

# **VALORACIÓN DE LA HIPOTECA INVERSA EN COLOMBIA**

**Clase de trabajo:** Proyecto de Investigación

**Autor:** Verónica Londoño Céspedes

**Asesor:** Felipe Isaza Cuervo

**Universidad:** Universidad de Medellín

**Facultad:** Ingenierías

**Programa:** Maestría en Finanzas

**Ciudad:** Medellín

**Año:** 2020

# Contenido

RESUMEN .....	3
Palabras clave .....	3
ABSTRACT .....	3
Keywords .....	3
1.    Introducción.....	4
2.    Discusión Teórica .....	5
2.1. Experiencia internacional .....	5
2.2. Riesgos del producto .....	7
3.    Modelo de valoración .....	8
3.1. Principales variables del modelo.....	9
3.1.1. Tasa de descuento entidad financiera.....	9
3.1.2. Valoración Inmueble .....	10
3.1.3. Gastos.....	11
3.1.4. Expectativa de Vida .....	11
3.2. Equivalencia .....	13
4.    Aplicación y resultados – Caso mercado colombiano.....	14
4.1. Tasa de descuento entidad financiera.....	14
4.2. Tasa de interés técnico seguro de renta vitalicia .....	15
4.3. Valoración Inmueble .....	16
4.4. Gastos .....	17
4.5. Expectativa de Vida .....	17
4.6. Resultados .....	18
5.    Conclusiones .....	21
6.    Referencias.....	22

# VALORACIÓN DE LA HIPOTECA INVERSA EN COLOMBIA

## RESUMEN

Este estudio contribuye al planteamiento de alternativas para la generación de ingresos en la etapa de retiro laboral. En este trabajo se evalúa la valoración de la hipoteca inversa vitalicia en el mercado colombiano. La hipoteca inversa es un producto financiero-actuarial que puede contribuir con la generación de rentas para los adultos mayores propietarios de una vivienda. El principal objetivo del trabajo es desarrollar un modelo para la determinación de las rentas mensuales que obtendría el beneficiario de este producto en Colombia. Para este trabajo el precio de la vivienda y el interés técnico del seguro de renta vitalicia se modelan a partir de un Movimiento Browniano Geométrico y un proceso con reversión a la media respectivamente, mientras que para la expectativa de vida se utilizan las tablas de mortalidad de rentistas válidos en Colombia. Los resultados muestran que la utilización de la hipoteca inversa en Colombia es viable y podría generar ingresos complementarios a sus tomadores.

## Palabras clave

Hipoteca Inversa, conversión de activos inmobiliarios, Movimiento Browniano Geométrico, proceso de Ornstein Uhlenbeck, tabla de mortalidad.

## ABSTRACT

This study contributes to the proposal of alternatives for generating income in the retirement phase. This paper analyzes the valuation of life reverse mortgage in the Colombian market. The reverse mortgage is a financial-actuarial product that can contribute to the generation of income for elderly homeowners. The main goal of the work is to develop a model for determining the monthly income that the beneficiary of this product would get in Colombia. For this work, the price of housing and the technical interest of life annuity are modeled through a Geometric Brownian Movement and a mean reversion process, respectively. While, mortality tables of the Colombian population are used for estimating the life expectancy. The results show that the use of the reverse mortgage in Colombia is feasible and could generate a complementary income for the clients of the product.

## Keywords

Reverse Mortgage, Equity Release, Geometric Brownian Motion, Ornstein Uhlenbeck process, mortality table.

## 1. Introducción

De acuerdo con el Foro Económico Global (2018) el envejecimiento de la población es reconocido como un riesgo global, el cual, debido al cambio demográfico, exige a los gobiernos enfrentar cargas fiscales adicionales y buscar alternativas que permitan mejorar la salud financiera de los adultos mayores que no cuentan con recursos suficientes para atender los costos básicos de vida. Autores como Kohlbacher *et al.* (2014) y Cocco y Lopes (2015) proponen el desarrollo de productos financieros que respondan al cambio demográfico, siendo la hipoteca inversa uno de estos instrumentos, que de acuerdo con Hancock (1998), Rowlingson (2006) y Dillingh, *et al.* (2017) puede mejorar el nivel de ingreso de los adultos mayores, lo que a su vez disminuye la presión financiera sobre los gobiernos, siendo beneficioso para ambos grupos de interés; dado que, al aumentar el ingreso mensual de los hogares conformados por adultos mayores, éstos pueden satisfacer con holgura sus necesidades básicas, teniendo como resultado esperado que el gobierno otorgue menos subsidios a esta parte de la población.

La hipoteca inversa es un crédito con garantía inmobiliaria, es decir, un producto financiero que permite transformar los activos inmobiliarios en rentas. Este producto le permite al propietario de la vivienda recibir ingresos en calidad de préstamo mientras continúa habitando la vivienda; el principal y los intereses del crédito, serán cubiertos con la venta del inmueble (Tsay, et al, 2014). En la operación de hipoteca inversa, el capital prestado puede ser dispuesto como una suma única, una línea de crédito o mediante pagos periódicos por un periodo de tiempo limitado o de manera vitalicia.

De acuerdo con los estándares internacionales impartidos por la Organización Mundial de la Salud, un país se convierte en una sociedad que se está envejeciendo si su población mayor a 65 años constituye al menos el 7% de la población. Para Colombia, y según las cifras del Departamento Nacional de Estadísticas DANE (2018), mientras que en 2005 la población colombiana mayor de 65 años representaba el 6.3%, en el 2018 esa cifra se ha incrementado al 9.2%, por lo que se puede concluir que en la última década, la población colombiana se podría clasificar como una sociedad que envejece. Adicionalmente, de acuerdo con el Boletín Técnico de la Encuesta Nacional de Calidad de Vida elaborado por el DANE (2017) para el 2016 el 42,8% de los hogares eran propietarios de vivienda, lo que representa teóricamente una población atractiva para desarrollar instrumentos de financiación para la población mayor con subyacente en las propiedades. Favorecer que los adultos mayores puedan conservar su nivel de gasto vía la disminución de las restricciones de liquidez, motiva la proposición de alternativas de ingreso complementario para las personas mayores en Colombia. La valoración de la hipoteca inversa bajo el contexto del mercado colombiano es el eje central de este trabajo y un aporte que constituye un primer pilar para su implementación.

La hipoteca inversa ha sido utilizada en diferentes países, donde se puede resaltar el programa HECM (Home Equity Conversion Mortgage) de Estados Unidos, y programas en Reino Unido, España y Corea del Sur, entre otros. Las características particulares de

los programas varían de acuerdo con el país, donde en algunos casos los gobiernos proveen subsidios para impulsar el desarrollo del producto, mientras que en otros existe un marco normativo dedicado a regular su operación. Más adelante se ampliará la experiencia internacional y la caracterización del producto bajo diferentes programas Estatales.

En el caso de Colombia la regulación es naciente. El Ministerio de Vivienda presentó en el 2018 un proyecto de ley de vivienda y hábitat que menciona a la hipoteca inversa como un tema de interés, sin embargo, a la fecha no ha sido aprobado un marco regulatorio dedicado a este tipo de instrumentos, como tampoco se han realizado operaciones de hipoteca inversa en el país. Por consiguiente, este trabajo constituye un aporte desde la óptica financiera para la valoración del producto en el contexto colombiano.

Para la realización de este estudio se sigue la metodología de equivalencia propuesta por Debón *et al.* (2009), en la cual se estiman las variables que intervienen en la valoración de la hipoteca inversa bajo supuestos de modalidad vitalicia con pagos periódicos y considerando el contexto del mercado colombiano. Las variables y sus metodologías de estimación son: i) El valor del inmueble - que se proyecta por medio de un Movimiento Browniano Geométrico, ii) la tasa de interés del crédito para la institución financiera - que se estima bajo el Modelo de Valoración de Activos Financieros, iii) la tasa de interés técnico del seguro de renta vitalicia - la cual se modela mediante un proceso de Ornstein Uhlenbeck y iv) la expectativa de vida del beneficiario - que se obtiene de la tabla de mortalidad estática, en concordancia con lo planteado por Boehn y Ehrhardt (1994).

