UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS EN OCTAVO GRADO

AUTORA:

MARICELA VALENCIA MURILLO

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

QUIBDÓ

2020

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS EN OCTAVO GRADO

AUTORA:

MARICELA VALENCIA MURILLO

TRABAJO DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

CON ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRIGIDA POR

Mg. MARTHA IRENE LONDOÑO

Dra. SOLANGE ROA FUENTES

Dr. LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS

QUIBDÓ

FEBRERO

2020

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

AGRADECIMIENTOS

A Dios por sobre todas las cosas, por ser la fuente de vida, mi roca en la cual descansaba en los mejores y peores momentos y por poner a mi lado a las personas idóneas para cumplir con esta meta. Todo en cuanto soy es gracias a Él.

A mi amado hijo Owen el cual se convirtió en fuente de motivación e inspiración para seguir luchando por este sueño, la verdad es que el solo hecho de mirarte me convierto en la mujer más afortunada.

A todos y cada uno de los docentes, que con sus palabras de aliento me animaban a que continuara escribiendo que ya faltaba poco.

A mis padres y hermanos que siempre estuvieron pendiente de todo el proceso con sus oraciones y palabras que me motivaban a continuar adelante. A todos muchas gracias

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

RESUMEN

La investigación de esta Tesis de maestría está centrada en las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos Área y Perímetro de figuras planas, bajo el marco de la teoría APOE. Describe cómo los conceptos matemáticos se pueden construir (aprender) a partir de las estructuras mentales de acción, procesos, objetos y esquema; está a la vez posee su propio ciclo de investigación que está comprendido en tres componentes que son el análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos. La motivación va dirigidas a las dificultades que los estudiantes presentan a la hora de construir estos conceptos, ya que lo ven como un simple algoritmo o la repetición de una fórmula matemática. Con este fin, se diseñó un cuestionario que se aplicó a un grupo heterogéneo de 20 estudiantes con quienes se documentaron los datos recolectados y se analizaron con base al ciclo de investigación de la teoría APOE.

Considerando los antecedentes y el estudio de los aspectos históricos epistemológicos, en investigaciones reportadas, se propone una Descomposición Genética (DG) modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto (Dubinsky, 1991) que permite explicitar aquellas construcciones y mecanismos mentales, que hipotéticamente un estudiante pone de manifiesto, al construir el concepto Área y Perímetro de figuras planas como objeto y así darle viabilidad a la DG. Los resultados obtenidos ponen en manifiesto la posibilidad de construir una concepción objeto de los conceptos a partir del aprendizaje de los estudiantes y a la vez realizar construcciones para llegar a la concepción proceso lo que permite validar la descomposición genética para el objeto de estudio.

PALABRAS CLAVES.

APOE (acción, proceso, objeto y esquema), área, perímetro, estructuras mentales, mecanismos mentales, descomposición genética.

ABSTRACT

The research of this master's thesis is focused on mental structures and mechanisms in the construction of the concepts Area and Perimeter of flat figures, under the framework of APOE theory. Describes how mathematical concepts can be constructed (learned) from mental structures of action, processes, objects and schema; It is at the same time has its own research cycle that is comprised of three components that are theoretical analysis, teaching design and implementation, and observation, analysis and verification of data. The motivation is aimed at the difficulties that students present when building these concepts, since they see it as a simple algorithm or the repetition of a mathematical formula. To this end, a questionnaire was designed that was applied to a heterogeneous group of 20 students with whom the data collected was documented and analyzed based on the APOE theory research cycle.

Considering the background and the study of historical epistemological aspects, in reported investigations, a Genetic Decomposition (DG) cognitive model is proposed through which a student can build a concept (Dubinsky, 1991) that makes it possible to explain those constructions and mental mechanisms, which hypothetically a student shows, by constructing the concept Area and Perimeter of flat figures as an object and to give viability to the DG.

KEYWORDS.

APOE, (action, process, object and scheme) Area, Perimeter, mental structures, mental mechanisms, genetic decomposition.

INTRODUCCIÓN

En las prácticas docentes, se observan ciertas dificultades en los estudiantes para comprender, construir y analizar determinados conceptos matemáticos. En este campo, los estudiantes cometen errores que permanecen durante toda la vida como por ejemplo pensar que para calcular el área y el perímetro de una figura plana solo se puede hacer mediante la aplicación de una fórmula o un algoritmo matemática, los estudiantes no dimensionan la relación de independencia o la falsa idea de equivalencia que todas las figuras planas poseen la misma área y por ende debe tener el mismo perímetro.

Por lo anterior esta investigación apunta al estudio del objeto matemático Área y Perímetro de figuras planas y la construcción que realizan los estudiantes de estos conceptos; por lo que está situada en las estructuras y mecanismos mentales para construir los conceptos área y perímetro de figuras planas en estudiantes del grado octavo con edades que oscilan entre los 13 y 16 años.

El propósito es Analizar las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos del Área y el Perímetro de figuras planas en el grado octavo de la Institución Educativa Ambiental Saulo Sánchez Córdoba del municipio de Riosucio, al implementar una unidad didáctica fundamentada desde la teoría de APOE en la práctica de aula.

Para esta investigación, el foco de indagación estará centrado en la construcción cognitiva de un concepto matemático, por ende, se utilizará la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como marco teórico, que tiene como principio entender cómo se aprende la matemática, observando los fenómenos que ocurren en los alumnos que intentan construir un concepto matemático (Salgado, 2007 citado por Gamboa, 2013, p.7).

En este orden de ideas lo que se pretende es establecer que construcciones y mecanismos mentales requieren expresar los estudiantes para reconstruir el concepto de área y perímetro de figuras planas.

Por otro lado, el pensamiento geométrico es una forma de pensamiento matemático, pero no exclusivo de ella y se basa en el conocimiento de un modelo del espacio físico tridimensional. Este como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, tiene una fuerte base sensoperceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con el medio; se sistematizan y se generalizan a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela; en el cual hay que despertar en los estudiantes tres capacidades para la construcción de los contenidos de la misma, de modo que les sirva a lo largo de su vida. Estas tres capacidades se relacionan a continuación: Vista espacial, representación espacial e imaginación espacial, donde todas se relacionan entre sí, siendo el centro la capacidad de imaginación espacial ya que permite analizar el plano y las relaciones en el espacio.

Para García y López (2008, p. 21) "la geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la geometría es la matemática del espacio".

En el capítulo 1 se encuentran plasmados los elementos que dan origen al problema de investigación evidenciado en las prácticas docentes y los resultados de pruebas estandarizadas. Además, se consideran las investigaciones existentes en relación con el objeto matemático Área y Perímetro de figuras planas lo que ayuda a conocer las dificultades que los estudiantes presentan en relación a dichos conceptos. Por otro lado, lo anterior permite plantear una hipótesis, una pregunta de investigación y por último los objetivos de investigación. Todo esto centrado en la perspectiva de la Teoría APOE.

En el capítulo 2 se expone un estudio del análisis histórico- epistemológico del Área y el Perímetro, teniendo en cuenta que los conceptos de la geometría a diario se manejan, estableciendo líneas entre dos puntos, asociamos distancias y direcciones a los objetos que nos rodean, intuimos tamaños y formas. Con solo mirar cualquier parte del mundo encontraremos ahí aspectos geométricos. Las figuras han jugado un papel fundamental en la historia de las matemáticas; puntos, líneas, cuadrados, círculos, triángulos y demás figura; constituyen la base de la geometría egipcia y griega hasta el punto de que sus propiedades hasta hoy se siguen estudiando, aplicando y admirando.

En el Capítulo 3 se explica el Marco Teórico que apoya esta investigación como es la teoría APOE esta nos conduce a una aproximación teórica que describe cómo los conceptos matemáticos se pueden construir (aprender) a partir de las estructuras mentales de acción, procesos, objetos y esquema, teniendo en cuenta que es una teoría cognitiva creada por Dubinsky asociada a la epistemología genética de Piaget, cuyo fin es establecer un modelo teórico, Descomposición Genética, en relación a las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir un concepto en la que se especifica la metodología propia de investigación en la teoría APOE y la forma que tiene de llegar al aula mediante el ciclo ACE.

En el capítulo 4 se define el diseño metodológico de la investigación, se apoya en la teoría APOE como ya se había planteado en el capítulo anterior. En este diseño se distinguen tres componentes fundamentales que conforman el Ciclo de Investigación: Análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos y el Análisis y verificación de datos. El desarrollo de estas componentes guía la ejecución de esta investigación.

En el análisis teórico encontramos las estructuras previas necesarias para la construcción del nuevo concepto y la Descomposición Genética preliminar. En el desarrollo de la segunda y tercera componente, se proponen el diseño y aplicación de instrumentos que permite dar pasó a la construcción de una descomposición genética valida que es presentada en el capítulo de conclusiones.

En el capítulo 5 se muestra el análisis de los datos que fueron recogidos por medio del cuestionario, y su contrastación con al análisis a priori de éste, teniendo como base la Descomposición Genética hipotética. Se mostrarán las respuestas por estudiantes donde se evidencian las construcciones mentales de la DG; al igual que la de quienes no lograron la construcción si los hay.

El Capítulo 6 corresponde a las conclusiones con base al análisis realizado en el capítulo 5. Aquí se darán los lineamientos que muestran la refinación de la Descomposición Genética, sobre las sugerencias didácticas para el trabajo en el aula con los conceptos de área y perímetro y se expondrá una propuesta con base al concepto de Esquema que posee la teoría APOE.

Índice

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los elementos que dan origen al problema de investigación evidenciado en las prácticas docentes y los resultados de pruebas estandarizadas aplicadas en educación básica secundaria en Colombia. Además, se consideran algunas investigaciones existentes en relación al objeto matemático Área y Perímetro de figuras planas lo que ayuda a conocer las dificultades que los estudiantes presentan en relación a dichos conceptos. Todo esto permite plantear una hipótesis, una pregunta de investigación y por último los objetivos de investigación.

1. PROBLEMÁTICA

Esta investigación, considera que la actividad matemática que se genera en las prácticas de aula, deben estar centradas en el estudiante. El profesor se concibe como un facilitador de dicha actividad, a partir del diseño de tareas y análisis de estas. En este sentido la resolución y el planteamiento de problemas, por ejemplo, toma un rol fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Santos - Trigo, 2008).

Durante reuniones **periódicas** con la tutora del Programa Todos Aprender del Ministerio de Educación Nacional, para compartir experiencias de matemáticas entre primaria y bachillerato se puso de manifiesto que los estudiantes presentaban dificultades al resolver problemas de geometría relacionados con conceptos como: área, superficie, perímetro, medida, entre otros). Se percibe que estos problemas se asocian al desarrollo del lenguaje matemático y la falta de estrategias para llevar a la práctica pedagógica de las temáticas. De allí que se considere necesario replantear la forma como se enseña la geometría en las aulas de clases, ya que se está impartiendo de un modo mecánico y operativo donde no se construyen saberes sólidos que motive a los estudiantes a indagar e ir más allá de una simple fórmula matemática, sin permitir que se despierte el interés de los mismos para construir sus propios conceptos, lo que es fundamental para el desarrollo del pensamiento, los cuales permite a los estudiantes desenvolverse en cualquier situación de la vida cotidiana donde requieran la aplicabilidad de los conceptos.

Las competencias frente a los conceptos de Área y Perímetro se tornan importantes al trascender las aulas de clase y extenderse a lo largo de la vida del ser humano. En el aula es posible percibir que los educandos confunden la relación de independencia entre el área y el perímetro de figuras planas, es decir, manifiestan que el área siempre es igual al perímetro de una figura o superficie por ejemplo si el área de un triángulo es igual a $25u^2$ su perímetro también es igual a $25u$; inicialmente puede decirse que esta se presenta por la reducción de los conceptos a una simple expresión numérica o fórmula.

En este sentido Corberan (1996) asegura que:

> Está constatado que una de las confusiones más frecuente entre los estudiantes y más difícil de erradicar es la falsa relación que estos establecen entre el área y el perímetro de una superficie. Esta errónea ligazón entre el

área y el perímetro les conduce en numerosas ocasiones a emitir conclusiones falsas. (Corberan, 1996, p.8)

En este orden de ideas cuando se presenta un ejercicio a los estudiantes en donde tienen que emplear alguna fórmula del área o del perímetro no logran reflexionar y mucho menos pueden determinar qué fórmula utilizar para su desarrollo, piensan que para todas las figuras geométricas se emplea la misma fórmula.

