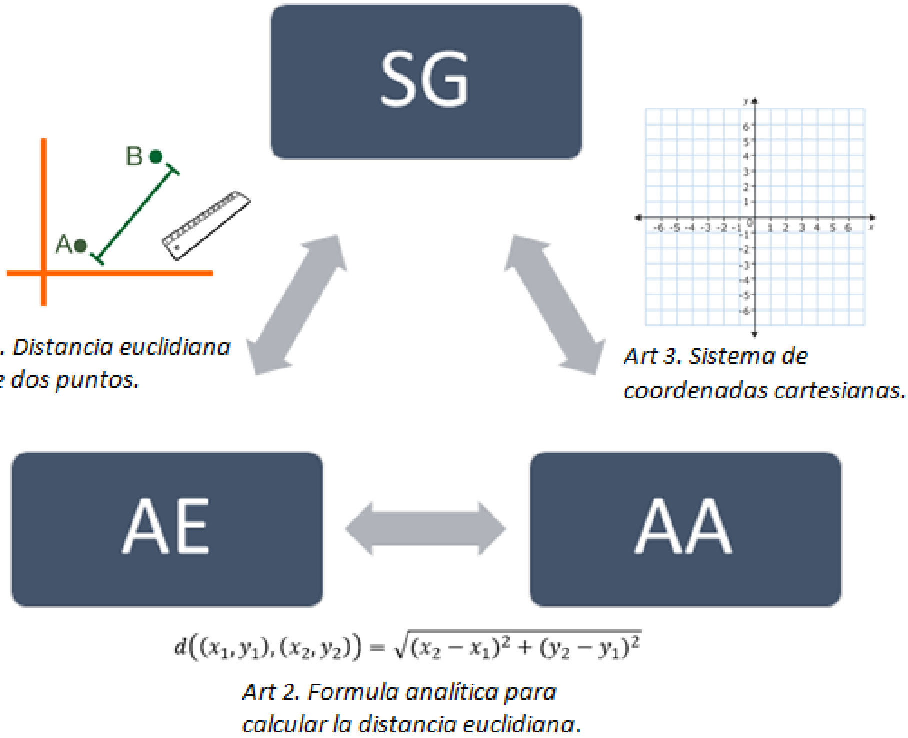


Figura 9. Articuladores hipotéticos que permiten comprender La Parábola en La Geometría Analítica.

La Figura 9, describe los articuladores (explicados anteriormente) en interacción con los Modos de Pensar La Parábola en la Geometría Analítica, los cuales son hipotéticos y será preciso validar, refinar o refutar en el transcurso del desarrollo de la investigación.

3.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Estudiar un objeto matemático desde la mirada de la teoría de Modos de Pensamiento, es útil en cuanto le permite al estudiante interpretarlo de diferentes maneras dependiendo de su construcción cognitiva, es decir, cada individuo encuentra útil uno u otro Modo de Pensar dependiendo de su propia formación y de los objetivos que esté buscando, de hecho se plantea que “estos Modos de Pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno es su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando” (Parraguez, 2012, p. 15)

La caracterización de los Modos de Pensamiento para La Parábola realizada en este capítulo, permitirá el diseño de Guías de aprendizaje que permitan a los estudiantes construir las diferentes representaciones del objeto matemático y facilitar el tránsito entre ellas.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño metodológico da cuenta de la forma como se dará cumplimiento a los objetivos específicos de la investigación. Este diseño se desarrollará en cuatro etapas: análisis documental, diseño de guías y cuestionarios, implementación y análisis de datos. Esta última etapa validará los articuladores hipotéticos planteados y los Modos de Pensamiento que privilegian los estudiantes en la resolución de problemas. Finalmente, los resultados obtenidos del ciclo de investigación permitirán la construcción de una Unidad Didáctica que favorezca la enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde un enfoque de la teoría Modos de Pensamiento.

4.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se enmarca en un contexto empírico experimental, en el cual la información obtenida por medio de la experiencia y observación es basada en la evidencia, por lo tanto, permite: recolectar, organizar información, evaluar, analizar y deducir conclusiones; es por ello que se adopta el enfoque cualitativo que tiene por objetivo la comprensión, centrando la indagación en los hechos (Stake, 2010), que en el ámbito educativo no es otra cosa que las interrelaciones que se generan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, donde se espera una descripción densa, una compresión experiencial y múltiples realidades (Stake, 2010).

La metodología de la investigación será el estudio de caso, que según Stake (2010) facilita la comprensión de una situación compleja particular, en este caso, comprender cómo un estudiante en su proceso de aprendizaje de La Parábola logra transitar por los diferentes Modos de Pensamiento.

La investigación se desarrolla en la Institución Educativa Las Nieves, ubicada en el barrio Manrique Santa Inés de la comuna 3 en la zona nororiental de la ciudad de Medellín, con estrato socioeconómico en los niveles 1 y 2.

La institución tiene modalidad académica y técnica en desarrollo de software para los nieles de educación media (grados 10° y 11°), lo cual exige una formación más rigurosa en términos de competencias en el área de Matemáticas desde los grados anteriores. Sin embargo los estudiantes no evidencian el dominio necesario de los conocimientos del área esto se reflejó en los resultados de las Pruebas Saber del año 2016 donde el 75% de los estudiantes presentaron mayor dificultad en las competencias comunicativa y resolución de problemas, evidenciando la necesidad de transversalizar los componentes numérico-variacional y espacial-métrico para favorecer el tránsito entre ellos, por lo cual se considera que la teoría de modos de pensamiento ayudará a obtener una comprensión profunda de los objetos matemáticos.

4.2 PARTICIPANTES

Stake (2010) sugiere que el estudio de caso no es de tipo muestral y que la conformación debe estar pensada para obtener la mayor rentabilidad del estudio, en donde las unidades de análisis sean fáciles de abordar y que las indagaciones sean bien acogidas.

Por lo tanto, para el desarrollo del trabajo de investigación, se elige un caso conformado por 15 estudiantes de grado décimo con los mejores desempeños en el área de

Matemáticas para evidenciar cómo en su proceso de aprendizaje de La Parábola, logran transitar por los diferentes Modos de Pensamiento.

Para la identificación de los participantes se usó un código alfanumérico en donde la letra **E** corresponde a los estudiantes del grado Décimo. Los números 1, 2, 3, 4, …, 10, corresponden a cada uno de los participantes.

Caso de estudio: 15 estudiantes del grado 10°, cuyas edades oscilan entre 15 y 18 años. Llamaremos E1, E2, E3, ..., E10 a los estudiantes de este caso.

4.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN.

El trabajo de investigación se desarrollará en cuatro etapas como se muestra en el siguiente esquema y se describe a continuación:

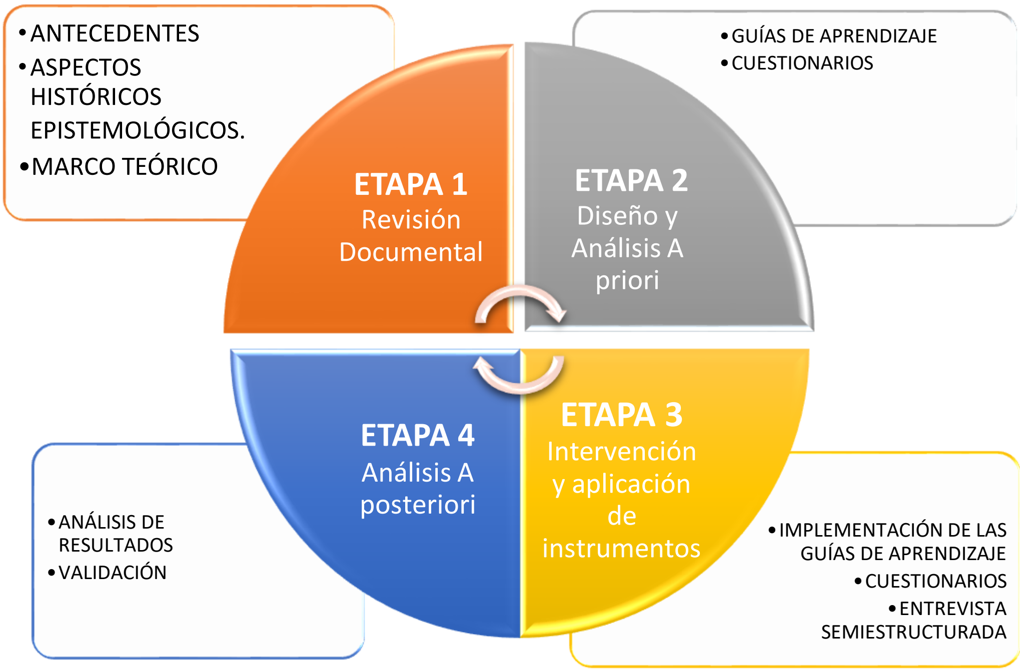


Figura 10. Etapas de la Investigación

4.3.1 ETAPA 1. REVISIÓN DOCUMENTAL.

Esta primera etapa de la investigación consolida dos elementos importantes: el primero, un estado del arte que da cuenta de las investigaciones que se han hecho alrededor del objeto matemático La Parábola desde otras posturas teóricas, así como los aportes conceptuales y metodológicos que se encuentran en éstas y que pueden servir de soporte al trabajo actual.

El segundo elemento corresponde a la revisión de aspectos históricos y epistemológicos de La Parábola, permitiendo una mejor comprensión de las construcciones conceptuales que se hicieron a lo largo de la historia de las Matemáticas, a fin de entender los obstáculos epistemológicos que existieron alrededor de dicho objeto y que de una u otra forma pueden tener incidencia en su enseñanza y aprendizaje, así como en su comprensión profunda.

Esta primera etapa se desarrolla en los capítulos 1, 2 y 3, dando como resultado la caracterización de los Modos de Pensamiento de La Parábola, respondiendo así al primer objetivo específico de la investigación.

4.3.2 ETAPA 2. DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI.

En esta etapa de la investigación, se realiza el diseño de las Guías de Aprendizaje para los estudiantes del grado 10° una para cada métrica y teniendo como referencia el marco teórico Modos de Pensamiento; cada Guía tiene una descripción e intencionalidad y una secuencia de actividades que se mostrará de manera detallada en el capítulo 5. La finalidad de las Guías es que el estudiante pueda comprender el concepto de La Parábola a partir de la interacción con diferentes recursos.

De igual manera, en el capítulo 6, se hará el diseño y análisis a priori de dos cuestionarios, uno en la Geometría del Taxista y otro en la Geometría Analítica, estableciendo las posibles respuestas y clasificándolas de acuerdo con los Modos de Pensamiento y a los articuladores que los estudiantes privilegian en cada una de las preguntas, estableciendo así las categorías de análisis.

Esta etapa tiene correspondencia con el diseño e implementación de actividades de aula y Unidad Didáctica propuestas en los objetivos específicos 2 y 3 de la investigación.

4.3.2.1. GUÍA DE APRENDIZAJE

También conocida como "Guía de trabajo autónomo" es considerada como un recurso didáctico que promueve en los estudiantes un proceso de aprendizaje más reflexivo. Se define como el "planteamiento cuidadoso y metódico del trabajo del alumno, con todas las referencias, fuentes y materiales necesarios para que aprenda por sí mismo" (Camacho, 2007 citado en Romero y Crisol, 2012), es decir, la Guía de Aprendizaje comprende un conjunto de actividades que llevan al estudiante a generar conocimiento de forma autónoma, lo cual le permite descubrir nuevas ideas alrededor de un concepto.

Esta autonomía que el estudiante logra en su proceso de aprendizaje por medio de la guía no significa que el docente no sea necesario en esa construcción cognitiva, por el contrario, "la guía hace cambiar el rol del docente dando lugar a relaciones más horizontales en donde los estudiantes desempeñan un papel activo y el docente asume el rol de orientador. Hay interacción permanente." (Equipo Pedagógico CAFAM, 2008, p. 2). Para el caso de la investigación, las Guías constituyen una herramienta esencial para la intervención en el aula, dado que debe acercarse a los estudiantes al concepto de Parábola desde ambas métricas para lograr una mayor comprensión.

4.3.2.2 EL CUESTIONARIO

Se define como "la herramienta que permite al científico social plantear un conjunto de preguntas para recoger información estructurada sobre una muestra de personas" (Meneses y Rodríguez, 2016, p. 24).

Si bien el cuestionario es un instrumento estandarizado, propio de algunas investigaciones de tipo cuantitativo en particular las que adoptan la metodología de encuestas, Meneses y Rodríguez (2016) proponen que puede ser una técnica en el desarrollo de trabajos de campo que requieran recolección de datos de manera sistemática y estructurada a partir de un adecuado planteamiento y análisis de preguntas, más o menos organizadas, conforme a los objetivos de la investigación.

"El objetivo del cuestionario es traducir las variables de la investigación en preguntas concretas que nos proporcionen información viable o susceptible de ser cuantificada" (Aparicio, 2008, p. 4). Para el caso del presente trabajo investigativo, los cuestionarios proporcionarán elementos de análisis sobre la *comprensión profunda* de La parábola que los estudiantes participantes lograron a partir del desarrollo de las Guías de Aprendizaje, además de mostrar cuál Modo de Pensamiento prevalece en ellos o cómo transitan entre uno y otro, por medio de los articuladores.

4.3.3 ETAPA 3. INTERVENCIÓN Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS.

La intervención se hará con los estudiantes de grado décimo, utilizando como herramienta las Guías de Aprendizaje diseñadas en la etapa anterior. Esta intervención se hará durante las clases regulares en cinco sesiones de 2 horas.

Una vez finalizada la intervención con el desarrollo de las Guías de Aprendizaje, se aplicarán los cuestionarios de manera individual a los estudiantes participantes del caso de estudio, en una sesión de dos horas con el acompañamiento de todos los investigadores.

Luego de hacer una primera revisión y clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes en los cuestionarios, se aplica la entrevista semiestructurada, sólo en caso de tener que profundizar en elementos que no son explícitos en dichas respuestas. La duración de la entrevista se proyecta aproximadamente de quince minutos máximo por cada estudiante seleccionado. Lo anterior se resume en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>INTERVENCIÓN EN EL AULA</th><th colspan="2">INSTRUMENTOS</th></tr>
<tr><td>Guía de aprendizaje 1
Geometría del Taxista

Tres sesiones
de 2 horas cada una</td><td>Cuestionario 1
Geometría del Taxista
Una sesión de una hora</td><td rowspan="2">ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA
Sólo en caso de tener que profundizar en las respuestas de los cuestionarios.</td></tr>
<tr><td>Guía de aprendizaje 2
Geometría Analítica

Cuatro sesiones
de 2 horas cada una</td><td>Cuestionario 2
Geometría Analítica
Una sesión de una hora</td></tr>
</table>

4.3.4 ETAPA 4. ANÁLISIS A POSTERIORI.

Esta etapa se desarrolla mediante una triangulación entre el marco teórico, el análisis a priori de los cuestionarios y la información obtenida en las entrevistas semiestructuradas, que permitirá encontrar elementos que indagan en los siguientes aspectos:

- ✓ Los Modos que priorizan los estudiantes al responder a las preguntas planteadas en el cuestionario.
- ✓ Los articuladores que usan los estudiantes para transitar de un Modo a otro, bien sea los hipotéticos definidos en el marco teórico u otros que no fueron considerados.
- ✓ Las dificultades que tuvieron los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento y las posibles causas de ello.

Estos aspectos se analizarán a partir de las respuestas dadas por los estudiantes, que serán clasificadas según las categorías definidas en el análisis a priori, para validar con esto la *comprensión profunda* de La Parábola por parte de los estudiantes participantes.

Los resultados de este análisis podrán verse detalladamente en el capítulo 6 y de esta manera se podrán validar las actividades que se propondrán para la Unidad Didáctica. (Ver anexo 2).

4.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El diseño metodológico aquí presentado no sólo da cuenta de las características de la investigación sino también de la organización de las diferentes etapas en que se va desarrollando, teniendo como referencia siempre los planteamientos desde la teoría Modos de Pensamiento para dar cumplimiento a los objetivos y a la pregunta de investigación frente a la enseñanza y aprendizaje de La Parábola.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se desarrollará la etapa de construcción de los cuestionarios que serán aplicados a los estudiantes. Cada cuestionario tiene la intención de evaluar la ***compresión profunda*** de La Parábola, tanto en la Geometría del Taxista como en la Geometría Analítica. Cabe resaltar que antes de presentar los cuestionarios, los estudiantes desarrollaron las Guías de Aprendizaje, que fueron diseñadas bajo la teoría Modos de Pensamiento. (Ver anexo 1).

Cada pregunta del cuestionario presenta un análisis ***a priori*** bajo la teoría Modos de Pensamiento de las posibles respuestas que darán los estudiantes. Posterior a la aplicación de los cuestionarios, las respuestas de los estudiantes serán categorizadas según los articuladores y Modos de Pensar que éstos movilizaron, lo que permitirá la construcción del análisis ***a posteriori***, el cual servirá de insumo para obtener las conclusiones de la investigación y también, validar las actividades de la Unidad Didáctica.

5.1 ANÁLISIS A PRIORI

5.1.1 CUESTIONARIO I. GEOMETRÍA DEL TAXISTA

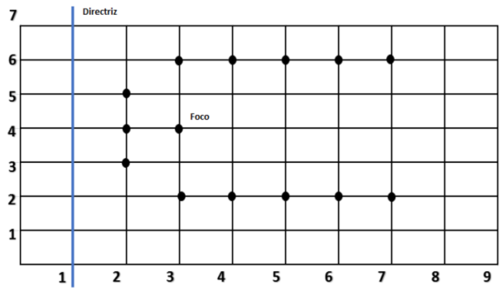
<table>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO: Identificar cuál de las figuras cumple con la definición de La Parábola en la Geometría del Taxista.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA 1. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a una Parábola en la Geometría del Taxista?


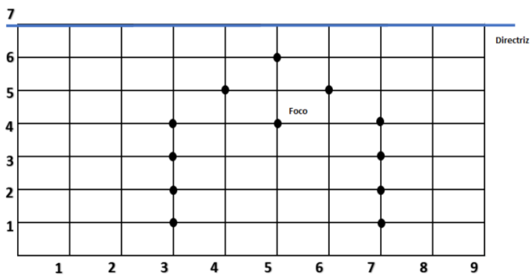
FIGURA 1


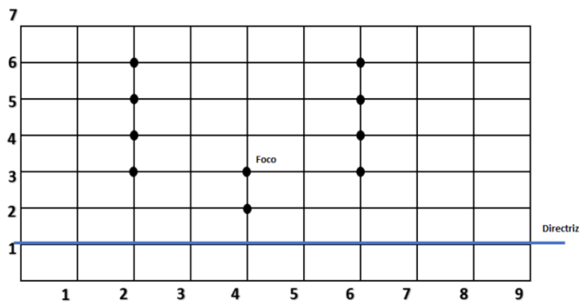
FIGURA 2


FIGURA 3</td></tr>
<tr><td>POSIBLES RESPUESTAS</td><td>MODOS Y ARTICULADORES</td></tr>
<tr><td>El estudiante puede utilizar la definición de Parábola verificando las distancias entre un punto y el foco o un punto</td><td>AE–P$_{GT}$
Art.$_{1}$Distancia GT</td></tr>
</table>

y la directriz. Concluye que **sólo la figura 3 corresponde a una Parábola.**	

OBJETIVO: Identificar las ecuaciones que describen La Parábola en la Geometría del Taxista.	
PREGUNTA 2. Determina cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Parábola. **A.** $\lvert x-2\rvert+\lvert y-3\rvert=5$ **B.** $\lvert x-2\rvert+\lvert y-1\rvert=\lvert y-5\rvert$ **C.** $\lvert x-3\rvert+\lvert y-3\rvert=\lvert x-1\rvert$ Explica tu respuesta.	
POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
Puede dar argumentos de acuerdo con la forma de la ecuación, es decir: Concluye que el literal $\boldsymbol{a}$ no tienen la forma: $\lvert \mathrm{x}-\mathrm{h}\rvert+\lvert \mathrm{y}-\mathrm{k}\rvert=\lvert \mathrm{y}-\mathrm{c}\rvert$ y que los literal $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ cumplen esta condición por lo tanto representan una Parábola en el plano discreto.	**AA–P$_{GT}$**
El estudiante forma parejas ordenadas a partir de asignarle valores a la variable $\boldsymbol{x}$, ubica los puntos en el plano discreto para determinar la figura. Concluyendo que son Parábolas las expresiones matemáticas de los literales $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.	**SG–P$_{GT}$** ***Art.****3 Sis. Coord. GT*

OBJETIVO: Identificar si un punto del plano pertenece a La Parábola.	
PREGUNTA 3. Se tiene una Parábola cuyo foco se ubica en el punto (3, 4), y su directriz pasa por $x=1$ modelada por la ecuación: $$\lvert x-3\rvert+\lvert y-4\rvert=\lvert x-1\rvert$$ Determina si el punto (5, 6) pertenece a La Parábola dada.	
POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
El estudiante reemplaza en la ecuación los valores $\boldsymbol{x=5}, \boldsymbol{y=6}$ de acuerdo con las coordenadas del punto y obtiene la siguiente expresión: $$\lvert 5-3\rvert+\lvert 6-4\rvert=\lvert 5-1\rvert$$	**AA–P$_{GT}$**

<table>
<tr>
<td>

$$|2| + |2| = |4|$$

$$2 + 2 = 4$$

$$4 = 4$$

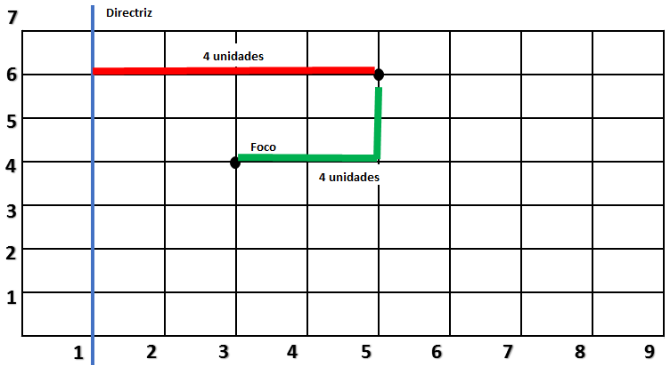
Como se obtiene una igualdad, se concluye que el punto $(5, 6)$ satisface la ecuación y por lo tanto, pertenece a La Parábola.

</td>
<td>

Art.*3 Sis. Coord. GT*

</td>
</tr>
<tr>
<td>

El estudiante ubica en el plano discreto los elementos dados y comprueba la definición de lugar geométrico de la Parábola a partir de las distancias entre el punto y el foco y el punto y la directriz, como se muestra a continuación:



Concluye que el punto pertenece a La Parábola, pues las unidades de las distancias son iguales.

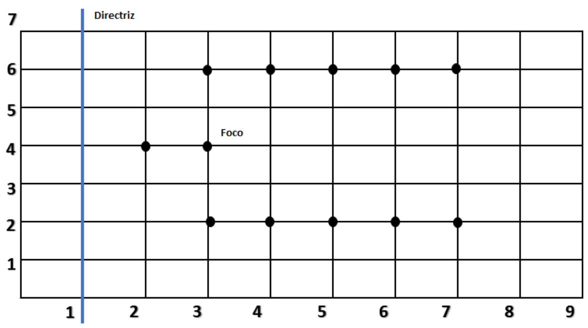
</td>
<td>

AE–P$_{GT}$

Art.*1Distancia GT*

</td>
</tr>
<tr>
<td>

El estudiante completa La Parábola en el plano discreto y compara si el punto $(5, 6)$ pertenece o no, como se muestra a continuación:



Desde la figura completa el estudiante concluye que el punto dado sí pertenece a La Parábola.

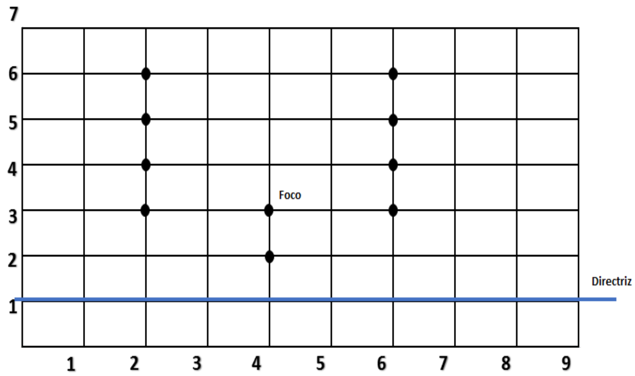
</td>
<td>

SG–P$_{GT}$

Art.*3 Sis. Coord. GT*

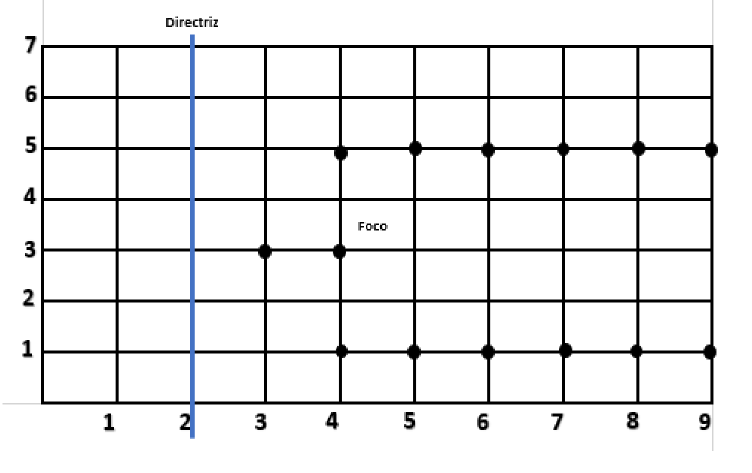
</td>
</tr>
</table>

OBJETIVO: Construir la ecuación de La Parábola a partir de su representación en el plano discreto.
PREGUNTA 4. Determine la ecuación de La Parábola representada en el siguiente

plano:  Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
El estudiante utiliza la definición de lugar geométrico y la aplica de la siguiente manera: Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{Z}$ Coordenada del foco $(4, 3)$ Directriz $y = 1$ $$\|x - h\| + \|y - k\| = \|y - c\|$$ Sustituyendo en la expresión: $$\|x - 4\| + \|y - 3\| = \|y - 1\|$$	**AA–P GT** ***Art.*** ***2 Fórmula DGT***

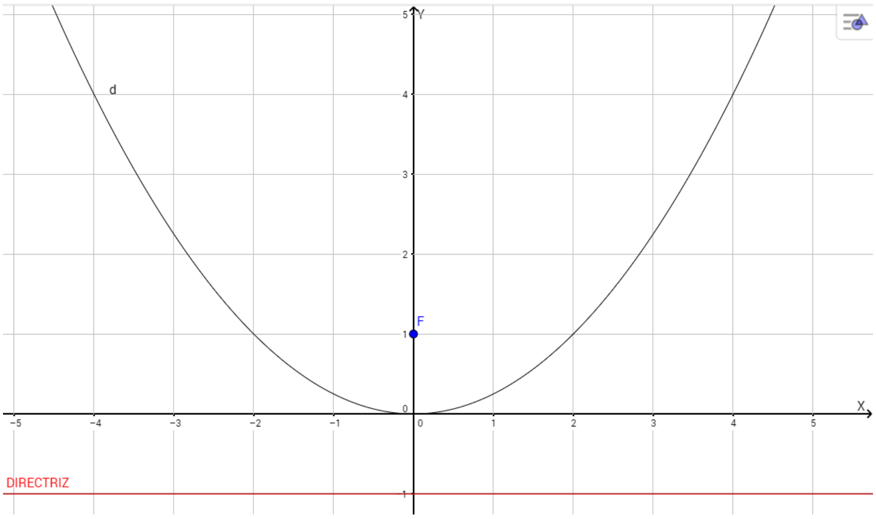
OBJETIVO: Construir La Parábola en el plano discreto a partir de una ecuación dada.	
PREGUNTA 5. Dibuje la parábola modelada por la ecuación $$\|x - 4\| + \|y - 3\| = \|x - 2\|$$	
POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
El estudiante determina las coordenadas del foco y la directriz a partir de la ecuación tabla de valores y completa La Parábola en el plano discreto utilizando la definición de lugar geométrico, como se muestra a continuación:	**SG–P GT** ***Art.1Distancia GT*** **AE–P GT** ***Art.3 Sis. Coord. GT***



5.1.2 ANÁLISIS A PRIORI CUESTIONARIO II. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

OBJETIVO: Identificar las ecuaciones que describen La Parábola.	
PREGUNTA 1. A continuación se presentan ecuaciones de curvas en R x R. a. $x^2 + y^2 = 1$ b. $x^2 + y = 1$ c. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ Explica cuál o cuáles de ellas corresponden a una Parábola, y cómo llegas a la respuesta.	
POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
Puede dar argumentos de acuerdo con la forma de la ecuación, es decir: Concluye que el literal ***a*** no tienen la forma: $y = ax^2 + bx + c$ y que los literal ***b*** y ***c*** cumplen esta condición por lo tanto representan una Parábola en el plano cartesiano.	**AA–PGA**
El estudiante lleva las expresiones de cada literal a una escritura de la ecuación canónica de la Parábola, $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ y determina: $(x - o)^2 = (y - o)^2 + 1$; Diferente de la ecuación canónica, por lo tanto, no representa una Parábola. $(x - o)^2 = -(y + 1)$; Tiene la forma de la ecuación canónica de La Parábola, por lo tanto, representa una Parábola. $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$; Tiene la forma de la ecuación	**AA–PGA**

canónica de La Parábola, por lo tanto, representa una Parábola.	
El estudiante forma parejas ordenadas a partir de asignarle valores a la variable $\boldsymbol{x}$ y une los puntos de la curva para determinar la figura. Concluyendo que son Parábolas las expresiones matemáticas de los literales $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.	**SG–PGA** ***Art.**3 Sis. CC*

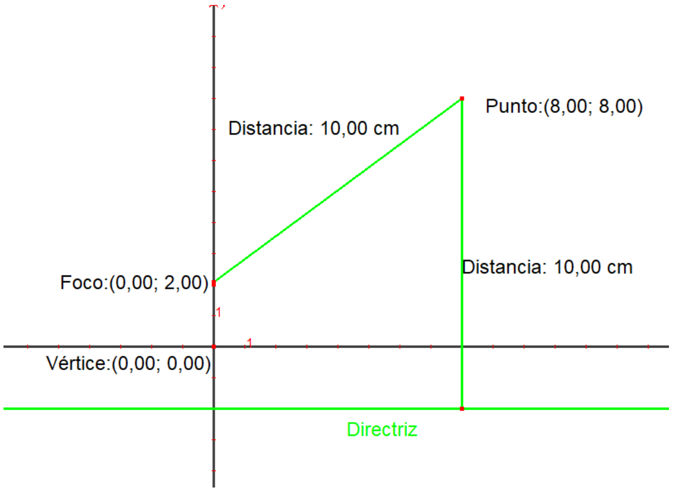
<table>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO: Construir la ecuación de La Parábola a partir de su representación en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA 2. Determine la ecuación de La Parábola representada en el siguiente plano:


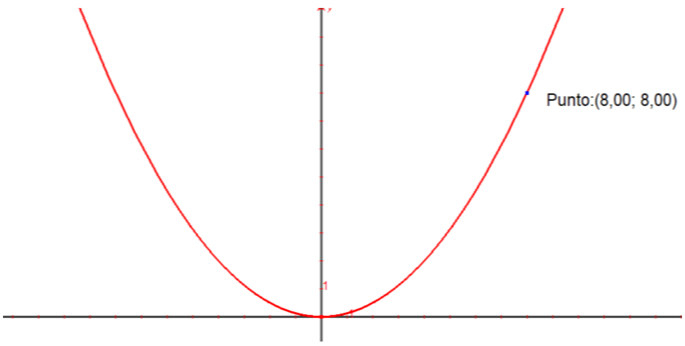
Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.</td></tr>
<tr><td>POSIBLES RESPUESTAS</td><td>MODOS Y ARTICULADORES</td></tr>
<tr><td>El estudiante se refiere a la definición de lugar geométrico y la aplica de la siguiente manera:

Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{R}$
Coordenada del foco $(0,1)$
Directriz $y = -1$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = y - (-1)$$
$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$
Resolviendo el producto notable tenemos:
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$$</td><td>AE–PGA
Art.2 Fórmula D. Eu.</td></tr>
</table>

Simplificando: $$x^2 = 4y$$ $$\frac{x^2}{4} = y$$	
El estudiante se ubica en la ecuación canónica de La Parábola y remplaza el parámetro $\boldsymbol{p}$ y las coordenadas del vértice de la siguiente manera: Ecuación canónica de La Parábola: $$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$ Donde: Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ Coordenadas del vértice $(0,0)$ Parámetro $p = 1$ Reemplazando en la ecuación canónica se obtiene: $$(x-0)^2 = 4(y-0)$$ Resolviendo: $$x^2 = 4y$$ $$\frac{x^2}{4} = y$$	**AA–P$_{GA}$** ***Art.**$_{3\ Sis.\ CC}$*

OBJETIVO: Identificar si un punto del plano pertenece a La Parábola.	
PREGUNTA 3: Dada una Parábola con vértice en el origen y coordenadas del foco (0,2) modelada por la ecuación $y = \frac{x^2}{8}$. Determine si el punto (8,8) pertenece a La Parábola. Justifique su respuesta	
POSIBLES RESPUESTAS	**MODOS Y ARTICULADORES**
El estudiante reemplaza en la ecuación el valor de $x = 8$ y obtiene la siguiente expresión: $$y = \frac{8^2}{8}$$ $$y = \frac{64}{8}$$ $$y = 8$$ Como el valor de la expresión coincide con el valor de	**AA–P$_{GT}$** ***Art.**$_{3\ Sis.\ CC}$*

<table>
<tr><td>ordenada se concluye que el punto $(8, 8)$ pertenece a La Parábola.</td><td></td></tr>
<tr><td>El estudiante ubica en el plano cartesiano los elementos dados y comprueba con una regla la definición de lugar geométrico de la Parábola: Concluyendo que el punto pertenece a dicha curva, como se muestra a continuación:

</td><td>AE–PGA

Art.1 Distancia Eu.</td></tr>
<tr><td>El estudiante dibuja La Parábola en el software Cabri Géometre II Plus o en su cuaderno con las condiciones dadas y compara si el punto $(8, 8)$ pertence a la Parábola, como se muestra a continuación:


Como el punto es parte de La Parábola, entonces, si pertenece.</td><td>SG–PGA

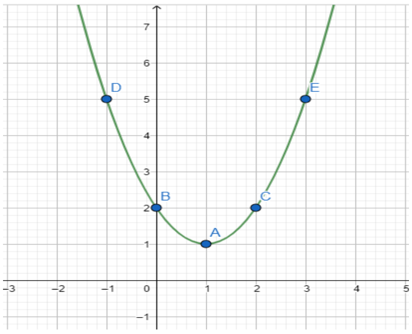
Art.3 Sis. CC</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO: Construir la curva de La Parábola en el plano cartesiano a partir de una ecuación dada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA 4: Dibuje la parábola modelada por la ecuación $y = (x - 1)^2 + 1$</td></tr>
<tr><td>POSIBLES RESPUESTAS</td><td>MODOS Y ARTICULADORES</td></tr>
<tr><td>El estudiante construye una tabla de valores y dibuja La Parábola en el plano, como se muestra a continuación:</td><td>AA–PGA

Art.3 Sis. CC</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10



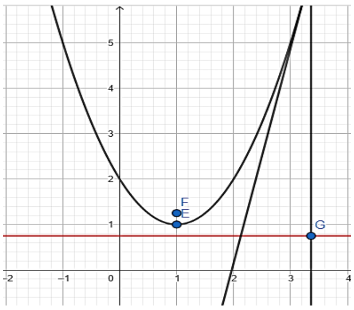
</td><td></td></tr>
<tr><td>
El estudiante reescribe la expresión matemática para interpretar los parámetros en su forma canónica, es decir:

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$(x-1)^2 = (y-1)$$

Donde:

Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{R}$
Coordenadas del vértice $(1,1)$
Parámetro $p = \frac{1}{4}$
Con esta información el estudiante a partir del método de la mediatriz, la definición de lugar geométrico y con la ayuda de un software de geometría dinámica dibuja La Parábola.