Este artículo está organizado de la siguiente manera, en la Sección 2 se presenta la revisión de literatura en ámbitos como la experiencia internacional en la aplicación del instrumento y diferentes aproximaciones teóricas para su valoración, en la la Sección 3 se presenta la metodología y el modelo teórico que se desarrolla para un caso de estudio bajo el contexto colombiano, en la sección 4 se presentan los resultados y se analizan bajo la óptica de las teorías utilizadas y el contexto colombiano donde se aplica. Finalmente, la sección 5 presentan las conclusiones y recomendaciones del estudio.

## **2. Discusión Teórica**

### **2.1. Experiencia internacional**

En Estados Unidos y Reino Unido existen programas que administran y regulan la hipoteca inversa desde hace más de medio siglo. A continuación, se explican brevemente los programas en esos países:

En Estados Unidos el sistema de hipoteca inversa fue adoptado desde 1960. De acuerdo con Del Pozo *et al.* (2011) el programa federal “Hipotecas de conversión del valor acumulado de la Vivienda (Home Equity Conversion Mortgage - HECM) representa el 90% del mercado. El programa HECM se caracteriza por la intervención de la

administración pública que provee garantías para la entidad financiera al final del contrato. La edad mínima del propietario del inmueble es de 62 años; las opciones de pago que le ofrece el programa al individuo son: anticipo único por el total de efectivo concedido, una línea de crédito que se puede utilizar por demanda, anticipos mensuales o cualquier combinación de las opciones anteriores. En el caso del Reino Unido, la hipoteca inversa se implementó desde el año 1965. Actualmente, el programa estatal es conocido como programa de reversión de vivienda (UK home reversion plan) donde el tomador de la hipoteca inversa debe ser mayor a 54 años, las opciones de pago en este programa son similares a las del HECM.

El continuo envejecimiento de la población ha dado lugar para que diversos países y autores busquen implementar o proponer programas que mejoren status económico de las personas mayores. Para ello se han referenciado en la experiencia de los países pioneros descritos anteriormente. Tal son los casos de: i) España - donde la entrada de la hipoteca inversa vino promovida por entidades financieras que se inspiraron en las de Reino Unido y EEUU (ver Costa *et al.*, 2007) y luego promulgaron la creación de un marco regulatorio, ley 41 de 2007 (ver BOE, 2007), para operar las hipotecas inversas en el mercado español; ii) Corea del Sur - donde La Corporación de Vivienda y Finanzas desde el 2007 dicta las pautas del programa de hipoteca inversa en este mercado (ver Korea Housing Finance Corporation, 2013) y iii) China - donde autores como Chou *et al.* (2006) y Wang y Kim (2004) exploran la viabilidad del mercado de hipoteca inversa en Hong-Kong.

Si bien la hipoteca inversa satisface la necesidad de ingresos complementarios en la etapa de vejez, este producto ha tenido una baja acogida en el mercado. Al respecto Chatterjee (2016) evalúa los factores asociados con la decisión de acceder a la hipoteca inversa por parte de los adultos mayores propietarios de vivienda a nivel nacional en Estados Unidos. El estudio sugiere que, una baja proporción de propietarios utilizan el programa de hipoteca inversa como opción de retiro y que adultos mayores con edad inferior a los 67 años no suelen tener préstamos de hipoteca inversa. También sugiere que las personas con un mayor nivel de educación participan en el programa. Siguiendo esta corriente, Yueh *et al.* (2014), Telyukova y Nakajima (2014) y Tsay *et al.* (2014) analizan los niveles de aceptabilidad de la hipoteca inversa contrastados con diferentes factores, concluyendo también que la penetración del mercado es muy baja. Andrews y Oberoi (2015) argumentan que la irrisoria popularidad de la hipoteca inversa es atribuible al diseño y costo del producto.

Pese a los casos no exitosos, las hipotecas inversas han venido constituyendo una alternativa para la generación de ingresos líquidos en la etapa de jubilación en varios países desarrollados, y han servido de referencia para los países emergentes como China, Corea del Sur y Chile. En China, Wang y Kim (2014) presentan la viabilidad de la hipoteca inversa para el mercado local promoviendo la alineación de intereses entre prestadores y beneficiarios. En el caso de Corea del Sur, el modelo de hipoteca ha permitido la reducción en la tasa de pobreza del país (ver Heo *et al.*, 2016). En Chile el mercado de hipoteca inversa es relativamente reciente. Al respecto Alonso *et al.* (2013)

analizan el potencial desarrollo del programa de hipoteca inversa. Los autores concluyen que, los sistemas públicos pueden ser reforzados con mecanismos financieros privados (como la hipoteca inversa) que permitan generar otros flujos de ingresos para la vejez.

## **2.2. Riesgos del producto**

Considerando que la hipoteca inversa es un producto de largo plazo, en el que para su valoración intervienen diversas variables, existen riesgos asociados a estimación de los parámetros utilizados para su tarificación. La volatilidad de los precios de la vivienda es uno de los principales riesgos asociados en la valoración de la hipoteca inversa, al respecto autores como Shao *et al.* (2015), Wang *et al.* (2016), Hanewald *et al.* (2016) y Bogataj y McDonnell (2016) reconocen la importancia de estimar adecuadamente esta variable. En la cuantificación de este riesgo, Lee *et al.* (2015) se aproximan a estimar los precios del sector inmobiliario a través de un modelo GARCH con el objetivo de incorporar la volatilidad del precio del inmueble en la valoración de la hipoteca inversa. Mientras que Boitan (2016) utiliza un modelo univariado para predecir el comportamiento futuro del sector inmobiliario residencial. El análisis se fundamenta en modelos autoregresivos ARIMA para identificar tendencias en el corto plazo y es aplicado a varios países europeos. Por otra parte, Szymanoski, (1994), Chinloy y Megbolugbe, (1994), Yang *et al.*, (1998), Ma *et al.*, (2007), Wang *et al.*, (2007) y Huang *et al.*, (2011) utilizan un Movimiento Browniano Geométrico.

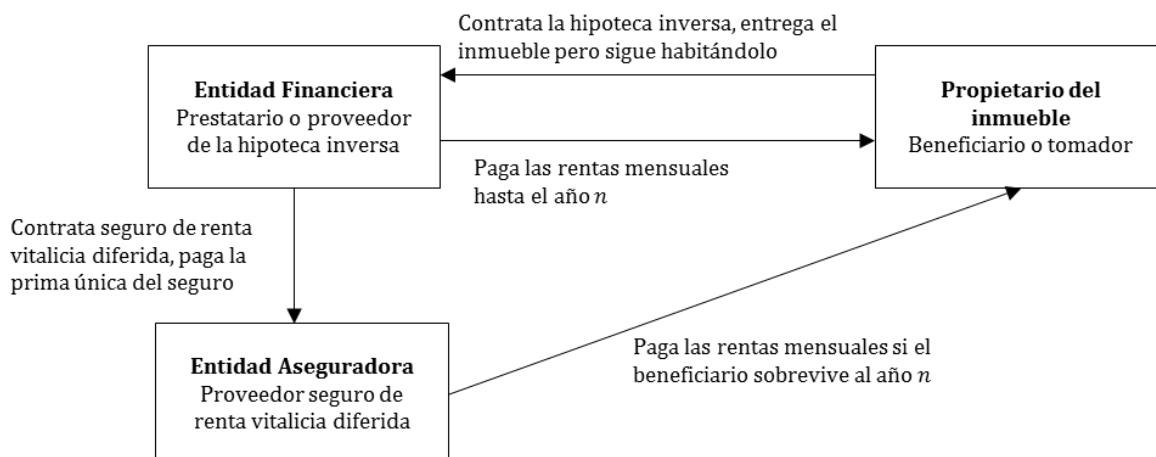
Otros autores reconocen que los precios de la vivienda son afectados por las condiciones cambiantes del mercado, el ingreso y la preferencia de las personas. En tal sentido, han utilizado el análisis hedónico para entender como diversos factores contribuyen a la formación de precios en el mercado inmobiliario, incorporando diferentes atributos de las propiedades a través de modelos que incorporan regresiones multivariadas. Algunos casos relacionados con este enfoque son los estudios de Lopes (2015), De Koning *et al.* (2016), Saita *et al.* (2016) y Hedlund (2016).