González (2014) manifestó que hay evidencia que dejan al descubierto la poca comprensión de los estudiantes, en especial en lo relacionado con las características bidimensional del área. Por ejemplo, cuando se pregunta a los estudiantes por una determinada fórmula, para determinar el Área del círculo, dan sin mayor problema una expresión que nunca podría corresponder a una magnitud bidimensional; los estudiantes escriben expresiones como: $A = 2\pi \mathrm{r}$, $A = \pi \mathrm{r}$ o $A = 2\pi r^3$. En el caso del triángulo, dadas las tres longitudes de los lados Corberan (1996) muestra que los estudiantes multiplican los tres valores para calcular el Área.

Con este tipo de situaciones se confirma que el discurso matemático tradicional no propicia una reflexión consiente de profesores y estudiantes sobre el carácter dimensional de la medida de una superficie o de una longitud.

Por otro lado, Guzmán (2007, p 8) plantea:

La medición de perímetros y áreas tiene mucho que ver con objetos reales partiendo desde la misma casa del niño. La ventana de su casa, el árbol del patio, así como las actividades de trabajo diario. Creo que lo importante aquí es que los contenidos se relacionen con la vida diaria o con diversas situaciones con las que el educando se encuentra.

Desde este punto de vista se puede decir que es evidente que en el discurso escolar se deben involucrar material concreto, que los estudiantes puedan manipular y encontrar en su diario vivir; también como docentes plantear situaciones donde ellos se vean obligados a recurrir a estos, ya que puede conducir al estudiante a aprender para el desenvolvimiento en la vida cotidiana.

También se puede evidenciar que en algunos libros o textos de matemática escolar, como los conceptos de Área y Perímetro son reducidos a simples algoritmo o fórmulas, dando las expresiones generales de cada una de ellas; como por ejemplo para calcular el perímetro de un cuadrado de lado a se da la formula $P = a + a + a + a$ o para calcular el área del paralelogramo $A = b\ x\ a$ (base por altura). Quitándoles a los estudiantes la capacidad de pensar, crear y construir su propio concepto, que resultaría lo más apropiado para desarrollar sus potencialidades.

Lo anterior se hace necesario implementar una estrategia didáctica donde las actividades diarias de los estudiantes, puedan ser aprovechadas para la comprensión de los conceptos de área y perímetro de figuras planas. De tal manera que puedan ser un punto de partida para demostrar que los conceptos de área y perímetro pueden ser la base de contextos para potenciar la construcción de conceptos matemáticos más avanzados; por ejemplo, sobre patrones de medida.

2. ANTECEDENTES

Desde la teoría APOE no se encuentran antecedentes que hagan referencia a la relación entre los conceptos de Área y Perímetro. Pero es relevante destacar el trabajo realizado por Cartagena, Días y Hernández (2018) sobre la comprensión de los conceptos área, perímetro y volumen mediante estrategias no convencionales y su relación con el contexto, utilizando como marco teórico la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren. Las autoras plantean una serie de actividades donde los estudiantes deben calcular el área, el perímetro y el volumen: ver figura 1

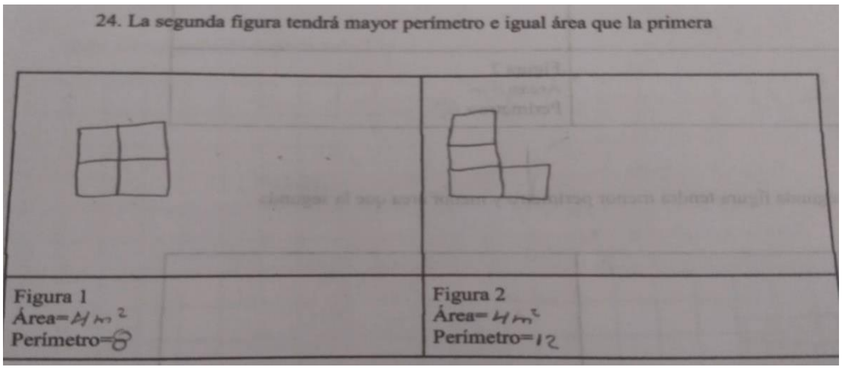


Figura 1. Respuesta de un estudiante respecto a la actividad planteada. Cartagena, Díaz y Hernández (2018)

Teniendo en cuenta que el objetivo planteado fue: consolidar una estrategia que permita el avance en la comprensión de los conceptos área, perímetro y volumen en los estudiantes del grado sexto, a la conclusión que llegaron en esta investigación es la de implementar en las practicas docente el uso de material concreto, que a los estudiantes se les enseñe estos conceptos mediante la manipulación de objetos, figuras armables, juegos y la interacción con sus compañeros y el contacto con su entorno; lo que va a permitir que los estudiantes logren un avance significativo en el aula al momento de comprender estos conceptos.

Por otro lado, el trabajo de Gutiérrez y Parraguez (2017) sobre el triángulo de Sierpinski. Las autoras allí exponen el Área y el Perímetro de dicha curva fractal a partir de calcular de forma iterativa, el área y el perímetro de curvas que preceden el triángulo de Sierpinski. Un ejemplo de este trabajo es mirar las variaciones de área y perímetro en la sucesión de triángulos que se obtiene, si el lado del triángulo inicial mide 10 cm. A continuación, en la figura 2 se muestra las diferentes interacciones o modificaciones que se le debe hacer a un triángulo para lograr el objetivo.

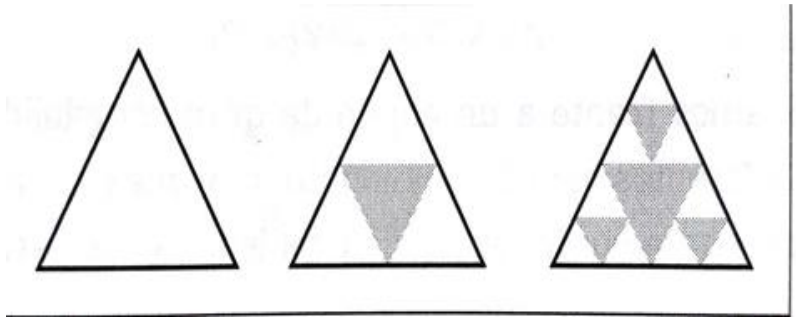


Figura 2, modificaciones que sufre un triángulo con las diferentes iteraciones; tomado de Gutiérrez y Parraguez (2017 p. 29)

Para este caso se presenta un triángulo equilátero original el cual se modifica utilizando deferentes iteraciones, donde se encuentran los puntos medios de cada segmento y mediante líneas se unen los puntos para obtener otro triángulo equilátero inmerso del original, de la misma forma trazamos los puntos medios del triángulo resultante y que al unirlos resulten tres triángulos congruentes entre sí.

Como puede verse Gutiérrez y Parraguez (2017) presentan un acercamiento didáctico sobre cómo se puede en nivel básico desarrollar la noción de Área y Perímetro de curvas fractales. En este sentido la presencia de material en la práctica docente, así como la construcción de matemáticas no tradicionales en el currículo escolar, representan un insumo para el profesor investigador que busca potenciar la construcción de pensamiento matemático en sus estudiantes.

Respecto al uso de material concreto en el aula, Aldana y López (2016), se apoyan en las Situaciones Didácticas de Brousseau, utilizan como estrategia didáctica el Pentaminó para enseñar los conceptos de área y perímetros a estudiantes con diversos problemas cognitivos; en especial los que presentan Síndrome de Down. Esta práctica consiste en presentar a los estudiantes diferentes figuras para que establezcan relaciones de forma y tamaño.

Aldana y López (2016) muestran que los estudiantes presentan dificultades al momento de relacionar los conceptos de área y perímetro cuando realizan mediciones de contornos y superficies. Los autores proponen que esto sucede porque no dan sentido a los valores de las longitudes que aparecen en los lados de las figuras, ni logran reconocer e identificar las medidas de área y perímetro en figuras planas.

> Este problema surge de las condiciones y reglas presentes al tomar medidas variantes y no logran asociar las longitudes de los lados y la forma de la figura, con las características que expresan el perímetro o el área. En el aspecto cognitivo se analizan las concepciones, dificultades y obstáculos que se presentan en la comprensión del objeto matemático; para ello, debemos

> considerar algunos aspectos que se estructuran en la geometría, como el conocimiento de las figuras planas, las características y propiedades que son los elementos trabajados en esta área disciplinar. (Aldana y López, 2016, p. 23)

Aldana y López (2016.p 24) muestran una de las practicas que realizaron en el aula (ver figura 2); en las construcciones que los estudiantes realizan para formar el concepto de área y perímetro se evidencia que poseen conceptos básicos reconociendo lo que es el contorno y entorno de una figura plana. Como puede verse en el ejemplo presentado en la figura 3 se muestra la respuesta de un estudiante en cuanto al conteo y el reconocimiento espacial como: forma, tamaño, región interna y externa, fue fundamental en el desarrollo de la investigación.

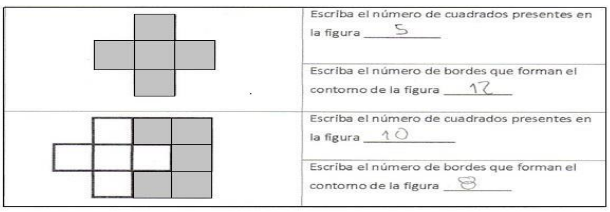


Figura 3, respuesta de un estudiante; Aldana y López (2016 p.24)

Lo anterior demuestra que es importante utilizar material concreto para las prácticas de aula, de manera que los educandos interactúen y manipulen al momento de dar una respuesta a las preguntas planteadas.

Los autores concluyen que la utilización del Pentaminó como estrategia didáctica propicia el proceso de aprendizaje de nociones básicas de la geometría que sustentan la construcción de conceptos más avanzados. Para ellos es claro que la utilización de material concreto en el aula permite que los estudiantes puedan alcanzar una buena comprensión de los conceptos matemáticos.

De igual forma González (2014) aborda los conceptos de área y perímetro desde una perspectiva de uso del contexto de los estudiantes, particularmente desarrollando su investigación sobre el cultivo del café. Esto permite que los estudiantes utilicen los conceptos no solo en el aula de clase sino, en diversos contextos de su vida diaria. González (2014) utiliza el modelo de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) como marco conceptual, con un enfoque cualitativo. Partiendo de las dificultades que los estudiantes presentaban para comprender los conceptos de perímetro y área, propone algunas actividades desde el contexto de los estudiantes mediante el cultivo del café. Estas actividades se realizaron basadas en las ideas previas que estos tuvieran del objeto de estudio y la forma como ellos comprendían estos conceptos que es lo que busca la teoría.

Algunas de las actividades se pueden observar en la figura 3 cómo los estudiantes realizan los procesos para calcular áreas y perímetros de figuras construidas mediante mediciones en los terrenos donde se cultiva el café y por la forma de los terrenos.

Figura 4, en la actividad igual perímetro diferentes áreas en la almaciguera. González (2014, p.9)

Esta práctica conlleva a que sean los mismos estudiantes quienes manipulan los implementos que deben utilizar en la medición y ubicación para calcular el Área y el Perímetro de la figura encontrada en los cultivos.

Teniendo en cuenta que el objetivo para llevar a cabo esta investigación fue: “analizar el proceso de comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café” Gonzales (2014.p.13) se puede decir que se cumplió en su totalidad ya que los estudiantes lograron comprender mediante las actividades los conceptos.

Lo expuesto por González (2014) permite que los estudiantes aprendan estos conceptos de una manera contextual para luego llevarlo a las prácticas de aula. Lo que les permite a estos comprender mejor el objeto de estudio y teniendo en cuenta que nuestros educandos son los constructores de su propio conocimiento se puede evidenciar que se aprende mejor haciendo y no de la forma mecánica que algunos docentes imparten en el salón de clase.

Por su parte Rondan y Rendón (2014) utilizaron como marco conceptual Socio Critico expuesto en la escuela de Frankfurt, el cual busca trasformar el estilo de aprendizaje en los estudiantes, ya que se basa en las experiencias y reflexiones lo que hace que los estudiantes generen una conciencia crítica y reflexiva. Los autores destacan que la geometría hay que enseñarla desde la observación de lo que hay al alrededor o en el entorno de los estudiantes. Desarrollaron su investigación desde un enfoque cualitativo que permite evidenciar situaciones de aplicación matemática en el contexto de los estudiantes. Como objetivo se plantearon “establecer una estrategia que promueva el estudio de los conceptos de área y perímetro de figuras planas articulada desde el modelo socio crítico” Rendón y Rondan (2014.p.26). Teniendo como base a Fandiño &

D´Amore (2009 citado por Rendón y Ronda 2014, p. 55); quienes afirman "en la estrategia propuesta es de vital importancia que se generen espacios de opinión, crítica y concertación, como lo propone el modelo socio crítico" Fandiño & D´Amore (2009.p.14), es importante que el estudiante sea el protagonista en la construcción de su conocimiento, de tal forma se deben enseñar estos conceptos aplicados a la realidad del estudiante basándose en el contexto que vive cada uno de ellos promoviendo el trabajo colaborativo. A continuación, se observa como fue el proceso del trabajo con los estudiantes en la construcción de estos conceptos: (ver figuras 5)

Figura 5 Trabajo de campo, actividades de medición y registro de medidas.