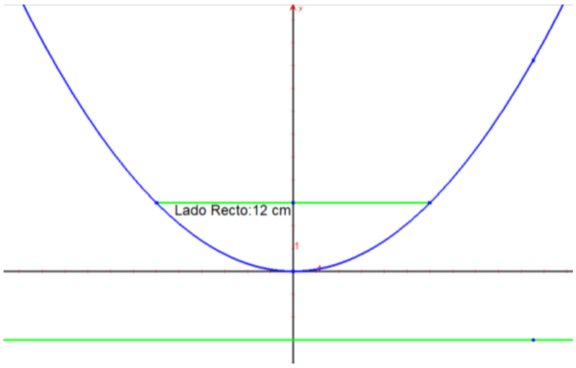


</td><td>

AE–PGA

Art.1 ***Distancia Eu.***
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO: Determinar el lado recto de una Parábola a partir de su ecuación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PREGUNTA 5. Halle el lado recto de la parábola $y = \frac{x^2}{12}$</td></tr>
<tr><td>POSIBLES RESPUESTAS</td><td>MODOS Y ARTICULADORES</td></tr>
<tr><td>El estudiante reescribe la expresión matemática para interpretar los parámetros en su forma canónica, es decir:</td><td>AA–PGA</td></tr>
</table>

$$y = \frac{x^2}{12}$$ $$12y = x^2$$ $$(x-0)^2 = 12(y-0)$$ Donde el lado recto es igual a $4p = 12\ unidades$	
El estudiante grafica La Parábola usando el software Cabri Géometre II Plus, determina el foco y mide el lado recto como se muestra a continuación: 	**SG–P**GA ***Art.****1 Distancia Eu.*

5.2 ANÁLISIS A POSTERIORI

El análisis de los resultados se hizo por pregunta, retomando los planteamientos del análisis a priori de cada una, según los Modos de Pensar y los articuladores que estaban presentes, primero con el cuestionario 1 de la Geometría del Taxista y luego, con el cuestionario 2 de la Geometría Analítica.

Para el análisis a posteriori se tuvo en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ Los Modos que priorizan los estudiantes al responder a las preguntas planteadas en el cuestionario.
- ✓ Los articuladores que usan los estudiantes para transitar de un Modo a otro, bien sea los hipotéticos definidos en el marco teórico u otros que no fueron considerados.
- ✓ Las dificultades que tuvieron los estudiantes al transitar entre los Modos de Pensamiento y las posibles causas de ello.

Inicialmente se analiza cuáles estudiantes respondieron favorablemente y cuáles no a cada una de las preguntas a la luz del *análisis a priori*. Posteriormente, se agrupan las respuestas que coinciden en la forma de argumentación, bien sea descriptiva o procedimental, de acuerdo con los Modos de Pensamiento o los articuladores hipotéticos. Se seleccionan algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes como evidencia y a éstas se hace una descripción de los hallazgos.

5.2.1 ANÁLISIS A POSTERIORI CUESTIONARIO 1 GEOMETRÍA DEL TAXISTA

PREGUNTA 1. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a una Parábola en la Geometría del Taxista?

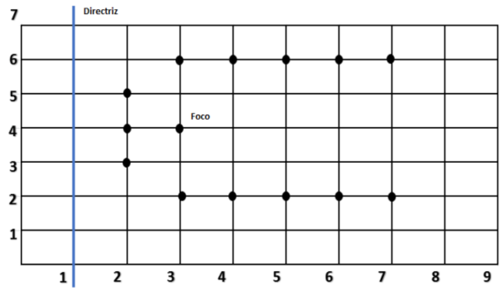


FIGURA 1

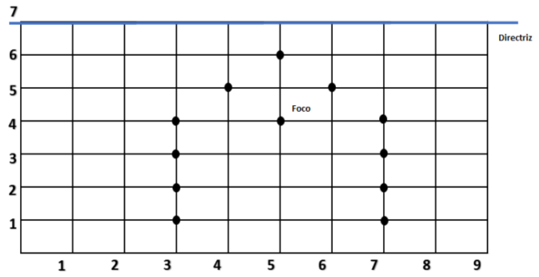


FIGURA 2

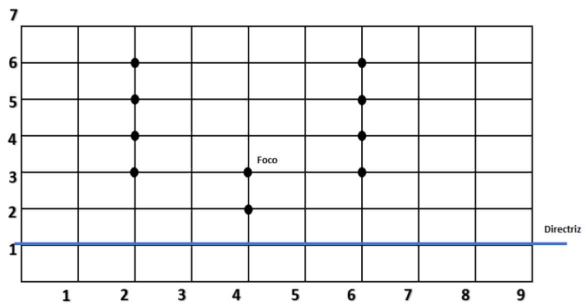


FIGURA 3

De acuerdo con el análisis a priori, la pregunta 1 está planteada en el Modo **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$ de la Geometría del Taxista y pretende un tránsito hacia el Modo **AE–P**$_{\mathbf{GT}}$ a través del articulador ***Art.***$_{\mathit{1Distancia\ GT}}$. Sin embargo, algunos estudiantes dieron cuenta de que se podía argumentar utilizando los demás articuladores –***Art.***$_{\mathit{2\ Fórmula\ DGT}}$ y ***Art.***$_{\mathit{3\ Sis.\ Coord.\ GT}}$ – mostrando así un tránsito por los tres Modos de Pensar La Parábola.

Se observó que 14 de los 15 estudiantes logran alcanzar el objetivo de identificar correctamente cuáles de las figuras dadas cumplen con la definición de La Parábola en la Geometría del Taxista; 9 de éstos validan su respuesta por medio del articulador ***Art.***$_{\mathit{1Distancia\ GT}}$. Los otros 5, utilizan adicionalmente, los articuladores ***Art.***$_{\mathit{2\ Fórmula\ DGT}}$ y ***Art.***$_{\mathit{3\ Sis.\ Coord.\ GT}}$ para argumentar sus respuestas evidenciando así un tránsito por los tres Modos de Pensamiento. Finalmente todos ellos concluyen que sólo la figura 3 corresponde a una Parábola.

A continuación, se muestran algunas evidencias de las respuestas de los estudiantes y los casos particulares:

Las respuestas de los estudiantes E2, E3, E5 y E8 muestran el uso del ***Art.***$_{\mathit{1Distancia\ GT}}$, el cual les permite realizar el tránsito entre los Modos **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$ y **AE–P**$_{\mathbf{GT}}$ pues sus descripciones evidencian conteos de la distancia en cuadras desde los puntos dados hacia el Foco y la Directriz, con lo cual comprueban la definición de La Parábola en la Geometría del Taxista. (Ver figuras 11 y 12)

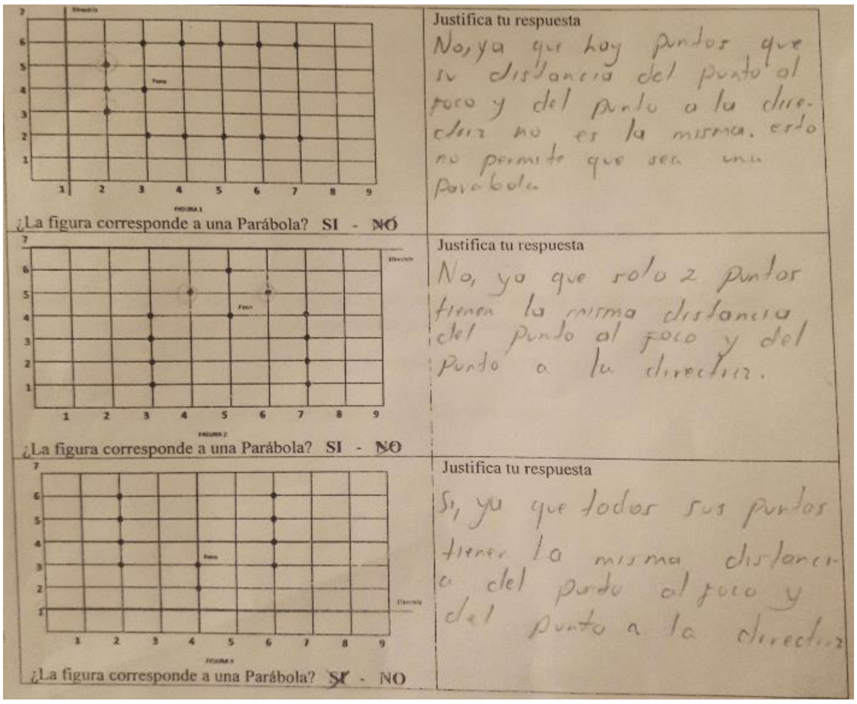


Figura 11. Respuesta del estudiante E2
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

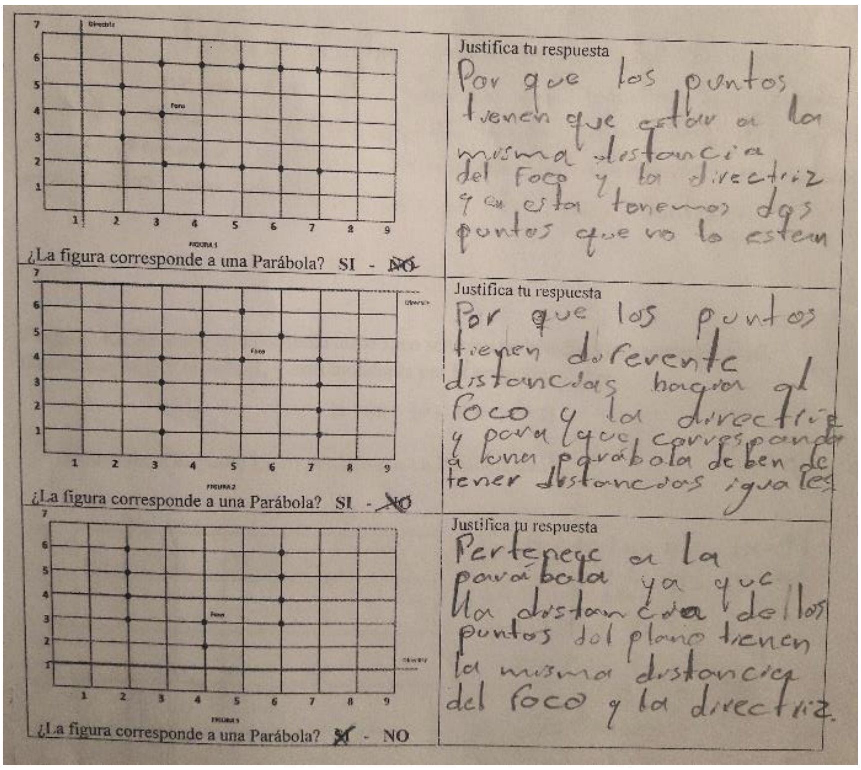


Figura 12. Respuesta del estudiante E8
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

Los estudiantes E3 y E5, además de hacer la descripción donde evidencian conteos de la distancia en cuadras, señalan puntos de la gráfica al realizar la verificación de las distancias. (Ver figuras 13 y 14).

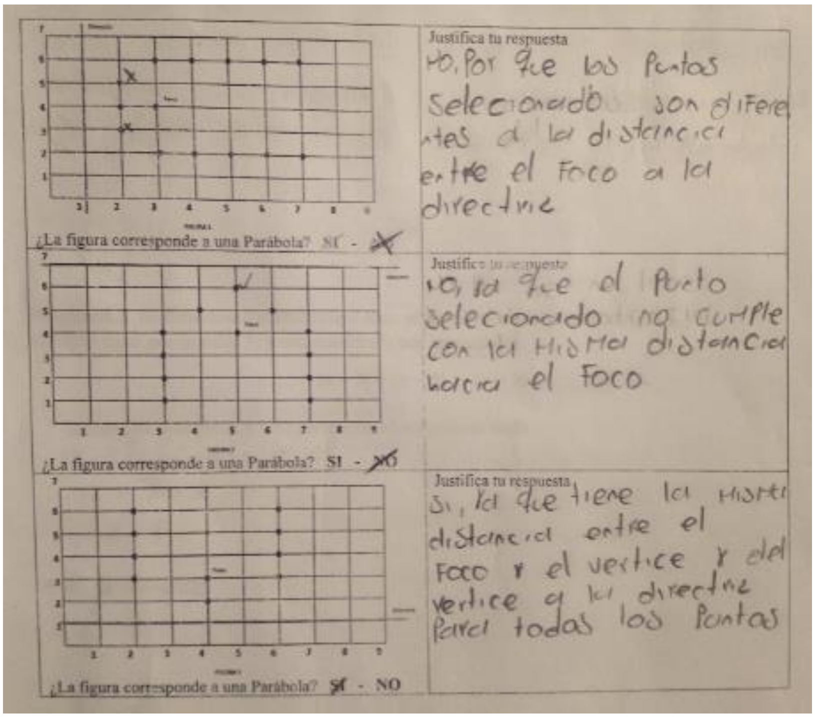


Figura 13. Respuesta del estudiante E3
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

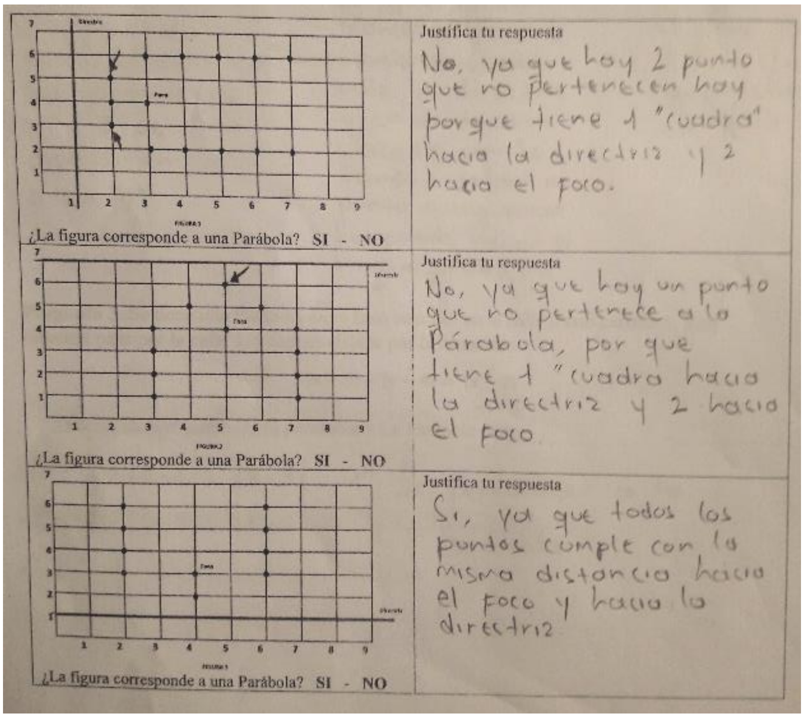


Figura 14. Respuesta del estudiante E5
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

Los estudiantes E9 (Figura 15), E10 (Figura 16) y E11 (Figura 17), muestran en la descripción que realizan el tránsito entre todos los Modos **AA–P$_{GT}$**, **SG–P$_{GT}$** y **AA–P$_{GT}$** de la Parábola en la Geometría del Taxista, al utilizar la definición de Parábola, verificar las distancias entre un punto y el Foco o un punto y la Directriz dando cuenta del ***Art.2 Fórmula DGT***, que no fue considerado como argumento en el análisis a priori.

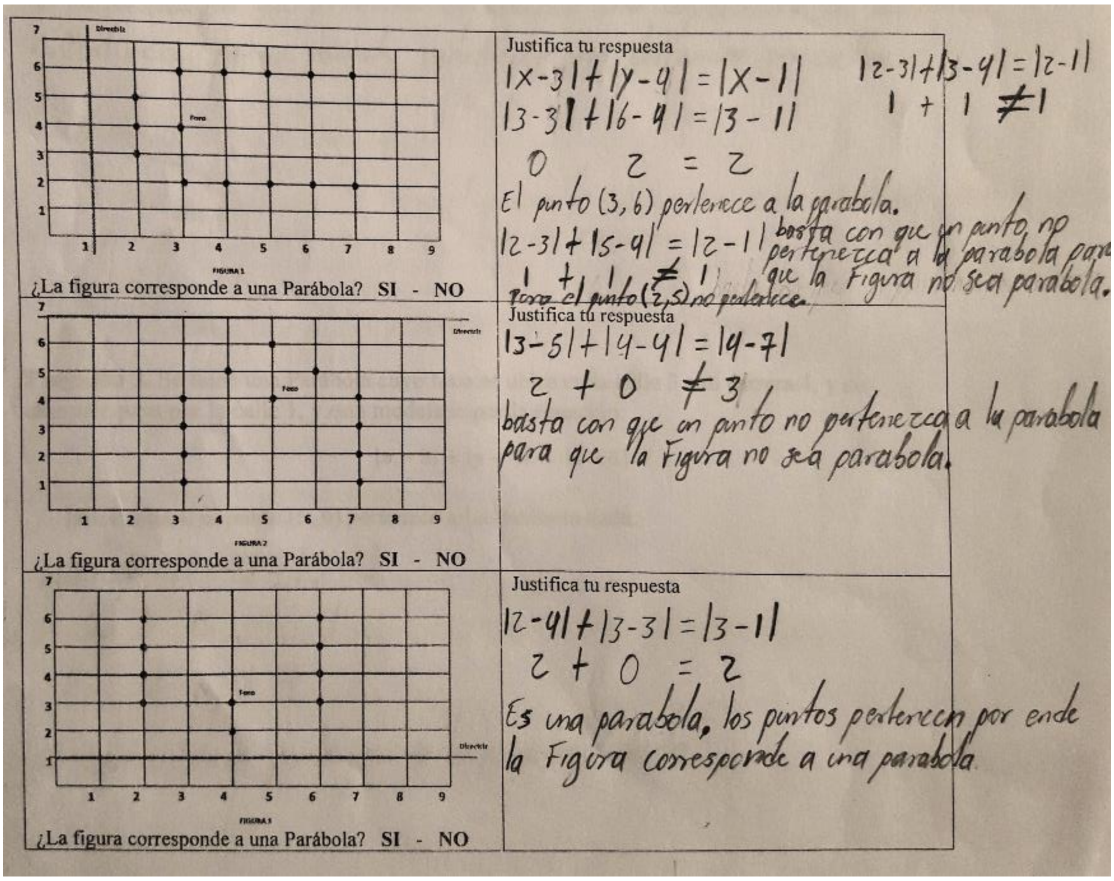


Figura 15. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

Es de aclarar que la justificación que da el estudiante para la respuesta del literal **c)** no da claridad del razonamiento que realizó, pues teniendo en cuenta las validaciones que venía haciendo en los otros dos numerales, sólo verifica un punto y desde allí concluye. Por tal razón, al entrevistarle el estudiante justifica: "*cogí algún otro punto de la figura y conté la distancia de ese punto al Foco y de ese Punto a la Directriz y como la distancia era la misma se deduce que pertenece a La Parábola*"

Al indagarle por los demás puntos, en relación al punto de comprobación (2,3), argumenta que "*los que estaban al frente están a la misma distancia como en un ancho del Foco […] los puntos son semejantes, se unen unos con otros*" dando cuenta con esto de un elemento relevante en el estudio de La Parábola, la simetría.

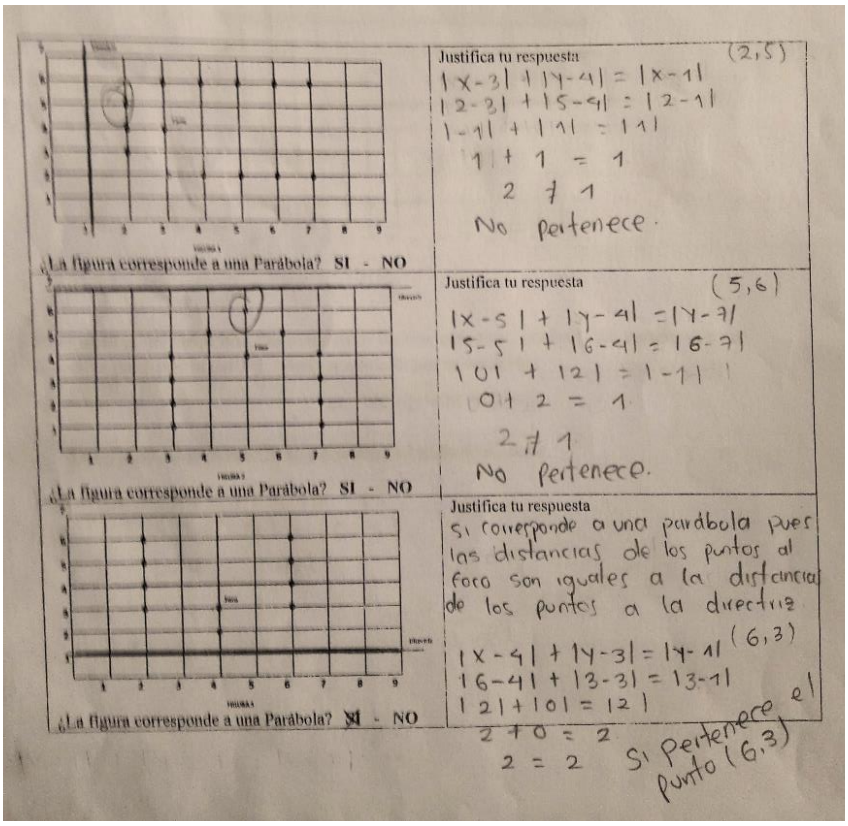


Figura 16. Respuesta del estudiante E10
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

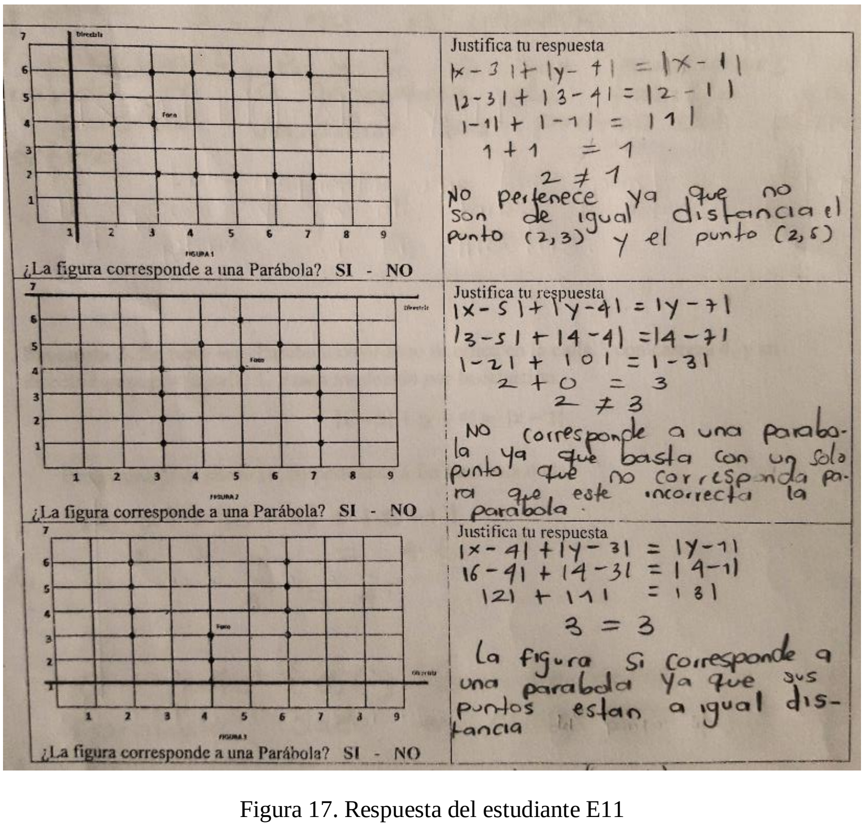


Figura 17. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°1 Geometría del Taxista

PREGUNTA 2.

Determina cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una Parábola.

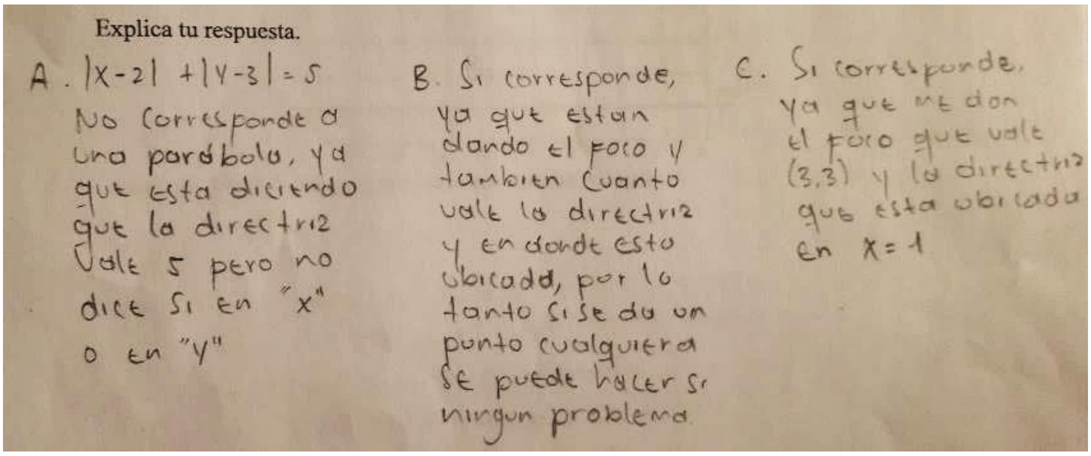
A. $|x - 2| + |y - 3| = 5$
B. $|x - 2| + |y - 1| = |y - 5|$
C. $|x - 3| + |y - 3| = |x - 1|$

Explica tu respuesta.

De acuerdo con el análisis a priori, esta pregunta estaba planteada en el Modo **AA–P$_{\mathbf{GT}}$** y tenía por objetivo identificar las ecuaciones que describen La Parábola en la Geometría del Taxista. Se encontró que 12 de los 15 estudiantes participantes evidencian el reconocimiento de los componentes de la ecuación**,** validando el Modo **AA–P$_{\mathbf{GT}}$.** Sin embargo, sólo el estudiante E10, logra hacer una explicación desde el Modo **SG–P$_{\mathbf{GT}}$** utilizando el articulador ***Art.*$_{3}$ *Sis. Coord. GT.*** Tres estudiantes no logran validar el articulador, pues sus respuestas no tienen claridad o relación con la pretensión de la pregunta.

Algunas evidencias de las respuestas corresponden a los estudiantes E5, E9, E11, E12 y E13, que utilizaron en sus descripciones elementos de la ecuación de La Parábola en la Geometría del Taxista tales como ubicación del Foco y la Directriz, haciendo énfasis en esta última, pues es la que permite justificar por qué la ecuación del numeral **a)** no corresponde a una Parábola.

Los estudiantes E5 (Figura 18), E11 (Figura 19), y E12 (Figura 20), resaltan la importancia de conocer si la directriz se ubica en *X* o en *Y*; utilizan este argumento para justificar que la ecuación a) no corresponde, pues 5 es un valor constante que no permite establecer la distancia con respecto a la directriz.


Explica tu respuesta.

A. |x-2| + |y-3| = 5 No corresponde a una parábola, ya que esta diciendo que la directriz vale 5 pero no dice si en "x" o en "y"

B. Si corresponde, ya que estan dando el foco y tambien cuanto vale la directriz y en donde esta ubicada, por lo tanto si se da un punto cualquiera se puede hacer sin ningun problema.

C. Si corresponde, ya que me dan el foco que vale (3,3) y la directriz que esta ubicada en x = 1

Figura 18. Respuesta del estudiante E5
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

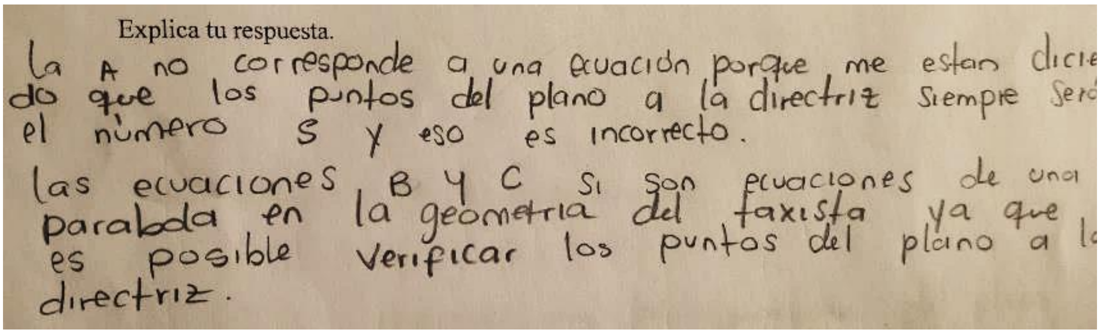

Explica tu respuesta.
La A no corresponde a una ecuación porque me estan diciendo que los puntos del plano a la directriz siempre será el número 5 y eso es incorrecto.
las ecuaciones B y C si son ecuaciones de una parabola en la geometria del taxista ya que es posible verificar los puntos del plano a la directriz.