Dado que el beneficiario de la hipoteca inversa (que es el propietario de la vivienda), puede permanecer en el inmueble hasta el momento de su fallecimiento, la duración del contrato de hipoteca inversa es incierto. Por lo tanto, existe un riesgo relacionado con la supervivencia del beneficiario denominado riesgo de longevidad. El riesgo de longevidad es modelado por diversos autores a través del cálculo de las tablas de mortalidad dinámicas y estáticas. Los modelos para estimar las tablas de mortalidad incluyen los propuestos por Lee y Carter (1992), Milevsky y Promislow, (2001), Dahl, (2004) y Yang *et al.*, (2010). Otros enfoques son presentados por Abdou (2015) y De Rosa *et al.* (2016) quienes implementan una función de acumulación de pérdida que tiene en cuenta la mortalidad y realizan la evaluación del riesgo de longevidad a través del modelo parsimonioso Cox, Ingersoll y Ross (CIR). Además de la creciente literatura en la estimación de los riesgos de la hipoteca inversa, autores como Cho *et al.* (2015) y Devesa *et al.* (2011) se centran en el análisis de la rentabilidad de las hipotecas inversas con diferentes modalidades de pago, realizando la valoración desde la perspectiva de la entidad crediticia y concluyendo que el producto es rentable para la entidad que lo provee bajo las modalidades de pago evaluadas.

### 3. Modelo de valoración

En este trabajo se mencionan tres actores que participan en la operación de la hipoteca inversa, los roles de dichos actores y su interacción se presentan en la *Ilustración 1*.

*Ilustración 1. Actores que participan en la hipoteca inversa*



Fuente: Elaboración propia.

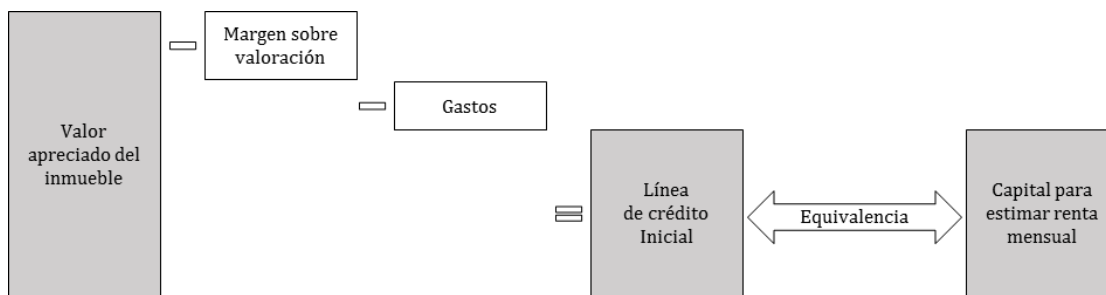
Bajo el modelo de hipoteca inversa que se plantea en este trabajo, la entidad financiera realizará los pagos mensuales al beneficiario hasta el año  $n$ , si el beneficiario sobrevive al año  $n$ , la entidad aseguradora comenzará a realizar los pagos de manera vitalicia a partir del año  $n + 1$ . El seguro que contrata la entidad financiera para que este esquema pueda ser habilitado, corresponde a una renta vitalicia diferida con periodo de diferimiento de  $n$  años. La estimación de la variable  $n$  se detalla en la *sección 3.1.4.1*.

En caso que el beneficiario fallezca antes del año  $n$ , los pagos futuros pendientes por desembolsar, tendrán el tratamiento de un saldo a favor para los herederos del Beneficiario, por consiguiente, se espera que no haya incertidumbre frente a los pagos a cargo de la Entidad Financiera.

En esta investigación, se pretende realizar la valoración de la hipoteca inversa siguiendo el siguiente flujo:



Ilustración 2. Equivalencia modelo de valoración.



Fuente: Elaboración propia.

La suma total del crédito concedido,  $C$ , se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$C = V_n - M - G$$

$$C = R + P_u$$

$$V_n - M - G - R - P_u = 0$$

Dónde  $n$  corresponde a la expectativa de vida del tomador, determinando la duración estimada del contrato entre la entidad financiera y el beneficiario y el periodo de diferimiento de la renta vitalicia,  $V_n$  es el valor apreciado esperado del inmueble en el año  $n$ ,  $M$  es el margen de seguridad sobre la apreciación del inmueble,  $R$  es el valor presente de las rentas mensuales a cargo de la entidad financiera,  $P_u$  es la prima única que se debe pagar a la aseguradora por el seguro de renta vitalicia diferida en caso de supervivencia del beneficiario por encima de los  $n$  años del contrato y  $G$  son los gastos de originación y administración del contrato.

La suma total del crédito concedido es equivalente al capital disponible a partir del cual las rentas mensuales serán determinadas Debón *et al.* (2009). Para resolver la equivalencia, es necesario estimar únicamente el valor de la renta mensual del primer año,  $a$ . Las rentas mensuales de los años siguientes corresponden a una sucesión geométrica de  $a$ .

### 3.1. Principales variables del modelo

#### 3.1.1. Tasa de descuento entidad financiera

El rol de la entidad financiera en la hipoteca inversa consiste en originar la operación y facilitar los recursos para los desembolsos de las rentas mensuales y otros gastos de operación. Por lo tanto, se puede considerar que la hipoteca inversa representa una inversión, de la cual, la entidad financiera espera obtener un beneficio económico. Para descontar los flujos de caja de la operación, se utilizará el costo del patrimonio o costos de recursos propios,  $K_e$ , del inversionista. El costo de los recursos propios se estima bajo el modelo de valoración de activos de capital (Capital Asset Pricing Model - CAPM)

propuesto por Sharpe (1964). De acuerdo con esta metodología el costo se expresa como:

$$K_e = R_f - \beta_l(R_m - R_f)$$

Dónde  $K_e$  es el costo del patrimonio o de los recursos propios,  $R_m$  es la rentabilidad esperada de un activo libre de riesgo,  $R_f$  es la rentabilidad esperada del mercado y  $\beta_l$  es la beta apalancada del sector de bancario para el segmento inmobiliario.

La beta apalancada se expresa como  $\beta_l = \beta_u * \left(1 + (1 - T) \frac{D}{E}\right)$  donde  $\beta_u$  es la beta desapalancada del sector bancario para el segmento inmobiliario,  $T$  la tasa impositiva y  $\frac{D}{E}$  la relación deuda patrimonio de la entidad financiera.

### 3.1.2. Valoración Inmueble

#### 3.1.2.1 Tasa de apreciación del inmueble

La hipoteca inversa vitalicia es un producto de largo plazo. Se propone aplicar un Movimiento Browniano Geométrico para la proyección de la tasa de apreciación del inmueble en el horizonte temporal de largo plazo. El Movimiento Browniano Geométrico es comúnmente utilizado para proyectar el precio de los activos inmobiliarios. Según Szymanoski (1994) el programa HECM aplica este método.

Suponiendo que el precio de la vivienda,  $V$ , sigue el modelo estocástico dado por

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma dz$$

Dónde  $\mu$  es la tasa de apreciación esperada,  $\sigma$  es la volatilidad de la tasa de apreciación esperada y  $dz$  es el componente estocástico que sigue un proceso de Winer  $\sim N(0,1)$ .

Aplicando la lema de Ito se obtiene:

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

El valor apreciado del inmueble,  $V_n$ , se obtiene mediante la evaluación la ecuación anterior en la duración esperada del contrato (año  $n$ ).