2 Grupos de Discusión, promueven el trabajo cooperativo y colaborativo

Figura 5. Actividades de medición, registro de medida, trabajo cooperativo y colaborativo

Lo expuesto por Rendón y Rondan (2014) pone de manifiesto lo importante que es utilizar el entorno de los estudiantes para la enseñanza de las matemáticas en este caso los conceptos de área y perímetros de figuras planas ya que se construyen saberes solidados porque ellos interactúan diariamente con su entorno.

Arenas (2012), Sustenta su investigación en el marco teórico el modelo sociocultural de Vigotsky y la teoría psicológica de David Ausubel, tiene un enfoque descriptivo-cualitativo ya que no está limitada a la recolección de datos y reconoce las situaciones, costumbre y actitudes predominantes. El objetivo que se propuso fue; "diseñar e implementar una estrategia didáctica en los estudiantes del grado sexto aplicado en la enseñanza de la geometría en la temática de área y perímetro en figuras planas, con el uso de herramientas TIC, con la plataforma Leaming Management System (moodle) y material concreto tangram" Arena (2012.p.6). Con el desarrollo de esta estrategia ver figura 4 en la construcción del tangram para calcular áreas y perímetros, permitió que los estudiantes frente a las temáticas de áreas y perímetros en figuras planas superaran sus dificultades para interpretación del mundo desde la geometría y a partir de esta crear un espacio basado en el respeto y la participación que fomente el auto aprendizaje colaborando desde diversas situaciones problema. Se muestra a continuación a los estudiantes en la construcción del tangram para la medición del área y el perímetro. (ver figura 6)

Figura 6, Estudiantes en la construcción del tangram para medir áreas y perímetros, (Arenas 2012.p.20)

Por todo lo anterior es claro que la geometría juega un papel fundamental en la vida del educando y por tal razón se deben implementar estrategias donde se les de participación activa para que comprendan los conceptos como lo son el del Área y el Perímetro de figuras planas. Con la elaboración de una unidad didáctica para comprender estos conceptos, será de gran ayuda en las prácticas docentes y el rendimiento académico de los educandos ya que le permitirá visualizar, manipular y sobre todo participar activamente en la apropiación del conocimiento, potenciando en ellos el desarrollo del pensamiento geométrico métrico y la construcción de valores.

En el capítulo 3 se expone, que la investigación se enfocara en la teoría APOE la cual le aporta herramientas que facilita la comprensión y construcción del concepto de Área y Perímetro de figuras planas en los estudiantes; ya que esta permite que los estudiantes construyan acciones, procesos y objetos para luego organizarlos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas de su contexto social. De igual manera esta propende por el diseño de una unidad didáctica que para Sanmarti, (2000) es el conjunto de actividades estructuradas y articuladas en torno a unos ejes articuladores para lograr objetivos establecidos.

3. HIPÓTESIS

Esta investigación propone estudiar desde la teoría APOE la implementación y el desarrollo de una unidad didáctica relacionada con el Área y el Perímetros de figuras planas entendiendo este desde la complejidad de las interpretaciones.

4. PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos de Área y el Perímetro de figuras planas en el grado octavo, al implementar una unidad didáctica fundamentada en la teoría de APOE para el desarrollo de competencias matemáticas?

5. OBJETIVO GENERAL

Analizar las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos de Área y el Perímetro de figuras planas en el grado octavo, al implementar una unidad didáctica fundamentada desde la teoría de APOE en las prácticas de aula.

6. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Describir las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos de área y perímetro de figuras planas.

- Implementar actividades de aulas para estudiantes del grado octavo que propicien el razonamiento y argumentación en la práctica de área y perímetro de figuras planas.

- Contribuir al mejoramiento del componente métrico espacial mediante la implementación y validación de una unidad didáctica.

- Diseñar una unidad didáctica para la construcción de mecanismos mentales de los conceptos de área y perímetro de figuras planas fundamentadas en la teoría de APOE.

1.7 DISCUSIONES DEL CAPITULO

Muchas son las investigaciones relacionadas con el objeto de estudio, ya que es una problemática que se debe abordar desde las experiencias de los estudiantes y con la utilización de material concreto. Todos los investigadores coinciden que existen dificultades relacionadas con los conceptos de área y perímetro, pero que también se hace necesario implementar en las prácticas de aula objetos que puedan ser utilizados en los salones clase. Con la utilización de la teoría APOE como marco teórico puede ser una herramienta útil, ya que se convierte en un elemento fundamental en los estudiantes, brindándoles bases solidadas en su aprendizaje, por lo que el conocimiento lo generaran ellos con sus construcciones y representaciones de su contexto; con la elaboración de la unidad didáctica como herramienta metodológica para la enseñanza de los conceptos de área y perímetro se podrá mejorar las prácticas de aula y así lograr una comprensión de los conceptos matemáticos.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO-DEL ÁREA Y EL PERÍMETRO

En este segundo capítulo se expone un estudio epistemológico de los conceptos de Área y Perímetro, teniendo en cuenta que los elementos de la geometría tienen un carácter cotidiano, estableciendo líneas entre dos puntos, asociando distancias y direcciones entre los objetos que tenemos alrededor, percibimos tamaños y formas a los sucesos de la naturaleza. Si se mira alguna parte del mundo se encuentran aspectos geométricos, las figuras han jugado un papel fundamental en la historia de las matemáticas; puntos, líneas, cuadrados, círculos, triángulos y demás figura, constituyen la base de la geometría egipcio y griega hasta el punto de que sus propiedades hasta hoy se siguen estudiando, aplicando y admirando.

2.1 HISTORIA DEL ÁREA Y EL PERÍMETRO.

Las civilizaciones antiguas que se dedicaban generalmente a la agricultura se vieron enfrentados en los problemas del almacenamiento de alimentos recolectados de las cosechas, lo que trajo consigo la fabricación de bodegas excavadas en la tierra y forradas con materiales encontrados en esa época (paja y esteras). Cuando ya habían resuelto el problema del almacenamiento, se generó un problema más que fue el de determinar la cantidad de alimentos almacenados en las bodegas (Álvarez 2015, p. 33).

Para Heródoto el área y el perímetro tienen sus orígenes en el antiguo Egipto hacia los años 3000 a.C, ya que era una necesidad por las crecidas anuales del rio Nilo, lo que acarreaba medir los campos después que bajaba la inundación y esto los obligaba a calcular áreas para saber la cantidad de tierra que poseían y medir perímetros de cada parcela agrícola para restablecer sus linderos Álvarez (2015). Se nota el dominó que ellos poseían de estos conceptos, por lo que cada propietario de terreno medía la cantidad de tierra que tenía, porque de esto dependía el pago del impuesto.

En este orden de ideas "los egipcios conocían y usaban la regla: la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro" Ortiz (2005 p.39). Los papiros de Moscú y de Rhind contienen 26 problemas geométricos que hacen referencia a fórmulas de medición que son necesarias para evaluar áreas de figuras planas, Ortiz (2005) en su investigación escribe el problema 51 sobre el área del triángulo del papiro de Rhind

> ¿Cuál es el área de un triángulo de 10 khet de *myrt* (altura) y 4 khet de base? La figura que se presenta en el papiro es la de un triángulo rectángulo donde la altura coincide con la longitud de uno de los catetos. (Ortiz 2005 p. 39) (ver figura 7)

Figura 7. Demostraciones del cálculo de área en los papiros tomada de Ortiz (2005.p.40)

De acuerdo a lo manifestado por Ortiz (2005) ellos poseían ciertos conocimientos relacionados con el área y el perímetro ya que tenían fórmulas y podían calcular el área de un triángulo, la de un círculo, la de un cuadrilátero. Cabe anotar que estos lo hacían de una manera rudimentaria ya que era por la necesidad cultivar sus parcelas, por lo que les tocaba medir y cercar sus tierras para saber qué cantidad de fertilizante utilizar en sus siembras. Por esta razón no se puede desconocer que estos hallazgos dieron la base para que hoy se disfrute de los conceptos matemáticos más amplios y actualizados que se pueden tener. Ortiz (2005)

En el mismo orden la civilización babilónica disfrutaba de un conocimiento amplio de los conceptos de área y perímetro, los cuales utilizaban para las mediciones y el empleo de fórmulas para calcular áreas de triángulos y de trapezoide Ortiz (2005). Esta cultura también jugó un papel importante a la hora de aportar sus conocimientos para el cálculo de sus medidas por lo que Ortiz (2005) plantea:

> Está aún en la etapa de un conjunto de reglas para efectuar medidas prácticas; así, entre los años 2000 a 1600 A.C. ya les era familiar algunas reglas generales para calcular: el área de un rectángulo, de un triángulo rectángulo, de un triángulo isósceles; el área de un trapezoide teniendo un lado perpendicular a los lados paralelos; el volumen de un paralelepípedo rectangular. (Ortiz 2005 p.21)

Reconocían que la circunferencia de un círculo era tres veces su diámetro, además sabían qué formula emplear para calcular el área del círculo la cual era: $A = C^2/12$, donde c era la longitud de la circunferencia. Álvarez (2015) Lo que demuestra los conocimientos geométricos sobre áreas y perímetros y los aportes que le pudieron dar a las definiciones que hoy se perciben,

Durante esa época todas las civilizaciones se preocupaban y trabajaban para encontrarle solución a los problemas matemáticos inmediatos, pero fueron los griegos en cabeza de Thales de Mileto (640-546 a.C) quienes aprovecharon esta situación y más adelante recopilaron toda la información.

> recolectaron y organizaron todos los conocimientos geométricos que había en cada parte del mundo de tal modo que cualquier afirmación que se hiciera pudiera demostrarse a partir de otras proposiciones ya demostradas o de unas básicas que se admitían como verdaderas. (Ortiz 2005 p 21).

Es relevante destacar algunos matemáticos griegos que dieron valiosos aportes a la geometría para que hoy la podamos entender como el espacio **atreves** del cual un estudiante piensa, construye y organiza objetos bidimensionales y tridimensionales. Entre estos tenemos a Thales de Mileto y Pitágoras (siglo VI a. C.), Eudoxio (siglo IV a. C) y Euclides (siglo III a. C). Ellos se dedicaron a la geometría por el placer intelectual que les ofrecía; siendo Euclides quien más reconocimiento logró por el impacto que tuvieron los 13 libros que recopiló de su obra llamados los Elementos.

2.2 COMO LLEGABAN AL ÁREA DEL TRIÁNGULO

Las civilizaciones antiguas tenían diferentes formas para llegar a establecer el Área de un triángulo, por lo que recurrían a distintas fórmulas matemáticas, como se dijo anteriormente el problema 51 del papiro de Rhind, que se trataba de producir el área de un triángulo de tierra, el cual está planteado de la siguiente manera: ¿Cuál es el área de un triángulo de 10 khet de *myrt* (altura) y 4 khet de base? Pues su resolución consistía en tomar la mitad de la base para, según afirma el papiro, "completar el rectángulo" de manera que al multiplicar por la altura mencionada se obtenga el resultado. Lo que demuestra el alto contenido del conocimiento del objeto matemático que presentaban las antiguas civilizaciones, pero en ocasiones presentaban muchas dificultades para el cálculo de estas ya que **no disponían de un conocimiento empírico y no científico**, tal como lo afirma Ortiz (2005) en su libro. "En general, la geometría no alcanza el nivel de una ciencia organizada (lo que se alcanzaría en Grecia, varios siglos después); ella está orientada a medir figuras planas (motivadas por necesidades prácticas); algunas pocas mediciones tratan sobre sólidos." Ortiz (2005 p.22)

Para finalizar en el siglo XVII y con el desarrollo de la geometría, en lo que tiene que ver con los conceptos del Área y el Perímetro, matemático como Arquímedes tomo como base el XII libro de los elementos de Euclides logro demostrar que la constante que aparece en este caso también tiene que ver con el hoy llamado número pi y para ello utilizo algunos postulados donde involucra áreas de figuras planas. Ortiz (2005) en base a esto lo primero que hizo fue demostrar los siguientes postulados:

PROPOSICIÓN: El área de un polígono regular es $(P * a)/2$, donde P representa el perímetro y a la apotema del polígono Ortiz (2005) .