Figura 19. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

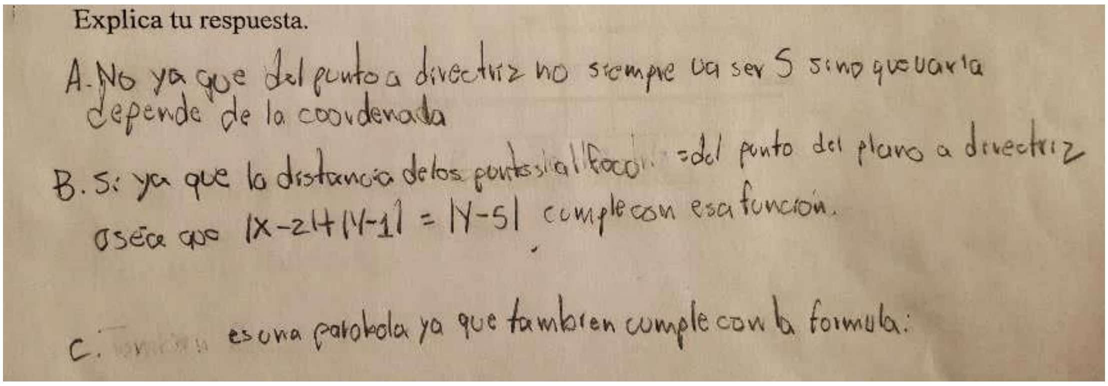

Explica tu respuesta.
A. No ya que del punto a directriz no siempre va ser 5 sino que varia depende de la coordenada
B. Si ya que la distancia de los puntos al foco =del punto del plano a directriz osea que |X-2|+|Y-1| = |Y-5| cumple con esa función.
C. es una parabola ya que tambien cumple con la formula:

Figura 20. Respuesta del estudiante E12
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

Los estudiantes E9 (Figura 21) y E13 (Figura 22) no hacen descripción de los componentes de la ecuación, pero reconocen y utilizan en ésta, elementos propios de la Geometría del Taxista tales como "*calles*" y "*carreras*".

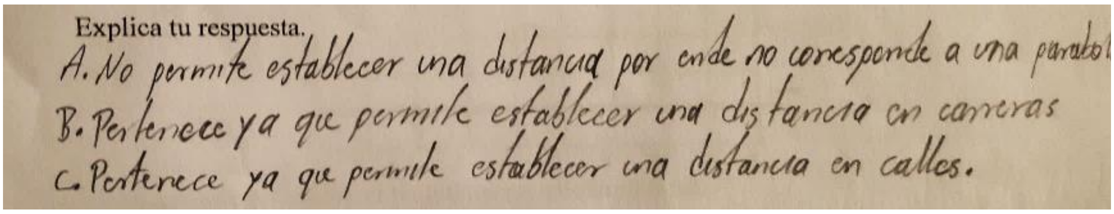

Explica tu respuesta.
A. No permite establecer una distancia por ende no corresponde a una parabol
B. Pertenece ya que permite establecer una distancia en carreras
C. Pertenece ya que permite establecer una distancia en calles.

Figura 21. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

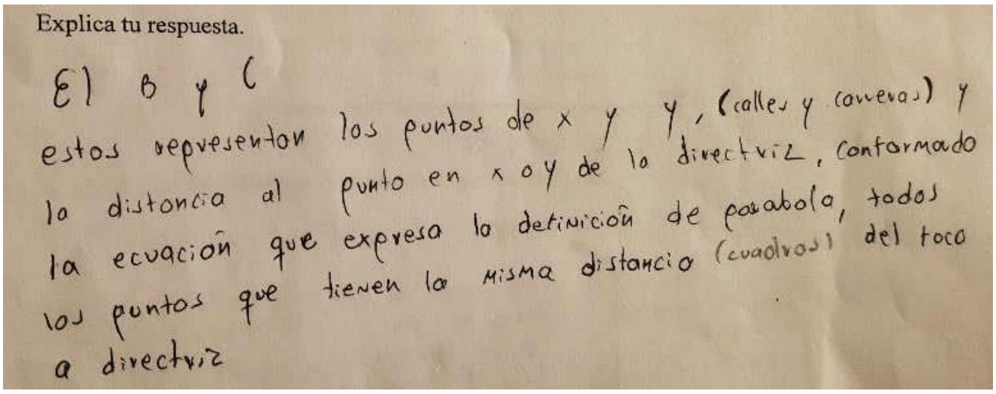

Explica tu respuesta.
El B y C
estos representan los puntos de x y y, (calles y carreras) y la distancia al punto en x o y de la directriz, conformado la ecuación que expresa la definición de parabola, todos los puntos que tienen la misma distancia (cuadros) del foco a directriz

Figura 22. Respuesta del estudiante E13
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

En el caso del estudiante E10 (Figura 23), la sustentación se dio desde el Modo **SG–P_{GT}**, graficando ecuaciones de los numerales **b)** y **c)**, concluyendo que sí corresponden a una Parábola, validando así el articulador ***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT.}$ Sin embargo, no aparecen argumentos que justifiquen por qué la ecuación del numeral **a)**, no corresponde.

Al entrevistarle, el estudiante justifica "*yo descarté la respuesta **a)** porque esa no tenía en el resultado, no tenía la letra dice la dirección de la Directriz y por eso no se podría saber la distancia del punto a la Directriz*"

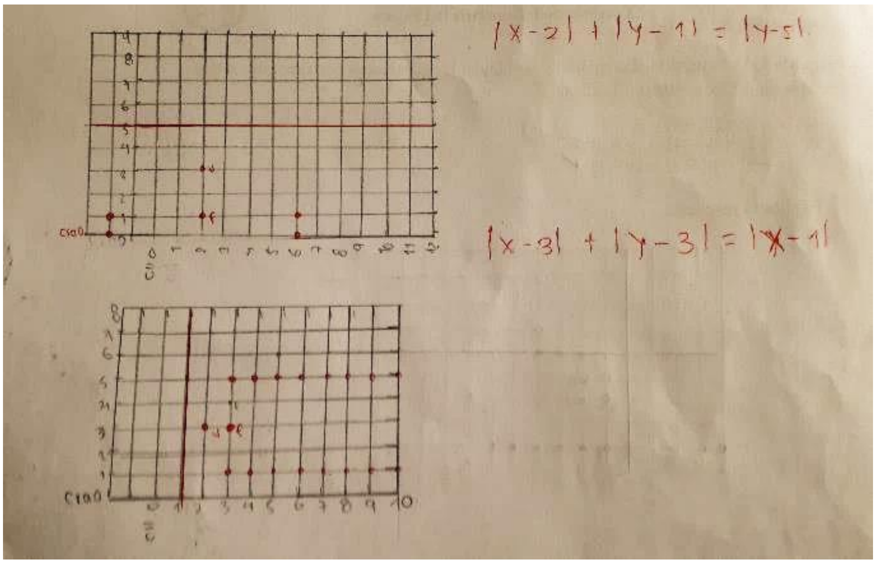


Figura 23. Respuesta del estudiante E10
Pregunta N°2 Geometría del Taxista

PREGUNTA 3. Se tiene una Parábola cuyo foco se ubica en el punto (3, 4), y su directriz pasa por $x = 1$ modelada por la ecuación:

$$|x - 3| + |y - 4| = |x - 1|$$

Determina si el punto (5, 6) pertenece a La Parábola dada.

Esta pregunta está planteada en el Modo **AA–P_{GT}** y tenía como intención identificar si un punto del plano pertenece o no a La Parábola, 14 de los 15 estudiantes respondieron de manera correcta de los cuales 12 dieron respuesta a partir del Modo **AA–P_{GT}** utilizando el articulador ***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT.}$ Sustituyen el punto dado en la ecuación de La Parábola en la Geometría del Taxista validando que la igualdad se cumpliera, como lo evidencia el estudiante E11. (Figura 24)

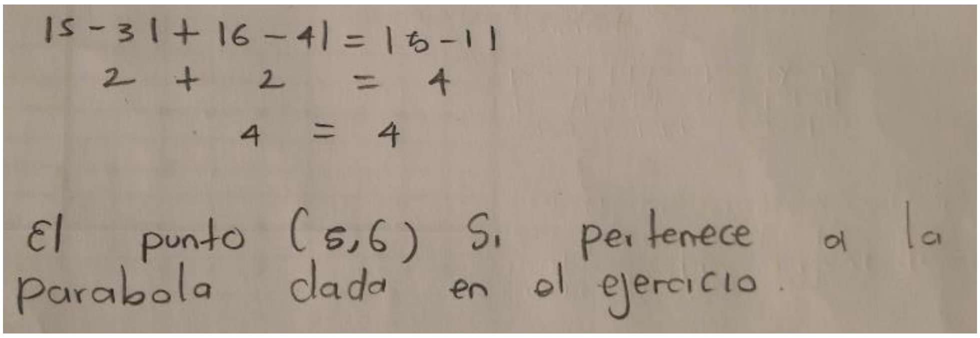


Figura 24. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°3 Geometría del Taxista

Por otra parte, los estudiantes E7 y E8 (Figura 25), ratifican su respuesta ubicando en el plano discreto el punto dado, el Foco, la Directriz y definiendo La Parábola como lugar geométrico, es decir, concluyen desde el Modo **AE–P**$_{GT}$ utilizando el articulador ***Art.***$_{1Distancia\ GT}$.

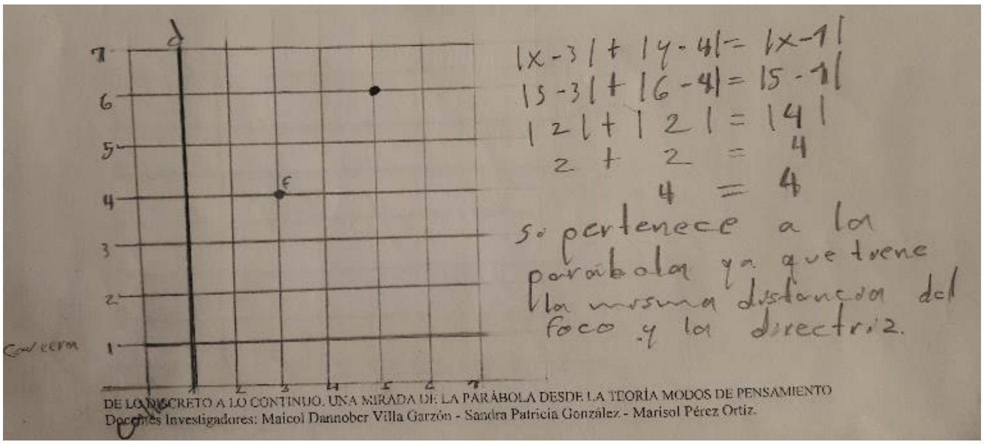


Figura 25. Respuesta del estudiante E8
Pregunta N°3 Geometría del Taxista

Finalmente, el estudiante E1 (Figuras 26 y 27), valida la respuesta desde el Modo **SG–P**$_{GT}$ inicialmente cuando hace la representación de los elementos de La Parábola en el plano a partir de la ecuación, sin embargo, no logra dar con la respuesta dado que ubica de manera incorrecta la directriz y lo lleva a conclusiones erróneas. Luego trata de validar la respuesta verificando el punto dado en la ecuación, pero presenta errores de cálculo.

Se concluye que el estudiante muestra una intencionalidad de transitar por los tres Modos al utilizar los articuladores ***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT}$ y ***Art.***$_{1Distancia\ GT}$ y al tener clara la definición de Parábola desde el concepto de distancia. Sin embargo, presenta falencia en la representación de La Parábola en el plano, es decir, hay una dificultad con el Modo **SG–P**$_{GT}$ de la Geometría del Taxista.

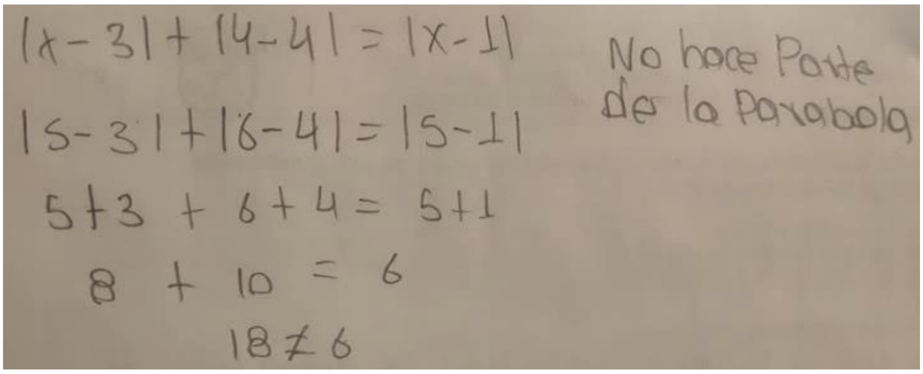


Figura 27. Respuesta del estudiante E1
Pregunta N°3 Geometría del Taxista

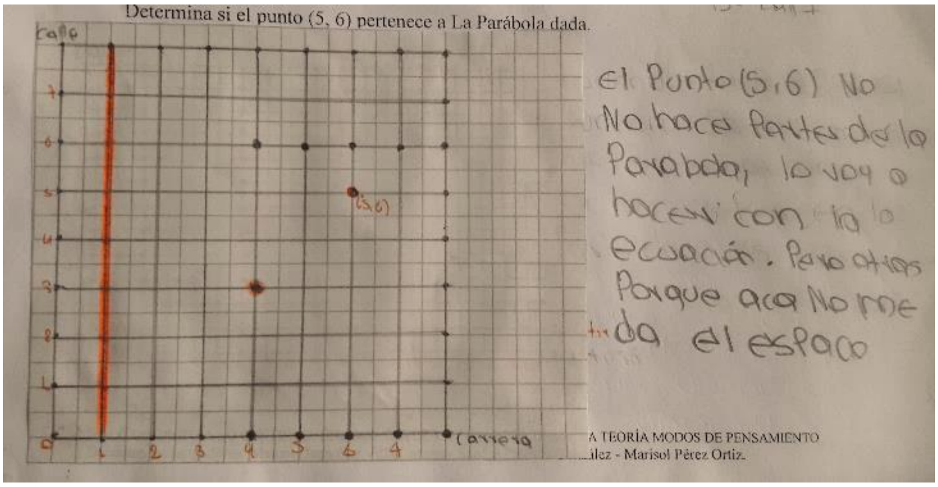
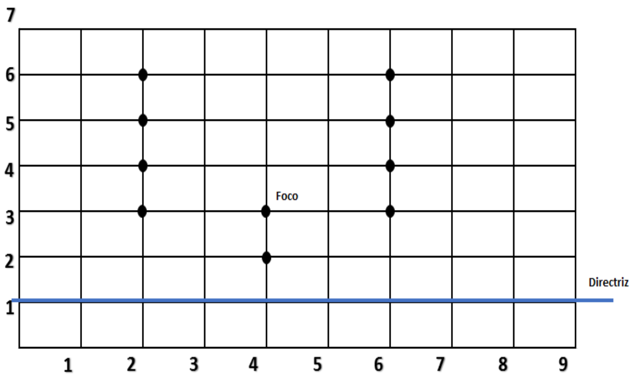


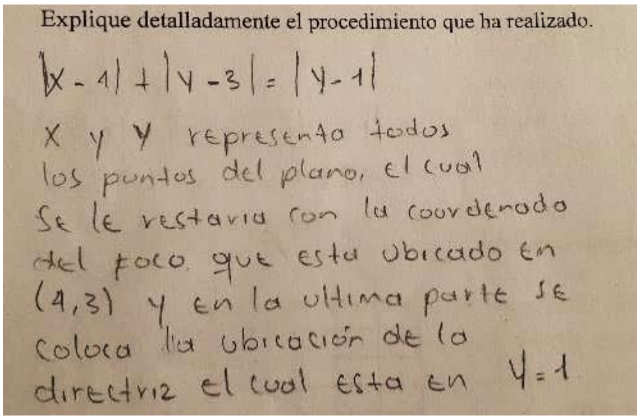
Figura 26. Respuesta del estudiante E1
Pregunta N°3 Geometría del Taxista

PREGUNTA 4. Determine la ecuación de La Parábola representada en el siguiente plano:



Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

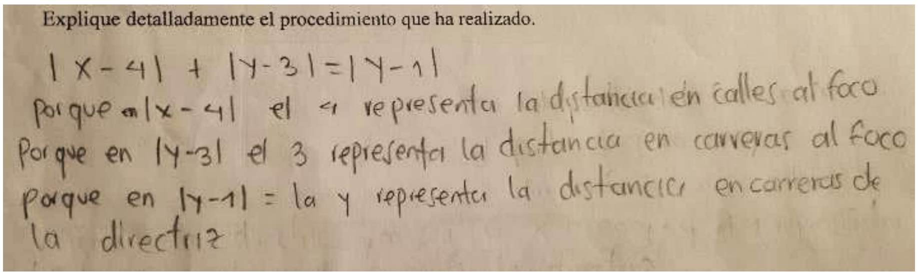
Según el análisis a priori, esta pregunta se ubica en el Modo **SG–P$_{\mathbf{GT}}$** y tenía el objetivo de construir la ecuación de La Parábola a partir de su representación en el plano discreto. Se encontró que 12 de los 15 estudiantes lograron responder de manera acertada utilizando el articulador ***Art.**2 Fórmula DGT* para encontrar la distancia en calles y carreras de los puntos del plano al Foco y para encontrar la distancia en carreras de los puntos del plano a la Directriz y así construir la ecuación de la Parábola en la Geometría del Taxista, es decir, transitar del Modo **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$ al Modo **AA–P**$_{\mathbf{GT}}$ como se muestra en las figuras 28, 29 y 30.


Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$

x y y representa todos los puntos del plano, el cual se le restaria con la coordenada del foco que esta ubicado en (4,3) y en la ultima parte se coloca la ubicación de la directriz el cual esta en y=1

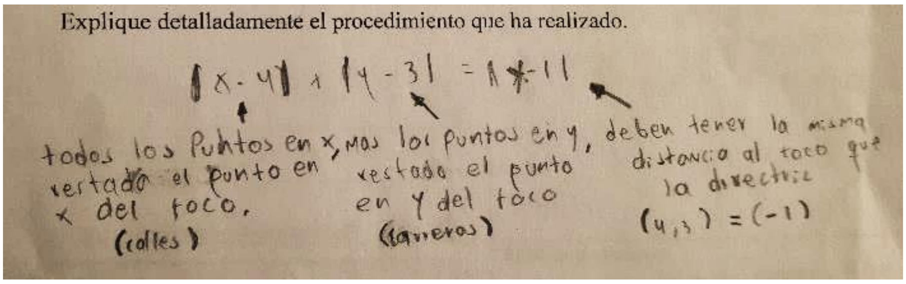
Figura 28. Respuesta del estudiante E5.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista


Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$

porque en |x-4| el 4 representa la distancia en calles al foco
Porque en |y-3| el 3 representa la distancia en carreras al foco
porque en |y-1| = la y representa la distancia en carreras de la directriz

Figura 29. Respuesta del estudiante E10.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista

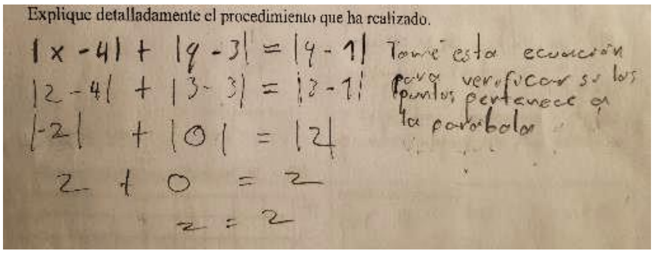

Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$

todos los Puntos en x, restado el punto en x del foco. (calles)
mas los puntos en y, restado el punto en y del foco (carreras)
deben tener la misma distancia al foco que la directriz (4,3) = (-1)

Figura 30. Respuesta del estudiante E13.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista

Por otra parte, los estudiantes E8 (Figura 31), E9 (Figura 32) y E14 (Figura 33), además del procedimiento anterior validaron la ecuación de La Parábola tomando un punto del plano y verificando que la ecuación se cumpla utilizando así el articulador ***Art.**3 Sis. Coord. GT*



Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$ Tomé esta ecuación para verificar si los puntos pertenece a la parábola

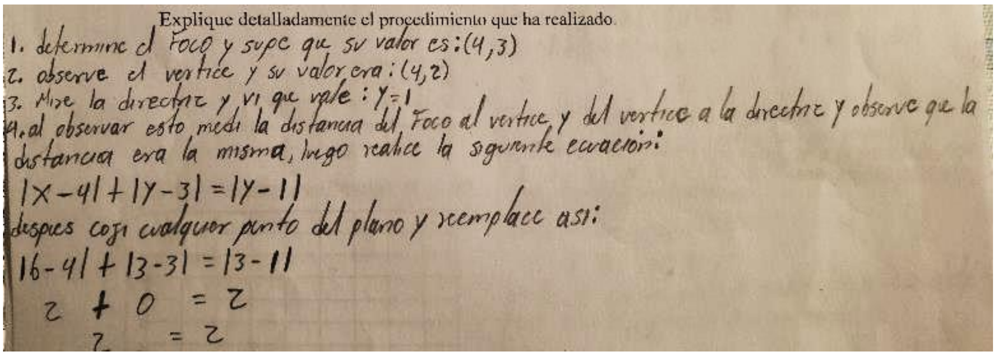
$|2-4| + |3-3| = |3-1|$

$|-2| + |0| = |2|$

$2 + 0 = 2$

$2 = 2$

Figura 31. Respuesta del estudiante E8.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista



Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

1. determine el Foco y supe que su valor es: (4,3)
2. observe el vertice y su valor era: (4,2)
3. Mire la directriz y vi que vale: y=1
4. al observar esto medi la distancia del Foco al vertice, y del vertice a la directriz y observe que la distancia era la misma, luego realice la siguiente ecuación:

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$

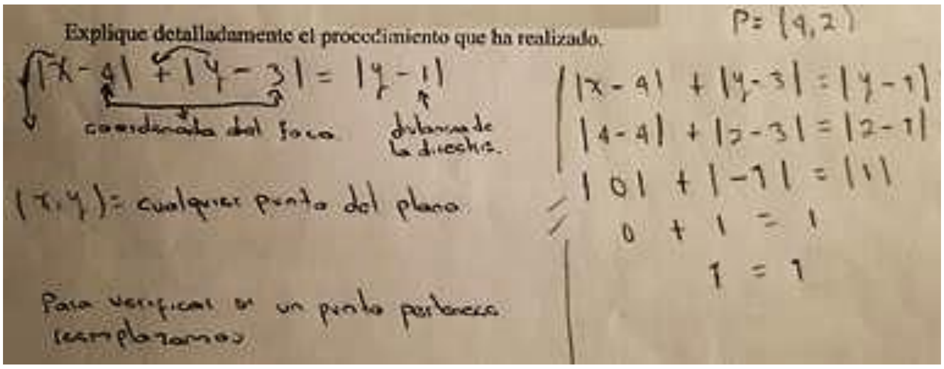
despues cogi cualquier punto del plano y remplace así:

$|6-4| + |3-3| = |3-1|$

$2 + 0 = 2$

$2 = 2$

Figura 32. Respuesta del estudiante E9.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista



Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

$P = (4,2)$

$\underbrace{|x-4| + |y-3|}_{\text{coordenada del foco}} = \underbrace{|y-1|}_{\text{distancia de la directriz}}$

(x,y) = cualquier punto del plano

Para verificar si un punto pertenece reemplazamos

$|x-4| + |y-3| = |y-1|$

$|4-4| + |2-3| = |2-1|$

$|0| + |-1| = |1|$

$0 + 1 = 1$

$1 = 1$

Figura 33. Respuesta del estudiante E14.
Pregunta N°4 Geometría del Taxista

Finalmente, los tres estudiantes que no dieron la respuesta correcta llegaron a la expresión $|x-4| + |y-3| = |x-1|$, en donde equivocaron la distancia de los puntos del plano a la directriz. (Ver figura 34)

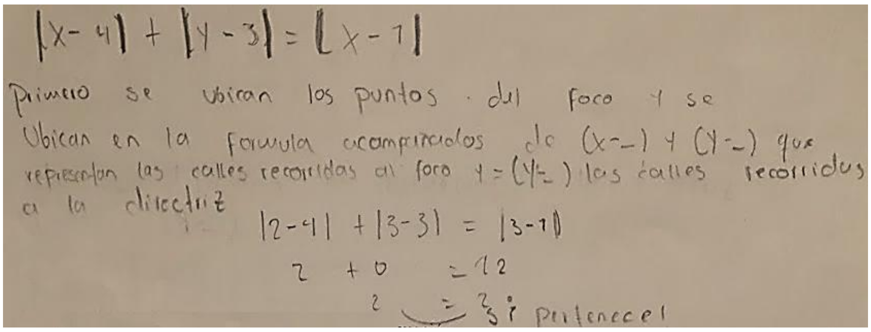


Figura 34. Respuesta del estudiante E15
Pregunta N°4 Geometría del Taxista

PREGUNTA 5.

Dibuje la parábola modelada por la ecuación

$$|x-4| + |y-3| = |x-2|$$

Esta pregunta, ubicada en el Modo **AA–P**$_{\mathbf{GT}}$, tenía por objetivo construir La Parábola en el plano discreto a partir de una ecuación dada. Se encontró que 14 de los 15 estudiantes realizaron la gráfica correctamente validando los articuladores ***Art.****1Distancia GT* y ***Art.****3 Sis. Coord. GT* que corresponden a un tránsito hacia los Modos **AE–P** y **SG–P**$_{\mathbf{GT}}$. (Ver figuras 35 y 36)

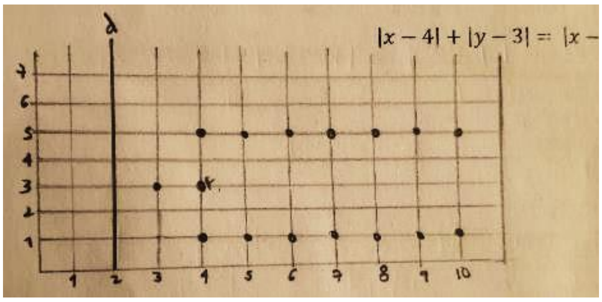


Figura 36. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

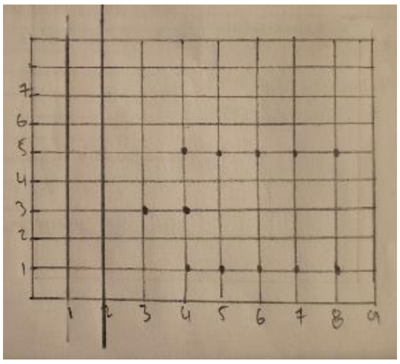


Figura 35. Respuesta del estudiante E4
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

El estudiante E9 (Figura 37) además de hacer la gráfica, identifica en ella el Foco, el vértice y la Directriz

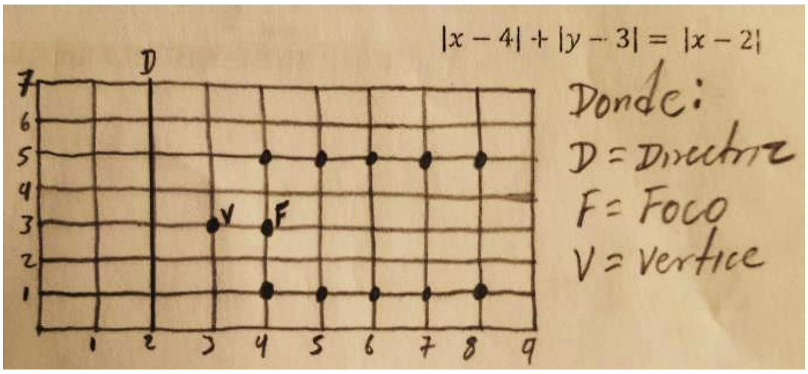


Figura 37. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

Los estudiantes E12 (Figura 38) y E15 (Figura 39), además de hacer la gráfica, verificaron un punto de La Parábola en la ecuación dada, garantizando las distancias hacia el Foco y la Directriz. Con esto se valida también el articulador ***Art.****2 Fórmula DGT* que permite el tránsito hacia el Modo **AE–P**$_{\mathbf{GT}}$.

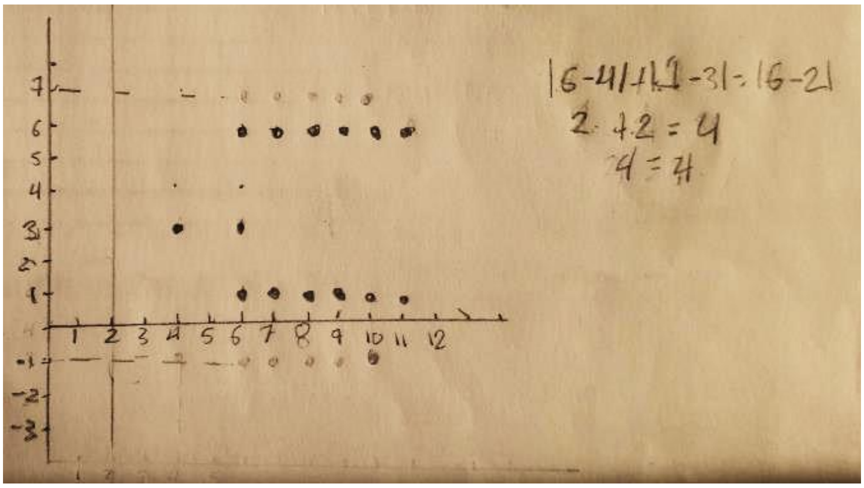


Figura 38. Respuesta del estudiante E12
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

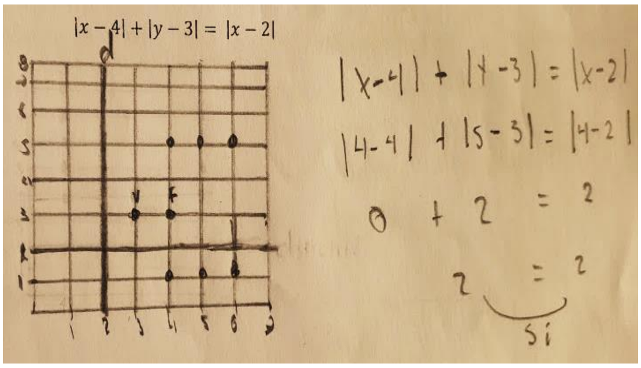


Figura 39. Respuesta del estudiante E15
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

El estudiante E1 (Figura 40), a pesar de ubicar la directriz en el plano, no logra construir correctamente La Parábola, pues el resto de los puntos, incluido el foco, no son equidistantes.

El estudiante E7 (Figura 41) no responde correctamente. No utiliza el plano discreto y ninguno de los elementos de La Parábola coincide en lo mínimo con la ecuación planteada. Por lo cual se concluye que no tiene dominio de representación en el plano de la Geometría del Taxista.