#### 3.1.2.2 Margen de seguridad

Se propone un margen de seguridad del 30% para cubrir desviaciones en la variación del precio de inmueble y/o gastos no previstos. Este porcentaje es comparable con los valores máximos del crédito otorgable en los programas de hipoteca inversa en España (programa ICO Ley 41/ 2007) y de Reino Unido que según Del Pozo *et al.* (2011) varían entre el 60% y el 92% dejando implícitamente un margen entre el 40% y el 8% respectivamente. En Estados Unidos (programa HECM) y Australia, los prestamistas no prevén un margen, dado que existe una garantía por parte del gobierno para cubrir las desviaciones en el precio de la vivienda si este se encuentra por debajo del valor inicialmente estimado al momento de terminación del contrato. Esa garantía es

comparable a una opción put con el precio de la vivienda como activo subyacente (ver Chinloy y Megbolugbe, 1994). Con base en lo anterior, el margen de seguridad sobre la apreciación del inmueble se expresa como:

$$M = V_n * (1 - 70\%)$$

### 3.1.3. Gastos

Los gastos de la operación que corresponden a la originación y administración de la hipoteca inversa se calculan como porcentaje del valor apreciado del inmueble  $V_n$ .

### 3.1.4. Expectativa de Vida

#### 3.1.4.1 Duración del contrato

Por definición, en el modelo implementado en este artículo, la duración del contrato (en años),  $n$ , para la hipoteca inversa vitalicia será la diferencia entre la edad del beneficiario al momento de contratar la hipoteca inversa y su edad de fallecimiento. Como la edad de fallecimiento es incierta, una aproximación a la duración del contrato es el cálculo de la expectativa de vida del beneficiario,  $e_x$ , siendo  $x$  la edad del beneficiario al momento de iniciar el contrato de hipoteca inversa.

La estimación de  $e_x$  se realizará a partir de la tabla de mortalidad. Las tablas de mortalidad representan la distribución estadística del tiempo de sobrevivencia esperado de los miembros de un grupo determinado. De acuerdo con Jordan (1991), Villalón (1994) y Bowers *et al.* (1997), Las tablas de mortalidad generalmente presentan las siguientes variables:

$x$ :	edad
$l_x$ :	número de personas sobrevivientes a la edad $x$

De acuerdo con la tabla de mortalidad, se espera que el número de personas supervivientes a la edad  $x$  sea mayor que a la edad  $x+1$ .

$d_x = l_x - l_{x+1}$ :	número de personas que fallecen entre las edades $x$ y $x + 1$
$q_x = \frac{d_x}{l_x}$ :	probabilidad de que una persona de edad $x$ muera dentro de 1 año
$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ :	probabilidad de que una persona de edad $x$ alcance la edad $x + 1$ , nótese que $p_x = 1 - q_x$

De la tabla anteriormente descrita se puede obtener el número de años esperados de vida para una persona de edad  $x$ . La esperanza de vida residual a la edad  $x$  se expresa como

$$e_x = \frac{K_x}{l_x},$$

donde  $K_x$  es el total de años que todas las personas que sobreviven a la edad  $x$  esperan vivir,  $K_x = \sum_{i \geq x} L_i$ , siendo  $L_x = l_{x+1} + d_x/2$  el correspondiente número de personas-años.

### 3.1.4.2 Renta mensual

El valor presente de las renta mensuales cubiertas por el prestamista hasta el año  $n$  está dada por:

$$R = a * A_{\overline{12}|i_m} * \frac{(1+i)[1-q^n(1+i)^{-n}]}{1+i+q}$$

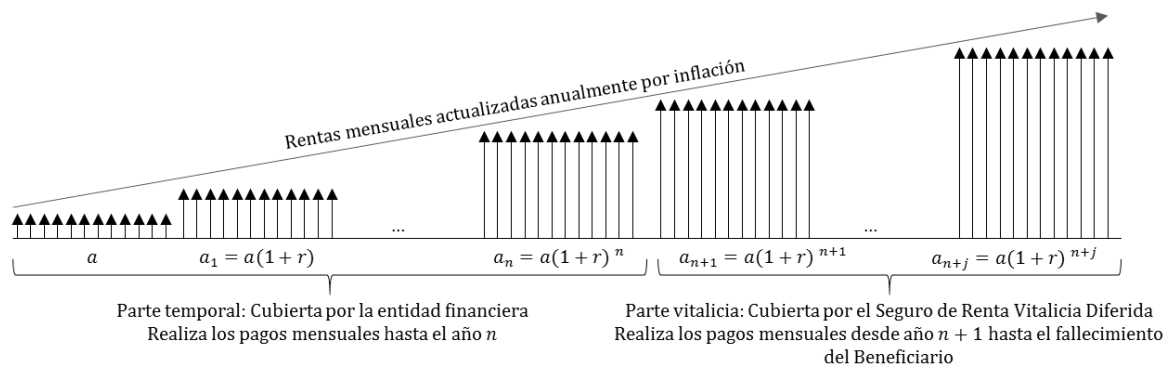
Dónde:

$$A_{\overline{12}|i_m} = \frac{1-(1+i_m)^{-12}}{i_m}$$

es el factor para determinar el pago periódico mensual de una renta,  $a$ , que crece bajo una sucesión geométrica con razón  $r = q(1+i)^{-1}$  donde  $i$  representa la tasa de interés del crédito y  $q$  el crecimiento anual de la renta.

En la *Ilustración 3* se presenta el crecimiento de las rentas, el periodo cubierto por la entidad financiera, parte temporal, y el periodo garantizado por el seguro de renta vitalicias, parte vitalicia.

*Ilustración 3. Rentas mensuales.*



Fuente: Elaboración propia.

### 3.1.4.3 Seguro de renta vitalicia

El riesgo de longevidad está inmerso en la hipoteca inversa vitalicia. Si el beneficiario vive más de lo esperado, este hecho supone un riesgo para el proveedor de la hipoteca inversa. Para mitigar este riesgo, se contrata un seguro de renta vitalicia diferida. El cálculo de la prima única del seguro,  $P_u$ , se basa en la formulación de una anualidad actuarial, la probabilidad de cada pago está referenciada en las probabilidades de supervivencia de tabla de mortalidad. El valor de  $P_u$  es:

$$P_u = 12 * a * q^{n-1} \left( \frac{N_{x+n+1}^*}{D_x^*} + \frac{11 D_{x+n}^*}{24 D_x^*} \right)$$

Nótese que  $a * q^{n-1}$  es el valor de la última renta mensual cubierta por el prestamista, es decir, el valor de la renta mensual en el año  $n$ . Si el beneficiario sobrevive al año  $n$ , las rentas mensuales estarán a cargo del seguro de renta vitalicia, que comenzará a pagar rentas mensuales de valor  $a * q^n$ .

La expresión  $\left( \frac{N_{x+n+1}^*}{D_x^*} + \frac{11 D_{x+n}^*}{24 D_x^*} \right)$  de acuerdo con Levi (1973) corresponde a la estimación de una renta vitalicia diferida con pagos mensuales y con un plazo de aplazamiento de  $n$  años (periodo en el que los flujos estuvieron a cargo del prestamista). Esta expresión se descuenta a la tasa de interés técnico,  $k$ , determinada por la aseguradora. Dado que la renta mensual  $a$  crece a una tasa anual  $q = 1 + \pi$ , el interés técnico  $k$  debe ajustarse así  $k' = \frac{1+k}{1+\pi} - 1$

La estimación del interés técnico,  $k$ , se realiza con base en el comportamiento de las tasas de interés en el mercado de capitales. Para ello se utiliza el modelo de reversión a la media propuesto por Uhlenbeck y Ornstein (1930). De acuerdo con este modelo, de la tasa de interés  $r_t$  está dada por el siguiente proceso de reversión a la media

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$$

donde  $W_t$  es un Movimiento Browniano,  $\alpha$  es la velocidad de reversión a la media de largo plazo  $\mu$  y  $\sigma$  representa la volatilidad de la tasa de interés. Bajo este modelo se puede probar que la distribución condicional de  $r_t$  dado  $r_0 = r$  es normal con media:

$$E(r_t | r_0 = r) = \mu + e^{-\alpha t}(r - \mu)$$

Y varianza:

$$Var(r_t | r_0 = r) = \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \right)$$