La demostración que hizo es la que todos conocemos actualmente, mediante descomposición del polígono en triángulos congruentes.

A partir de este resultado preliminar consigue demostrar otro mucho más importante.

PROPOSICIÓN: El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo Ortiz (2005).

Demostración: en la figura 8 se puede analizar cada demostración.

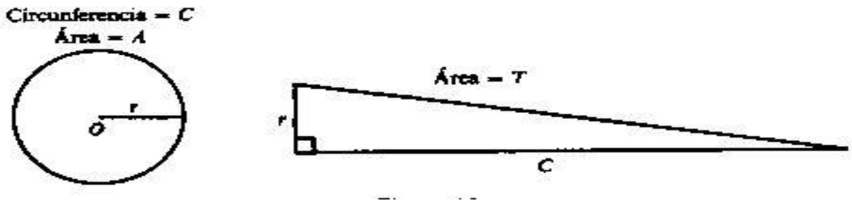


Figura 8. Demostración de la proposición

Es imprescindible no contar con los hallazgos de las civilizaciones antiguas ya que ellas nos aportan el conocimiento necesario para indagar sobre el objeto matemático que hoy se pretende estudiar e indagar, el área y el perímetro conlleva a una búsqueda exhaustiva para poder comprender el antes y el después del pensamiento humano. Por lo que se hace fundamental en la vida de los estudiantes y las prácticas de aula permitiendo en ellos la construcción de su propio conocimiento teniendo en cuento su contexto.

Todos los objetos tienen magnitudes medibles entre las que están la longitud (que tan largo es) y la superficie (que tanta área lo cubre), la toma de medidas es una actividad que se realiza constantemente en la vida diaria, aunque hoy en día los científicos han perfeccionado y desarrollado nuevas formas, técnicas e instrumentos para medir, que permiten al ser humano tener precisión de lo que ocurre en el mundo. Estas precisiones son específicamente las que ocurren en los levantamientos topográficos donde les toca determinar el área de parcelas con distintas formas cuadradas, rectangulares, triangulares, entre otras; existen diferentes métodos para la medición entre estos están los gráficos en los que se hace una comparación entre el plano que se necesite medir y un patrón de área conocido y los métodos geométricos en los que se usan fórmulas matemáticas para calcular áreas de figuras regulares. Como por ejemplo el planímetro que es utilizado para medir áreas de regiones planas representadas gráficamente, donde para determinarla toca recorrer el perímetro del área a medir.

2.4 DISCUSIONES DEL CAPÍTULO

Desde hace muchos tiempos el hombre se ha enfrentado a muchas dificultades que lo han obligado a encontrarle solución a sus inmensas ideas que representaba en la mente. El área y el perímetro no fueron una **acepción**, les toco trabajar arduamente y mancomunado en la medición de sus terrenos para así pagar lo justo por sus parcelas, en la construcción de hoyos en la tierra para el almacenamiento de sus alimentos. Entender estos conceptos, no fue una tarea fácil, grandes matemáticos con su sabiduría e interés lograron comprender y analizar estos temas para brindar al mundo mejores oportunidades trabajaron día a día hasta comprender estos conceptos y transformarlos en lo que hoy se disfruta (formulas, conceptos, **preposiciones** entre otras). La civilización egipcia, según algunos papiros fue el pilar de estos conceptos debido a las inundaciones constantes que sufría el río Nilo, ya que arrasaba con los cultivos y los dueños de estos cuando secaba debían medir la cantidad de tierra que les quedaba o en ocasiones que cantidad de tierra ganaban para así pagar sus impuestos.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

En el Capítulo 3 se explica el Marco Teórico que apoyará esta investigación como es la teoría APOE esta nos conduce a una aproximación teórica que describe cómo los conceptos matemáticos se pueden construir (aprender) a partir de las estructuras mentales de acción, procesos, objetos y esquema, teniendo en cuenta que es una teoría cognitiva creada por Dubinsky asociada a la epistemología genética de Piaget, cuyo fin es establecer un modelo teórico, Descomposición Genética, en relación a las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir un concepto en la que se especifica la metodología propia de investigación de APOE y la forma que tiene de llegar al aula mediante el ciclo ACE.

3.1 ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES

Para la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibido por un individuo como externa, cuando esta es interiorizada se convierte en proceso y cuando este puede reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un proceso y realiza transformaciones es porque ya piensa en este proceso como un objeto. Esta teoría fue introducida por Piaget para describir el desarrollo lógico en los niños, y extendido a nociones de matemáticas superiores (Dubinsky, 1991), APOE, con base en la abstracción reflexiva piagetiana hace una descripción de cómo los individuos realizan ciertas construcciones mentales (acciones y procesos) sobre un concepto matemático.

> La teoría APOE es una teoría de aprendizaje constructivista que extiende las ideas de Piaget sobre la teoría de abstracción reflexiva, al análisis cognitivo de conceptos matemáticos que son estudiados en un nivel escolar superior (Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic, 2008). Dubinsky et al. (2008) resaltan: "Piaget señaló una cercana relación entre la naturaleza matemática de los conceptos y su desarrollo en la mente de un individuo. Por tanto, el análisis basado en la teoría APOE es a la vez epistemológico y psicológico" (p.100). La teoría APOE da cuenta de las estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y de los mecanismos mediante los cuales éstas se logran (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización) cuando un individuo construye su conocimiento matemático al intentar solucionar situaciones matemáticas (Roa 2012, p. 15).

Por lo que esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática, teniendo en cuenta esta perspectiva el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras que son motivadas por mecanismos mentales desarrollados por el individuo.

Desde esta idea (Dubinsky 1991) se puede decir que esta teoría ha demostrado ser apropiada para describir las construcciones mentales que realizan los estudiantes de varios conceptos matemáticos; en especial la comprensión y el cómo estos estructuran el concepto de área y perímetro dentro y fuera del aula, por lo que resulta una teoría eficaz en la practicas docentes ya que permite que el propio estudiante sea quien vaya construyendo su propio concepto del objeto matemático representado desde su realidad o contexto. Las primeras ideas que se despiertan en la mente del educando forman un papel importante en esta teoría, permitiendo que el estudiante indague más allá de un simple algoritmo o fórmula matemática.

Desde este marco teórico se propone una concepción y el concepto, particularmente McDonald et. al (2000 p.35) menciona que: la distención entre la concepción y el concepto está dada en que la primera es intra-personal (es decir, es la idea que el individuo tiene para comprender) y la segunda es comunal (es decir, un concepto es el resultado de un acuerdo establecido por la comunidad de matemáticos).

En este orden de ideas a continuación, en la figura 9 se describen las diferentes construcciones mentales y sus mecanismos:

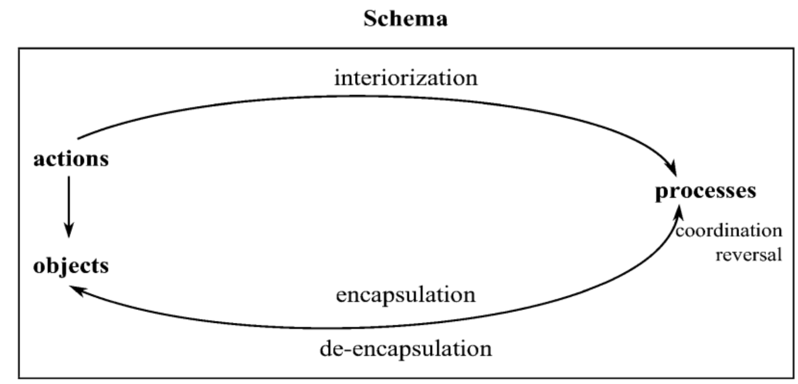


Figura 9. Estructuras Mentales

Por otro lado, la teoría APOE “acciones, procesos, objetos y esquemas”, que son las construcciones mentales, que un sujeto realiza para construir significados a partir de las situaciones problemas de su contexto o en su diario vivir.

En este orden de ideas una ACCIÓN es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo, dicha transformación se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar; cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso.

“Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento.” (Dubinsky, 1996, p. 34).

En cuanto a los conceptos de área y perímetro como objeto de estudio; un estudiante se encuentra en concepción acción cuando es capaz de reconocer los patrones de medidas y los elementos básicos de la geometría. Si responden a las diferentes medidas de los segmentos que debe utilizar para la construcción de una figura plana y puede hacer las diferentes transformaciones se puede decir, que esta ha sido interiorizada para dar paso al proceso.

El PROCESO es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que éste puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos.

> Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso invertir los pasos de 23 la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala et al, 1996 citado por Gamboa 2013 p. 22).

En el caso del Área y el Perímetro el estudiante realiza un proceso cuando reflexiona sobre las medidas de cada segmento y la figura que puede formar uniendo varios de estos; pero esta transformación la hace de una forma interna. Lo que quiere decir que es capaz de crear de una forma imaginaria las uniones de los segmentos y a la vez cuenta cada segmento que necesita para formar dicha figura y la medida de cada uno para hallar su perímetro.

> Los OBJETOS se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, es decir, es el espacio donde el aprendiz reflexiona que se utilizan en un proceso. Entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, el proceso se ha encapsulado en un objeto. (Gamboa,2013, p. 23).

Una vez construidos, objetos y procesos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados ligándolos mediante una composición u otras formas; procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos.

Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar esquemas. (Asiala, 1996; Dubinsky, 1996). Los mecanismos mentales que permiten hacer estas construcciones son las abstracciones reflexivas (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión).

Para este caso los estudiantes o un individuo tienen una concepción objeto del Área y el Perímetro cuando van más allá de la construcción de la figura geométrica siendo capaces de hallar su área y su perímetro utilizando diferentes patrones de referencia, como por ejemplo cuando necesitan encontrar el área del circulo y para ellos utilizan triángulos y cuadrados sobre él.

ESQUEMAS: es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se asumen como la interacción de los mecanismos, caracterizados por ser dinámicos y por permitir una reconstrucción continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las prácticas de aula con relación a la matemática escolar.

> La coherencia de un esquema está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (objeto) y / o se utilizan como una estructura dinámica que asimila otros objetos relacionados o esquemas. (Arnon et al., 2014, p.25).

> El esquema está siempre en evolución, y puede llegar a considerarse como un nuevo objeto, al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Tematizar es una manera para la construcción de objetos, alternativa a la encapsulación de procesos –por tanto, puede hacer luego acciones sobre el esquema. (Mena, 2011, p.81)

De acuerdo con lo planteado por Arnon y demás, un estudiante tiene una concepción esquema cuando es capaz de utilizar el concepto de Área y Perímetro para determinar otros conceptos matemáticos que permiten avanzar en la construcción de nuevos objetos.

Dubinsky (1996) plantea cinco tipos de mecanismos de abstracción reflexiva que le permiten al individuo construir de una manera eficaz los conceptos matemáticos, en este caso el de Área y Perímetro en figuras planas como son: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión. Los cuales se encargan de generar las construcciones mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; de donde se origina el nombre a la teoría (APOE). (**Gamboa** 2013)

INTERIORIZACIÓN: Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así, mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso. (Gamboa 2013.p.26).

En cuanto al objeto matemático Área y Perímetro se puede decir que un estudiante se encuentra en el mecanismo de interiorización cuando se le pide que calcule distancias entre dos puntos, identifica los diferentes tipos de polígonos e identifica los elementos que componen una figura y además realiza cálculos con las operaciones con los números naturales y fraccionarios.

COORDINACIÓN: para Gamboa (2013) la coordinación viene dada por:

> Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo, dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos (Gamboa 2013, p.27)

Un estudiante está en coordinación con el objeto matemático, cuando clasifica los polígonos, identifica las unidades de longitud y de áreas, calcula perímetros de figuras planas

ENCAPSULACIÓN: "Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática)" (Gamboa 2013, p.27)
La encapsulación llega cuando el estudiante puede medir o estimar diferentes magnitudes, resuelve situaciones que requieren el cálculo de Áreas y Perímetros de figuras planas y puede realizar conversiones de medidas.