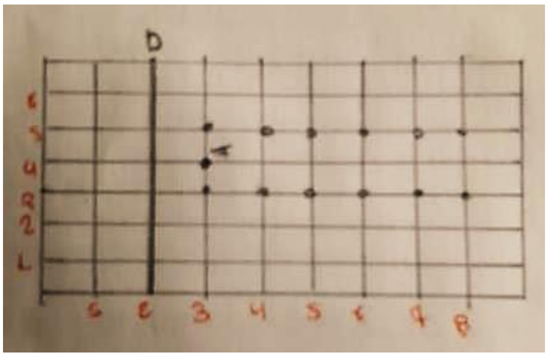


Figura 40. Respuesta del estudiante E1
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

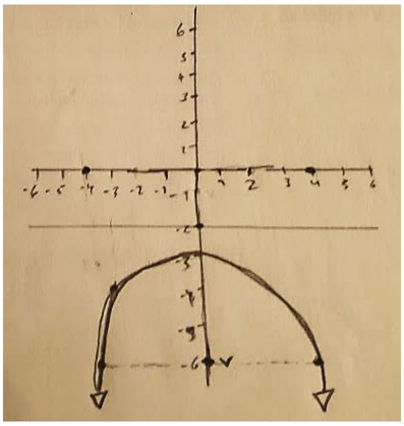


Figura 41. Respuesta del estudiante E7
Pregunta N°5 Geometría del Taxista

5.2.2 ANÁLISIS A POSTERIORI CUESTIONARIO II GEOMETRÍA ANALÍTICA.

PREGUNTA 1. A continuación se presentan ecuaciones de curvas en R x R.

a. $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$
b. $\boldsymbol{x^2 + y = 1}$
c. $\boldsymbol{x^2 - 4x - 4y + 16 = 0}$

Explica cuál o cuáles de ellas corresponden a una Parábola, y cómo llegas a la respuesta.

Esta pregunta se sitúa en el Modo **AA–P**

Esta pregunta se sitúa en el Modo **AA–$\mathbf{P_{GA}}$**, cuyo objetivo era identificar desde un lenguaje algebraico las ecuaciones que describen la curva de La Parábola en la Geometría Analítica. Se encontró que 13 de los 15 estudiantes contestaron de manera correcta, de los cuales 8 dieron respuesta a partir de la forma de la ecuación despejando la variable $\boldsymbol{y}$, llegando a la ecuación general y concluyeron que el literal **a)** no correspondía a una Parábola dado que ambas variables se encontraban elevadas al cuadrado. (Ver Figura 42)

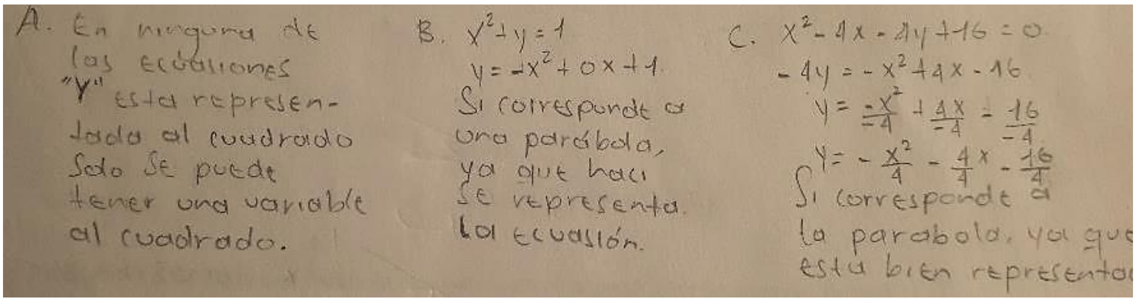


Figura 42. Respuesta del estudiante E5
Pregunta N°1 Geometría Analítica

Por otra parte, los estudiantes E3, E9 (Figura 43) y E15, a diferencia de los 8 anteriores reescriben la ecuación del literal **b)** a su forma canónica evidenciando las dos representaciones de La Parábola correspondiente al Modo **AA–$\mathbf{P_{GA}}$**, demostrando que se puede utilizar ambas representaciones para identificar si la curva corresponde a una Parábola, lo cual no se concibió en el análisis a priori de manera conjunta, se había planteado la representación de manera única para las ecuaciones pero no que el estudiante pudiera utilizar ambas para validar sus respuestas.

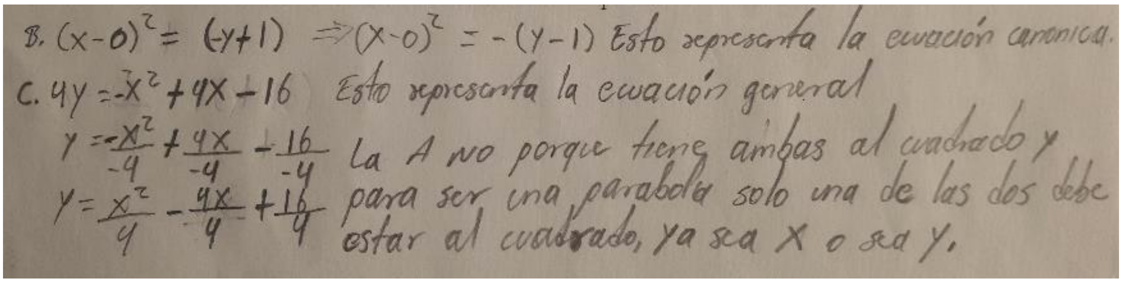

B. $(x-0)^2 = (-y+1) \Rightarrow (x-0)^2 = -(y-1)$ Esto representa la ecuación canonica.
C. $4y = -x^2 + 4x + 16$ Esto representa la ecuación general
$y = \frac{-x^2}{-4} + \frac{4x}{-4} + \frac{16}{-4}$
$y = \frac{x^2}{4} - \frac{4x}{4} + \frac{16}{4}$
La A no porque tiene ambas al cuadrado y para ser una parabola solo una de las dos debe estar al cuadrado, ya sea X o sea Y.

Figura 43. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°1 Geometría Analítica

Los dos estudiantes restantes que respondieron de manera correcta fueron E10 (Figura 44) y E14, los cuales despejaron la variable y, contrastando sus respuestas con respecto a la ecuación general de La Parábola.

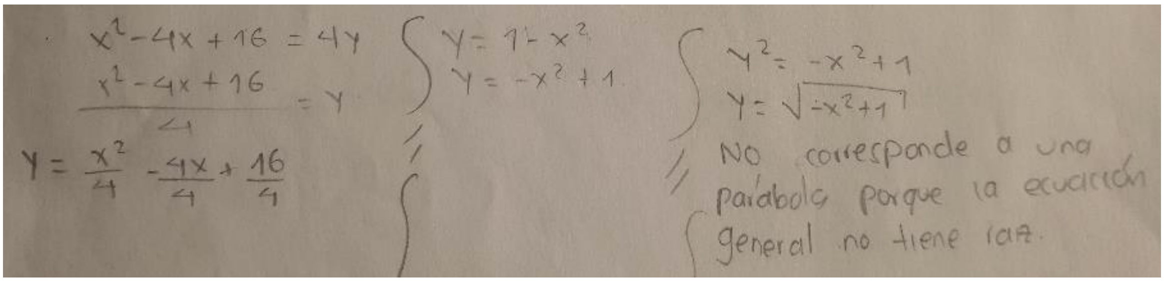

$x^2 - 4x + 16 = 4y$
$\frac{x^2 - 4x + 16}{4} = y$
$y = \frac{x^2}{4} - \frac{4x}{4} + \frac{16}{4}$
$y = 1 - x^2$
$y = -x^2 + 1$
$y^2 = -x^2 + 1$
$y = \sqrt{-x^2+1}$
No corresponde a una parábola porque la ecuación general no tiene raíz.

Figura 44. Respuesta del estudiante E10
Pregunta N°1 Geometría Analítica

Por otro lado, los estudiantes E2 (Figura 45) y E6 que no acertaron en la respuesta, tuvieron problemas en el literal **c)**, pues no lograron llevar las ecuaciones ya sea a su forma canónica o a su forma general por lo cual concluyeron erróneamente que no correspondía a una Parábola.

De hecho, ninguno de los estudiantes logró transformar la ecuación del literal **c)** a la ecuación canónica, lo que evidencia dificultades en el dominio de procedimientos algebraicos –completación de trinomios– que son conocimientos previos al momento de abordar las representaciones algebraicas de La Parábola.

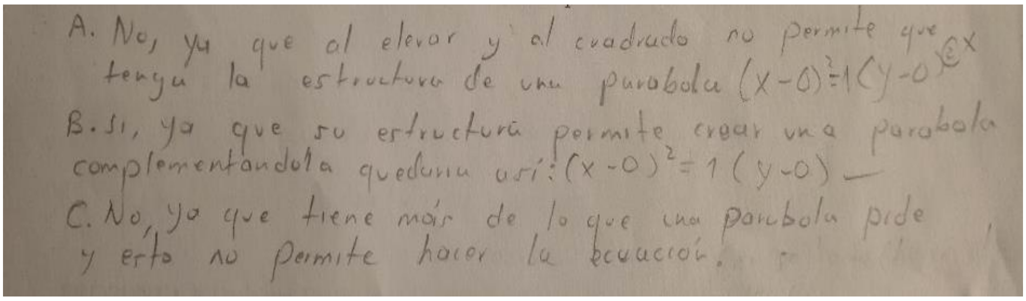
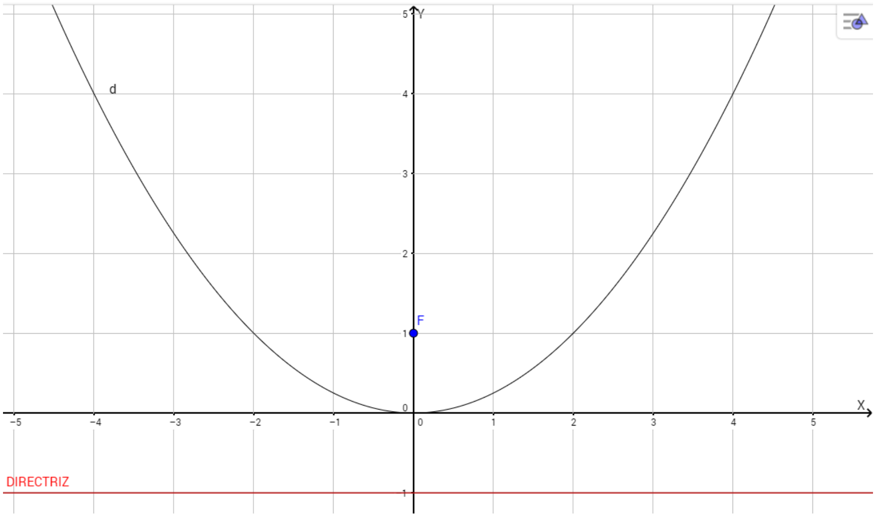

A. No, ya que al elevar y al cuadrado no permite que tenga la estructura de una parabola $(x-0)^2 = 1(y-0)$
B. Si, ya que su estructura permite crear una parabola complementandola quedaria así: $(x-0)^2 = 1(y-0)$
C. No, ya que tiene más de lo que una parabola pide y esto no permite hacer la ecuación.

Figura 45. Respuesta del estudiante E2
Pregunta N°1 Geometría Analítica

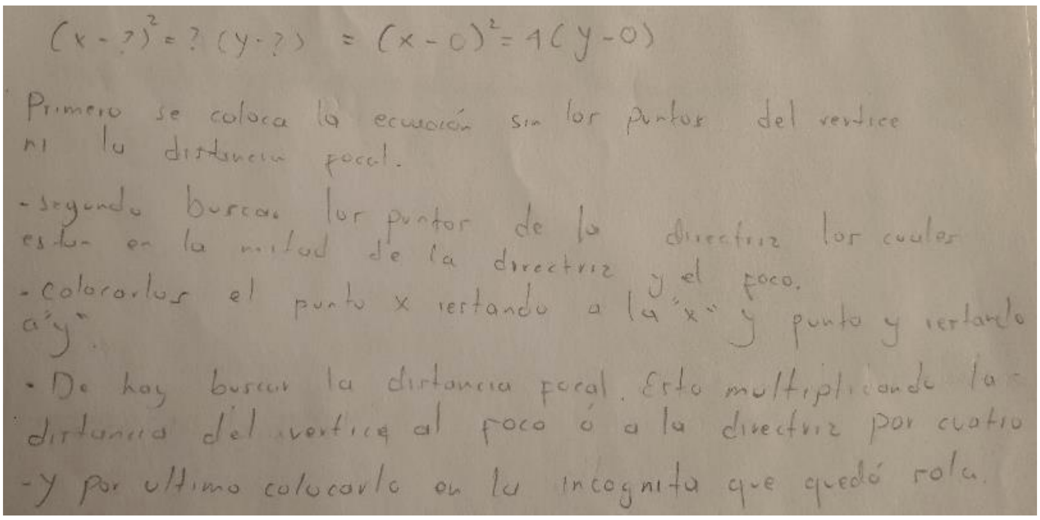
Finalmente, con respecto al análisis a priori ningún estudiante intentó graficar La Parábola a partir de darle valores a la variable $\boldsymbol{x}$ para ubicar luego los puntos en el plano cartesiano que le permitieran trazar la curva que se generaba, por tanto, no se pudo evidenciar el Modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$**.

PREGUNTA 2. Determine la ecuación de La Parábola representada en el siguiente plano:



Explique detalladamente el procedimiento que ha realizado.

Esta pregunta se planteó en el Modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$** de la Geometría Analítica y tenía por objetivo la construcción de la ecuación a partir del gráfico, es decir, partir del Modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$** para llegar al Modo **AA–P$_{\mathbf{GA}}$**. Se encontró que 14 de los 15 estudiantes respondieron acertadamente, de los cuales 13 utilizaron el articulador ***Art.*$_{3\ Sis.\ CC}$**, y la ecuación canónica de La Parabola, sustituyendo el valor del vértice y la distancia focal (Ver figuras 46, 47 y 48), validando así una de las opciones planteadas en el análisis a priori.



$(x-?)^2 = ?(y-?)$ = $(x-0)^2 = 4(y-0)$

Primero se coloca la ecuación sin los puntos del vertice ni la distancia focal.

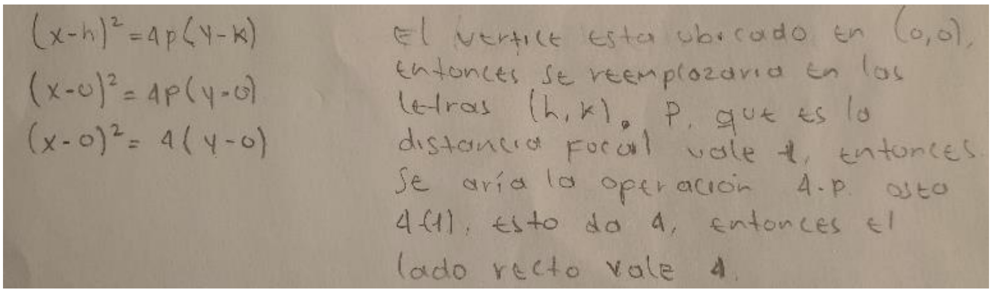
-segundo buscar los puntos de la directriz los cuales estan en la mitad de la directriz y el foco.

-colocarlos el punto x restando a la "x" y punto y restando a "y".

-De hay buscar la distancia focal. Esto multiplicando la distancia del vertice al foco ó a la directriz por cuatro

-y por ultimo colocarlo en la incognita que quedó sola.

Figura 46. Respuesta del estudiante E2
Pregunta N°2 Geometría Analítica



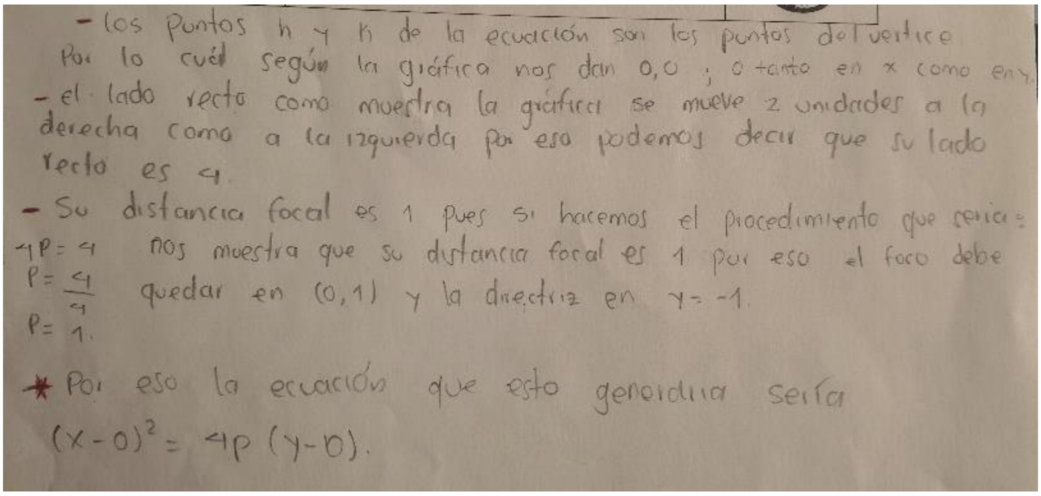
$(x-h)^2=4p(y-k)$

$(x-0)^2=4p(y-0)$

$(x-0)^2=4(y-0)$

El vertice esta ubicado en (0,0), entonces se reemplazaria en las letras (h,k). P, que es la distancia focal vale 1, entonces se aría la operación 4·p esto 4(1), esto da 4, entonces el lado recto vale 4.

Figura 47. Respuesta del estudiante E5
Pregunta N°2 Geometría Analítica



- los puntos h y k de la ecuación son los puntos del vertice por lo cual según la gráfica nos dan 0,0 ; o tanto en x como en y.
- el lado recto como muestra la gráfica se mueve 2 unidades a la derecha como a la izquierda por eso podemos decir que su lado recto es 4.
- Su distancia focal es 1 pues si hacemos el procedimiento que seria: nos muestra que su distancia focal es 1 por eso el foco debe quedar en (0,1) y la directriz en y = -1.

$4p=4$

$p=\frac{4}{4}$

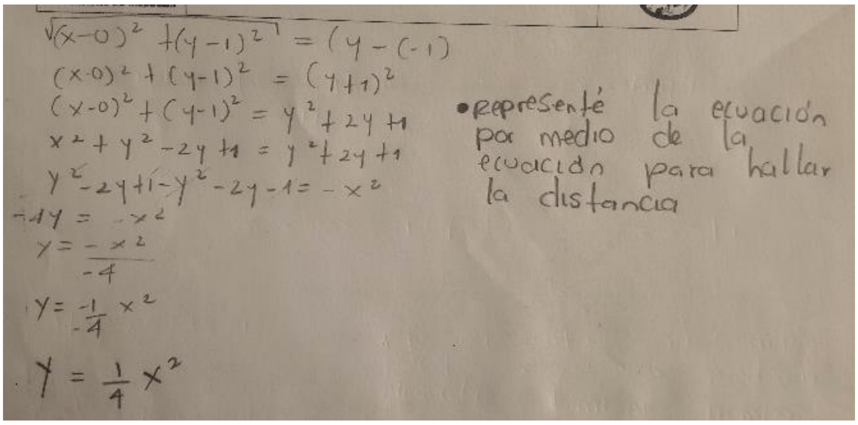
$p=1.$

* Por eso la ecuación que esto generaria sería

$(x-0)^2=4p(y-0).$

Figura 48. Respuesta del estudiante E10
Pregunta N°2 Geometría Analítica

El estudiante E11 (Figura 49) aplica la definición de La Parábola como lugar geométrico, ubicándose en un Modo **AE–P$_{GA}$**; transita al Modo **AA–P$_{GA}$** a través del articulador ***Art.***$_{2\ \text{Fórmula D. Eu.}}$ dando respuesta desde la ecuación general, validando así el análisis a priori planteado para esta pregunta.



$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=(y-(-1))$

$(x-0)^2+(y-1)^2=(y+1)^2$

$(x-0)^2+(y-1)^2=y^2+2y+1$

$x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1$

$y^2-2y+1-y^2-2y-1=-x^2$

$-4y=-x^2$

$y=\frac{-x^2}{-4}$

$y=\frac{-1}{-4}x^2$

$y=\frac{1}{4}x^2$

• represente la ecuación por medio de la ecuación para hallar la distancia

Figura 49. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°2 Geometría Analítica

Por último, el estudiante E4 (Figura 50) reconoce la ecuación canónica, interpreta correctamente los parámetros, pero no los sustituye en la ecuación. Aunque no contestó de manera acertada muestra la intención del tránsito del Modo **SG–PGA** al Modo **AA–PGA** a partir del articulador ***Art.*** *3 Sis. CC*.

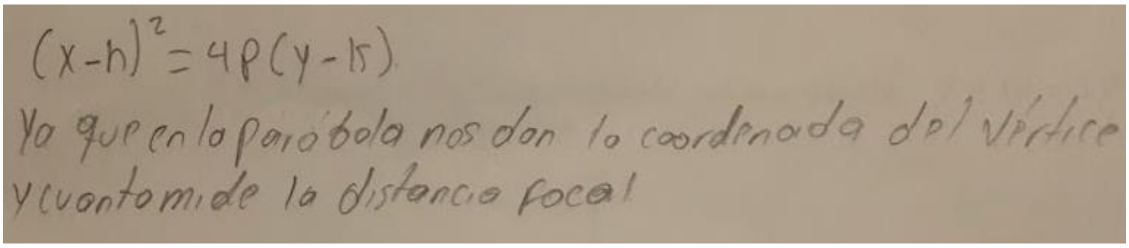


Figura 50. Respuesta del estudiante E4
Pregunta N°2 Geometría Analítica

PREGUNTA 3: Dada una Parábola con vértice en el origen y coordenadas del foco (0,2) modelada por la ecuación $y = \frac{x^2}{8}$. Determine si el punto (8,8) pertenece a La Parábola. Justifique su respuesta

Esta pregunta se planteó en el Modo **AA–PGA** de la Geometría Analítica y tenía la intencionalidad de identificar si un punto del plano pertenece o no a La Parábola. Se encontró que la totalidad de los estudiantes respondieron de manera acertada, de éstos, 11 tomaron la coordenada en x, del punto dado, y la sustituyeron en la ecuación, contrastando el resultado con la coordenada en y, tal como lo evidencia la respuesta del estudiante E3 (Figura 51)

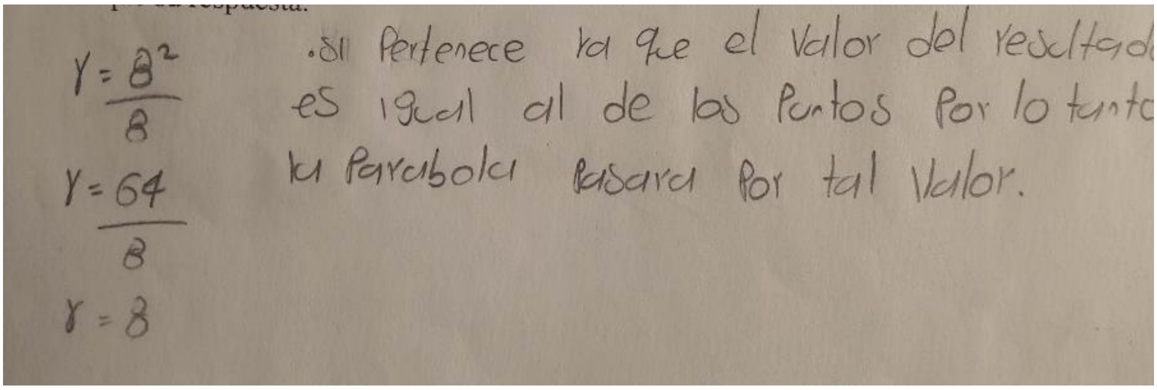


Figura 51. Respuesta del estudiante E3
Pregunta N°3 Geometría Analítica

El estudiante E15 (Figura 52) utiliza el mismo procedimiento que los estudiantes anteriores, pero completa la ecuación general de La Parábola, evidenciando el articulador ***Art.*** *3 Sis. CC* y construyendo de forma más precisa el Modo **AA–PGA** de la curva.

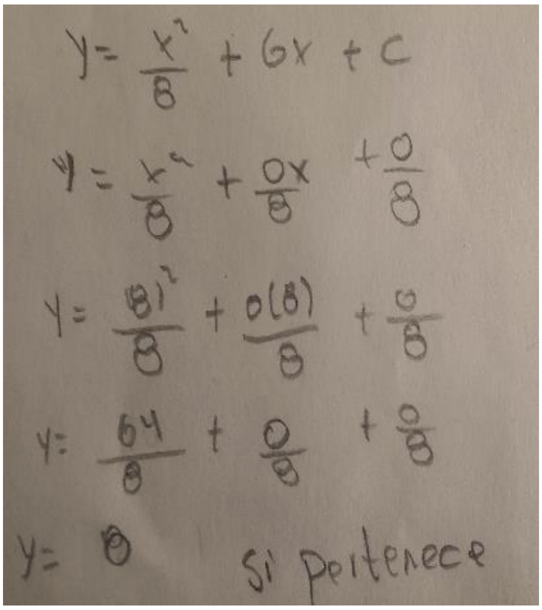


Figura 52. Respuesta del estudiante E15
Pregunta N°3 Geometría Analítica

Por otra parte, los estudiantes E1 y E14 (Figura 53), tienen la particularidad de convertir la ecuación dada a una ecuación canónica, lo que muestra un dominio más amplio del Modo **AA–P$_{\mathbf{GA}}$** para luego reemplazar ambas coordenadas del punto y verificar la igualdad.

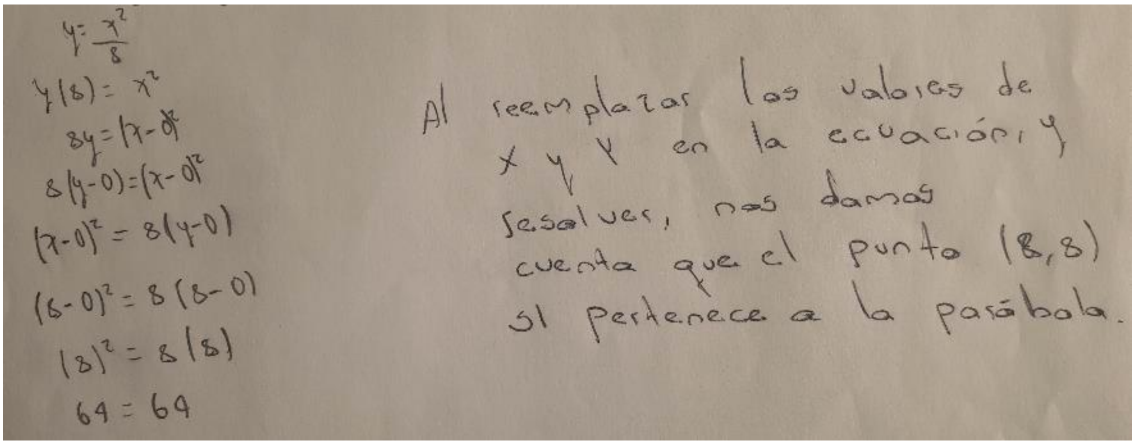


Figura 53. Respuesta del estudiante E14
Pregunta N°3 Geometría Analítica

El estudiante E5 (Figura 54) realiza el reemplazo de la coordenada del punto dado, además valida su respuesta a partir de representar La Parábola y el punto en el plano cartesiano, verificando que éste sí pertenece, dando evidencia así del tránsito al Modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$** y del articulador ***Art.***$_{3\ Sis.\ CC}$ planteados en el análisis a priori.

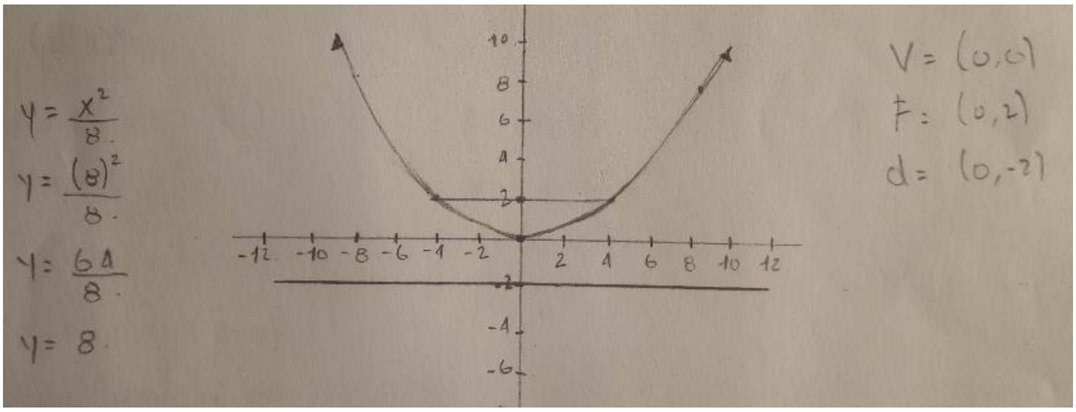


Figura 54. Respuesta del estudiante E5
Pregunta N°3 Geometría Analítica

A pesar de que este estudiante ubicó los elementos de La Parábola dada en el plano, al igual que el resto no utilizó como argumento la medición de las distancias del punto al Foco y a la Directriz, pues los esudiantes priorizan el Modo más óptimo para resolver la pregunta. Por lo tanto, no se logra evidenciar el Modo **AE–P$_{GA}$** ni el articulador ***Art.$_{1\ Distancia\ Eu}$*** planteados en el análisis a priori para esta pregunta.

PREGUNTA 4: Dibuje la parábola modelada por la ecuación $y = (x - 1)^2 + 1$

Esta pregunta se encuentra planteada en el Modo **AA–P$_{GA}$** y su objetivo era dibujar La Parábola a partir de la ecuación dada y con ello analizar el tránsito del Modo **AA–P$_{GA}$** al Modo **SG–P$_{GA}$**. Se encontró que, de los 15 estudiantes, 9 contestaron de manera correcta, y de éstos, 7 privilegiaron el planteamiento de la ecuación en su forma canónica y la interpretación de los parámetros de la ecuación para construir el dibujo, es decir, validan los articuladores ***Art.$_{1\ Distancia\ Eu}$*** y ***Art.$_{3\ Sis.\ CC}$*** al igual que el Modo **SG–P$_{GA}$.** (Ver Figuras 55 y 56)

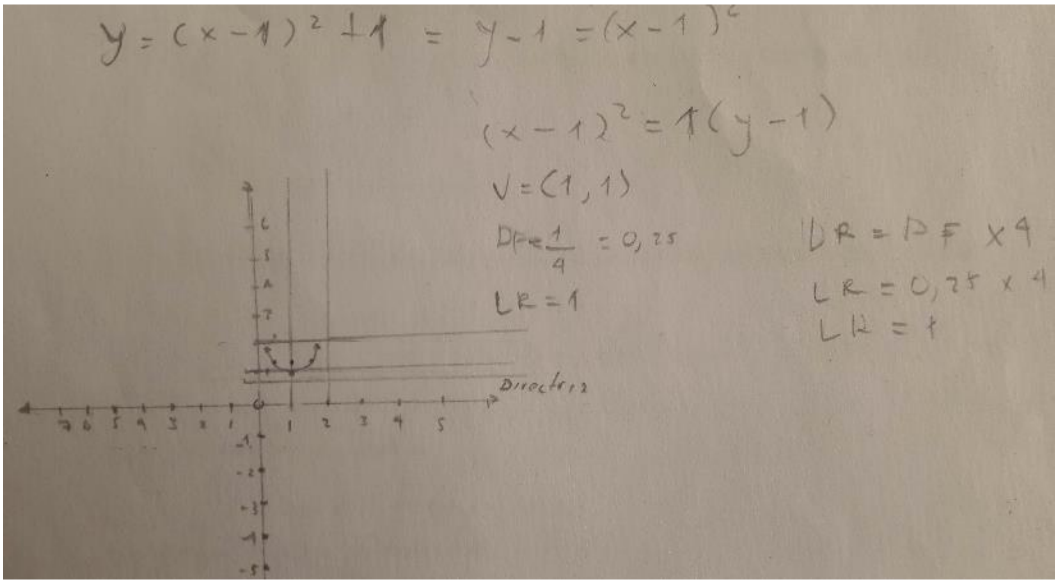


Figura 55. Respuesta del estudiante E2
Pregunta N°4 Geometría Analítica

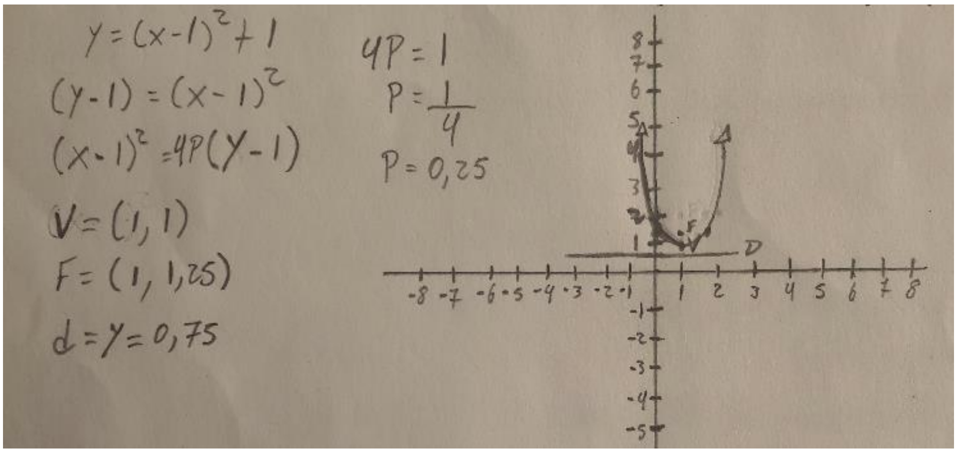


Figura 56. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°4 Geometría Analítica

Los otros dos estudiantes E10 (Figura 57) y E11 (Figura 58) que respondieron de forma correcta partieron de la ecuación general, para determinar la coordenada del vértice y le asignaron dos valores a la variable independiente ***x*** para encontrar sus correspondientes en ***y***, logrando trazar el bosquejo de La Parábola en el plano cartesiano.