### 3.2. Equivalencia

Habiendo definido todas las variables, la ecuación de equivalencia resultante de igualar la suma total del crédito concedido,  $C$ , con el valor presente de las rentas mensuales a cargo de la entidad financiera y la prima del seguro de rentas vitalicias es:

$$C = R + P_u$$

Reemplazando  $R$  y  $P_u$  se obtiene:

$$C = a * A_{12|im} * \frac{(1+i)[1-q^n(1+i)^{-n}]}{1+i+q} + 12 * a * q^{n-1} \left( \frac{N_{x+n+1}^*}{D_x^*} + \frac{11 D_{x+n}^*}{24 D_x^*} \right)$$

Despejando la renta mensual del primer año,  $a$ , se obtiene:

$$a = \frac{C}{A_{12|i_m} * \frac{(1+i)[1-q^n(1+i)^{-n}]}{1+i+q} + 12 * q^{n-1} \left( \frac{N_{x+n+1}^*}{D_x^*} + \frac{11 D_{x+n}^*}{24 D_x^*} \right)}$$

#### 4. Aplicación y resultados – Caso mercado colombiano

##### 4.1. Tasa de descuento entidad financiera

A la hora de tomar decisiones de inversión, la noción de riesgo es relevante y, por lo tanto, las inversiones de mayor riesgo deben estar compensadas por mayor retorno. Como la valoración de la hipoteca inversa se aplicará al caso colombiano, se ajustará el modelo CAPM a las condiciones de un inversionista ubicado en un país emergente, partiendo de la teoría de primas de riesgo de Damodaran (2018). Para implementar tal teoría, al modelo CAPM planteado en la sección anterior, se suma el riesgo país de Colombia  $R_p$ . El costo de los recursos de capital ajustado por riesgo se expresa como:

$$K'_e = R_f - \beta_l(R_m - R_f) + R_p$$

Dado que los flujos evaluados de la hipoteca inversa están en pesos colombianos y que se parte de un modelo generalizado para un mercado que opera flujos en dólares de Estados Unidos, se aplicará una prima cambiaria para encontrar el costo de los recursos propios en pesos, de la siguiente manera:

$$K'_{e_{COP}} = (1 + K'_e) * (1 + P_c) - 1$$

Donde  $K'_{e_{COP}}$  representa el costo de los recursos propios en pesos colombianos y  $P_c$  la prima cambiaria para convertir a pesos colombianos la tasa de costo de capital ajustado. La prima cambiaria se obtiene a partir de la devaluación en condiciones de paridad cambiaria, asumiendo la inflación esperada como la inflación objetivo de los Bancos Centrales, tanto para el caso de Colombia como para el caso de Estados Unidos, y se calcula, así:

$$P_c = \frac{1 + \pi_{Colombia}}{1 + \pi_{Estados Unidos}} - 1$$

La prima cambiaria se calcula como aproximación metodológica del modelo CAPM, que parte de la estimación de tasas en dólares que luego son expresadas en pesos colombianos, para determinar el costo de capital de la entidad financiera. En la implementación de la hipoteca inversa bajo los supuestos de este trabajo, no se corre riesgo cambiario.

Con base en lo anterior en la

*Tabla 1* se presentan los valores de las variables de entrada para proyectar el costo de los recursos propios.

Tabla 1. Parámetros para el cálculo del costo de capital de la entidad financiera.

Parámetro	Valor	Estimación
$R_f$	2.41%	Tasa de interés libre de riesgo (T-Bonds 10 años). Damodaran (2018).
$(R_m - R_f)$	5.08%	Exceso de retorno del mercado sobre el activo libre de riesgo (S&P500 - US T-Bonds 10 años). Damodaran (2018).
$\beta_u$	0.98	Beta desapalancado sector bancario para el segmento inmobiliario. Damodaran (2019). Se asume una estructura 100% capital, por lo tanto, $\beta_l = \beta_u$ .
$R_p$	1.92%	Ajuste riesgo país asumiendo una calificación de riesgo país de Moody's equivalente a Baa2. Damodaran (2018).
$\pi_{Colombia}$	3.00%	Inflación de largo plazo Colombia. Objetivo, política monetaria Banco de la República.
$\pi_{Estados Unidos}$	2.03%	Inflación de largo plazo Estados Unidos. Objetivo, política monetaria Reserva Federal.

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, el descuento de los flujos que cubre la entidad financiera se realizará a la tasa de costo de capital estimada  $K'_{e_{COP}} = 10.38\%$ .

La inflación colombiana utilizada para todo el modelo se fijó en 3.0%. El racional para utilizar este valor, parte de la definición de política monetaria realizada por el Banco de la República de Colombia, el cual tiene como objetivo mantener una inflación baja y estable. Para ello el Banco Central fija un rango con meta 3.0% y límites 2.0% a 4.0% (ver González *et al.* 2019).

#### 4.2. Tasa de interés técnico seguro de renta vitalicia

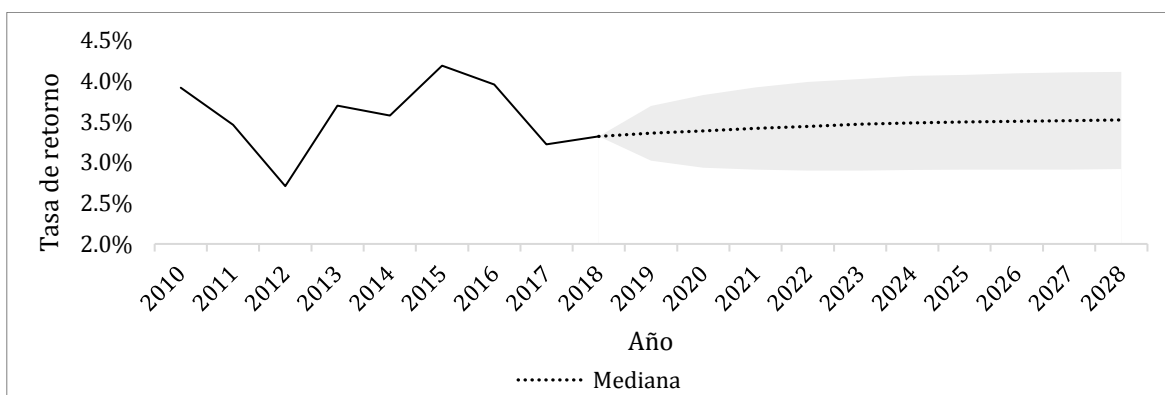
Para estimar la tasa de interés técnico que la entidad aseguradora utiliza para el cálculo de la prima única del seguro de renta vitalicia, se realizaron los siguientes supuestos:

1. La aseguradora invertirá los recursos provenientes de la prima única que pagará la entidad financiera en activos financieros que cubran la obligación que garantiza (pago de rentas al beneficiario en caso de supervivencia al año  $n$ ).
2. Dado que las rentas garantizadas crecen con inflación, se invertirá en activos con indexación a inflación.
3. La aseguradora transfiere a la entidad financiera la tasa de rentabilidad que encuentra en el mercado luego de deducir los costos de operación.

Para modelar la tasa de rentabilidad del activo de largo plazo indexado a inflación, se utilizó la curva soberana colombiana en Unidades de Valor Real (UVR). La UVR recoge el comportamiento del índice de inflación del país. El ajuste del modelo de Ornstein Uhlenbeck a la tasa interés real spot en UVR para un plazo de 10 años, utilizando información obtenida de la plataforma Bloomberg (2018) con frecuencia mensual para el periodo 2010-2018 resulta en los parámetros  $\alpha = 0.2$ ,  $\mu = 3.6\%$  y  $\sigma = 0.3\%$ .

La *Ilustración 4* presenta las trayectorias simuladas de la tasa de 10 años producidas utilizando el modelo de Ornstein Uhlenbeck.

*Ilustración 4. Proyección tasa de interés técnico.*



Fuente: Elaboración propia.