GENERALIZACIÓN: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo, los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos. (Gamboa 2013, p.27)

REVERSIÓN: Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Consiste básicamente en pensar un proceso a la inversa, no necesariamente en el sentido de deshacer, pero si como medio de la construcción de un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original. (Gamboa 2013.p.27)

"Se considera que el mecanismo de encapsulación es el más importante para la construcción del conocimiento matemático, pero, también, que es el más difícil de lograr: puede dilatarse mucho o incluso no ocurrir" (Mena, 2011, citado por Gamboa 2013 p.81).

Lo que conduce a decir que las construcciones mentales desde APOE se pueden ver de dos formas. En un primer lugar están las accione**s**, las cuales son interiorizadas en procesos, estos procesos son coordinados con otros procesos y se encapsulan en un objeto; en segundo lugar está la desencapsulación de objetos; cuando un objeto se desencapsula es porque el proceso lo ha generado, de esta manera dicho proceso se puede coordinar con otros procesos (los cuales pueden haber sido generado por interiorización o desencapsulación)

3.2 CICLO DE INVESTIGACIÓN.

Esta teoría posee su propio ciclo de investigación que está comprendido en tres componentes que son el análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

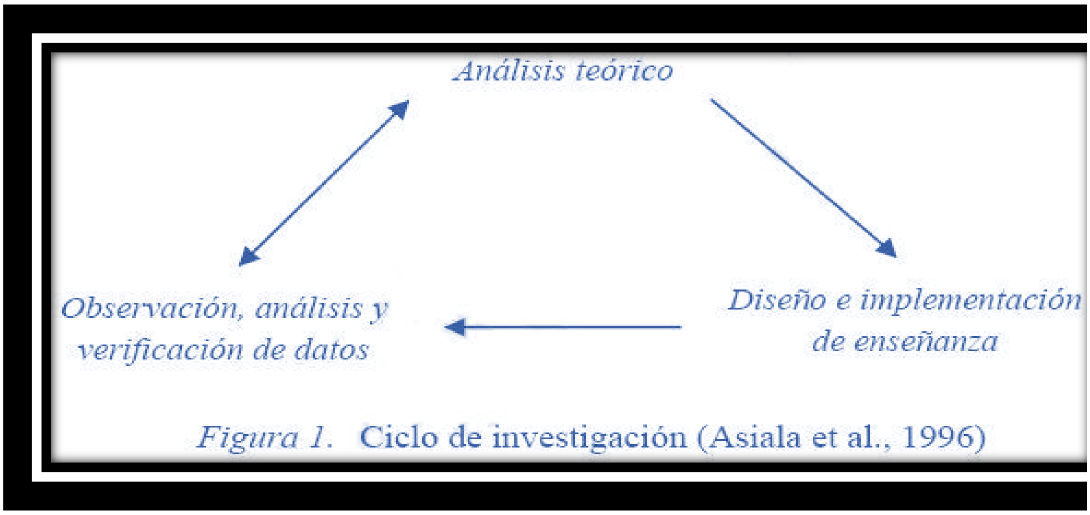


Figura 10 ciclo de investigación de la teoría APOE (Gamboa 2013.p.29)

Mediante este ciclo se da una aproximación a los procesos de construcción de los estudiantes dando una idea a la construcción de los conceptos matemáticos que se deseen investigar, iniciando con los con los conceptos que van a estudiar en este caso el área y el perímetro de figuras planas luego pasamos a una descomposición genética preliminar la cual son las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes para comprender dicho concepto; posteriormente encontramos el diseño y aplicación de enseñanza lo que implica una serie de actividades que favorecen las construcciones mentales que se requieren por el análisis y por último el análisis y verificación de datos nos sirve para retroalimentar el análisis hipotético inicial.

3.2.1 ANÁLISIS TEÓRICO:

Este es el primer aparte del ciclo de investigación partiendo de un análisis teórico sobre los conceptos de área y perímetros que se obtienen de los conceptos previos de los estudiantes los cuales son la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Donde se consideran los libros de texto y la experiencia de quien investiga y a si determinar un posible camino viable para la construcción del concepto, a dicho camino se le considera una descomposición genética preliminar del objeto de estudio, la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que una persona puede hacer en la construcción de un concepto matemático.

> Se plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? El planteamiento promueve la reflexión sobre qué es comprender un concepto determinado y las implicaciones que tiene en la forma como un estudiante pueden concebirlo. Va mucho más allá de la repetición mecánica de algoritmos o la supuesta construcción de un concepto aislado. (Asiala et al.1996 citado por Roa, 2009, p.97)
>
> El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética del concepto que determine un camino viable en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Cabe mencionar que no hay una única descomposición genética del concepto, ya que dependen de los caminos de construcción y las estructuras mentales previas del individuo Roa (2009 p.97).

Por lo anterior en el análisis teórico un estudiante construye un nuevo concepto matemático de acuerdo a las estructuras previas que él tenga del mismo, que no siempre debe ser la repetición de una formula si no la manera como ese concepto es interiorizado y estructurado en la mente del individuo.

3.2.1.1 ELEMENTOS PARA EL ANÁLISIS TEÓRICO

En esta investigación se decidió trabajar el concepto de Área y Perímetro teniendo en cuenta las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes, para lo cual se debe diseñar una descomposición genética viable que describa un modelo cognitivo que sirva de apoyo al diario vivir de docentes y estudiantes en el aula de clase; Para ello se plantearon las siguientes preguntas: ¿Qué conceptos previos debe tener un estudiante para abordar de manera exitosa el concepto Área y Perímetro? ¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a dicho concepto?

3.2.1.2 ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Trigueros (2005), confirma que la teoría APOE tiene una característica muy importante es que "parte de la reflexión de los conceptos desde la definición matemática. Por lo tanto, es necesario tener claro qué definición esperamos que los estudiantes finalmente tengan y sus alcances en la construcción del conocimiento matemático". (Trigueros, 2005, p. 21).

En este aparte lo que se busca es que los estudiantes tengan algunas ideas previas acerca del concepto de Área y Perímetro de figuras planas lo cual puede facilitar las prácticas de aulas ya que se parte de las construcciones y los mecanismos mentales que ellos representan al abordar el objeto matemático.

3.2.1.3 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA.

La Descomposición Genética (DG) es un modelo cognitivo donde se encuentran las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para comprender o construir un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas. La teoría APOE por su lado trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción.

Asiala *et al*., (1996, citado por Gamboa, 2013 p. 29), define la descomposición genética del concepto como "conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo". Se puede decir que la descomposición genética promueve el conocimiento de los estudiantes mediante las construcciones previas que estos representan en la mente de un tema específico ya que en ella desarrollan las acciones y los distintos procesos y la forma como se estructura el conocimiento para posibilitar la construcción de la concepción objeto, para favorecer la construcción de las relaciones entre estas acciones, procesos y objetos.

> La DG comienza por el análisis de las construcciones que hace un individuo cuando aprende un concepto matemático en términos de lo que es observable. Se construye como una primera aproximación para modelar el aprendizaje de algún concepto matemático, se utiliza como base teórica para elaborar materiales que se emplean en el aula, pues debe ser sometida a prueba con los individuos en situación de clase. (Salgado, 2007 p 30).

3.2.2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ENSEÑANZA

Esta componente se encuentra inmerso en el análisis teórico inicial y su objetivo es ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas mediante actividades y ejercicios que ayuden a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos que generen nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos.

Según Roa y Oktaç (2012), se mencionan aspectos como el tiempo, cantidad de integrantes del grupo de investigación necesarios para los seguimientos, como variables que han generado la realización de investigaciones que pasan de la primera a la tercera componente, entre las que se encuentran, Parraguez (2009), Parraguez & Oktaç (2010), Roa (2008), Pérez (2012) y Roa y Oktaç (2012). En nuestro caso particular, luego del diseño de la DG hipotética, se diseñará un Cuestionario basado en las construcciones mentales explicitadas en la DG, para analizar cómo los individuos han construido y/o están construyendo (Roa y Oktaç 2012).

Para el caso del objeto matemático, se puede decir que esas actividades y ejercicios planteados para la construcción del concepto matemático área y perímetro se deben hacer de manera que estos puedan describir todas las construcciones y la forma como se estructura el pensamiento dentro de ellos.

3.2.3. RECOPILACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS.

Esta etapa es muy importante en las investigaciones con el marco teórico APOE; ya que sin partir del diario vivir de los educandos o de su contexto la descomposición genética sería una simple hipótesis; por eso este análisis de datos tiene como objetivo responder a dos preguntas. ¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto matemático? Para responder estas preguntas se pueden utilizar diferentes tipos de instrumentos que den la solución a cada una de ellas como pueden ser cuestionarios escritos, entrevistas semi-estructuradas (videos o grabaciones), conversatorios y todos aquellos que podamos utilizar para dar con lo que necesitamos conocer; todo esto depende mucho del objetivo de la investigación.

3.3. EL CICLO ACE

Dubinsky junto al grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) han provisto a la teoría APOE de un ciclo de enseñanza llamado ACE (ACE teaching cycle: Activities, Class discussion and Excercises): Se trata de reemplazar las lecciones con métodos interactivos, constructivos y con aprendizaje colaborativo, en la traducción al español: (A) actividades que enfrentan al estudiante a nuevas situaciones o informaciones, donde el trabajo colaborativo es parte importante de ellas; posteriormente se prosigue con discusiones en clases (C), donde nuevamente interviene el trabajo colaborativo con el fin de una mejor asimilación y acomodación; y por último se les entrega a los estudiantes una serie de ejercicios (E) buscando el reforzamiento y posible extensión de sus ideas; ver figura 11 donde se muestra la descomposición del ciclo ACE

Figura 11 ciclo ACE como herramienta de enseñanza (Gamboa 2013, p.32)

Este ciclo de enseñanza propuesto por la teoría APOE permite que las actividades planteadas en las prácticas de aulas estén enfocadas en la participación de los estudiantes, en el trabajo colaborativo y en la ejercitación de los mismos, ya que una vez ellos tengan el conocimiento toca verificar si este fue asimilado

3.4 DISCUSIONES DEL CAPITULO.

Hasta este momento se ha expuesto la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) la cual toma como base la epistemología genética de Piaget y consiste en la manera como los estudiantes construyen un concepto matemático, considerando que los individuos realizan construcciones mentales para solucionar una situación matemática. Debido a que esta teoría posee su propio ciclo de investigación que está comprendido en tres componentes que son el análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos, nos permite conocer las estructuras y mecanismos mentales previos que los estudiantes poseen lo que nos conduce a realizar una Descomposición Genética Hipotética y aplicar el ciclo ACE (Actividades, Discusiones en clase y Ejercicios). Todo esto con el fin de enfrentar a los estudiantes a la construcción de un nuevo concepto matemático y a realizar las estructuras y mecanismos mentales necesarios para adquirir el conocimiento de una manera segura y duradera.

Por lo anterior se hace necesario utilizar la teoría APOE como marco teórico de esta investigación ya que le aporta las herramientas que permiten abordar el objeto de estudio (área y perímetro de figuras planas). Ya que posee su propio ciclo de investigación y la construcción de una descomposición genética que permite facilitar y entender las estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

El capítulo 4 define el diseño metodológico de la investigación, se apoya en la teoría APOE como ya se había planteado en el capítulo anterior. En este diseño se distinguen tres componentes fundamentales que conforman el Ciclo de Investigación: Análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos y el Análisis y verificación de datos. El desarrollo de estas componentes guía la ejecución de esta investigación.

4.1. DISEÑO METODOLÓGICO.

La investigación tiene un enfoque cualitativo orientado a establecer como los estudiantes construyen un concepto matemático, basado en la teoría APOE como marco teórico por lo que se trata desde un ámbito empírico que se centra en un estudio de caso. Donde los participantes proporcionan información valiosa en el desarrollo de los cuestionarios aplicados. Para Stake (2010) lo empírico lo define como:

> Está orientado al campo de observación; la atención se centra en lo que se observa, incluidas las observaciones hechas por los informadores; hace todo lo posible por ser naturalista, no intervencionista; y hay una relativa preferencia por la naturalidad lingüística en las descripciones, con un cierto desdén por las grandes expresiones. (Stake 2010.p. 50)

Teniendo en cuenta lo empírico en esta investigación, conduce a pensar en el contexto de los estudiantes por lo que se enfoca en los datos obtenidos por los estudiantes en los cuestionarios de aplicación.

4.1.1. ESTUDIO DE CASO.

El estudio de caso como metodología para trabajar investigaciones cualitativas proporciona herramientas que ofrecen importantes resultados e información para comprender y conocer a profundidad la realidad contextual y educativa de las personas que hacen parte de la investigación, ya que permite una generalización analítica. Para Stake (2010) define el estudio de caso como: “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes”. (Stake, 2010, p. 11).