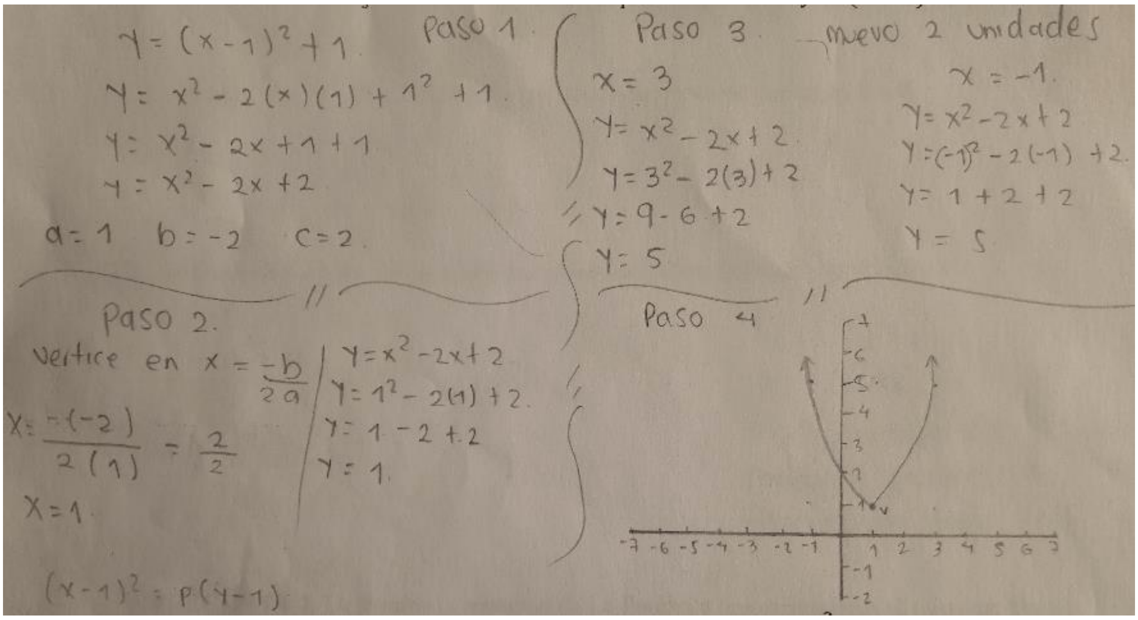


Figura 57. Respuesta del estudiante E10
Pregunta N°4 Geometría Analítica

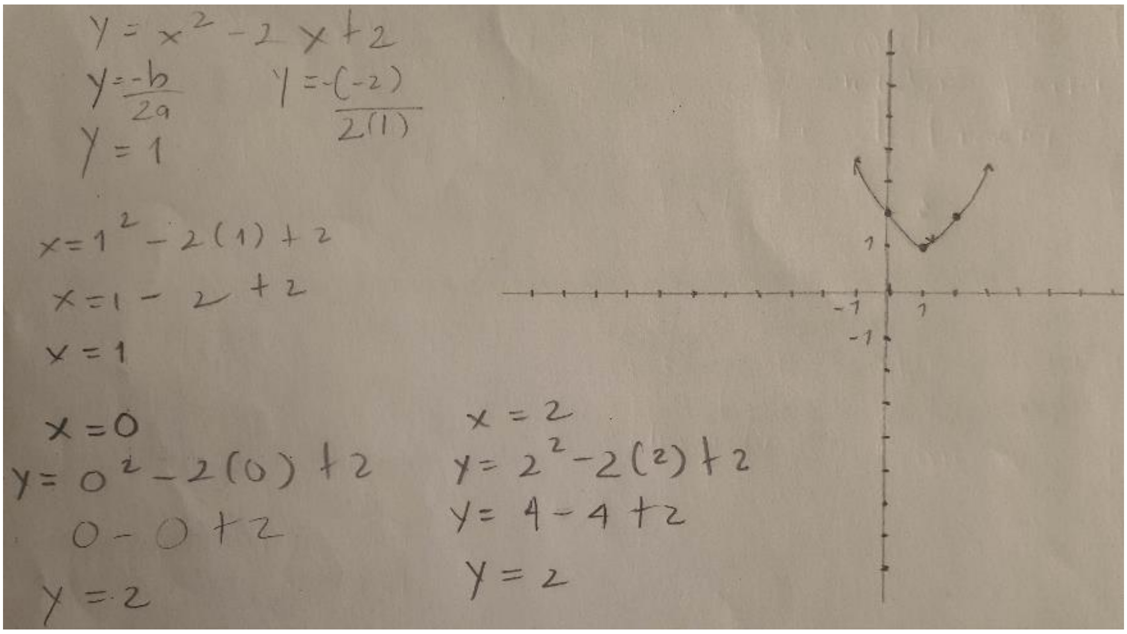


Figura 58. Respuesta del estudiante E11
Pregunta N°4 Geometría Analítica

Finalmente, los 6 estudiantes que no respondieron de manera correcta tienen la particularidad de escribir de manera acertada la ecuación canónica, pero tienen falencias a la hora de la interpretación e identificación de los elementos de La Parábola. (Ver Figuras 59, 60 y 61)

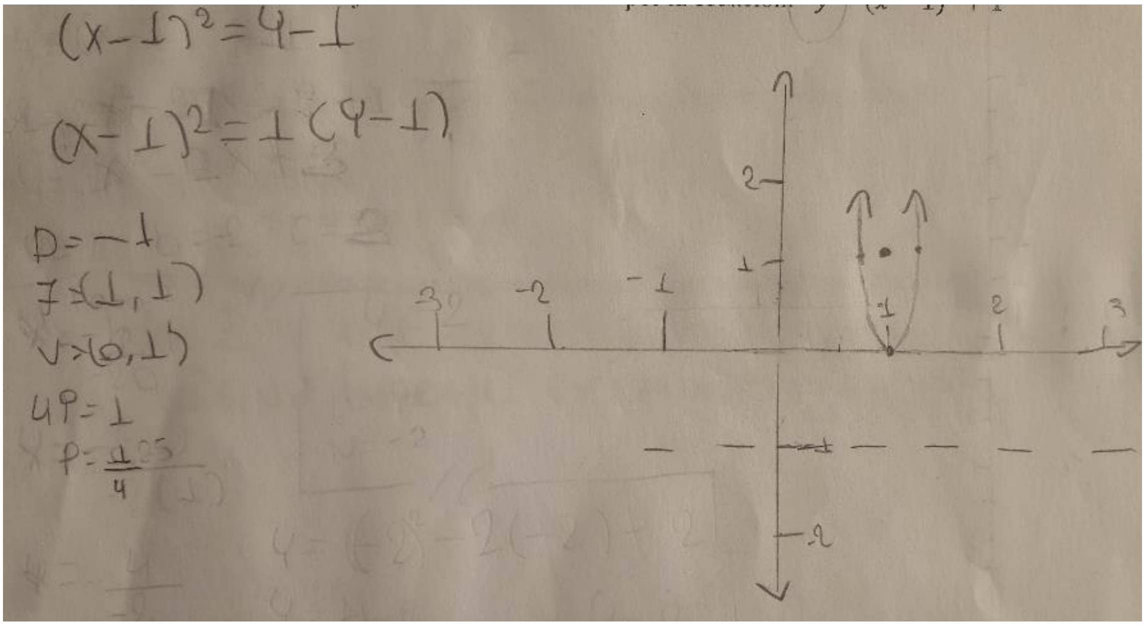


Figura 59. Respuesta del estudiante E1
Pregunta N°4 Geometría Analítica

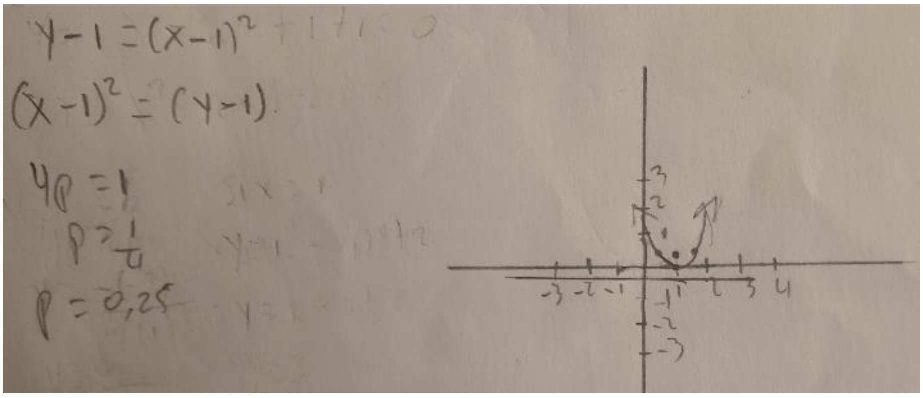


Figura 60. Respuesta del estudiante E4
Pregunta N°4 Geometría Analítica

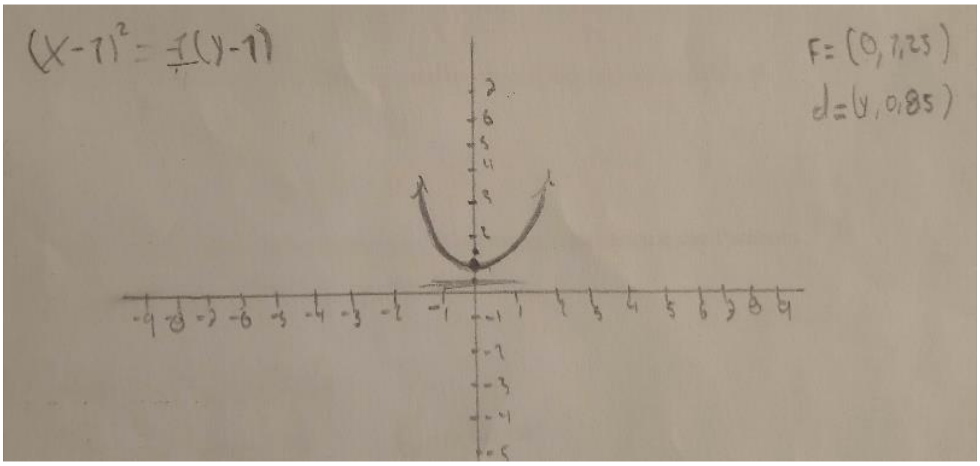


Figura 61. Respuesta del estudiante E15
Pregunta N°4 Geometría Analítica

PREGUNTA 5. Halle el lado recto de la parábola $y = \frac{x^2}{12}$

Esta pregunta está planteada en el Modo **AA–P** con el objetivo de identificar la medida del lado recto de La Parábola. Se encontró que la totalidad de los estudiantes respondieron de manera correcta, presentándose una regularidad en el desarrollo del mismo procedimiento, que consistió en escribir la ecuación en su forma canónica e interpretar la distancia focal o directamente el lado recto. Quedándose así en un dominio del Modo **AA–P$_{GA}$** (Ver Figuras 62, 63 y 64)

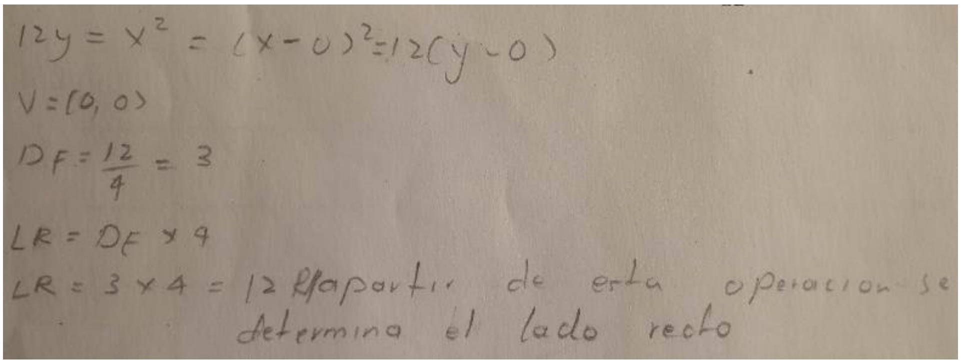


Figura 62. Respuesta del estudiante E2
Pregunta N°5 Geometría Analítica

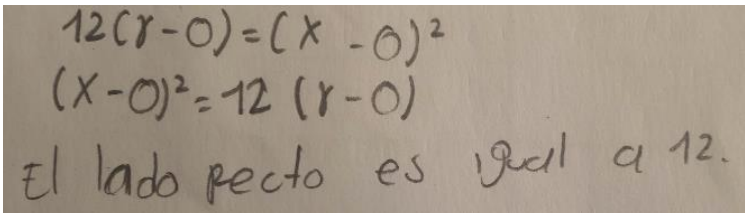


Figura 63. Respuesta del estudiante D3
Pregunta N°5 Geometría Analítica

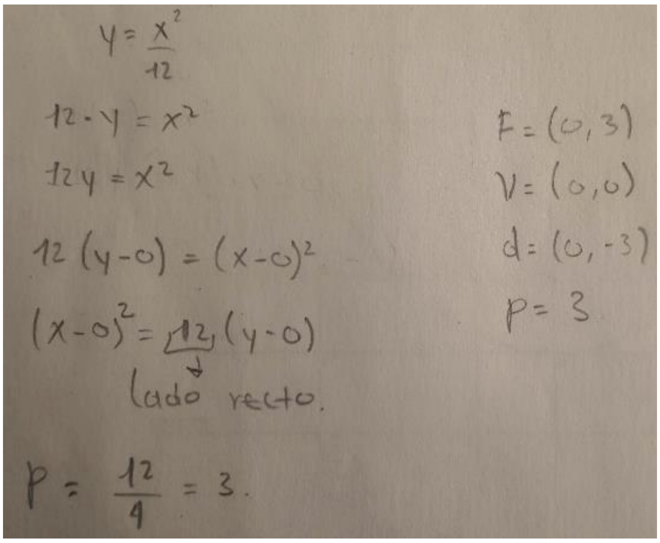


Figura 64. Respuesta del estudiante D5
Pregunta N°5 Geometría Analítica

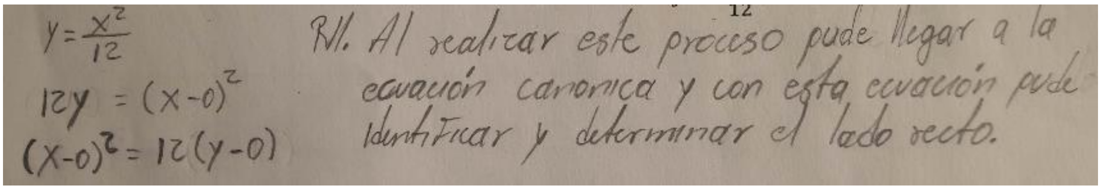


Figura 65. Respuesta del estudiante E9
Pregunta N°5 Geometría Analítica

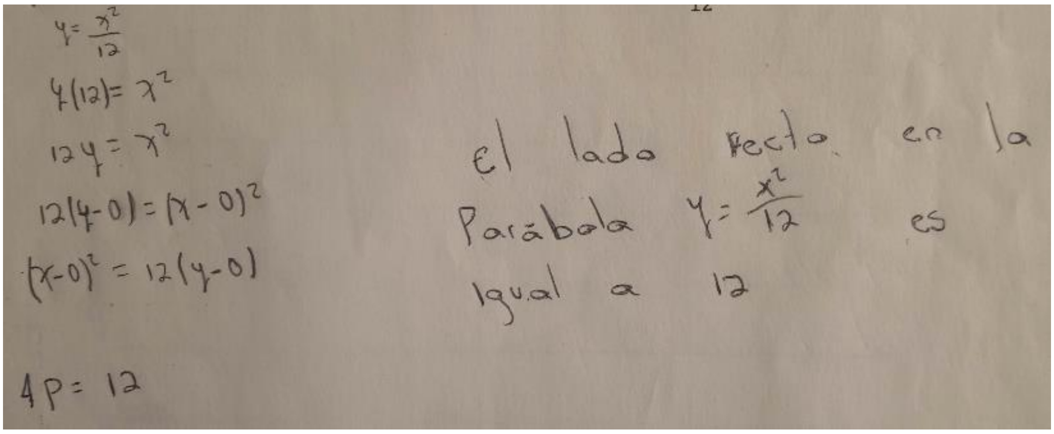


Figura 66. Respuesta del estudiante E14
Pregunta N°5 Geometría Analítica

Cabe resaltar que el otro procedimiento tenido en cuenta en el análisis a priori consistía en dibujar La Parábola y medir el lado recto, esto procedimiento era más largo y tenía que pasar de igual manera por la construcción de la ecuación canónica, por lo que se concluye una vez más que los estudiantes buscan la eficiencia a la hora de responder una pregunta y que no se pudo validar el Modo **SG–P$_{\text{GA}}$** planteado como un posible argumento para esta pregunta.

5.3 HALLAZGOS CUESTIONARIO I EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA

En los análisis a priori de los cuestionarios, se plantearon las posibles respuestas de acuerdo con los articuladores y los Modos de Pensamiento construidos en el marco teórico para La Parábola tanto en la Geometría del Taxista como en la Geometría Analítica.

Para abordar La Parábola en la Geometría del Taxista es fundamental el dominio del plano discreto, saber reconocer sus elementos y condiciones: la ubicación de calles y carreras, comprender que los movimientos en el plano son por cuadras y sólo es posible hacerlo en sentido horizontal y vertical siempre con cantidades enteras.

Al aplicar el cuestionario I en la Geometría del Taxista a los estudiantes participantes, se encontró que la mayoría de ellos tenían claridad frente a la ubicación de calles y carreras, así como de las coordenadas de un punto dado, salvo en dos casos donde hubo confusión entre la direccionalidad de estos elementos: calles en el eje vertical y carreras en el eje horizontal, que a su vez, interfería en las coordenadas de puntos dados de La Parábola o en la ubicación de elementos fundamentales como el Foco y la Directriz. Estos casos indican que es necesario profundizar en actividades introductorias que permitan fortalecer el articulador *Sistemas de Coordenadas en la Geometría del Taxista* –***Art.**$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT}$* –, pues el poco dominio del plano discreto lleva a los estudiantes a usos incorrectos de las ecuaciones de La Parábola y a conclusiones erróneas en su construcción e interpretación.

La primera pregunta del cuestionario I, se planteó en el Modo Sintético Geométrico de La Parábola en la Geometría del Taxista – **SG–P**$_{GT}$ – para indagar sobre el reconocimiento de la forma geométrica de La Parábola en el plano discreto. Para esto, se planteó que los estudiantes podían responder a partir del conteo de cuadras desde un punto cualquiera de la figura, lo que corresponde al articulador *Distancia entre dos puntos en la Geometría del Taxista* –***Art.**$_{1Distancia\ GT}$* –, para verificar que la distancia desde cualquier punto de la figura tanto hacia el Foco como a la Directriz es la misma, lo cual corresponde al Modo Analítico Estructural de La Parábola en la Geometría del Taxista – **AE–P**$_{GT}$ –.

En una primera clasificación de las respuestas, se encontraron descripciones de los estudiantes donde referenciaban que dos de las figuras no correspondían a la representación geométrica de La Parábola dado que la distancia entre algunos puntos de la gráfica hacia el Foco y la Directriz era variante, incluso algunos de estos estudiantes señalaban en sus figuras dichos puntos. Dentro de estas mismas descripciones se encontraron casos donde los estudiantes hacían el planteamiento de las ecuaciones de La Parábola, dando una primera muestra del Modo de Pensamiento Analítico Aritmético de La Parábola en la Geometría del Taxista – **AA–P**$_{GT}$ – que no se había tenido en cuenta en el análisis a priori. Esto precisamente fue lo que se evidenció con mayor profundidad en la segunda clasificación de respuestas, donde hubo estudiantes que, además de plantear la ecuación correspondiente a la gráfica, verificaron en ella uno o más puntos del plano encontrando que algunos de éstos satisfacían la ecuación y otros no y que, por lo tanto, la gráfica no correspondía a una Parábola. De esta manera no sólo se logra la validación del articulador ***Art.**$_{1Distancia\ GT}$* para transitar entre los Modos **SG–P**$_{GT}$ y **AE–P**$_{GT}$ sino que también el articulador ***Art.**$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT}$* que permite el tránsito entre los Modos **SG–P**$_{GT}$ y **AA–P**$_{GT}$. De esta manera logran transitar por los tres Modos de Pensamiento de La Parábola en la Geometría del Taxista.

La segunda pregunta de este cuestionario estaba planteada en el Modo **AA–P**$_{GT}$ y presentaba tres ecuaciones en la Geometría del Taxista donde los estudiantes debían justificar cuáles de ellas pertenecían o no a una Parábola. En el análisis a priori de esta pregunta, se planteó que éstos podrían responder desde el Modo **AA–P**$_{GT}$ al dar argumentos desde la forma de la ecuación, cuyo reconocimiento ya se venía evidenciando desde algunas respuestas de la primera pregunta. La mayoría de los estudiantes dan cuenta de la prevalencia de este Modo de Pensar La Parábola al justificar que dos de las ecuaciones sí correspondían a una Parábola y que la otra no, pues desde su forma podían evidenciar elementos de la ecuación tales como la diferencia entre las calles y carreras, así como la distancia hacia la Directriz, y que ésta última expresión no aparecía en la primera opción de respuesta. Algunos incluso resaltaban la importancia de conocer si la Directriz se ubica en $\boldsymbol{x}$ o en $\boldsymbol{y}$, argumentando que un valor constante en esta expresión no permite establecer la distancia.

Un elemento importante es que sólo uno de los estudiantes logró hacer una explicación desde el Modo **SG–P$_{GT}$** utilizando el articulador ***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT}$. Puede decirse que esta forma de respuesta, valida el análisis a priori, pues es posible dar solución a la pregunta en dicho Modo a partir de ese articulador. Sin embargo, el hecho de que sólo se haya encontrado una respuesta de este tipo, es resultado de que los estudiantes priorizan las estrategias más cortas en el momento de las aplicaciones, pues para este caso dar un tratamiento geométrico, requiere de mayor tiempo y elementos para garantizar una buena solución.

La tercera pregunta del cuestionario I, se planteó desde el Modo **AA–P$_{GT}$** con la intencionalidad de que los estudiantes verificaran si un punto del plano hace parte de una Parábola modelada por determinada ecuación. En el análisis a priori se planteó que los estudiantes podían responder desde tres formas distintas, la primera, conservando el Modo **AA–P$_{GT}$** donde el estudiante reemplaza en la ecuación los valores de acuerdo con las coordenadas del punto. En los resultados obtenidos, la mayoría de los estudiantes dio cuenta de este Modo de Pensar y desde las evidencias se puede validar el articulador ***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT,}$ pues reemplazan el punto dado y obtienen una igualdad, desde lo cual concluyen que el punto pertenece a La Parábola dada.

De acuerdo con el análisis a priori, una segunda posible respuesta a esta pregunta, plantea que el estudiante ubica los elementos dados en el plano discreto y comprueba la definición de lugar geométrico de La Parábola a partir de las distancias entre el punto y el Foco y el punto y la Directriz. Además de hacer la verificación en la ecuación, algunos estudiantes realizaron una representación en el plano, ubicando el Foco, la Directriz y el punto dado, verificaron el punto a partir de la definición de Parábola, es decir, desde el Modo **AE–P$_{GT}$** para transitar luego hacia el Modo **SG–P$_{GT}$** a través del articulador ***Art.***$_{1Distancia\ GT}$. Sin embargo, ninguno de los que realizó la ubicación de estos elementos en el plano discreto, completó La Parábola con los demás puntos –***Art.***$_{3\ Sis.\ Coord.\ GT}$ –, para construir totalmente su representación geométrica que era la tercera opción de respuesta planteada en el análisis a priori. Sólo un estudiante trató de hacer la figura completa, pero equivoca la direccionalidad de los ejes y por ende la ubicación del punto dado y la Directriz. Puede decirse entonces desde las evidencias, que se validan los tres articuladores y los Modos de Pensamiento planteados para esta pregunta.

Con la cuarta pregunta del cuestionario I, planteada desde el Modo **SG–P$_{GT}$**, se pretendía que los estudiantes definieran la ecuación de La Parábola que estaba representada en el plano discreto. En el análisis a priori se había planteado como posible respuesta que los estudiantes utilizaran la definición de lugar geométrico, es decir, respondieran desde el Modo **AE–P$_{GT}$** a partir del articulador *Fórmula para calcular la distancia en la Geometría del Taxista* ***Art.***$_{2\ Fórmula\ DGT}$. Efectivamente, en los resultados obtenidos, los estudiantes lograron responder de manera acertada utilizando este articulador para encontrar la distancia en calles y carreras de los puntos del plano al Foco y para encontrar la distancia en carreras de los puntos del plano a la Directriz y así construir la ecuación de La Parábola, de hecho, uno de los estudiantes verifica uno de los puntos dados en la gráfica validando el articulador ***Art.***$_{2\ Fórmula\ DGT}$ y con esto los planteamientos hechos en el análisis a priori. Sin embargo, tres estudiantes mostraron error en la expresión pues equivocan la dirección de la Directriz, que en el caso de la figura se encontraba paralela al eje $\boldsymbol{x}$, no en el eje $\boldsymbol{y}$ como ellos lo estaban planteando en la ecuación, lo que comprueba una vez más, la necesidad de profundizar en elementos geométricos.

Para la última pregunta del cuestionario, dada en el Modo **AA–P$_{GT}$**, se presenta a los estudiantes la ecuación de una Parábola que luego deben representar en el plano discreto. En el análisis a priori se planteó que los estudiantes podían determinar las coordenadas del Foco y la Directriz a partir de la ecuación – ***Art.**3 Sis. Coord. GT* –, construyendo una tabla de valores y completando la gráfica en el plano discreto utilizando la definición de lugar geométrico, es decir el Modo **AE–P$_{GT}$.** Se encontró que la mayoría de los estudiantes hicieron una representación correcta de La Parábola, al ubicar el Foco y la Directriz y completando los demás puntos, no desde una tabla de valores sino a partir del articulador ***Art.**1Distancia GT,* que no se había considerado en el análisis a priori pero que los estudiantes dieron evidencia mostrando con esto el tránsito entre los tres Modos de Pensar La Parábola en la Geometría del Taxista. Se encontraron dos estudiantes que además de hacer la gráfica, verificaron un punto de La Parábola en la ecuación dada, garantizando las distancias hacia el Foco y la Directriz, dando cuenta del articulador ***Art.**2 Fórmula DGT* que tampoco se había planteado en el análisis a priori pero que permite ver un dominio del Modo **AA–P$_{GT}$** y un tránsito hacia el Modo **AE–P$_{GT}$**.

Se puede concluir entonces que la mayoría de los estudiantes tiene buen dominio de los elementos de la Geometría del Taxista y que es posible construir La Parábola y sus distintas representaciones a partir de los tres Modos de Pensamiento que se construyeron en el marco teórico. Se evidencia también una prevalencia del Modo **AE–P$_{GT}$** que en definitiva es el que permite a los estudiantes dar cuenta de los otros Modos de Pensar, pues la representación geométrica y el tratamiento de las ecuaciones de La Parábola en la Geometría del Taxista, van sujetas a la comprensión de su definición como lugar geométrico en el plano discreto. Los errores mostrados en algunas respuestas posibilitan la oportunidad de profundizar en el dominio del plano, pues las ideas erróneas son producto de no tener claridad frente a la ubicación de ciertos elementos más no de la comprensión de La Parábola en el Modo **SG–P$_{GT}$**.

5.4 HALLAZGOS CUESTIONARIO II EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Las evidencias presentadas por los estudiantes para la primera pregunta dieron cuenta de un dominio de la representación del Modo Analítico Aritmético de La Parábola en la Geometría Analítica **–AA–P$_{GA}$–**, en donde los participantes reescriben la expresión para luego ser comparada de acuerdo con la forma ya sea con la ecuación canónica o con la ecuación general, y de esta manera lograron determinar qué expresiones correspondían a la curva solicitada.
Aunque era posible realizar bosquejos de las tres ecuaciones en el plano cartesiano, quedó en evidencia que no es una ruta priorizada por los estudiantes dado que, cuando se tiene una ***compresión profunda*** de los Modos de Pensar en este caso en el Modo **AA–P$_{GA}$**, los participantes buscan la solución óptima.

Las respuestas de los estudiantes sugieren contemplar la ecuación general de La Parábola dentro del Modo **AA–P$_{GA}$**; cabe recordar que, para la construcción de dicho Modo de Pensar, solo se consideró la ecuación canónica de la curva.

La segunda pregunta propició el tránsito del Modo Sintético Geométrido de La Parábola en la Geometría Analítica –**SG–PGA** –al Modo **AA–PGA**, a través de los articuladores *Distancia Euclidiana entre dos Puntos –**Art.**1 Distancia Eu.* – y *Sistema de Coordenadas Cartesianas –**Art.**3 Sis. CC*–, en donde los estudiantes identificaron desde la gráfica la coordenada del vértice y la distancia focal, para luego reemplazar en la ecuación canónica de La Parábola. Cabe resaltar que un estudiante logró transitar por los tres Modos de Pensar ya que en la solución partió de la definición de La Parábola como lugar geométrico, es decir, del Modo Analítico Estructural de La Parábola en la Geometría Analítica **AE–PGA**, y luego utilizó el articulador *Fórmula Analítica para Calcular la Distancia Euclidiana **Art.**2 Fórmula D. Eu* para así lograr el tránsito al Modo **AA–PGA**.

La tercera pregunta ratifica el entendimiento del articulador ***Art.**3 Sis. CC*, por parte de los estudiantes evidenciando la compresión del Modo **AA–PGA** como ecuación que satisface los puntos del plano, ya sea en su forma general como en su forma canónica. Por otra parte, uno de los participantes realiza el bosquejo de la Parábola y el punto del plano, ratificando así la respuesta y dando evidencia de un tránsito del Modo **AA–PGA** al Modo **SG–PGA**.

La intencionalidad de la pregunta cuatro era propiciar un tránsito entre el Modo **AA–PGA** al Modo **SG–PGA**, para lo cual los participantes mostraron nuevamente su dominio del Modo **AA–PGA**, llevando la expresión dada a la ecuación canónica o a su ecuación general, de aquí en adelante aplicaron el articulador ***Art.**3 Sis. CC* para transitar al Modo **SG–PGA**. Esta pregunta permitió evidenciar la necesidad de potencializar conocimientos previos del manejo de coordenadas en el plano cartesiano, pues 6 de los participantes cometieron este tipo de desaciertos.

Finalmente, la última pregunta del cuestionario II ratificó la compresión del Modo **AA–PGA** y de los parámetros de La Parábola, en donde la totalidad de los participantes reescribió la expresión dada a la ecuación canónica e interpretó la definición de lado recto a partir de la distancia focal.

Desde una mirada global del cuestionario, los estudiantes prevalecieron el Modo **AA–PGA** para responder a las preguntas planteadas, pero también mostraron dominio de los demás modos y de todos los articuladores hipotéticos planteados, el error con mayor impacto está dado por la mala ubicación de las coordenadas en el plano cartesiano, tal cual como se evidenció en el primer cuestionario, de tal modo que es necesario reforzar este saber previo.