A la tasa media de inversión,  $\mu = 3.6\%$ , se descuenta un  $0.3\%$  por costos de operación de la entidad aseguradora.

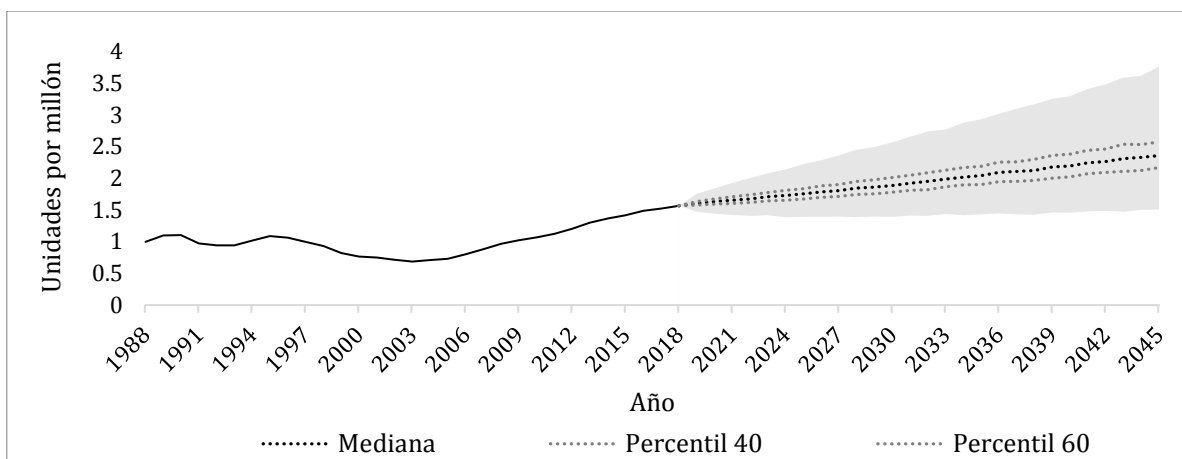
El interés técnico  $k' = 3.3\%$  se dedujo en términos reales y, en consecuencia, no es necesario restarle la inflación.

### 4.3. Valoración Inmueble

Para estimar el comportamiento del precio del mercado inmobiliario en Colombia se utilizó la serie de precios de vivienda usada en términos reales que publica el Departamento Nacional de Estadística DANE. Los parámetros resultantes para aplicar el Modelo Browniano Geométrico fueron una tasa de apreciación  $\mu = 1.7\%$  con volatilidad  $\sigma = 6.4\%$ . Los resultados de la proyección se presentan en la *Ilustración 5*.



Ilustración 5. Proyección del valor del inmueble.



Fuente: Elaboración propia.

Para obtener la tasa nominal de apreciación, se compone el resultado en términos reales con la inflación estimada, es decir, se realiza la operación matemática  $(1 + \mu) * (1 + \pi) - 1$ .

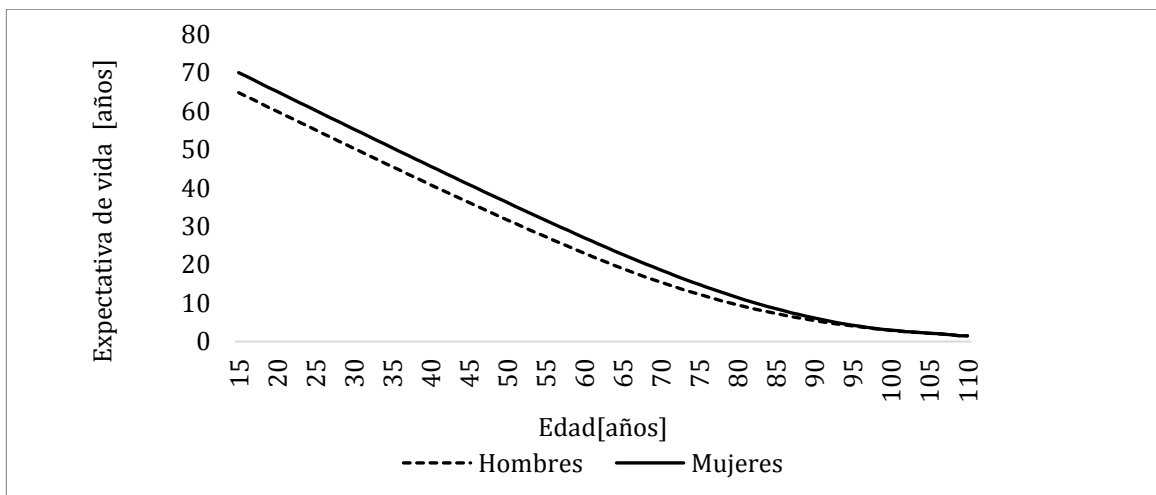
#### 4.4. Gastos

En Colombia para la compra y venta de un inmueble se deben pagar gastos de avalúo, gastos notariales, derechos de beneficencia, registro, estudio de títulos y elaboración de la minuta, entre otros. Estos gastos están estimados entre 1.2% y 1.7% del valor del inmueble. Los gastos de administración de la operación se estiman entre 1.0% y 1.5%. Sumando ambos gastos, se obtiene un rango entre 2.2% y 3.2%. El valor de  $G$  en el modelo se fijó en 3.0% para el escenario base.

#### 4.5. Expectativa de Vida

Para el cálculo de la duración del contrato y el seguro de renta vitalicia diferida se toman las tablas de mortalidad de rentistas válidos RV08 (hombres y mujeres) publicadas por la Superintendencia Financiera de Colombia, (2010). Estas tablas se utilizan para el cálculo de los productos de pensiones del Sistema General de Pensiones y del Sistema General de Riesgos Profesionales. Las tablas inician en la edad 15 y finalizan en la edad 110. Además, contemplan la experiencia de mortalidad de los años 2005-2008. La expectativa de vida estimada con base en dicha experiencia se presenta en la *Ilustración 6*.

Ilustración 6. Expectativa de vida a la edad  $x$  para la población colombiana (hombres y mujeres) con base en las tablas de mortalidad RV08.



Fuente: Elaboración propia.

#### 4.6. Resultados

Los resultados obtenidos de aplicar el modelo de valoración de la hipoteca inversa al mercado colombiano y tras estimar las variables con los supuestos declarados en las secciones anteriores se presentan a continuación. La variable de interés es el cálculo de la renta mensual inicial de la hipoteca inversa como función de los diferentes parámetros. La *Tabla 2* presenta el valor de la renta mensual (en miles de pesos) para hombre y mujeres en función de la edad del tomador del producto y el valor del inmueble (en millones de pesos), la *Tabla 3* presenta la comparación de la expectativa de vida y la diferencia porcentual de la renta percibida (en miles de pesos) por una mujer con relación a un hombre de la misma edad al momento de tomar el producto.

Para una vivienda de 600 millones de pesos, un hombre de 75 años percibiría una renta mensual inicial de 1.50 millones de pesos, mientras que una mujer de la misma edad recibiría 1.19 millones. Se observa que, a mayor edad y valor del inmueble, mayor es el valor de la renta mensual. Además, para un hombre y mujer de la misma edad, la mujer percibe un menor valor de renta mensual debido a su expectativa de vida superior. En la *Tabla 3* se puede visualizar que, en efecto, a menor edad inicial la diferencia porcentual entre la renta de un hombre y una mujer de la misma edad es mayor y que, la diferencia porcentual se mantiene constante ante diferentes valores del inmueble, es decir, sólo se afecta por la variable edad.

*Tabla 2. Comparativa renta mensual inicial (en miles de pesos) de hombres y mujeres por edad y valor del inmueble (en millones de pesos).*

<i>Género</i>	<i>Hombre</i>			<i>Mujer</i>		
<i>Valor Inmueble (millones de pesos)</i>	<i>200</i>	<i>600</i>	<i>1000</i>	<i>200</i>	<i>600</i>	<i>1000</i>
<i>Edad (años)</i>	<b>Renta mensual inicial (miles de pesos)</b>					
65	243	729	1,215	176	528	879
70	360	1,079	1,799	267	802	1,337
75	500	1,501	2,502	398	1,193	1,988
80	711	2,132	3,553	564	1,691	2,818
85	968	2,905	4,842	826	2,477	4,128
90	1,372	4,117	6,861	1,177	3,532	5,886

Fuente: Elaboración propia.