> La investigación con estudios de casos comparte la carga de clarificar las descripciones y de dar solidez a las interpretaciones. Aceptar una visión constructivista del conocimiento no obliga al investigador a abstenerse de ofrecer generalizaciones. Por el contrario, una visión constructivista invita a ofrecer a los lectores buena materia prima para su propio proceso de generalización. (Stake, 2010, p. 91).

De acuerdo a lo mencionado por Stake (2010), sobre el estudio de caso es primordial que el investigador se centre en los datos obtenidos bien sean colectivos o individuales, hacer un buen registro de los mismo y presentar un análisis acorde a la información para que no haya especulaciones entre los lectores.

4.1.2. PARTICIPANTES.

Los participantes de esta investigación son 20 estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Ambiental Saulo Sánchez Córdoba del municipio de Riosucio-Choco, sus edades oscilan entre los 13 y 16 años entre los cuales se encuentran 15 mujeres y 5 hombres. Cabe anotar que todos los estudiantes contaron con la voluntad y el interés de ser parte de esta investigación. Ya que en los procesos de aprendizaje tienen algunos vacíos de comprensión, manejo y apropiación de las temáticas en geometría, debido a que durante su formación han tenido poco acercamiento al componente geométrico métrico. De este modo se aprovecha que en el plan de estudio se encuentran inmersos los temas de Área y Perímetro de figuras planas lo que permite abordar con más facilidad el objeto matemático; con el diseño del cuestionario facilito la obtención de la información requerida para luego hacer el respectivo análisis de las respuestas obtenido por parte de los estudiantes.

4.2. APLICACIÓN DEL CICLO DE INVESTIGACIÓN.

Como ya se había dicho en el capítulo 3 la teoría APOE tiene su propio ciclo de investigación, el cual se desarrollará de acuerdo a las actividades planteadas para los estudiantes objetos de estudio. La primera componente es el análisis teórico en el cual encontramos las estructuras previas necesarias para la construcción del nuevo concepto y la Descomposición Genética preliminar. En el desarrollo de la segunda y tercera componente, se proponen el diseño y aplicación de instrumentos que permite dar paso a la construcción de una descomposición genética validad que es presentada en el capítulo de conclusiones.

4.2.1 ANÁLISIS TEÓRICO.

Para el desarrollo de esta componente se toman en cuenta los trabajos previos realizados sobre la noción de área y perímetro de figuras planas, presentados en el primer capítulo de este documento. Además de la experiencia de la profesora investigadora al desarrollar los conceptos en el aula y analizar algunos libros de texto que son usados regularmente por los estudiantes que participan en esta investigación.

Para dar paso a la descripción de la descomposición genética hipotética, se plantean las estructuras que de manera preliminar los estudiantes deben establecer.

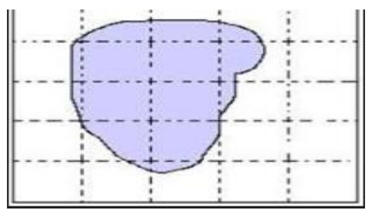
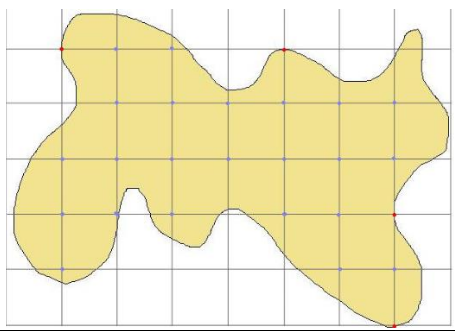
4.2.2. ESTRUCTURAS PREVIAS

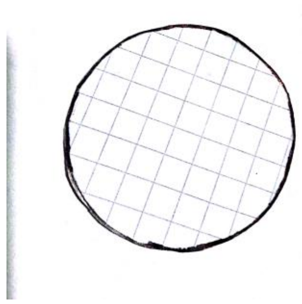
Uno de los temas para construir el concepto de Área y Perímetro de figuras planas son los patrones de medida en especial las unidades de longitud y superficie que en el sistema internacional de unidades son consideradas como una magnitudes básica. En el mismo orden de idea estas son expresadas como unidades (u) y unidades cuadradas (u^2). Se espera que el objeto área y perímetro sea asimilado por el esquema de medidas; pues en este caso se requiere que el estudiante sea consciente de las diferentes magnitudes que puede medir y las relaciones que pueden establecerse entre la medida de longitudes y la medida de superficies.

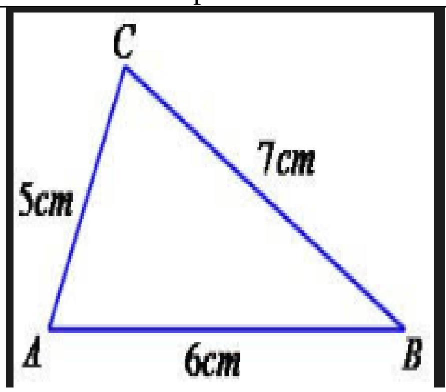
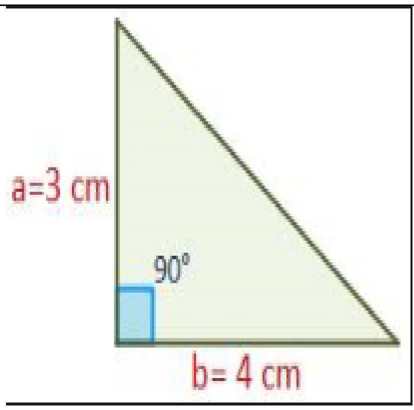
De la misma forma se considera que los conceptos de operaciones básicas y figuras planas están relacionados con los conceptos de área y perímetro. Por tanto, conocer estas construcciones de los estudiantes permite mirar como ellos construyen acciones para luego convertirlo en procesos.

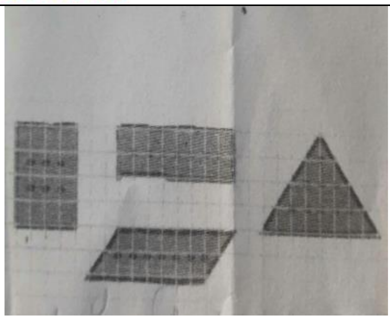
4.2.3. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA HIPOTÉTICA

La Descomposición Genética hipotética del área y el perímetro que se ha construido con base en los elementos del Análisis Teórico, parte de la aplicación de Acciones que un estudiante puede realizar sobre una figura plana. Esto es, dada una figura plana y la necesidad de calcular su área y/o perímetro, el estudiante debe determinar qué elementos iniciales son necesarios para realizar un cálculo determinado. Estas Acciones pueden ser alguna de las siguientes:

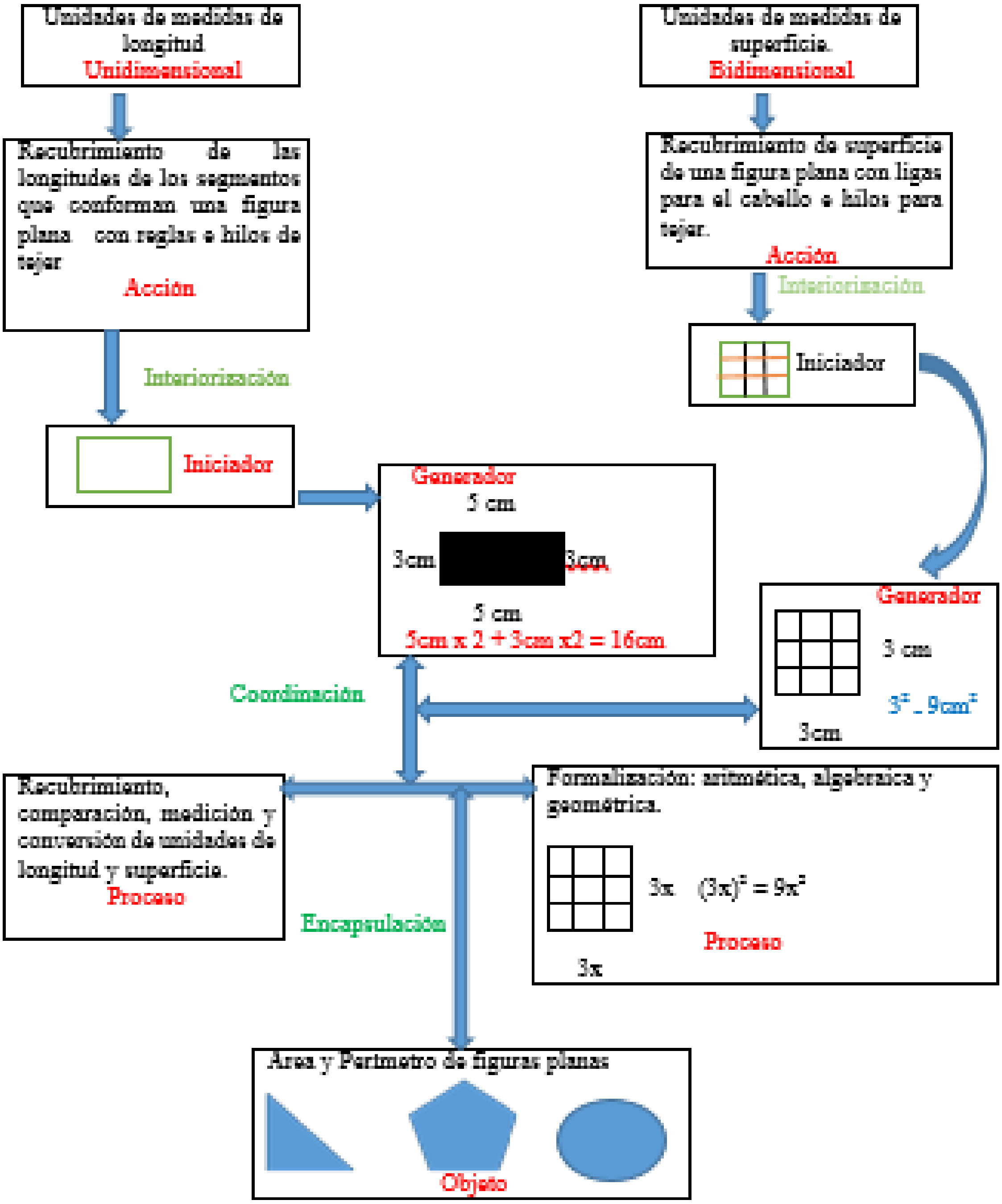
Estructuras	Casos particulares
Dado un polígono convexo “conocido” calcular su área: exacta o aproximada. En este caso el estudiante genera acción, ya que por experiencia previa sabe que el área del cuadrado o rectángulo es igual al producto de la longitud de la base por la altura. Y para el caso del triángulo el área está determinada por el producto de la base por la altura sobre dos.	
Ahora la interiorización de estas acciones se inicia cuando el estudiante debe abordar problemas donde no conoce una fórmula directa que lo lleve a determinar el área de una figura plana dada. En este caso el mecanismo de interiorización está determinado por la capacidad del estudiante de recubrir la figura inicial por una figura de área conocida que determina la unidad de medida (A). De la misma manera la interiorización de las Acciones en el Proceso de área se genera cuando, dada cualquier figura como en el caso (B) el estudiante puede determinar su área a partir de una aproximación por recubrimiento de figuras de área conocida. Como puede verse el Proceso se caracteriza por la capacidad del estudiante de determinar el área de una figura plana, independientemente de una fórmula. Esto es sustituido por	Figura 1  

mecanismos (encapsulación) de recubrimiento y aproximación.	
La encapsulación del Proceso en el Objeto puede generarse a partir de la construcción del área del círculo por medio aproximaciones con polígonos regulares inscritos. Esta forma desarrollada por el matemático griego Eudoxo permite poner juntos elementos fundamentales del área. Entendiendo ésta como la mejor aproximación a la medida de una superficie. La aproximación del área de la circunferencia más allá de la aplicación de una fórmula, puede ayudar al estudiante a construir el área como un Objeto que se obtiene gracias a la aplicación de un proceso al infinito.	