5.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO.

Los resultados que se obtuvieron a partir de la aplicación de los cuestionarios y las entrevistas semiestructuradas realizadas permitieron validar los articuladores hipotéticos y los Modos de Pensar La Parábola tanto en la Geometría del Taxista como en la Geometría Analítica, lo que permitió un conocimiento profundo del objeto matemático a través de los diversos tránsitos que movilizaron los estudiantes. Estos resultados son en gran medida gracias a la aplicación de las Guías de Aprendizaje que fueron construidas a partir de la Teoría Modos de Pensamiento y que, junto con el análisis de los resultados, permitirán refinar los planteamientos teóricos sobre los Modos de Pensar La Parábola y retroalimentar así la Unidad Didáctica.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

En el capítulo 1 se planteó la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de La Parábola desde una métrica discreta y otra continua en el grado 10° al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en la teoría Modos de Pensamiento para el desarrollo de competencias matemáticas?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se retoman los resultados arrojados en el análisis a posteriori, pues las respuestas de los estudiantes mostraron que la enseñanza propiciada bajo las Guías de Aprendizaje fundamentadas en la teoría Modos de Pensamiento, no sólo les permitió comprender La Parábola en sus diferentes representaciones, sino que, a su vez, desarrollaron las competencias de comunicación, razonamiento y la resolución de problemas. La competencia de comunicación se identificó cuando los estudiantes lograron reconocer los elementos y propiedades de la curva; se desarrolló una competencia de razonamiento cuando lograron transitar por los diferentes Modos de Pensar utilizando diferentes conceptos matemáticos, y se evidenció la competencia de resolución en el momento que lograban dar respuesta al problema planteado a partir de diferentes argumentos. Todo esto implicó que el estudiante utilizara los articuladores propuestos en el marco teórico para así entender La Parábola en todas sus representaciones.

6.2 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

6.2.1 OBJETIVO GENERAL

El Objetivo General planteaba un análisis del tránsito que propicia un modelo de enseñanza y aprendizaje de La Parábola al implementar una Unidad Didáctica fundamentada en los Modos de Pensamiento en las prácticas de aula. Para dar cuenta del alcance de este objetivo es importante resaltar que los planteamientos hechos en el marco teórico sobre los Modos de Pensar La Parábola y los articuladores fueron fundamentales para las intervenciones hechas con los estudiantes a partir de las Guías de Aprendizaje, pues un modelo de enseñanza y aprendizaje para este objeto matemático a partir de dicha teoría, advierte una estrategia metodológica con diversidad de recursos y actividades que propicien en los estudiantes el tránsito por cada una de los Modos de Pensamiento a través de diferentes conceptos articuladores, favoreciendo el desarrollo de las competencias matemáticas y dando respuesta con esto al problema de la enseñanza desarticulada y al aprendizaje memorístico.

6.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Con relación al primer objetivo específico de la investigación *Caracterizar los Modos de Pensamiento para la enseñanza y el aprendizaje de La Parábola*. Se puede concluir que se dio cumplimiento a este objetivo, ya que dicha caracterización, desarrollada en el capítulo 3, tuvo como base los aspectos histórico–epistemológicos de La Parábola y la teoría Modos de Pensamiento, considerando que fue pertinente abordarla desde las dos métricas, la Geometría del Taxista y la Geometría Analítica.

Con relación al segundo objetivo específico *Diseñar una unidad didáctica que propicie el tránsito entre los modos de pensamiento en los procesos enseñanza y aprendizaje de La Parábola*. La Unidad Didáctica se construye teniendo como insumo los cuestionarios y las intervenciones de aula a través de las Guías de Aprendizaje, pues se pudo validar que los recursos y las intencionalidades planteadas allí fueron pertinentes y favorecen la comprensión de La Parábola en todas sus representaciones en ambas métricas. Estas actividades requirieron algunas modificaciones en términos de tiempos y descripciones.

Con relación al tercer objetivo específico *Implementar actividades de aula para los estudiantes del grado 10º que propicien el tránsito entre los modos de pensamiento en la práctica de La Parábola*. Se espera que, con los ajustes realizados a la Unidad Didáctica, estas intervenciones de aula arrojen mejoras en los aspectos donde los estudiantes presentaron dificultad cuando se hicieron las aplicaciones de las Guías de Aprendizaje y los cuestionarios, porque en los demás aspectos relacionados con los Modos de Pensamiento y los articuladores se pudo evidenciar en los análisis de resultados, que los estudiantes sí dieron cuenta de éstos y que por tanto, las actividades y preguntas propuestas fueron pertinentes y acordes a los planteamientos teóricos.

6.3 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS.

Los aspectos histórico–epistemológicos de La Parábola que se abordaron en el capítulo 2, fueron base fundamental para comprender la construcción conceptual y la consolidación de lo que hoy conocemos de esta curva desde la Geometría Analítica. Considerar los aportes de Menecmo y Apolonio como principales artífices de un primer Modo de Pesar La Parábola, dio lugar a reconocer la importancia de la Geometría en el tratamiento de ésta y otras curvas, pues desde allí se puede facilitar la comprensión de la estructura misma de los objetos matemáticos. En el caso de La Parábola, es fundamental la comprensión de su definición como lugar geométrico tal como lo hicieron Apolonio y Pappus en sus tratados, es decir, verla desde un Modo Estructural pues sólo así se logra comprender sus propiedades y pasar a otras representaciones, ya de orden algebraico, tal como Descartes y Fermat quienes retomaron el álgebra simbólica de Vieta para dar otros tratamientos a las curvas desde las ecuaciones. Las aplicaciones hechas en esta investigación tuvieron como base esta construcción epistemológica favoreciendo los tránsitos entre los diferentes Modos de Pensar La Parábola y muestran que un dominio del Pensamiento Analítico Estructural de La Parábola, indistintamente de la Geometría desde donde se aborde, facilita el tránsito por los Modos Sintético Geométrico y Analítico Aritmético, al poder abordarla desde su representación en el plano o desde las expresiones algebraicas, dando cuenta de una *compresión profunda* del objeto matemático.

6.4 CONCLUSIONES TEÓRICAS

Luego del riguroso análisis de los instrumentos se logró validar tanto los Modos de Pensar La Parábola como los articuladores hipotéticos planteados en la Geometría del Taxista y en la Geometría Analítica, evidenciando que el marco teórico fue pertinente a lo largo de todo el desarrollo de la tesis y que fue transversal en todo momento al diseño metodológico, las Guías de Aprendizaje, los cuestionarios y la Unidad Didáctica, lo que en últimas permitió que los estudiantes hayan obtenido una *compresión profunda* del objeto matemático La Parábola.

Fue un acierto considerar los Modos de Pensar La Parábola en la Geometría del Taxista, pues facilitó su comprensión como lugar geométrico, mediante el conteo de calles y carreras en un plano discreto que simplifica la complejidad con respecto a La Parábola en la Geometría Analítica y que lleva al estudiante al reconocimiento de todas las propiedades de una manera más sencilla que servirá como base para comprenderla en el plano cartesiano.

El análisis a posteriori mostró la necesidad de ampliar la definición del Modo Analítico Aritmético de La Parábola en la Geometría Analítica, quedando validado por los instrumentos y su respectivo análisis que La Parábola en dicho Modo, no sólo tiene representación desde la ecuación canónica sino también desde la ecuación general, como se muestra en la figura 67:

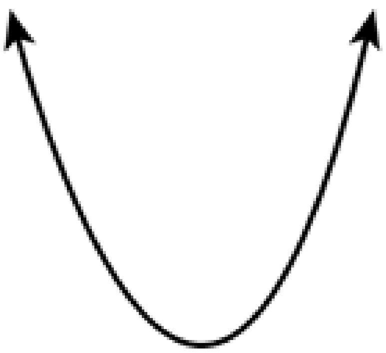
Sintético – Geométrico **SG–PGA**	**Analítico – Aritmético** **AA–PGA**	**Analítico – Estructurado** **AE–PGA**
	Conjunto de pares ordenados que satisfacen la **ecuación canónica:** $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Donde: (h,k): *Es la coordena del vertice de la parábola* p: *Distancia del vertice al foco* Conjunto de pares ordenados que satisfacen la **ecuación general:** $y = ax^2 + bx + c$	La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

Figura 67. Modos de comprender La Parábola validados en la Geometría Analítica.

El análisis a posteriori también mostró que el articulador *Distancia Euclidiana entre dos Puntos* permitió el tránsito bidireccional entre el Modo **AE–PGA** y **SG–PGA**, pero también se evidenció que es indispensable en el tránsito bidireccional del Modo **AA–**

PGA al Modo **SG–PGA**, validando así los articuladores hipotéticos que se muestran en la figura 68:

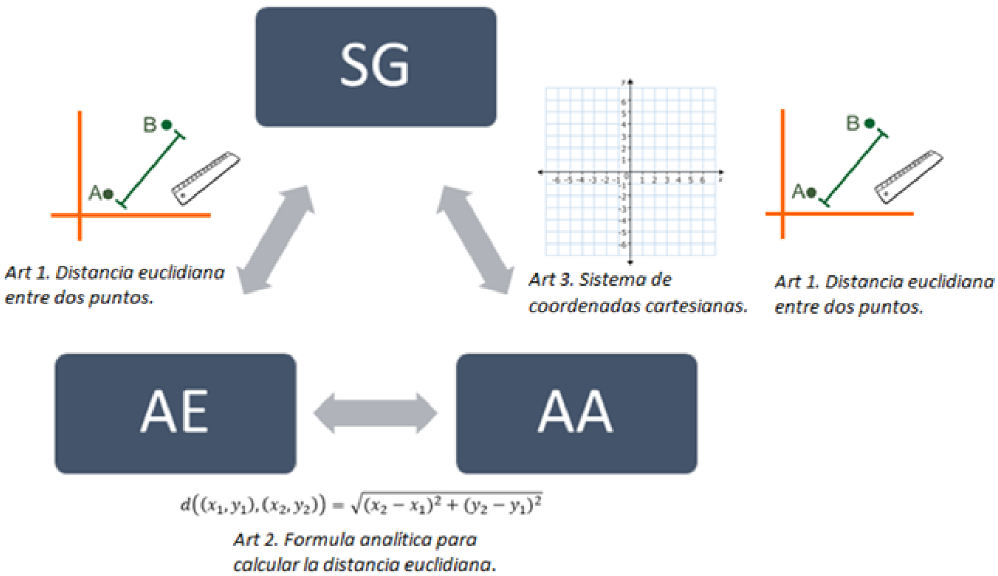


Figura 68. Articuladores validados que permiten comprender La Parábola en La Geometría Analítica.

6.5 CONCLUSIONES CON RELACIÓN A LA UNIDAD DIDÁCTICA

Para la construcción de la secuencia de actividades de la Unidad Didáctica se tuvieron en cuenta los aspectos histórico–epistemológicos pues dan los soportes de la formalización de La Parábola como lugar geométrico, indispensable para comprenderla desde cada uno de los Modos de Pensamiento. Es por esto que se establecieron los Articuladores hipotéticos en el capítulo 3 y se diseñaron las Guías de Aprendizaje con actividades que propiciaran el tránsito por los diferentes Modos de Pensar La Parábola. La aplicación de éstas y los cuestionarios validaron los planteamientos preliminares y finalmente contribuyeron a la construcción de una Unidad Didáctica con la cual se espera corregir las dificultades de los estudiantes en la *comprensión profunda* de La Parábola y fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas.

Para la aplicación de la Unidad Didáctica, se sugiere hacerlo de manera progresiva desde dos métricas una discreta “Geometría del taxista” y una continua “Geometría Analítica” las cuales permiten al estudiante construir las diferentes representaciones del objeto matemático y lograr su *comprensión profunda*. Cabe resaltar que la Unidad Didáctica plantea actividades con el uso del software Cabri Géometre II Plus, una herramienta muy útil para la validación experimental que va más allá de la manipulación dinámica e inmediata de las figuras, pues además de favorecer otros ambientes de aprendizaje, permite a los estudiantes validar las demás representaciones de La Parábola y evidenciar su componente estructural, que a veces en el papel, se hace difícil ver dada la limitación de la construcción completa de la curva en el plano.

Las actividades de la Geometría del Taxista están diseñadas para que incluso estudiantes de grados inferiores puedan acceder a ellas y con ello hacer una primera aproximación al objeto matemático así no esté dentro del currículo escolar. De hecho, en los primeros planteamientos de las Guías de Aprendizaje, se realizaron pilotajes con estudiantes de grado 5° y 7° de la misma institución, logrando resultados considerables frente a la comprensión de elementos de La Parábola tales como el Foco y la Directriz, así como el concepto de distancia en la Geometría del Taxista.

6.6 CONCLUSIONES DE ABORDAR LA PARÁBOLA DESDE UNA MÉTRICA DISCRETA Y UNA MÉTRICA CONTINUA

Para la comprensión de La Parábola como lugar geométrico es fundamental que el estudiante pueda transitar por cada uno de los Modos de Pensamiento en la métrica discreta y en la continua.

Los resultados obtenidos en el cuestionario 1 de la Geometría del Taxista, muestran la pertinencia de haber abordado La Parábola desde una métrica discreta, pues las respuestas de los estudiantes evidencian la comprensión del objeto matemático en los tres Modos de Pensamiento y la validación de los articuladores. Hubo un fuerte dominio del Modo Analítico Estructural, fundamental para la construcción de los otros dos Modos de Pensamiento en esta geometría. Y fue precisamente el haber abordado La Parábola primero desde una métrica discreta lo que permitió un mejor desempeño de los estudiantes en el cuestionario 2 de la Geometría Analítica, pues en sus respuestas mostraron claridad frente a la propiedad de La Parábola como lugar geométrico, es decir, un dominio del Modo Analítico Estructural y desde allí, las demás representaciones se hicieron más fáciles de abordar.

Se logró evidenciar que los estudiantes que obtuvieron buen desempeño en el cuestionario 1 de la Geometría del Taxista, también lo tuvieron en el cuestionario 2 de la Geometría Analítica, mostrando un tránsito entre los diferentes Modos de Pensar en cada una de las métricas y que, indistintamente del tratamiento de La Parábola en el plano discreto o en el plano continuo, prevalecen sus propiedades como lugar geométrico, validando así que el tránsito de lo discreto a lo continuo permite la comprensión profunda del objeto matemático.

Se sugiere que para fortalecer el tránsito de la métrica discreta a la métrica continua de La Parábola se desarrollen con mayor detenimiento las actividades propuestas en la Unidad Didáctica relacionadas con el Modo Sintético Geométrico y Analítico Estructural, que se apoyan en el software Cabri Géometre II Plus y en la construcción de la curva a partir del hilograma, pues a partir de éstas los estudiantes podrán relacionar elementos de una geometría y de la otra verificando que las propiedades de La Parábola como lugar geométrico no varían.

Es importante que antes de iniciar la aplicación de la Unidad Didáctica se fortalezcan conceptos previos fundamentales para abordar La Parábola en ambas métricas, tales como: la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano, el concepto de distancia, el valor absoluto, el dominio de ecuaciones, algunos casos de factorización y productos notables.

6.7 PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de esta investigación muestra un avance importante en el intento de articular la métrica discreta y la métrica continua en el estudio de La Parábola. Los buenos resultados obtenidos permiten sugerir que esta propuesta de enseñanza-aprendizaje puede adaptarse al trabajo con las demás Cónicas considerando que son curvas de la misma naturaleza.

Otro aspecto interesante que se podría asumir como continuidad de este proceso de investigación es indagar por la forma como los estudiantes logran hacer el tránsito entre la métrica discreta y la continua, porque si bien se hicieron algunas sugerencias de actividades transitorias entre la Geometría del Taxista y la Geometría Analítica, no se pudo evidenciar con profundidad esa transición, sólo se logró validar que el entendimiento de La Parábola en la métrica discreta permitió que los estudiantes lograran una mejor comprensión de este objeto en la métrica continua.

También como proyección del trabajo de investigación se plantea analizar el tránsito y la comprensión de La Parábola en la métrica discreta conformando un caso de estudio con estudiantes de grado séptimo, dado que éstos ya cuentan con los saberes previos necesarios para desarrollar la Guía de Aprendizaje en la Geometría del Taxista, pues lo pilotajes mostraron aproximaciones conceptuales, lo que no se evidenció, por no hacer parte del proceso investigativo, es qué tanto los estudiantes pudieron comprender La Parábola como lugar geométrico en el plano discreto y si lograrían hacer planteamientos en términos algebraicos, es decir, lograr también el Modo Analítico Aritmético.

Cabe resaltar que La Parábola, de acuerdo con los estándares del MEN, sólo está planteado para el grado 10°, sin embargo, a partir de las intervenciones, la investigación propone que el objeto matemático puede ser abordado desde grados inferiores a pesar de las limitaciones de los contenidos que los estudiantes tienen acorde al nivel donde se encuentran, a partir de Guías de aprendizaje donde se utilizan otras métricas diferentes a las usuales, fortaleciendo la interacción de los componentes numérico–variacional y espacial–métrico y aportando así a mejorar la articulación curricular.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, A. (2008). *El cuestionario. Métodos de Investigación Avanzada*. Universidad Autónoma de Madrid. Recuperada el 23 de julio de 2017 de https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/Met_Inves_Avan/Presentaciones/Cuestionario_(trab).pdf

Arancibia, S. y Mena, J. (2007). *Matemática para Ingeniería. Introducción al Cálculo.* Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Bartolini, M. G. (2005). *The meaning of conics: historical and didactical dimensions*. En C. Hoyles, J. Kilpatrick y O. Skovsmose (Eds.). *The meaning of Mathematics Education*. Vol. 37, pp. 39 – 60. Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Bonilla, D. (2012). "*La Elipse desde la perspectiva de la teoría Modos de Pensamiento*". Tesis para optar el grado de Magíster en Didáctica de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2013). *Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento*. Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. (p.666- 673). Uruguay. Recuperado el 15 de Agosto de 2016 de http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1232.pdf

Boyer, C. B. (1986). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Camacho, S. (2007). *Curso de planificación de la docencia universitaria. Guías Didácticas*. Recuperado el 15/08/2011 de http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/ceguido/ceguido1/Documenta/PDU_GD1_Guia.pdf

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Cifuentes, W. (2011). *Propuesta de enseñanza para el aula. Ecuaciones y modelos.* Tesis no publicada para optar por el título de Magíster. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Contreras, A., Contreras, M. y García, M. (2002). *Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 5 (2), 111-132.

Coolidge, J. L. (1968). *A History of the Conic Sections and Cuadric Surfaces*. Nueva York: Dover Publication, Inc.

Duval, R. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an icmi study. Dordrecht: Kluwer. Geometry From a Cognitive Point of View*. In Mammana and Villani. (Eds), 1998.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus*. Tesis de

Maestría no publicada. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad Del Valle. Santiago De Cali, Colombia.

Gómez, P. y Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática.* Universidad de los Andes. Colombia.

González, P. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Materiales de historia de la ciencia. Vol. 6. Fundación Canaria Orotava, 2003. Recuperada el 13 de enero de 2017de https://books.google.com.co/books/about/Los_or%C3%ADgenes_de_la_geometr%C3%ADa_anal%C3%ADtic.html?id=ZtSqkQ-TWKcC&redir_esc=y

González, P. (2007). *Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica*. Revista SIGMA 30, mayo 2007, p.205-236. Recuperada el 25 de noviembre de 2016 de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf

Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics* (Vol. II). London: Oxford at the Clarendon Press.

Hernández, V. (2002). *La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio?* Apuntes de historia de las matemáticas vol.1, no.1, enero 2002. Recuperado el 13 de enero de 2017 de https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes_de_historia_de__las_matematicas_volumen_1

Just, A., y Carpenter, P. (1985). *Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability*. Psychological Review. Vol. 92. 137-172.

Kline, M. (1999). *El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza editorial, Vol. I y II.

Laatsch, R. (1982). *Pyramidal Sections on Taxicab Geometry*. Mathematics Magazine, 5, (4), 205-212.

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica*. Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad católica del Perú. San Miguel, Perú.

Lemus, N., Ponce, R. y Reyes, P. (s. f). *Evaluación en modelación matemática: epistemología de la función cuadrática*. Proyecto de Tesis para optar al título de Licenciado en Educación. Universidad de Playa Ancha. Valparaíso, Chile.

López, J. y Aldana, E. (2013) “La comprensión del concepto de parábola: un estudio de caso” Tesis doctoral, no publicada. Universidad del Quindío. Armenia, Colombia.

Lugo, J. (2014). *Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto*. Memoria para optar título de especialista en didáctica de las ciencias con orientación en Matemática. Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina.

MEN, (2003). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Recuperado el 30 de noviembre de 2016 de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN, (2010). *Pruebas Saber: Pruebas Saber 3º, 5° y 9°*. Recuperado el 27 de enero de 2017 de http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-244735.html

MEN, (2016). *Derechos básicos de Aprendizaje Matemáticas*. Recuperado el 12 de enero de 2017 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_dba_mate.pdf

Meneses, J. y Rodríguez, D. (2016). *El cuestionario y la entrevista*. Universidad Oberta de Catalunya. Recuperado el 14 de agosto de 2017 de http://femrecerca.cat/meneses/files/pid_00174026.pdf.

Moncayo, C. Pantoja, J. y Fernández, E. (2012). "Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Geometre II Plus". Tesis de Licenciatura. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Mora, J. (2010). *El problema de la duplicación del cubo*. Recuperado el 23 de Noviembre de 2017 de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/257/Duplicacion_cubo.pdf

Parraguez, G. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas. PUCV. Chile.

Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica.* Tesis no publicada para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias. Bogotá D.C., Colombia

Pinto, Irma; Parraguez, Marcela (2015). *El concepto de derivada desde la teoría los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy*. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 337-344). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ramírez, R. (2013). "Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico" Trabajo de especialización. Universidad Nacional General Sarmiento. Buenos Aires, Argentina.

Río-Sánchez, J. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Romero, M. y Crisol, E. (2012). *Las guías de aprendizaje autónomo como herramienta didáctica de apoyo a la docencia.* Universidad de Granada. Recuperado el 18 de agosto de 2017 de file:///C:/Users/Marisol/Downloads/Dialnet-LasGuiasDeAprendizajeAutonomoComoHerramientaDidact-4078711.pdf

Sanmartí, N. (2000). *Didáctica de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Barcelona: Marfil.

Santa, Z., Bedoya, F. y Jiménez, O. (2007). "Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características". Tesis de pregrado. Licenciatura en matemáticas y física. Universidad de Antioquia. Medellín.

Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Student´s thining in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds), The Teaching of Linear Algebra In Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L. Madrid.

Tapia, F. (2002). *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*. Apuntes de historia de las Matemáticas 1 (1). Rescatado el 25 de noviembre de 2016 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

Valdivia y Parraguez (2012). "*Evolución cognitiva del concepto parábola como Lugar geométrico: una mirada desde la teoría APOE*" Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25, 593-601. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vasco, C. (1994). *Sistemas Geométricos. En Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. Vol. 2, pp. 36-79. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Velásquez, S., Apreza, E., Lluck, D., Moreno, M. y Valdez, G. (2007). *La Geometría Analítica: ¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?* En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Editorial Díaz de Santos.

ANEXO 1

INTENCIONALIDAD Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APRENDIZAJE GEOMETRÍA DEL TAXISTA

Las actividades de la Guía de Aprendizaje están diseñadas en la geometría del taxista, la cual consiste en medir la distancia entre dos puntos por cuadras; lo que implica distancias discretas utilizando como elementos las calles y las carreras.

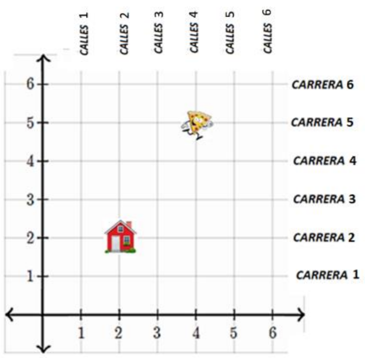
La primera actividad le permitirá al estudiante familiarizarse con la geometría del taxista, al presentarle una situación donde se debe ir de un lugar a otro transitando por las calles y carreras buscando la distancia más corta.

Las preguntas **a** y **b**, fortalecen el articulador 1, cuando el estudiante explora los posibles caminos y cuenta el número de cuadras que hay ente la casa de Juan (punto inicial) y la pizzería (punto final) haciendo varios recorridos y trazando las diferentes rutas en los planos cartesianos.
Las preguntas **c** y **d**, fortalecen el articulador 2, cuando el estudiante identifica a partir de los diferentes planos, la distancia más corta entre la casa de Juan y la Pizzería, verificando que, independientemente del camino que se trace, el número de cuadras entre un punto y otro permanece constante.
La pregunta **e** fortalece el articulador 3, cuando el estudiante ubica las coordenadas de un lugar específico del plano en la geometría del taxista.
Las preguntas **f**, **g** y **h,** fortalecen el articulador 2, cuando el estudiante es capaz de plantear una expresión que le permita calcular la distancia más corta entre cualquier par de puntos del plano en la geometría del taxista.

ACTIVIDAD 1.

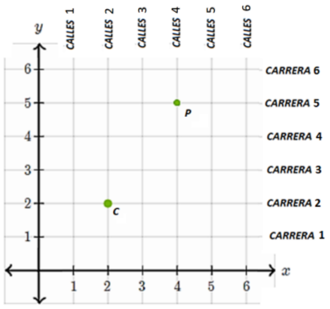
En el barrio donde vive Juan hay muchos lugares que le gusta visitar; para ir de un lugar a otro él debe recorrer calles y carreras, dichos lugares quedan en las esquinas, es decir, donde se cruza una calle y una carrera; una cuadra es la distancia que recorre Juan entre dos esquinas consecutivas, por lo cual no puede hacer un cruce diagonal.

Juan siempre escoge el recorrido más corto para ir de un lugar a otro.

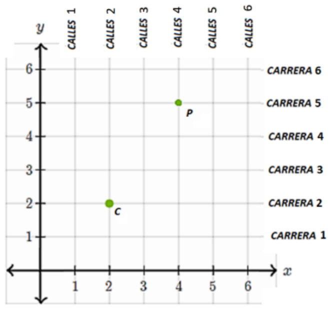


Teniendo en cuenta que el punto C representa la ubicación de la casa y el punto P la ubicación de la pizzería.

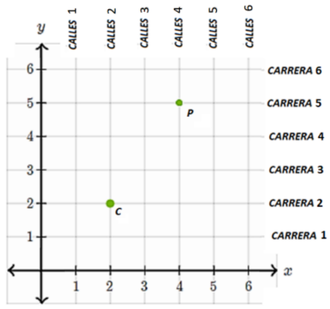
a. Traza en los siguientes planos cartesianos las diferentes rutas que Juan puede utilizar para ir de la casa a la pizzería. Luego escribe debajo de cada plano, cuántas calles y cuántas carreras recorrió.



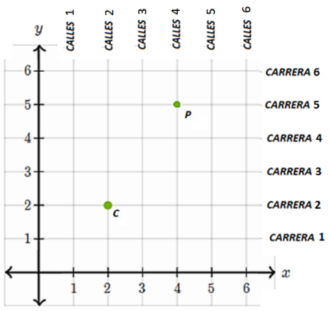
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



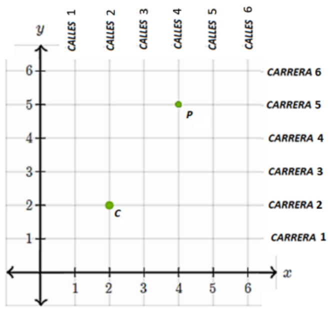
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



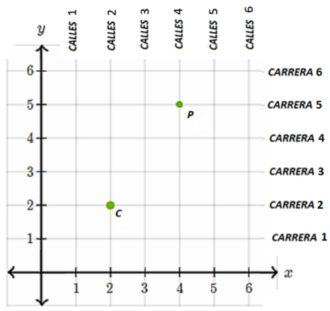
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



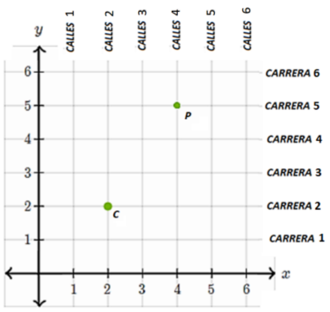
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



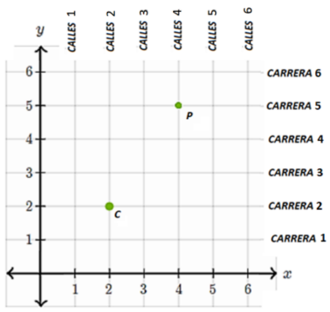
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



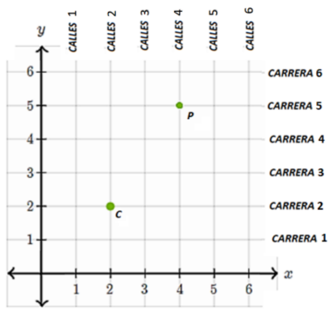
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



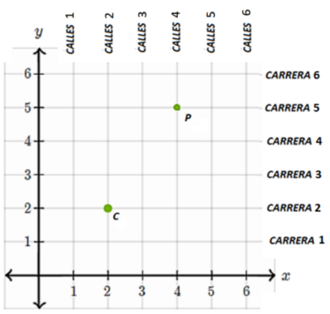
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



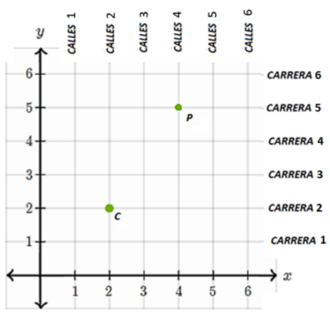
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



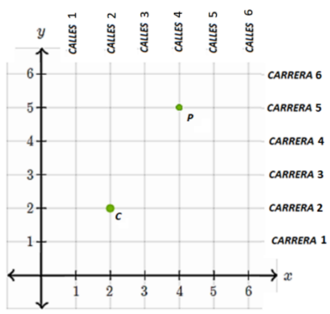
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____

b. ¿Cuántas rutas diferentes pudiste encontrar?
c. De todos los recorridos que hiciste ¿Cuál es la distancia más corta en cuadras desde la casa de Juan a la Pizzería?
d. En estos recorridos donde la distancia fue más corta ¿El número de calles y carreras cambió? ¿Por qué?
e. ¿Cuál es la coordenada de la ubicación de la casa "C" y la pizzería "P"?
C (___, ___)   P (___, ___)
f. Construye una expresión que permita hallar las ***calles*** recorridas por Juan, de acuerdo con las coordenadas de la casa y la pizzería. (Recuerda tener en cuenta el concepto de valor absoluto).
g. Construye una expresión que permita hallar las ***carreras*** recorridas por Juan, de acuerdo con las coordenadas de la casa y la pizzería. (Recuerda tener en cuenta el concepto de valor absoluto)
h. Construye una expresión que permita hallar la distancia entre la casa y la pizzería utilizando las coordenadas de ambos puntos.

La segunda actividad facilita que los estudiantes profundicen el concepto de distancia entre dos puntos en la geometría del taxista y tengan un acercamiento intuitivo a la definición de lugar geométrico como una condición entre pares ordenados.

Las preguntas **a** y **c** fortalecen el articulador 2, al estudiante determinar la distancia entre dos puntos a partir del valor absoluto de las diferencias de las distancias en X y de las distancias en Y. Luego deberá plantear una expresión que permita encontrar la distancia para cualquier par de puntos en el plano.

Con la pregunta **b** se fortalecerá el articulador 1, ya que el estudiante deberá verificar distancias entre puntos a partir de unas condiciones dadas, proceso que será necesario más adelante para la construcción del concepto de Parábola en la geometría del taxista.