*Tabla 3. Comparación de expectativa de vida contra la diferencia porcentual de la renta mensual inicial entre hombres y mujeres.*

	<i>Género</i>		<i>Valor Inmueble (en millones de pesos)</i>		
	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>200</i>	<i>600</i>	<i>1000</i>
<i>Edad</i>	<b>Expectativa de vida (años)</b>		<b>Diferencia renta mensual (%)</b>		
65	20	23	-28%	-28%	-28%
70	16	19	-26%	-26%	-26%
75	13	15	-21%	-21%	-21%
80	10	12	-21%	-21%	-21%
85	8	9	-15%	-15%	-15%
90	6	7	-14%	-14%	-14%

Fuente: Elaboración propia.

En la *Tabla 4* se presenta la sensibilidad de la renta mensual (en miles de pesos) a la tasa de descuento de la entidad financiera y a la tasa de interés técnico del seguro de renta vitalicia diferida. En la *Tabla 5* se presenta la sensibilidad al margen sobre el valor del inmueble y a la tasa de apreciación del inmueble. Las sensibilidades presentadas en esas tablas se realizan para un hombre de 75 años y un inmueble de 600 millones de pesos. Se observa la renta mensual es más sensible a cambios en la tasa de descuento (costo de recursos propios de la entidad financiera) que a la tasa de interés técnico de la entidad aseguradora. Para el caso de la tasa de apreciación del inmueble, se observa que el valor de la renta (en miles de pesos) varía considerablemente ante cambios en el valor esperado de esta variable. Además, si el margen de seguridad se reduce del 30% (caso base) al 0%, la renta mensual de un hombre de 75 años podría incrementarse de 1.50 millones a 1.72 millones.

Tabla 4. Sensibilidad de la renta mensual (en miles de pesos) a la tasa de descuento de la entidad financiera y a la tasa de interés técnico.

	Tasa costo recursos propios entidad financiera		
	9.38%	10.38%	11.38%
Tasa de interés técnico seguro renta vitalicia	Renta mensual inicial (miles de pesos)		
2.80%	1,614	1,474	1,342
3.30%	1,644	1,501	1,368
3.80%	1,671	1,528	1,393

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Sensibilidad de la renta mensual (en miles de pesos) a la tasa de apreciación del inmueble y al margen de seguridad.

	Margen sobre el inmueble apreciado				
	0%	10%	20%	30%	40%
Tasa apreciación inmueble (real)	Renta mensual inicial (miles de pesos)				
0.00%	1,723	1,550	1,378	1,206	1,034
1.00%	1,961	1,765	1,569	1,372	1,176
1.70%	2,145	1,930	1,716	1,501	1,287
2.40%	2,345	2,110	1,876	1,641	1,407
3.10%	2,562	2,306	2,045	1,793	1,537

Fuente: Elaboración propia.

Suponiendo el salario mínimo legal vigente (SMMLV) en Colombia para el año 2018, en la Tabla 6 se presenta el porcentaje de complemento que representaría la renta mensual en términos del salario mínimo.

Tabla 6. Valor de la renta mensual como proporción a un SMMLV (2018).

Género Valor Inmueble (millones de pesos) Edad	Hombre			Mujer		
	200	600	1000	200	600	1000
	<b>Proporción renta mensual inicial sobre salario mínimo (%)</b>					
65	31%	93%	156%	23%	68%	113%
70	46%	138%	230%	34%	103%	171%
75	64%	192%	320%	51%	153%	254%
80	91%	273%	455%	72%	216%	361%
85	124%	372%	620%	106%	317%	528%
90	176%	527%	878%	151%	452%	753%

Fuente: Elaboración propia.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se valoró la renta mensual inicial de una hipoteca inversa en Colombia a partir de la metodología de equivalencia propuesta por Debón *et al.* (2009). Dónde para estimar el valor del inmueble se supone un Movimiento Browniano Geométrico, para la tasa de interés técnico del seguro de renta vitalicia se asume un proceso con reversión a la media (Ornstein Uhlenbeck) y para la expectativa de vida se utilizó la tabla de mortalidad de la población de hombres y mujeres en Colombia. Con base en los supuestos y modelos desarrollados los resultados permiten concluir que la utilización de la hipoteca inversa en Colombia es recomendable por el nivel de ingresos complementarios que puede generar a sus tomadores dado que la renta mensual estimada supera el salario mínimo legal vigente del país (2018) con base en beneficiarios mayores de 70 años y con viviendas con un valor superior a los 600 millones de pesos, estos últimos valores definen el segmento objetivo para la hipoteca inversa definida en este trabajo. Sin embargo, para inmuebles de 200 millones e individuos de 65 años, la hipoteca inversa puede complementar en más del 20% el ingreso mensual si la persona percibe un ingreso de un Salario Mínimo.

De acuerdo con los análisis de sensibilidad realizados también se puede concluir que ante un menor costo de capital para la entidad financiera la renta mensual tiende a incrementarse, por ejemplo, cambios en las condiciones económicas del país, que se vean reflejados en una mejor calificación de riesgo país y que en consecuencia impacten a la baja el costo de capital de la entidad financiera, tendrán un impacto favorable sobre el valor de la renta mensual de la hipoteca inversa.

Con relación a la tasa esperada de apreciación del inmueble, se observa que es un parámetro que afecta significativamente el valor de la renta mensual. Como se mencionó anteriormente, la volatilidad de los precios de la vivienda es considerado por diferentes autores como un riesgo material del producto y, por lo tanto, un determinante en la viabilidad de la operación. Los resultados de la modelación del precio de la vivienda en Colombia muestran un comportamiento creciente lo cual es favorable desde el punto de vista de una implementación viable de este producto en el país. Adicionalmente, el margen de seguridad afecta inversamente el valor de la renta mensual. El escenario base incorpora un margen del 30% como protección a cambios del mercado inmobiliario. El valor de la renta se incrementaría si el gobierno nacional provee garantías sobre el capital al final del contrato de la hipoteca inversa, como es el caso de los programas estatales de Estados Unidos y Australia.

Finalmente, este trabajo puede ser utilizado como una referencia para discutir la regulación asociada con la implementación de la hipoteca inversa en Colombia.

## 6. Referencias

- A. González, C. Huertas, J. Parra y H. Vargas, 2019. "Proceso de toma de decisiones de política monetaria del Banco de la República y comunicación sobre política monetaria". Documentos Técnicos o de Trabajo, Banco de la República – Colombia, Noviembre 2019.
- A. H. Munnell y S. A. Sass, "The Government's Redesigned Reverse Mortgage Program," no. January, p. 8, 2014.
- A. Hedlund, "The cyclical dynamics of illiquid housing, debt, and foreclosures," *Quant. Econom.*, vol. 7, no. 1, pp. 289–328, 2016.
- A. W. Shao, K. Hanewald, y M. Sherris, "Reverse mortgage pricing and risk analysis allowing for idiosyncratic house price risk and longevity risk," *Insur. Math. Econ.*, vol. 63, pp. 76–90, 2015.
- Bloomberg L.P. (2019), curva cero cupón soberana de Colombia en UVR.
- C. De Rosa, E. Luciano, y L. Regis, "Basis risk in static versus dynamic longevity-risk hedging," *Scand. Actuar. J.*, vol. 1238, no. Abril, 2016.
- BOE (2007). Ley 41/2007, de 7 de diciembre. BOE num. 294, sábado 8 de diciembre de 2007.
- C.-C. Lee, K.-S. Chen, y D. So-De Shyu, "A Study on the Main Determination of Mortgage Risk: Evidence from Reverse Mortgage Markets," *Int. J. Financ. Res.*, vol. 6, no. 2, pp. 84–94, 2015.
- C. W. Jordan, 1991. "Life Contingencies", Society of Actuaries, 1991.
- D. Andrews y J. Oberoi, "Home Equity Release : An alternative product and its pricing," vol. 61, no. 0, 2015.
- D. Bogataj y D. R. McDonnell, "Taxation of housing stock in the management, financing and taxation of housing stock in the shrinking cities of aging societies," *Intern. J. Prod. Econ.*, 2016.
- D. Cho, K. Hanewald, y M. Sherris, "Risk Analysis for Reverse Mortgages with Different Payout Designs," *Asia-Pacific J. Risk Insur.*, vol. 9, no. 1, pp. 77–105, 2015.
- Dahl, M., 2004. Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics* 35 (1), 113–136.
- Damodaran, Aswath, *Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications – The 2018 Edition (March 14, 2018)*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3140837> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3140837>
- Debón, A., Montes, F. y Sala, R. (2009). *Tablas dinámicas de mortalidad. Una aplicación a la hipoteca inversa en España*. Valencia. Publicacions de la Universitat de València.