Estructura	Casos particulares
Dado el triángulo A, B y C cuya altura mide 5 cm, su lado 7 cm y su base 6 cm. calcular el contorno de la figura? Los estudiantes sabrán fácilmente que, haciendo uso de las operaciones básicas específicamente de la adición en los N, notaran que al sumar cada lado les permite conocer la medida total del perímetro; lo que quiere decir, que es la suma de las longitudes de los segmentos, pero todo esto se logra debido a los preconceptos que ya posee.	
La interiorización se da cuando al estudiante no se le da todas las medidas de los segmentos, por ejemplo, en un triángulo rectángulo se les da a los estudiantes solo las medidas de dos de sus lados, conocidos como catetos donde ellos les toque buscar el otro lado conocido como hipotenusa. En este caso la interiorización es mirar la capacidad que tiene el estudiante para encontrar la solución al problema recurriendo a otros procedimientos, y sabrán por experiencia que por medio del teorema de Pitágoras se puede encontrar el lado faltante.	

De la misma manera para la encapsulación, el estudiante podrá calcular el perímetro de cualquier figura plana incluyendo el del círculo, utilizando diferentes construcciones, donde podrá encontrar cualquiera de los valores de los lados faltantes o con la utilización de cuadrados dentro de la figura y contar las que conforman el entorno.	

DESCOMPOSICION GENETICA



La figura anterior muestra la descomposición genética de las estructuras y mecanismos mentales que un estudia debe tener para construir los concentos de área y perímetro de figuras planas, en un primer lugar aparecen las unidades unidimensionales ósea el perímetro con sus respectivos mecanismos mentales y en un segundo lugar aparecen las unidades bidimensionales también con sus mecanismos mentales. Más adelante se expondrá detalladamente cada aparte de la D.G

4.3. DISEÑO Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS.

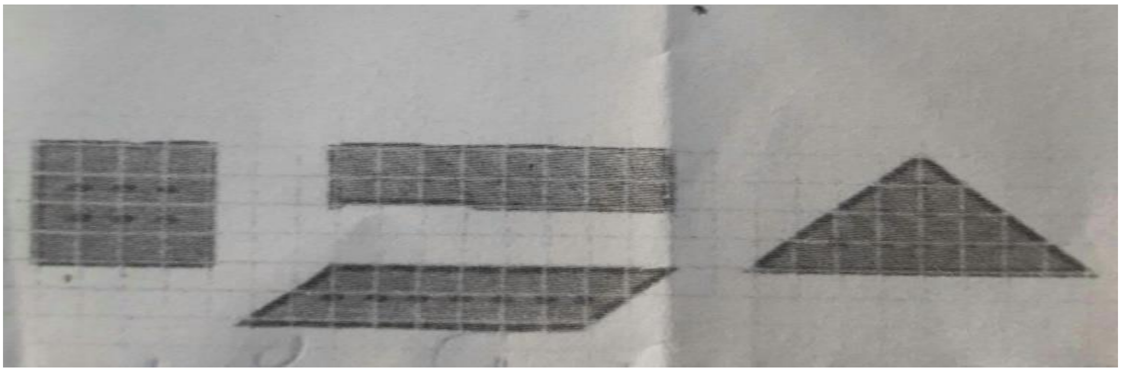
Teniendo en cuenta la Descomposición Genética hipotética, fundamentada en el análisis teórico del objeto matemático área y Perímetro de figuras planas se realiza un cuestionario para recoger la información.

4.3.1. EL CUESTIONARIO

Con el cuestionario como instrumento de recolectar la información, fundamentado en las estructuras y mecanismos mentales presentados en la Descomposición Genética hipotética, ya que su objetivo es recoger datos que evidencien el tipo de construcción mental que poseen los estudiantes. El cuestionario, al estar construido en base a la DG, y esta última en base al análisis teórico y de los antecedentes presentados, tiene incorporados el aspecto histórico epistemológico en que se presenta el área y el perímetro.

4.3.2. ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

Pregunta 1. Observa las siguientes figuras y responde.



1.1 ¿Cuál es la medida de las longitudes de sus lados en centímetro?

- para el cuadrado responde: 4cm, 4cm, 4cm y 4cm
- para los dos rectángulos responde: 2cm, 8cm, 2cm y 8cm.
- Para el triángulo responde: 4cm, 8cm y 4cm

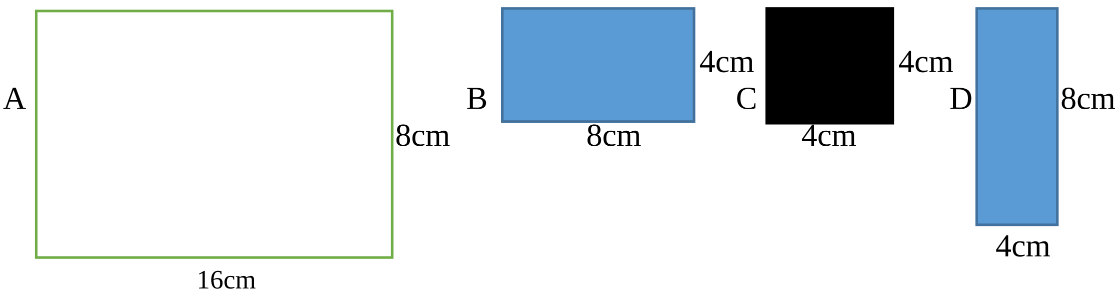
1.2 ¿Cuál es el total de las longitudes?

- para el cuadrado: 4cm x 4cm = 16cm
- para los dos rectángulos: 2cm x 8cm = 16cm
- Para el triángulo: 4cm x 2cm + 8cm = 16cm

1.3 ¿Cuantos cuadrados se necesitó para cubrir la superficie de cada figura?

- para el cuadrado se necesitan: 16 cuadrados
- para los dos rectángulos se necesitan: 16 cuadrados
- Para el triángulo se necesitan:16 cuadrados

P2. Observa la figura A; teniendo en cuenta la longitud de sus lados y la superficie de las figuras (B, C y D), responde y realiza cada diseño.



2.1 ¿Cuántos rectángulos B se necesitan para recubrir la figura A?

- Para cubrir la figura A se necesitan 4 rectángulos B

2.2 ¿Cuántos cuadrados C se necesitan para recubrir la figura A?

- Para cubrir la figura A se necesitan 8 cuadrados C

2.3 ¿Cuántos rectángulos D se necesitan para recubrir la figura A?

- Para cubrir la figura A se necesitan 4 rectángulos D

P3. Teniendo en cuenta los patrones de medida de longitud, realiza las siguientes conversiones pasar 2,3 hectómetros a centímetros y 1.3 centímetros a kilómetros.

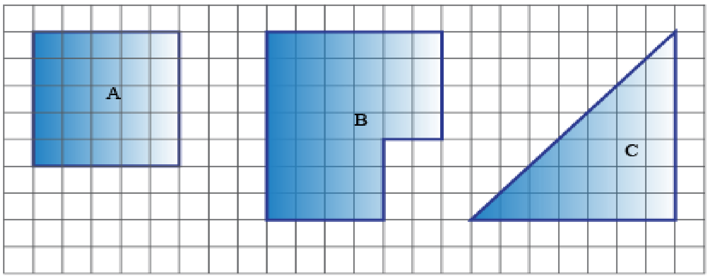
- 2.3 hectómetro es = 230.000 centímetro
- 1.3 centímetro es = 0.000013 kilometro

P4. Pasar 5 kilómetros cuadrados a decámetros cuadrados y 3,2 decímetros cuadrados a hectómetro cuadrados.

- 5 kilómetros cuadrados son 500 decámetros cuadrado
- 3,2 decímetros cuadrados son 0.00032 hectómetros cuadrados

P5. Teniendo en cuenta las unidades lineales y las unidades cuadradas, observa las siguientes figuras y responde.

.



P5. . Cual es la superfice (area) que recubre cada figura, que Perimetro tiene cada una y determina cual de las Area es mayor. Si es posible utiliza otras formas de calculo.

- A tiene 25 unidades cuadradas y su perimetro es de 25 unidades
- En B hay 36 unidades cuadradas y su perimetro es de 26 unidades
- C tiene 24 unidades cuadradas y su perimetro es de 21 unidades.
- Por lo tanto la figura con mayor area es B, la cual tiene 36 unidades cuadradas.

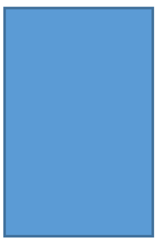
- Otras posibles formas es la utilizacion de formulas:

Para la figura (a) Area del cuadrado = l x l (lado por lado). 5 unidades x 5 unidades = 25 unidades cuadradas

Para la figura (c) Area del triangulo = b x h /2 (base por altura dividido 2). 7 unidades x 7 unidades/ 2 = 49/2 = 24.5 unidades cuadradas.

Para el rectangulo irregular Area = b x h – r = 7 unidades x 6 unidades – 3 unidades x 2 unidades = 42 unidades cuadradas – 6 unidades cuadradas = 36 unidades cuadradas.

P6. Calcula el area y el perimetro de un rectangulo que mide 7 metros de altura y 5 centimetro de base.



700cm

7 m

5cm=0,05m

7m x 100cm/1m = 700cm

5cm x 1m/100cm = 0,05m

Perímetro = 7m x 2 + 0,05m x 2

14m + 0,1m

14,1m

Área = 7m x 0,05m

$0{,}35m^2$

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

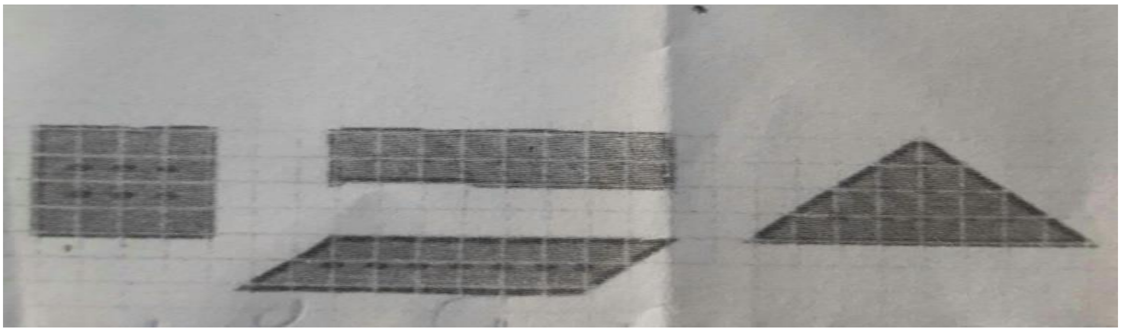
4.4 EL CUESTIONARIO Y LA RELACIÓN CON LA DG

El cuestionario fue creado con base a la Descomposición Genética hipotética de Àrea y el Perímetro. Para poder analizar la viabilidad de la DG, cada pregunta debe afirmar una construcción mental del estudiante por medio de su respuesta y es por eso que cada pregunta del cuestionario está relacionada con una sección de la DG en base a la construcción que ha mostrado el estudiante. A continuación, se presenta la descripción de las preguntas del cuestionario con base a la DG y la explicación sobre la construcción que evidencia el estudiante.

Pregunta 1 del cuestionario. Se subdivide en tres preguntas.

1. Observa las siguientes figuras y responde.

   1.1 ¿Cuál es la medida de las longitudes de sus lados?
   1.2 ¿Cuál es el total de las longitudes?
   1.3 ¿Cuantos cuadrados se necesitó para cubrir la superficie de cada figura?



1.1 ¿Cuál es la medida de las longitudes de sus lados?

El estudiante debería evidenciar una **concepción acción** el reconocimiento de las medidas de longitud en figuras planas, ya que para responder solo debe contar los cuadritos de cada figura o en su efecto tomar la regla y medir cada lado.

En la Figura 12, se muestra la parte de la DG que se relaciona con la pregunta 1

Unidades de medidas de longitud

Unidimensional

↓

Recubrimiento de las longitudes de los segmentos que conforman una figura plana con reglas e hilos de tejer

Acción

Figura 12 pregunta 1 en la Descomposicion Genetica

Pregunta 1 (1.2)

1.2 ¿Cuál es el total de las longitudes?

En esta pregunta el estudiante debe realizar la suma de las medidas encontradas en cada figura, empleado las operaciones con los naturales (suma) y una vez más reconoce las medidas de longitud, dando cuenta de una **construcción proceso** al realizar las mediciones de los lados y escribiendo el total exacto de cada figura

En la Figura 12, se muestra la sección de DG en relación a la pregunta 1. 1.2

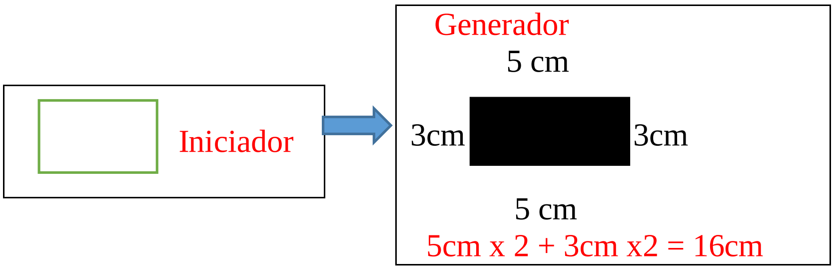


Figura 12 pregunta 1,2 en la Descomposicion Genetica

Pregunta 1 (1.3) ¿Cuantos cuadrados se necesitó para cubrir la superficie de cada figura?