ACTIVIDAD 2

a. De acuerdo con los puntos ubicados en el plano completa la información de la tabla según corresponda

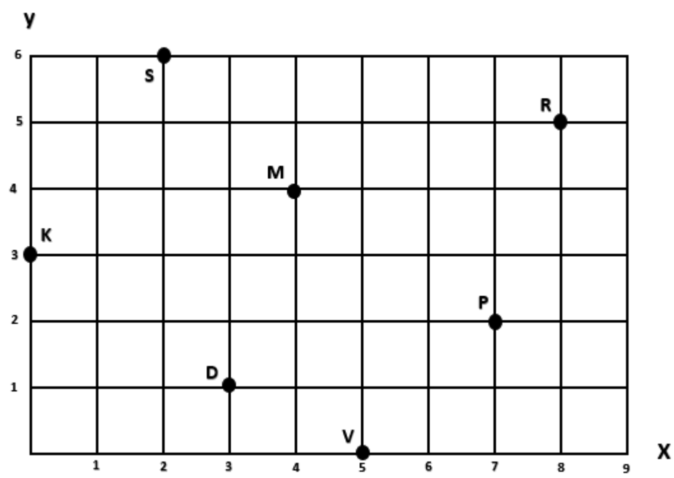
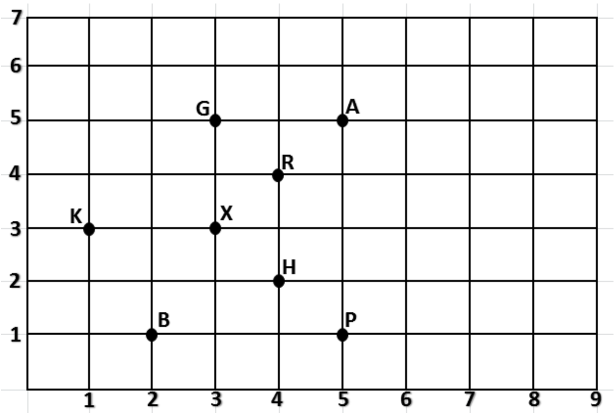


TABLA DE DISTANCIAS

Coordenadas	**Distancia X**	**Distancia Y**	**D (A , B)**
K= (,) M= (,)	| - | =	| - | =	
K= (,) R= (,)	| - | =	| - | =	
D= (,) V= (,)	| - | =	| - | =	
R= (,) S= (,)	| - | =	| - | =	
M= (,) P= (,)	| - | =	| - | =	
S= (,) V= (,)	| - | =	| - | =	

b. En siguiente gráfica, saca del plano los objetos que no cumplen con la siguiente condición: $d(objeto, casa) = 3\ cuadras$



¿Cuáles objetos no cumplieron con la condición? ______________________________

c. Escribe una expresión que permita hallar la distancia entre dos puntos cualesquiera si el punto uno es $A = (X_1, Y_1)$ y el punto dos es $B = (X_2, Y_2)$

La tercera actividad tiene como objetivo promover el tránsito entre los modos SG–$\mathbf{P}_{\mathbf{GT}}$ (Sintético Geométrico), AA–$\mathbf{P}_{\mathbf{GTv}}$ (Analítico Aritmético) y AE (Analítico Estructural) para La Parábola en la geometría del taxista.

Con esta actividad los estudiantes identificarán elementos propios de La Parábola: foco y directriz que los aproximen a su definición como lugar geométrico.

La actividad está dividida en 2 partes: en la primera, los estudiantes podrán interactuar en una interfaz en Excel donde podrán ir identificando elementos propios de La Parábola: foco y directriz; en la segunda parte, los estudiantes utilizan su experiencia de actividades anteriores para hacer un trabajo más algebraico con relación a los elementos de dicho objeto matemático.

La pregunta **a**, deberá dar cuenta del articulador 1 que permite el tránsito entre el modo **AE–P_{GT}** y **SG–P_{GT}**, ya que los estudiantes ubican en el plano objetos que cumplan con la definición de Parábola desde el concepto de distancia en la geometría del taxista, verificando que el número de cuadras de un objeto al foco (casa) es igual a la distancia de ese mismo objeto a la directriz (lado de la cancha) y a su vez, construyendo La Parábola en dicha geometría.
La pregunta **b**, deberá dar cuenta del articulador 3 que permite el tránsito entre los modos **AA–P_{GT}** y **SG–P_{GT}**, ya que el estudiante al ubicar cada objeto como un punto, obtiene la curva discreta de La Parábola en el sistema de coordenadas en la geometría del taxista y analiza si cualquier punto dado en el plano pertenece a dicha curva.

Las preguntas **c** y **d**, deberán dar cuenta del articulador 2 que permite el tránsito entre los modos **AE–P_{GT}** y **AA–P_{GT}**, al verificar que, para cada punto coordenado perteneciente a La Parábola, se conservan las distancias en relación al foco y a la directriz y por último, plantear una expresión para la distancia en términos de estos dos elementos, para que así puedan tener un acercamiento a la comprensión de La Parábola desde la representación algebraica.

ACTIVIDAD 3

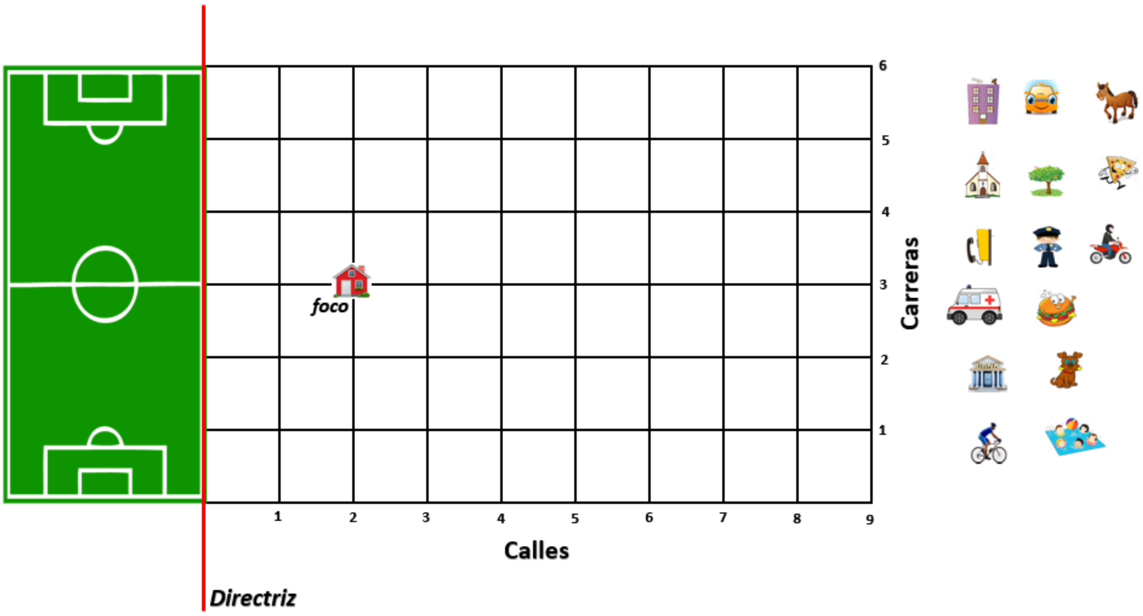
PRIMERA PARTE

En Excel encontrarás un juego donde puedes mover y ubicar objetos, teniendo presente la siguiente definición:

*En Geometría decimos que una Parábola es el conjunto de puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto llamado **foco** y una recta llamada **directriz.***

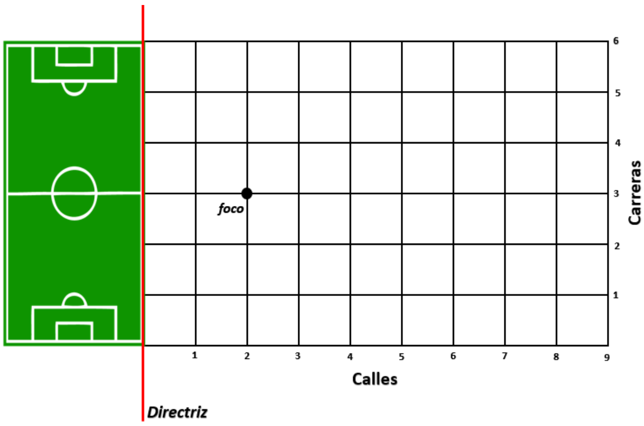
En la interfaz del juego, la casa representa el foco y la cancha representa la directriz.

a. Ubica en el plano todos los objetos de tal manera que cumplan la condición dada para la definición de **La Parábola.**



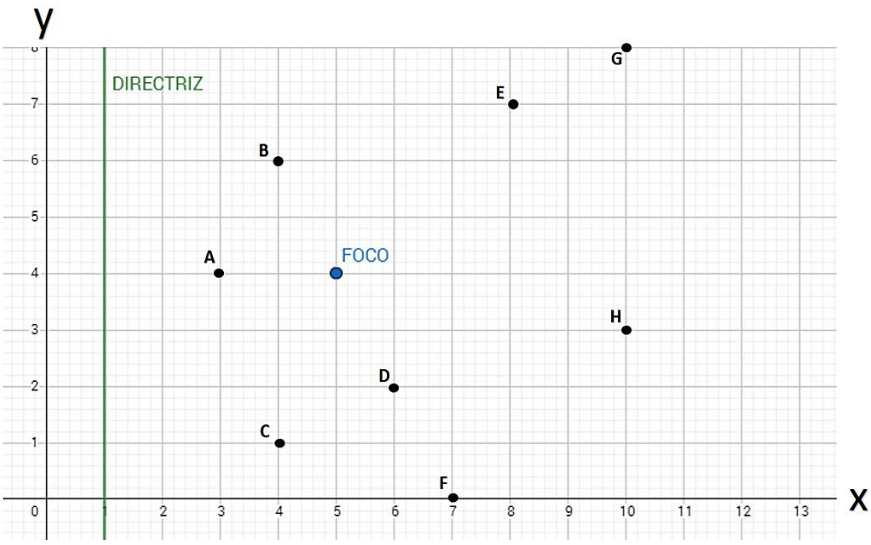
b. Ahora, esa figura que te resultó del numeral anterior la vas a trasladar a un nuevo plano, ubicando los puntos que corresponden a cada uno de los objetos (con sus respectivas letras) y luego completa la información de la tabla según su ubicación en calles y carreras.

Objeto	Coordenada
Piscina	P (,)
Ambulancia	A (,)
Carro	C (,)
Iglesia	I (,)
Teléfono	F (,)
Árbol	L (,)
Moto	M (,)
Banco	B (,)
Perro	R (,)
Caballo	H (,)
Pizza	Z (,)
Edificio	E (,)
Hamburguesa	G (,)
Policía	O (,)
Ciclista	T (,)



c. Teniendo en cuenta los anterior, analiza y justifica:
Si la escuela estuviera ubicada en la calle 6 con la carrera 4, es decir, en la coordenada (6, 4), ¿Pertenecería este objeto al conjunto de puntos de La Parábola que construiste?
¿Por qué? ____

d. Completa la información de las distancias de cada uno de los puntos ubicados en el siguiente plano, luego responde las preguntas:



d (punto A, foco) = _____
d (punto A, directriz) = _____

d (punto B, foco) = _____
d (punto B, directriz) = _____

d (punto C, foco) = _____
d (punto C, directriz) = _____

d (punto D, foco) = _____
d (punto D, directriz) = _____

d (punto E, foco) = _____
d (punto E, directriz) = _____

d (punto F, foco) = _____
d (punto F, directriz) = _____

d (punto G, foco) = _____
d (punto G, directriz) = _____

d (punto H, foco) = _____
d (punto H, directriz) = _____

- Teniendo en cuenta el plano anterior, ¿cuáles de esos puntos cumplen con la definición de Parábola? ____
- ¿Por qué? ____

SEGUNDA PARTE

De acuerdo con el plano anterior, responde las siguientes preguntas

a. Las coordenadas del foco son: $F(\_\_,\_\_)$
b. Teniendo en cuenta que los puntos del plano estan representados por las coordenadas (x, y), el foco $F(4{,}5)$ y la directriz $x = 1$, completa la ecuación de la parabola

$$\boldsymbol{d(Punto, Foco) = d(Punto, Directriz)}$$

$$|x - \_\_| + |y - \_\_| = |x - \_\_|$$

c. Escoge 4 puntos que cumplan la definición de parabola y verificalos en la ecuación.

$\boldsymbol{P_1} = (\quad , \quad)$ $\boldsymbol{P_2} = (\quad , \quad)$ $\boldsymbol{P_3} = (\quad , \quad)$ $\boldsymbol{P_4} = (\quad , \quad)$

d. Sean $F(h,k)$ las coordenadas del foco, $x = c$ la directriz y $P(x,y)$ cualquier punto del plano, escribe la ecuación que cumple la definición de La Parábola.

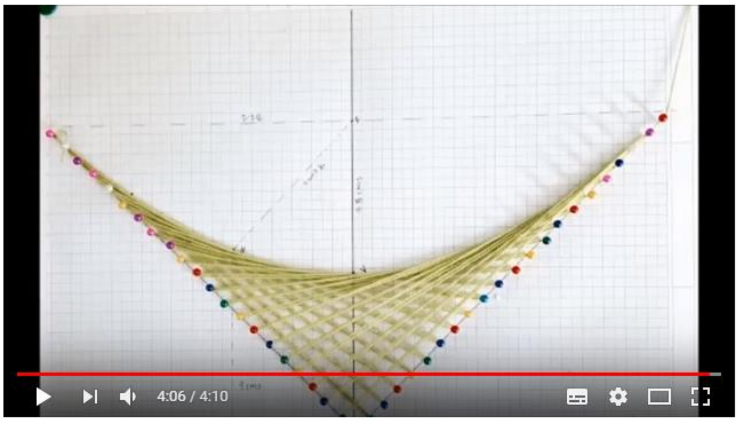
La cuarta actividad tiene como objetivo, propiciar el tránsito entre La Parábola discreta (geometría del taxista) y La Parábola continua (geometría euclidiana), a partir de la definición de lugar geométrico cambiando la métrica.

En esta actividad los estudiantes comprueban que se cumple la definición de Parábola como lugar geométrico y reconocen la curva que la representa en el espacio.

Para desarrollar la actividad los estudiantes construirán La Parábola con materiales concretos utilizando la técnica del hilograma apoyados de un video tutorial; luego, verificarán la distancia de algunos puntos al foco y a la directriz comprobando que la curva generada corresponde a La Parábola.
La actividad permite que el estudiante transite del modo **SG–P$_{\mathbf{GT}}$** al **AE–P$_{\mathbf{GT}}$** en la geometría euclidiana, al obtener la curva de La Parábola a partir del Hilograma y al verificar en ella sus propiedades como lugar geométrico y viceversa.

ACTIVIDAD 4

a. Construya La Parábola utilizando la técnica del hilograma.
https://www.youtube.com/watch?v=ndhKiJAhqUs



b. En la curva que se genera a partir del hilograma, selecciona tres puntos y verifica que la distancia de cualquier punto al Foco es igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz.

c. Explique si la curva del hilograma corresponde a una Parábola o no.

INTENCIONALIDAD Y DESCRIPCIÓN DE LA GUÍA DE APRENDIZAJE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Para el trabajo con los estudiantes de grado 10°, se iniciará con las actividades tres y cuatro de la Guía de Aprendizaje del grado séptimo, pues contribuye a reconocer elementos de La Parábola desde dos métricas, la geometría del taxista y la geometría analítica, permitiendo con esto una mayor comprensión al momento de abordar las actividades propuestas para esta guía.

La primera actividad tiene por objetivo la construcción del modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$** a partir modo **AE–P$_{\mathbf{GA}}$**, por medio del software dinámico Cabri Géometre II Plus, en donde el estudiante podrá reconocer las partes de la parábola, las propiedades de simetría, la relación entre el parámetro ***p*** y el lado recto; luego de construido el modo SG–**P$_{\mathbf{GA}}$** podrá reconocer la definición de lugar geométrico a través de la medición de la distancia del punto al foco y del punto a la directriz.

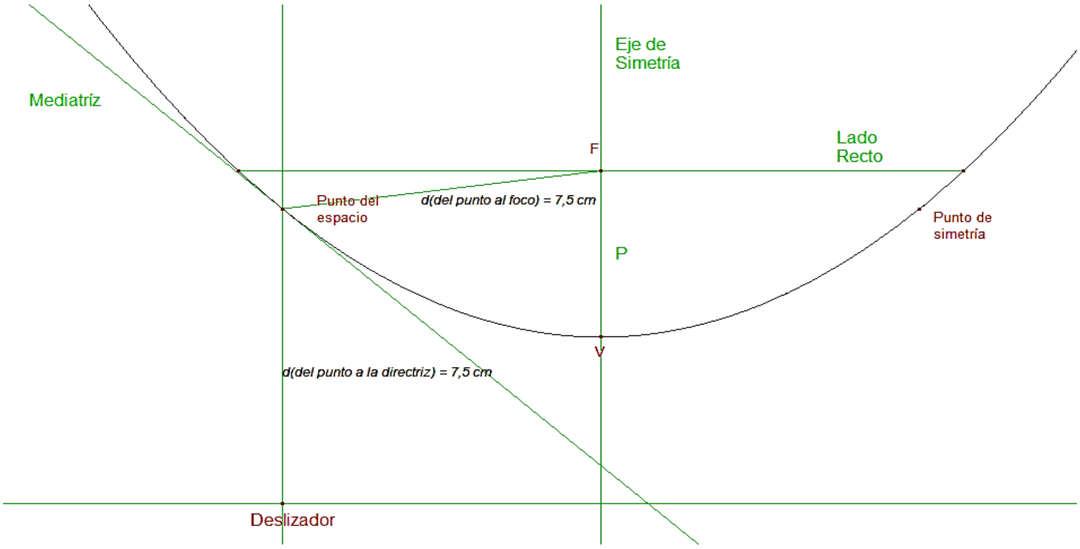
ACTIVIDAD 1

Construya la Gráfica de La Parábola a partir de la definición de lugar geométrico, utilizando el software dinámico Cabri Géometre II Plus.

Instrucciones:

- ✓ Dibuje una recta y asígnele el nombre de *directriz*
- ✓ Coloque un punto ***F*** que no pertenezca a la recta directriz, este punto será el foco de La Parábola.
- ✓ Dibuje un punto deslizador que pertenezca a la directriz.
- ✓ Construya una recta perpendicular a la directriz que pase por el punto deslizador.
- ✓ Construya una mediatriz entre el deslizador y el foco. La intersección de la mediatriz y la recta perpendicular a la mediatriz será el punto *P*, el cual representa los puntos que pertenecen a La Parábola.
- ✓ Dibuje el lugar geométrico que se forma con el punto ***P*** y el punto deslizador.
- ✓ Dibuje una recta perpendicular a la directriz que pase por el foco y asígnele el nombre de eje de simetría.
- ✓ Construya el punto de simetría a partir del punto P y el eje de simetría.
- ✓ Valide con la herramienta de medición el parámetro ***p***, el lado recto, y las distancias del punto ***P*** al foco y del punto ***P*** a la directriz, para comprobar la definición de lugar geométrico.

El producto esperado de esta actividad se esboza a continuación:

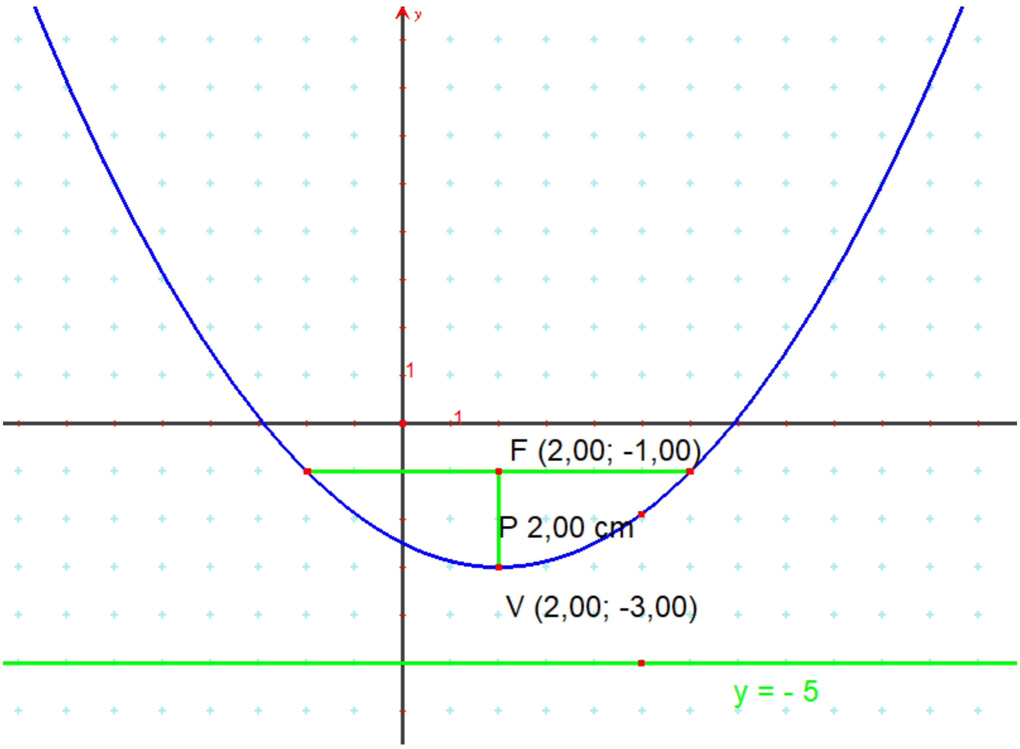


La actividad dos tiene el objetivo de construir el modo **AA–PGA** a partir del modo **AE–PGA**, utilizando el *Articulador 2. Formula analítica para calcular la distancia euclidiana*, para lo cual se le solicita al estudiante la representación algebraica de La Parábola a partir del foco y la directriz.

ACTIVIDAD 2

a. Dibuja en un plano cartesiano La Parábola con foco en $(2,-1)$ y directriz $y=-5$, utilizando el software dinámico Cabri Géometre II Plus, para lo cual debes activar los ejes cartesianos y la rejilla del software y aplicar los pasos aplicados en la actividad 1.

El resultado esperado de esta actividad será la siguiente gráfica:



b. Escribe la ecuación de la ecuación de La Parábola dibujada en el punto anterior completando los espacios en blanco.

Datos:

Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{R}$

Coordenadas del vértice (h, k)

Coordenada del foco $(2, -1)$

Directriz $y = -5$

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$d(del\ punto\ del\ plano\ al\ foco) = d(del\ punto\ del\ plano\ a\ la\ directriz)$$

$$\sqrt{(x - \_\_)^2 + (y - (\_\_))^2} = (y - (\_\_\_))$$

$$(x - \_\_\_)^2 + (y + \_\_\_\_)^2 = (y + \_\_)^2$$

$$(x - 2)^2 + y^2 + 2y + \_\_\_\_ = y^2 + 10y + \_\_\_$$

$$(x - 2)^2 = 8y + 24$$

$$(x - 2)^2 = 8(y + 3)$$

C. Compare la gráfica con la ecuación y construya una ecuación que involucre el vértice (h, k) y el lado recto de La Parábola.

Se espera que el estudiante llegue a la expresión canónica de La Parábola

$$(x - h)^2 = LR(y - k)$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

La tercera actividad tiene el objetivo de construir el modo **SG–P$_{\mathbf{GA}}$** partiendo del **AA–P$_{\mathbf{GA}}$** a partir del *Articulador 3. Sistema de coordenadas cartesianas*, el cual permitirá construir un bosquejo de La Parábola a partir de darle valores a la variable independiente $\boldsymbol{x}$ y obtener la correspondiente en $\boldsymbol{y}$, utilizando el concepto de simetría el estudiante podrá encontrar el valor de la coordenada del vértice, pues los ejemplos que se darán coinciden con un vértice que pertenece a coordenadas enteras.

ACTIVIDAD 3

Realice un bosquejo de La Parábola representada por la ecuación:

$$(x - 3)^2 = 8(y + 2)$$

Instrucciones

a. Despeje la variable y

Se espera que el estudiante responda:

$$y = \frac{x^2 - 6x - 7}{8}$$

b. Complete la tabla obteniendo el valor de la variable y

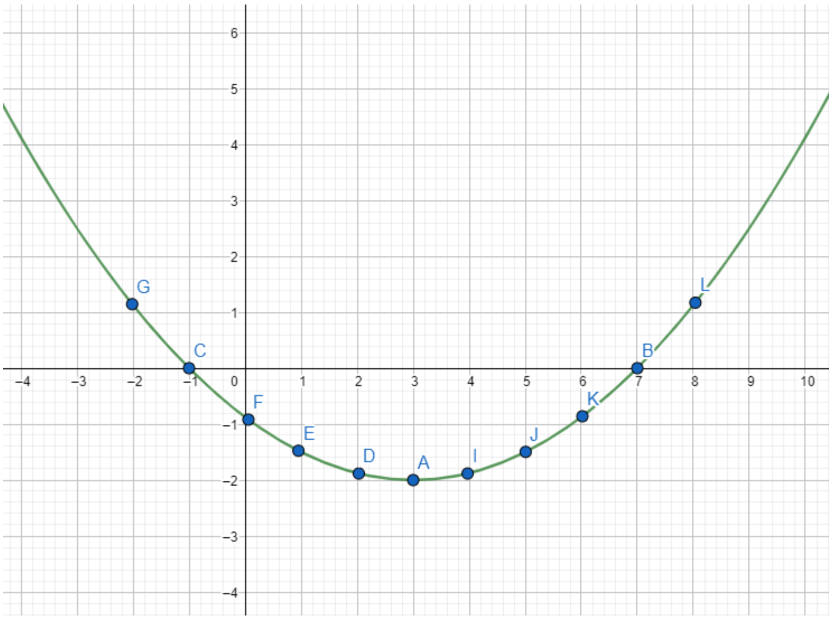
X	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	1,125	0	-0,88	-1,5	-1,88	-2	-1,88	-1,5	-0,88	0	1,125

c. Establezca relaciones de simetría para deducir el vértice:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,125	0	-0,88	-1,5	-1,88	-2	-1,88	-1,5	-0,88	0	1,125

d. Dibuja en el bosquejo de La Parábola en el plano cartesiano.

Para lo que se espera que el estudiante dibuje cada coordenada y una los puntos con una curva como se muestra a continuación:



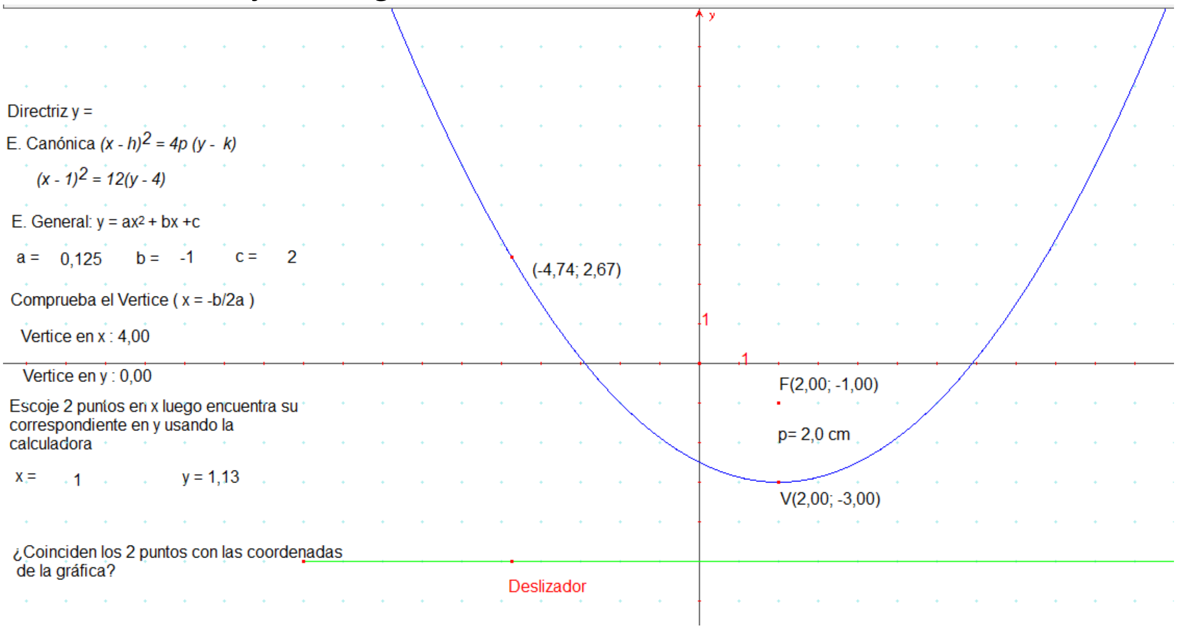
La intención de la cuarta actividad es la interacción de los tres modos de pensamiento, en la cual, el estudiante podrá reconocer con la ayuda del software dinámico Cabri Géometre II Plus, La Parábola como lugar geométrico, la representación gráfica en el modo **SG–P$_{GA}$** y la representación algebraica en el modo **AA–P$_{GA}$**, a través de los articuladores hipotéticos propuestos.

ACTIVIDAD 4

A partir de la interfaz de La Parábola en el software dinámico Cabri Géometre II Plus. Varía la ubicación del foco y encuentra:

- ✓ Nombra las coordenadas del foco, del vértice y del punto que se desliza por La Parábola
- ✓ Determina el parámetro ***p*** y el lado recto de La Parábola
- ✓ Escribe la ecuación de la directriz.
- ✓ Determina la ecuación canónica de la Parábola
- ✓ Escribe los parámetros ***a***, ***b*** y ***c*** de la ecuación general de La Parábola
- ✓ Encuentra el vértice mediante la expresión: $Vertice\ en\ la\ coordenada\ x = \frac{-b}{2a}$
- ✓ Con el uso de la calculadora del software escoge 2 valores para ***x***, para encontrar su correspondiente en ***y***, verifica estos resultados con el punto que se desliza por La Parábola.

La interfaz de trabajo es la siguiente:



ANEXO 2

UNIDAD DIDÁCTICA

<table>
<tr><th colspan="2">UNIDAD DIDÁCTICA
“LA PARÁBOLA, DE LO DISCRETO A LO CONTINUO”</th></tr>
<tr><td>CONTENIDOS CONCEPTUALES DÉCIMO</td><td>La Parábola</td></tr>
<tr><td colspan="2">SESIONES DE CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="2">SESIÓN 1 Conociendo la Geometría del taxista
Actividad 1: Calles y Carreras “Casa de Juan”
SESIÓN 2 La Parábola en la Geometría del taxista
Actividad 1: Lectura y conversatorio La Parábola en la vida cotidiana
Actividad 2 Juego en Excel
Actividad 3 Taller en parejas - Coordenadas, distancias y ecuación
SESIÓN 3 Construcción de la parábola haciendo uso del hilograma
Actividad 1 Video “Parábola con Hilo”
Actividad 2 Construcción La Parábola con la técnica del hilograma
Actividad 3 Analizando la Curva - Trabajo en el cuaderno
SESIÓN 4 Modelando La Parábola con Software Cabri Géometre II Plus
Actividad 1. Construcción de la parábola en el espacio – trabajo dirigido
Actividad 2. Validando de La Parábola
SESIÓN 5 Modelando La Parábola en el plano cartesiano con Software Cabri Géometre II Plus
Actividad 1. La Parábola en el plano cartesiano del Software Cabri Géometre II Plus
Actividad 2. Taller en el cuaderno “Ecuación de La Parábola”
SESIÓN 5 Dibujando La Parábola en el plano cartesiano a partir de la ecuación general
Actividad 1. Dibujo La Parábola en papel milimetrado
SESIÓN 6 Actividad evaluativa Software Cabri Géometre II Plus
Actividad 1. Evaluando mis aprendizajes de La Parábola</td></tr>
<tr><td>TIEMPO DE EJECUCIÓN TOTAL</td><td>11 periodos de clase de 55 minutos (Total 605 minutos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general: Reconocer la definición de parábola como lugar geométrico y la curva que la representa en el espacio y en el plano</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos específicos:
Familiarizar al estudiante con el uso de las estructuras con forma parabólica en la vida cotidiana y propiciar el tránsito entre La Parábola discreta (geometría del taxista) y La Parábola continua (geometría euclidiana), a partir de la definición de lugar geométrico cambiando la métrica.
Comprobar que se cumple la definición de Parábola como lugar geométrico y reconocer la curva que la representa en el espacio.
Reconocer los elementos de La Parábola desde la geometría analítica.
Representar algebraicamente la Parábola a partir del foco y la directriz.
Propiciar el tránsito entre La Parábola discreta (geometría del taxista) y La Parábola continua (geometría euclidiana), a partir de la definición de lugar geométrico cambiando la métrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">REFERENTES LEGALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estándares grado 10
PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas</td></tr>
</table>

- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas

DBA (Derechos básicos de aprendizaje)

DBA 5: Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.