- Departamento Nacional de Estadística DANE. Encuesta Nacional de Calidad de Vida – ECV - 2017. DANE. Bogotá. 2017.
- Departamento Nacional de Estadísticas DANE, “Censo nacional de población y vivienda, Colombia, 2018”, 2018.
- E. Del Pozo, Z. Díaz y L. Fernández “La hipoteca inversa en España: un estudio comparativo con otros países de la Unión Europea y EEUU”, *Revista Universitaria Europea* N° 15. Julio-Diciembre 2011: 85-106, 2011.
- F. Kohlbacher, C. Herstatt, y N. Levsen, “Golden opportunities for silver innovation: How demographic changes give rise to entrepreneurial opportunities to meet the needs of older people,” *Technovation*, vol. 39–40, no. 2015, pp. 1–10, 2014.
- Foro Económico Global - The World Economic Forum, *The Global Risks Report 2019*.
- H. López Castaño y F. Lasso Valderrama, “El mercado laboral y el problema pensional colombiano,” *Banco la República*, no. 736, p. 72, 2012.
- Hancock, R. (1998) Can Housing Wealth Alleviate Poverty among Britains Older Population?, *Fiscal Studies*, 19(3), pp. 249-72.
- Huang, H.C., Wang, C.W., Miao, Y.C., 2011. Securitization of crossover risk in reverse mortgages. *Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice* 36 (4), 622–647.
- I. A. Telyukova y M. Nakajima, “Reverse Mortgage Loans : A Quantitative Analysis \* Federal Reserve Bank of Philadelphia,” no. 14, 2014.
- I. Boitan, “Residential property prices’ modeling: evidence from selected European countries,” *J. Eur. Real Estate Res.*, 2016.
- J. Alonso, M. Lamuedra y D. Tuesta, “Potencialidad del desarrollo de hipotecas inversas : el caso de Chile,” 2013.
- J. Costa, J. Gil y O. Mascarilla, *Preferencias de la población ante la financiación de la dependencia: La hipoteca inversa en España. Encuentros de Economía Pública*, 2007.
- J. F. Cocco y P. Lopes, “Reverse Mortgage Design,” *LBS/LSE Work. Pap.*, no. January, pp. 28–30, 2015.
- Jing-Tang Tsay, Che-Chun Lin, Larry J. Prather, Richard J. Buttimer Jr. An approximation approach for valuing reverse mortgages. *Journal of Housing Economics*. 2014. Volume 25. 39 – 52.
- K. Abdou, “Pricing and Hedging Variable Annuities in a Levy Market : A Risk Management Perspective,” pp. 1–30, 2015.
- K. De Koning, O. Bin, y T. Filatova, “Improved Methods for Predicting Property Prices in Hazard Prone Dynamic Markets,” *Environ. Resour. Econ.*, 2016.
- K. Hanewald, T. Post, y M. Sherris, “Risk Management in Retirement – What is the Optimal Home Equity Release Product ?,” no. July, pp. 1–35, 2012.

- K. L. Chou, I. Chi y N. Chow, "Willingness to consider applying for reverse mortgage in Hong Kong Chinese middle-aged homeowners" Habitat International, pp. 716-727, 2006.
- Korea Housing Finance Corporation (2013). Reverse mortgage Monthly, <http://www.hf.go.kr/>.
- L. Wang, F. F. Chan, Y. Wang, y Q. Chang, "Predicting Public Housing Prices Using Delayed Neural Networks," pp. 3589–3592, 2016.
- Lee, R.D., Carter, L.R., 1992. Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419), 659–675.
- Levi, E. (1973). *Curso de matemática financiera y actuarial, volumen II Matemática Actuarial*. Bosch, Barcelona.
- M.-L. YUEH, H.-Y. CHIU, y S.-H. TSAI, "Valuations of Mortality-Linked Structured Products," *J. Deriv.*, 2016.
- Ma, S., Kim, G., Lew, K., 2007, Estimating reverse mortgage insurer's risk using stochastic models, in: Presented at the Asia-Pacific Risk and Insurance Association 2007 Annual Meeting.
- Milevsky, M.A., Promislow, S.D., 2001. Mortality derivatives and the option to annuities. *Insurance: Mathematics and Economics* 29 (3), 299–318.
- N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt, 1997. "Actuarial Mathematics". Society of Actuaries, 1997.
- P. Chinloy y I. F. Megbolugbe (1994) "Reverse Mortgages: Contracting and Crossover Risk", *Real Estate Economics*, vol. 22, Issue 2, pp. 367-386, 1994.
- P. Wang y J. Kim, The Value of Reverse Mortgage Loans: Case Study of the Chinese Market. *Journal of Asian Finance, Economics and Business*, vol. 1, n. 4, 2014.
- Rik Dillingh, Henriette Prast, Mariacristina Rossi, Cesira Urzì Brancati. Who wants to have their home and eat it too? Interest in reverse mortgage in the Netherlands. *Journal of Housing economics*. 2017 Volum 8. 25 – 37.
- Rowlingson, K. (2006) 'Living Poor to Die Rich'? Or 'Spending the Kid's Inheritance'? Attitudes to Assets and Inheritance in Later Life, *Journal of Social Policy*, 35(2), pp. 175-192.
- S. Chatterjee, "Reverse Mortgage Participation in the United States: Evidence from a National Study," *Int. J. Financ. Stud.*, vol. 4, no. 1, p. 5, 2016.
- Superintendencia Financiera de Colombia, (2010). Resolución 1555 de 2010, Julio 30 de 2010, de la Superintendencia Financiera de Colombia.
- Szymanoski, E.J. (1994). Risk and the home equity conversion mortgage. *Real Estate Economics*, 22(2), 347-366.
- Thomas P. Boehm, Michael C. Ehrhardt. Reverse mortgages and interest rate risk. 1994. *Real Estate Economics*. Vol. 22. 387 – 408.



- Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S. (1930). "On the theory of Brownian Motion". *Phys. Rev.* 36: 823–841
- Villalón, J. G. (1994). *Manual de Matemáticas Financiero-Actuariales*. Fernández, Ciudad, S L, Madrid.
- W. Sharpe (1964). Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*. Vol 19. No. 3. pp. 425-442.
- Wang, L., Valdez, E.A., Piggott, J., 2007, Securitization of longevity risk in reverse mortgages, SSRN Working Paper.
- Yang, T.T., Buist, H.I., Megbolugbe, F., 1998. An analysis of ex-ante probability of mortgage prepayment and default. *Real Estate Economics* 26 (4), 651–676.
- Y. C. Heo, S. An, y B. E. Hong, "Reverse Mortgage as an Income Stabilizer for the Elderly in Korea," *Asian Soc. Work Policy Rev.*, vol. 10, no. 1, pp. 103–112, 2016
- Y. Saita, C. Shimizu, y T. Watanabe, "Aging and real estate prices: evidence from Japanese and US regional data," *Int. J. Hous. Mark. Anal.*, 2016.