Evidencias de aprendizaje:

- ✓ Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.
- ✓ Identifica propiedades de lugares geométricos a través de sus representaciones en un sistema de referencia.
- ✓ Utiliza las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida.
- ✓ Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de sus expresiones algebraicas

DBA 6: Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.

Evidencias de aprendizaje

- Determina por medio de gráficos y métodos analíticos cuando una relación es una función
- Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.
- Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas.

SABERES PREVIOS

- ➢ Operaciones matemáticas básicas (suma, resta y multiplicación)
- ➢ Plano cartesiano.
- ➢ Números enteros y concepto de valor absoluto
- ➢ Solución de ecuaciones
- ➢ Factorización
- ➢ Productos notables

DESARROLLO DE LAS SESIONES DE CLASE

SESIÓN 1 Conociendo la Geometría del taxista
Tiempo estimado: Un período de clase - 55 minutos.

Propósitos:
Familiarizar al estudiante con la geometría del taxista.
Escribir una expresión que permita hallar la distancia entre dos puntos cualesquiera.
Acercamiento intuitivo a la definición de lugar geométrico como una condición entre pares ordenados
Espacio y organización: Aula de clase, trabajo individual
Recursos: Fotocopias.

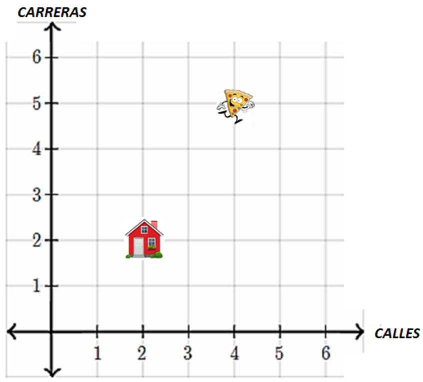
Descripción actividades de la sesión

Actividad 1: Calles y Carreras "La casa de Juan"

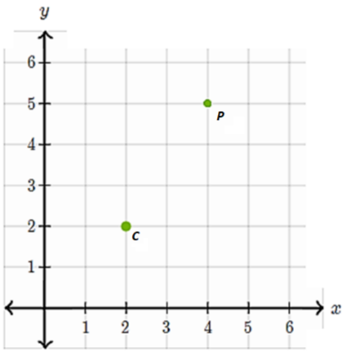
Al estudiante se le entrega una fotocopia con la siguiente situación:

En el barrio donde vive Juan hay muchos lugares que le gusta visitar; para ir de un lugar a otro él debe recorrer calles y carreras, dichos lugares quedan en las esquinas, es decir, donde se cruza una calle y una carrera; una cuadra es la distancia que recorre Juan entre dos esquinas consecutivas.

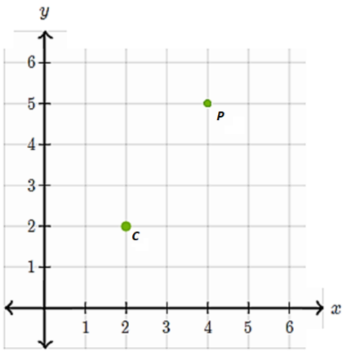
Juan siempre escoge el recorrido más corto para ir de un lugar a otro.



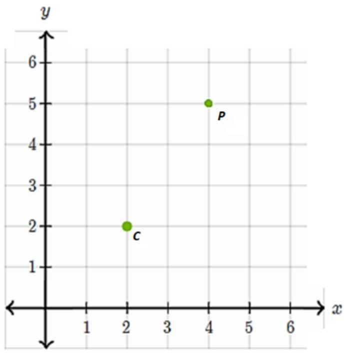
a. ¿Cuál es la distancia más corta en cuadras desde la casa de Juan a la Pizzería?
b. Teniendo en cuenta que el punto C representa la ubicación de la casa y el punto P la ubicación de la pizzería. Traza en los siguientes planos cartesianos las diferentes rutas que Juan puede recorrer de la casa a la pizzería. Luego escribe cuantas calles y cuantas carreras recorrió en cada uno de los planos.



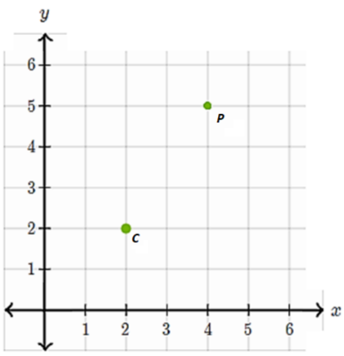
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____

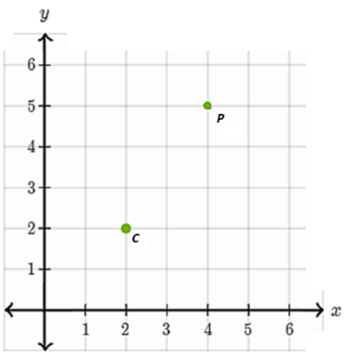


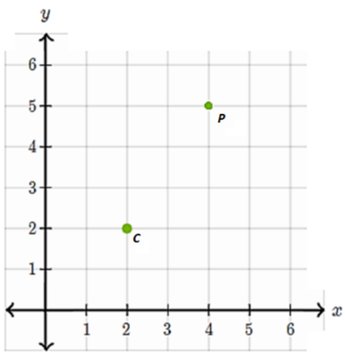
Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____



Número de Calles: ____
Número de Carreras: ____







c. De acuerdo con lo anterior responde:
   1. ¿El número de calles y carreras en las diferentes rutas cambia?

2. ¿Cuántas rutas diferentes pudo recorrer Juan?
3. ¿Cuál es la coordenada de la ubicación de la casa “C” y la pizzería “P”?
   C(___,___)   P(___,___)
4. Construye una expresión que permita hallar las ***calles*** recorridas por Juan, de acuerdo con las coordenadas de la casa y la pizzería. Recuerda tener en cuenta el concepto de valor absoluto
5. Construye una expresión que permita hallar las ***carreras*** recorridas por Juan, de acuerdo con las coordenadas de la casa y la pizzería. Recuerda tener en cuenta el concepto de valor absoluto.
6. Construye una expresión que permita hallar la distancia entre la casa y la pizzería utilizando las coordenadas de ambos puntos.

SESIÓN 2 La Parábola en la Geometría del taxista

Tiempo estimado: Dos períodos de clase - 110 minutos

***Propósitos*:**

- Familiarizar al estudiante con estructuras de forma parabólica en la vida cotidiana.
- Construir la gráfica de La Parábola a partir de la noción de distancia en la geometría del taxista

Espacio y organización*:* Aula de sistemas y trabajo en parejas.

Recursos: Video beam, Computador. Fotocopias, Excel, power point

Descripción actividades de la sesión

Actividad 1: Lectura y conversatorio La Parábola en la vida cotidiana

El docente entrega una fotocopia a los estudiantes con una lectura de las aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana, proyecta una presentación de power point con imágenes relacionadas y genera un conversatorio a través de preguntas inductivas tales como:

1. ¿Qué diferencias existen en las imágenes proyectadas?
2. ¿Qué similitudes encuentras en las imágenes proyectadas?
3. ¿En qué casos se emplean las parábolas y por qué?

Actividad 2 Juego en Excel

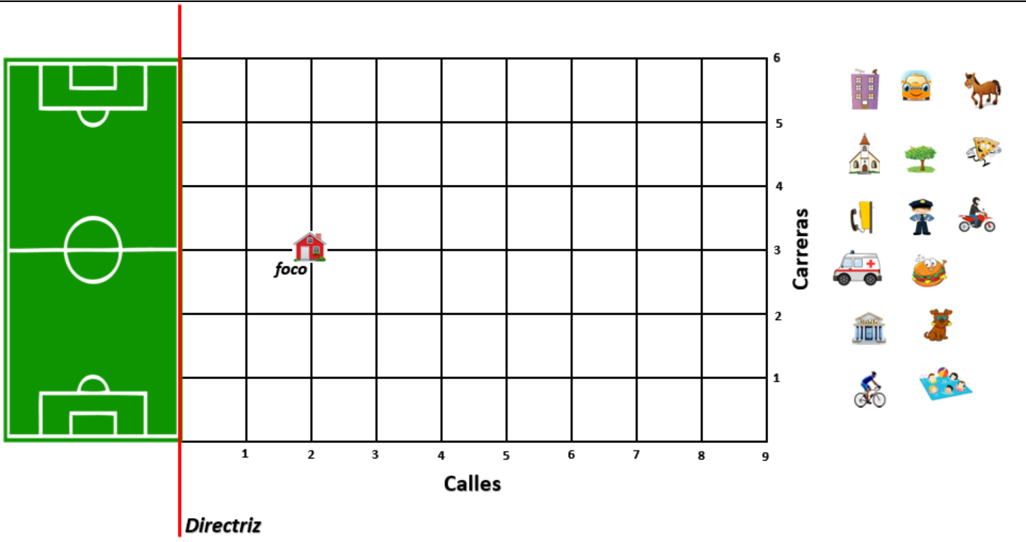
Se conforman grupos de 2 o 3 estudiantes para trabajar en la geometría del taxista a través de un juego en Excel donde pueden mover y ubicar objetos y una fotocopia para completar la información.

JUEGO EN EXCEL

Lee atentamente cada instrucción, teniendo presente la siguiente definición: *En Geometría decimos que una Parábola es el conjunto de puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto llamado* ***foco*** *y una recta llamada* ***directriz.***

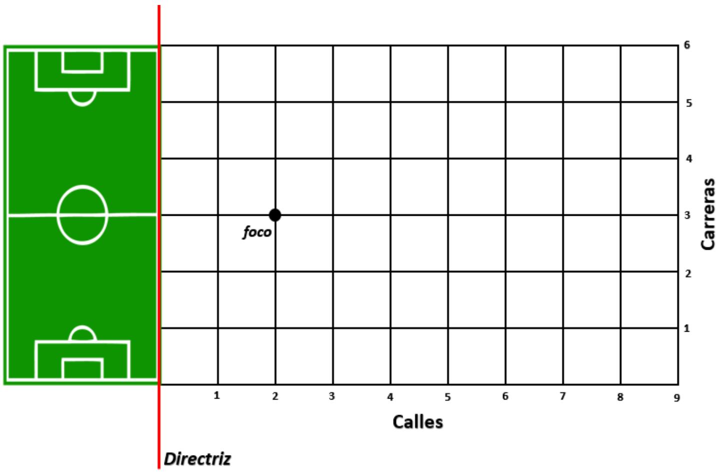
En la interfaz del juego, la casa representa el foco y la cancha representa la directriz.

d. Ubica en el plano todos los objetos de tal manera que cumplan la condición dada para la definición de **La Parábola.**



	Coordenada
	P (,)
ncia	A (,)
	C (,)
	I (,)
o	F (,)
	L (,)
	M (,)
	B (,)
	R (,)
	H (,)
	Z (,)
	E (,)
guesa	G (,)
	O (,)
Ciclista	T (,)

e. Ahora, esa figura que te resultó del numeral anterior la vas a trasladar a un nuevo plano, ubicando los puntos que corresponden a cada uno de los objetos (con sus respectivas letras) y luego completa la información de la tabla según su ubicación en calles y carreras.



f. Teniendo en cuenta lo anterior, analiza y justifica:
Si la escuela estuviera ubicada en la calle 6 con la carrera 4, es decir, en la coordenada (6, 4), ¿Pertenecería este objeto al conjunto de puntos de La Parábola que construiste?
¿Por qué?______________________________

Actividad 3 Taller en parejas - Coordenadas, distancias y ecuación

a. De acuerdo con los puntos ubicados en el siguiente plano completa la información de la tabla según corresponda

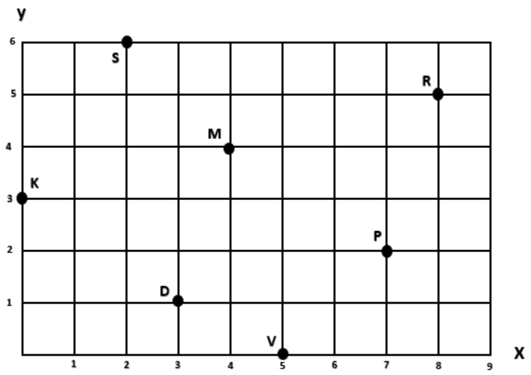
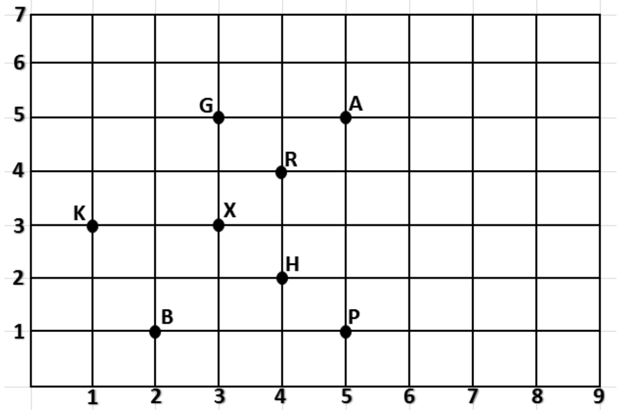


TABLA DE DISTANCIAS

Coordenadas	Distancia X	Distancia Y	D (A , B)
K= (,) M= (,)	| - | =	| - | =	
K= (,) R= (,)	| - | =	| - | =	
D= (,) V= (,)	| - | =	| - | =	
R= (,) S= (,)	| - | =	| - | =	

M= (,) P= (,)	| - | =	| - | =	
S= (,) V= (,)	| - | =	| - | =	

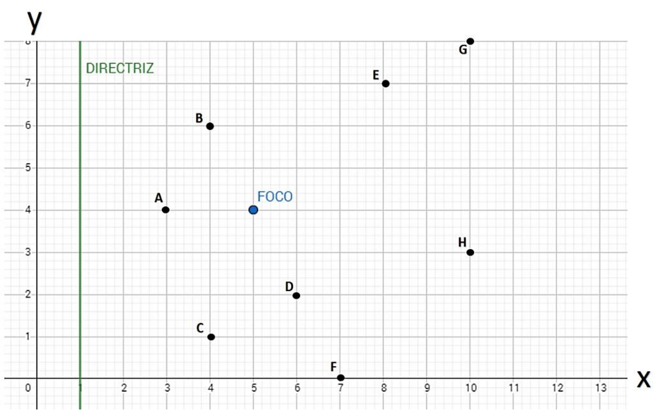
b. En siguiente gráfica, saca del plano los objetos que no cumplen con la siguiente condición: $d(objeto, casa) = 3\ cuadras$



¿Cuáles objetos no cumplieron con la condición? ______________________________

c. Escribe una expresión que permita hallar la distancia entre dos puntos cualesquiera si el punto uno es $A = (X_1, Y_1)$ y el punto dos es $B = (X_2, Y_2)$

d. Completa la información de las distancias de cada uno de los puntos ubicados en el siguiente plano, luego responde las preguntas:



d (punto A, foco) = _____
d (punto A, directriz) = _____

d (punto B, foco) = _____
d (punto B, directriz) = _____

d (punto C, foco) = _____
d (punto C, directriz) = _____

d (punto D, foco) = _____
d (punto D, directriz) = _____

d (punto E, foco) = _____
d (punto E, directriz) = _____

d (punto F, foco) = _____
d (punto F, directriz) = _____

d (punto G, foco) = _____
d (punto G, directriz) = _____

d (punto H, foco) = _____
d (punto H, directriz) = _____

- Teniendo en cuenta el plano anterior, ¿cuáles de esos puntos cumplen con la definición de Parábola? ____
- ¿Por qué? ____

e. De acuerdo con el plano anterior, responde las siguientes preguntas

e. Las coordenadas del foco son: $F(\_\_,\_\_)$

f. Teniendo en cuenta que los puntos del plano estan representados por las coordenadas (x, y), el foco $F(5,4)$ y la directriz $x = 1$, completa la ecuación de la parabola

$$\boldsymbol{d(Punto, Foco) = d(Punto, Directriz)}$$
$$|x - \_\_| + |y - \_\_| = |x - \_\_|$$

g. Escoge 4 puntos que cumplan la definición de parabola y verificalos en la ecuación.

$$\boldsymbol{P_1} = (\quad,\quad) \qquad \boldsymbol{P_2} = (\quad,\quad)\ \boldsymbol{P_3} = (\quad,\quad)\ \boldsymbol{P_4} = (\quad,\quad)$$

h. Sean $F(h, k)$ las coordenadas del foco, $x = c$ la directriz y $P(x, y)$ cualquier punto del plano, escribe la ecuación que cumple la definición de La Parábola.

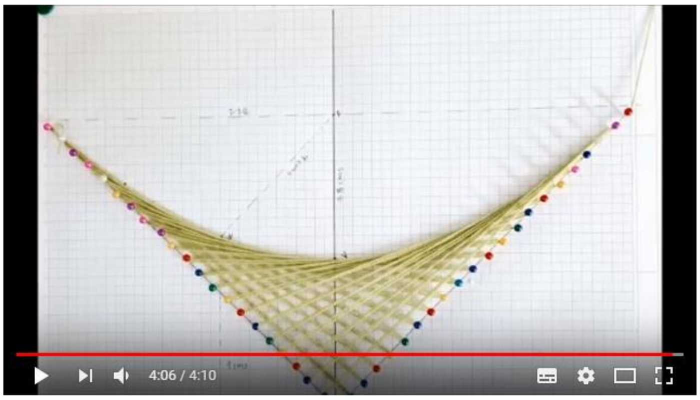
SESIÓN 3 Construcción de la parábola haciendo uso del hilograma
Tiempo estimado: Dos períodos de clase – 110 minutos

Propósitos:
Construcción de la parábola con materiales concretos
Comprobar que se cumple la definición de La Parábola como lugar geométrico en la curva del hilograma que la representa en el espacio.
Espacio y organización*:* Aula de clase y trabajo en parejas
Recursos: Hilo, Alfileres, Cartón paja, Papel milimetrado, Icopor, Computador, video tutorial

Descripción actividades de la sesión

Actividad 1 Video “Parábola con Hilo”

a. Observación del video tutorial desde https://www.youtube.com/watch?v=ndhKiJAhqUs para construir La Parábola con la técnica del hilograma.



Actividad 2 Construcción La Parábola con la técnica del hilograma

a. El docente conformará parejas de estudiantes para que cada grupo realice la construcción respectiva, se sugiere que cada grupo tenga un generador de ideas y un corrector (el encargado de socializar se elegirá al azar).

b. Entrega de materiales a cada una de las parejas de estudiantes.
c. Construcción La Parábola y asesoría permanente del docente.

Actividad 3 Analizando la Curva - Trabajo en el cuaderno

- Con la curva que se genera a partir del hilograma, selecciona tres puntos y escribe en tu cuaderno las coordenadas de ellos
- Utiliza la regla para verificar que la distancia de cada punto al Foco es igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz.
- Escribe las distancias frente a las coordenadas de los tres puntos seleccionados.
- Explica si la curva del hilograma corresponde a una Parábola o no.
- Si comparas esta curva de La Parábola con la construida en la geometría del taxista, que diferencias y similitudes encuentras entre ellas.
- Que elementos o propiedades de la Parábola pudiste verificar en la gráfica de la geometría del taxista y la gráfica del hilograma

SESIÓN 4 Modelando La Parábola con Software Cabri Géometre II Plus
Tiempo estimado: Dos períodos de clase – 110 minutos

***Propósitos*:**

- Reconocer las partes de La Parábola en la Geometría Analítica, las propiedades de simetría, la relación entre el parámetro ***p*** y el lado recto
- Reconocer la definición de lugar geométrico a través de la medición de la distancia del punto al foco y del punto a la directriz.

***Espacio y organización**:* Aula de sistemas y grupos de trabajo
Recursos: Computador, Software Cabri Géometre II Plus

Descripción actividades de la sesión

Actividad 1. Construcción de la parábola en el espacio

Por parejas de trabajo, los estudiantes construirán la Gráfica de La Parábola a partir de la definición de lugar geométrico, utilizando el software dinámico Cabri Géometre II Plus.

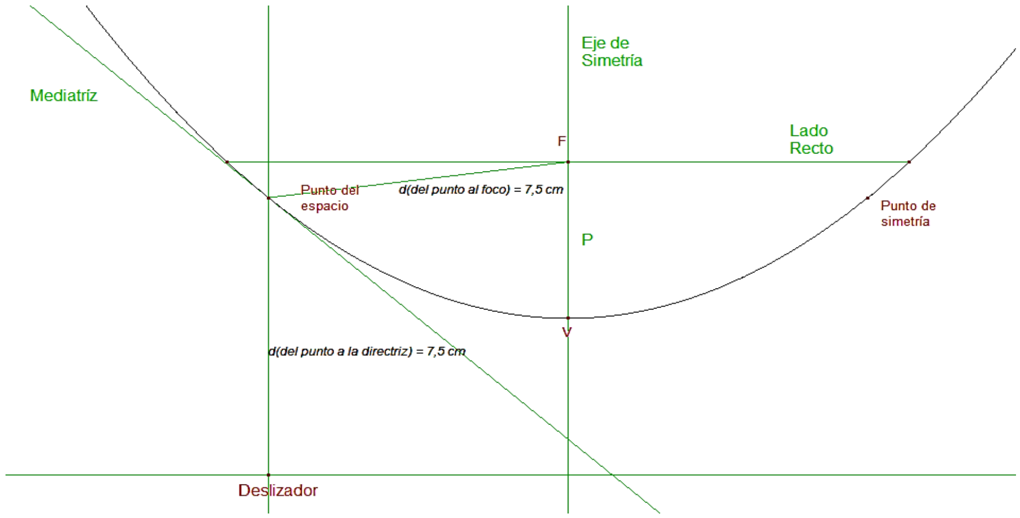
El docente solicitará a los estudiantes seguir las siguientes instrucciones:

a. Dibuje una recta y asígnele el nombre de *directriz*
b. Coloque un punto ***F*** que no pertenezca a la recta directriz, este punto será el foco de La Parábola.
c. Dibuje un punto deslizador que pertenezca a la directriz.
d. Construya una recta perpendicular a la directriz que pase por el punto deslizador.
e. Construya una mediatriz entre el deslizador y el foco. La intersección de la mediatriz y la recta perpendicular a la mediatriz será el punto *P*, el cual representa los puntos que pertenecen a La Parábola.
f. Dibuje el lugar geométrico que se forma con el punto ***P*** y el punto deslizador.
g. Dibuje una recta perpendicular a la directriz que pase por el foco y asígnele el nombre de eje de simetría.
h. Construya el punto de simetría a partir del punto P y el eje de simetría.

Actividad 2. Validando de La Parábola

Valide con la herramienta de medición el parámetro ***p***, el lado recto, y las distancias del punto ***P*** al foco y del punto ***P*** a la directriz, para comprobar la definición de lugar geométrico.

Se espera que el estudiante obtenga una figura similar a la que se muestra a continuación



SESIÓN 5 Modelando La Parábola en el plano cartesiano con Software Cabri Géometre II Plus
Tiempo estimado: Dos períodos de clase – 110 minutos

Propósitos**:**

- Modelar La Parábola en el plano cartesiano mediante el Software Cabri Géometre II Plus
- Construir la expresión canónica de La Parábola

Espacio y organización*:* Aula de sistemas y parejas de trabajo
Recursos: Computador, cuaderno, Software Cabri Géometre II Plus

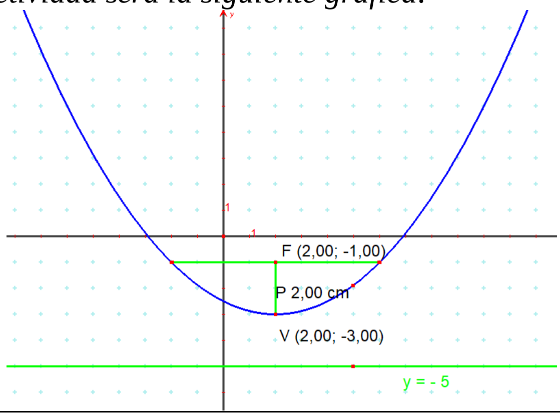
Descripción actividades de la sesión

Actividad 1. La Parábola en el plano cartesiano del Software Cabri Géometre II Plus

Por parejas de trabajo, los estudiantes realizarán un trabajo dirigido utilizando el Software Cabri Géometre II Plus
El docente solicitará a los estudiantes seguir las siguientes instrucciones:

a. Activar los ejes cartesianos y la rejilla del software
b. Aplicar los pasos aplicados en la actividad final de la sesión de la clase anterior.
c. Dibujar en un plano cartesiano La Parábola con foco en $(2, -1)$ y directriz $y = -5$, utilizando el software dinámico Cabri Géometre II Plus.

El resultado esperado de esta actividad será la siguiente gráfica:



Actividad 2. Taller en el cuaderno "Ecuación de La Parábola"

Escribe la ecuación de La Parábola dibujada en el punto anterior completando los espacios en blanco.

Datos:

- Puntos del plano $(x, y) \in \mathbb{R}$
- Coordenadas del vértice (h, k)
- Coordenada del foco $(2, -1)$
- Directriz $y = -5$
- $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$d(del\ punto\ del\ plano\ al\ foco) = d(del\ punto\ del\ plano\ a\ la\ directriz)$$
$$\sqrt{(x - \_\_)^2 + (y - (\_\_))^2} = (y - (\_\_\_))$$
$$(x - \_\_\_)^2 + (y + \_\_\_\_)^2 = (y + \_\_)^2$$
$$(x - 2)^2 + y^2 + 2y + \_\_\_\_ = y^2 + 10y + \_\_\_$$
$$(x - 2)^2 = 8y + 24$$
$$(x - 2)^2 = 8(y + 3)$$

d. Compare la gráfica con la ecuación y construya una ecuación que involucre el vértice (h, k) y el lado recto de La Parábola.

Se espera que el estudiante llegue a la expresión canónica de La Parábola

$$(x - h)^2 = LR(y - k)$$
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

SESIÓN 5 Dibujando La Parábola en el plano cartesiano a partir de la ecuación general

Tiempo estimado: Dos períodos de clase – 110 minutos

Propósitos:

Construir en papel milimetrado un bosquejo de La Parábola a partir variable independiente ***x*** y obtener la correspondiente en ***y***,

Utilizar el concepto de simetría para encontrar el valor de la coordenada del vértice.

Espacio y organización*:* Aula de clase, trabajo en parejas

Recursos: Papel milimetrado.

Descripción actividades de la sesión

Actividad 1. Dibujo La Parábola en papel milimetrado

- El docente hace entrega a cada uno de los estudiantes una hoja de papel milimetrado
- Se solicitará a los estudiantes que realicen en el papel milimetrado un bosquejo de La Parábola representada por la ecuación:

$$(x - 3)^2 = 8(y + 2)$$

Se espera que el estudiante realice los siguientes pasos

e. Despeje la variable *y*

:

$$y = \frac{x^2 - 6x - 7}{8}$$

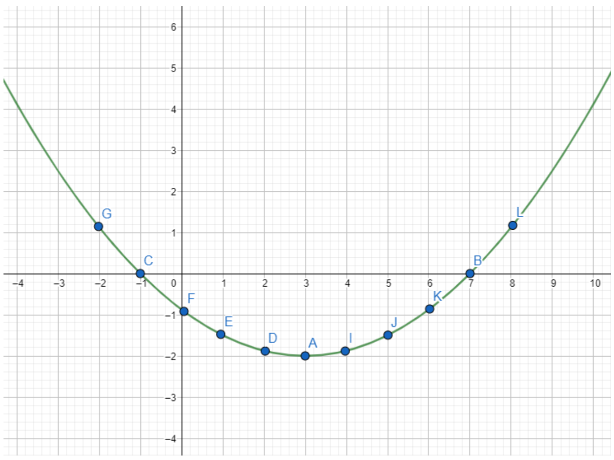
f. Complete la tabla de datos obteniendo el valor de la variable *y*

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	1,125	0	-0,88	-1,5	-1,88	-2	-1,88	-1,5	-0,88	0	1,125

g. Establezca relaciones de simetría para deducir el vértice:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,125	0	-0,88	-1,5	-1,88	-2	-1,88	-1,5	-0,88	0	1,125

h. Dibuje en el papel milimetrado el bosquejo de La Parábola en el plano cartesiano con cada coordenada y una los puntos con una curva como se muestra a continuación:



SESIÓN 6 Actividad evaluativa Software Cabri Géometre II Plus
Tiempo estimado: Dos períodos de clase – 110 minutos

Propósitos:

- Reconocer con la ayuda del software dinámico Cabri Géometre II Plus, La Parábola como lugar geométrico, su representación gráfica y algebraica

Espacio y organización: Aula de sistemas, trabajo individual
Recursos: Computador, Software Cabri Géometre II Plus

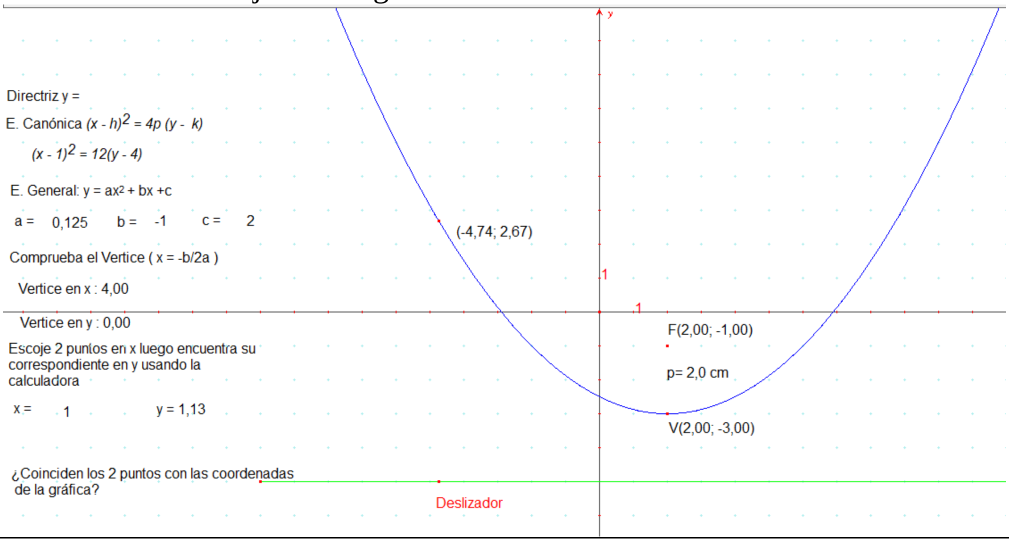
Descripción actividades de la sesión

Actividad 1. Evaluando mis aprendizajes de La Parábola

a. El docente ubica a cada uno de los estudiantes en un computador el cual ya tiene el interfaz de La Parábola en el software dinámico Cabri Géometre
b. Cada uno de los estudiantes a partir de la interfaz de La Parábola en el software dinámico Cabri Géometre II. Varía la ubicación del foco y encuentra:
   - ✓ Nombra las coordenadas del foco, del vértice y del punto que se desliza por La Parábola
   - ✓ Determina el parámetro ***p*** y el lado recto de La Parábola
   - ✓ Escribe la ecuación de la directriz.
   - ✓ Determina la ecuación canónica de la Parábola
   - ✓ Escribe los parámetros ***a***, ***b*** y ***c*** de la ecuación general de La Parábola

- ✓ Encuentra el vértice mediante la expresión: $Vertice\ en\ la\ coordenada\ x = \frac{-b}{2a}$
- ✓ Con el uso de la calculadora del software escoge 2 valores para $\boldsymbol{x}$, para encontrar su correspondiente en $\boldsymbol{y}$, verifica estos resultados con el punto que se desliza por La Parábola.

La interfaz de trabajo es la siguiente:



ANEXO 3

EVIDENCIAS DE LOS CUESTIONARIOS APLICADOS

En el siguiente enlace se encuentran las evidencias de las respuestas dadas por los estudiantes en cada uno de los cuestionarios.

CARPETA EN DRIVE

https://drive.google.com/open?id=1Dcp391saSjvP6iNlQVYBa25Sw5GJvthV