El estudiante debería evidenciar una **concepción acción** el reconocimiento de las medidas de Áreas en figuras planas, ya que para responder solo debe contar el total de cuadritos presentes en cada figura.

En la Figura 13, se muestra la parte de la DG que se relaciona con la pregunta 1

Unidades de medidas de superficie.

Unidimensional

↓

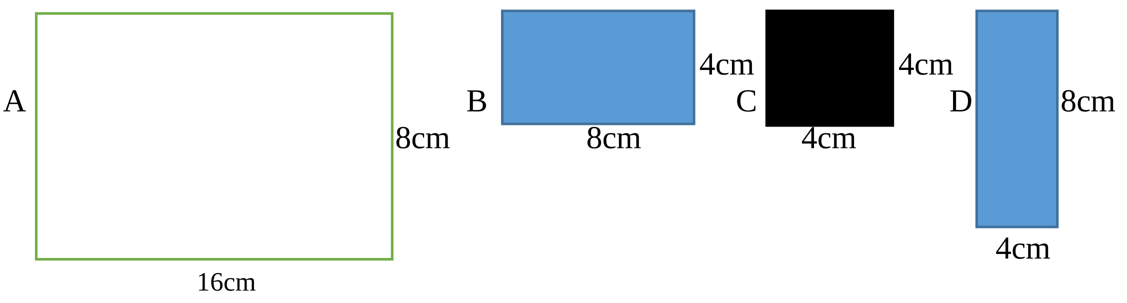
Recubrimiento de superficie de una figura plana con ligas para el cabello e hilos para tejer.

Acción

Figura 13 pregunta 1,3 en la Descomposicion Genetica

Pregunta 2 del cuestionario. Se subdivide en tres preguntas.

2. Observa la figura A; teniendo en cuenta las longitudes de sus lados y la superficie de las figuras (B, C y D), responde.



2.1 ¿Cuántos rectángulos B se necesitan para recubrir la figura A?

2.2 ¿Cuántos cuadrados C se necesitan para recubrir la figura A?
2.3 ¿Cuántos rectángulos D se necesitan para recubrir la figura A?

Pregunta 2 (2,1) el estudiante debe realizar las operaciones con los N para conocer qué cantidad de rectángulo y cuadrados se necesitan para cubrir la superficie de la figura A. Las tres preguntas están orientadas para que los estudiantes construyan una **concepción proceso**, al realizar las multiplicaciones y darse cuenta que cantidad de figura B, C y D debe emplear para recubrir la superficie.

3. Realiza las siguientes conversiones, pasar 2,3 hectómetros a decímetros y 1.3 centímetros a kilómetros.

Pregunta 3. El estudiante debe reconocer las unidades de medidas y a si construir una concepción proceso, teniendo en cuenta los patrones de medidas y las deferentes conversiones que se deben hacer para lograr una mejor comprensión de las unidades de medida de longitud.

4. Pasar 0,5 kilómetros cuadrados a decámetros cuadrados y 3,2 decímetros cuadrados a hectómetros cuadrados.

Al igual que en la pregunta 3 el estudiante debe llegar a construir una concepción proceso al momento que realice las diferentes conversiones teniendo en cuenta que son unidades de Área y que debe pasar de una unidad a otro hasta lograr la conversión pedida. Se espera que con esta pregunta el estudiante evidencia las unidades de medidas relacionadas con el Área, como unidades cuadradas.

En la Figura 14, se muestra la parte de la DG que se relaciona con la pregunta 2, 3 y 4

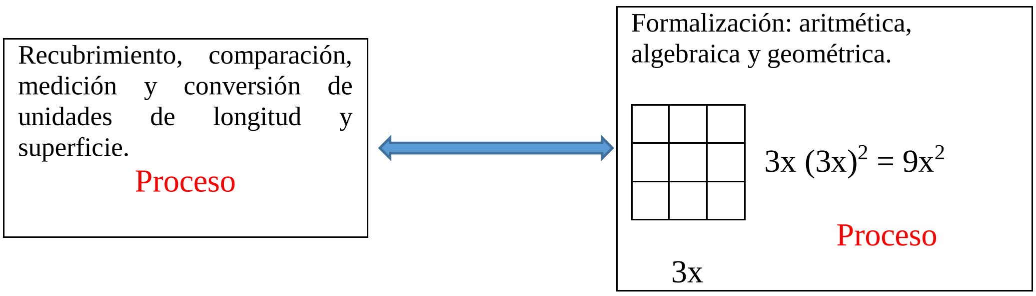
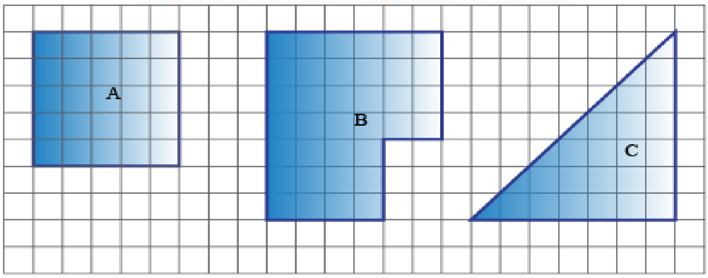


Figura 14 pregunta 2,3 y 4 en la Descomposicion Genetica

5. Teniendo en cuenta las unidades lineales y las unidades cuadradas, observa las siguientes figuras y responde.



Pregunta 5. Cual es la superfice (area) que recubre cada figura, que Perimetro tiene cada una y determina cual de las Area es mayor. Si es posible utiliza otras formas de calculo.

En esta pregunta, se espera que el estudiante evidencie la **construccion objeto** del Area y el Perimetro de fuguras planas, como unidades cuadradas y unidades lineales. A parte debe coordinar los procesos de contar cada cuadrito de las figuras o mediante las formulas pueda encontrar tambien lo que es el Area y el perimetro.

Pregunta 6. Calcula el area y el perimetro de un rectangulo que mide 7 metros de altura y 5 centimetro de base. Dibuja el rectangulo para una mejor comprension.

Para esta pregunta, el estudiante logra una **construccion objeto** al realizar las deferentes conversiones de unidades y mediante la coordinacion de dos procesos, uno es el calculo mediante formulas y el otro es mediante el recubrimiento de la superficie por unidades cuadradas para luego realizar el conteo.

En la Figura 15, se muestra la parte de la DG que se relaciona con la pregunta 5 y 6

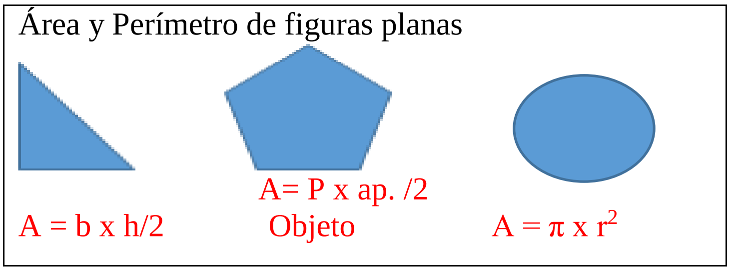


Figura 15 pregunta 6 y 7 en la Descomposicion Genetica

Una manera de describir en conjunto al cuestionario en base al análisis *a priori*, el Aspecto Histórico Epistemológico de los conceptos de Área y Perímetro de figuras planas tratado y su relación con la DG se resume en la siguiente tabla:

TABLA 1. CUESTIONARIO AREA Y PERIMETRO , CONSTRUCCION MENTAL Y ASPECTO HISTORICO EPISTEMOLOGICO.

PREGUNTA	CONSTRUCCION MENTAL CON BASE A LA DG	ASPECTO HISTORICO EPISTEMOLOGICO
1	Accion sobre el objeto unidades de medidas(longitud y Area).	Aspecto geometrico
2	Proceso(1), recubrimiento de figuras	Geometrico, Algebraico y Matematico
3 y 4	Proceso(2), conversion de unidades(longitud y Area)	Geometrico,Matematico y Algebraico
5 y 6	Objeto, Area y Perimetro mediante el conteo y formulas matematica.	Geometrico

Tabla 1

La tabla que se presenta muestra la relación que existe entre las preguntas del cuestionario, las construcciones mentales con base a la descomposición genética y el aspecto histórico epistemológico, por parte de los estudiantes.

4.4. DISCUSIONES DEL CAPITULO

Se ha expuesto en este capítulo la metodología por la cual se recogerán los datos, con la aplicación del ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE, el cual consiste en el análisis teórico, diseño e implementación y observación, análisis y verificación de datos, teniendo en cuenta que cada componente de este ciclo el cual se relaciona con otros elementos como es la Descomposición Genética del Área y el Perímetro de figuras planas, con el ciclo ACE, la aplicación del cuestionario que se relaciona con el diseño y la implementación de instrumento de verificación de resultados aplicados al estudio caso, lo que va a permitir recopilar la información requerida para la investigación.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo se centra en dar cuenta de los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario a partir de la Descomposición Genética hipotética, el cual apunta al tercer componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE, análisis y verificación de datos

Para clarificar más aun lo expuesto en el capítulo anterior, se presenta a continuación el análisis a priori y el a posteriori del cuestionario. Es de anotar que los a posteriori se les harán un análisis bajo los parámetros de la teoría APOE y las estructuras mentales que avalan la DG.

5.1 RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

A continuación, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes durante la fase inicial didáctica en el aula, sobre la comprensión del concepto de área y perímetro de figuras planas. El propósito de esta actividad fue el reconocimiento mediante el conteo la región interna y externa de las figuras y a si comprender estos conceptos. Algunas de las preguntas están basadas en gráficos de rectángulos y triángulos. Cabe anotar que para proteger la identidad de los estudiantes se les asignara la letra E y un número de acuerdo con el orden de la planilla del docente. Como por ejemplo para el primer estudiante se escribe E1, para el segundo E2…E20. En ese mismo orden como también se va a trabajar con grupos por la dinámica de la estrategia, se le asignara la letra G1 para el grupo 1, G2 para el grupo 2 y así sucesivamente.

Cabe anotar que los resultados obtenidos en el cuestionario de preguntas al igual que los trabajos grupales por parte de los estudiantes serán utilizados como unidad didáctica y se expondrán en los anexos de la investigación.

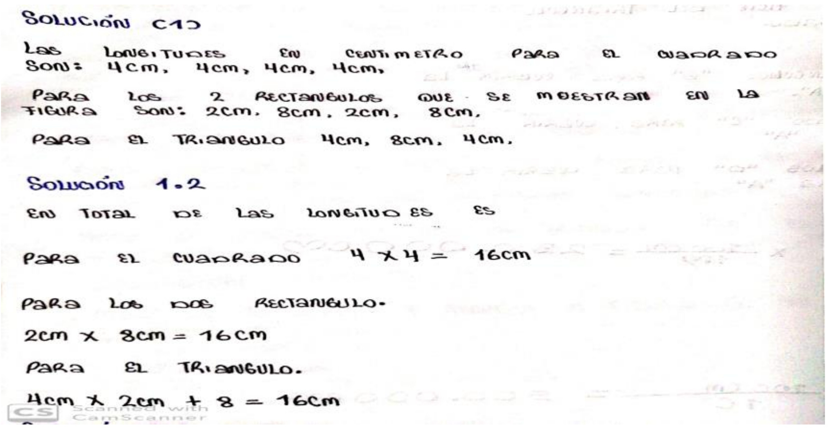
Pregunta 1.

Los estudiantes en esta pregunta debían medir o contar cada línea que hacen parte de los segmentos de cada figura, además reconocer las unidades de medidas unidimensionales y bidimensionales; realizar operaciones con los números naturales.

Desde la teoría APOE, todos los estudiantes en este caso (E1, E2, E3, E4, E5…E20), muestran una concepción proceso realizando el reconocimiento de la noción de Área como el número de unidades cuadradas que cubren la figura y el Perímetro como el número de unidades lineales que hay en su alrededor. Es decir, logran interpretar desde el conteo y la medición; por lo que algunos en sus argumentos lo expresan en unidades de longitud refiriéndose al Perímetro y unidades cuadradas como el Área.

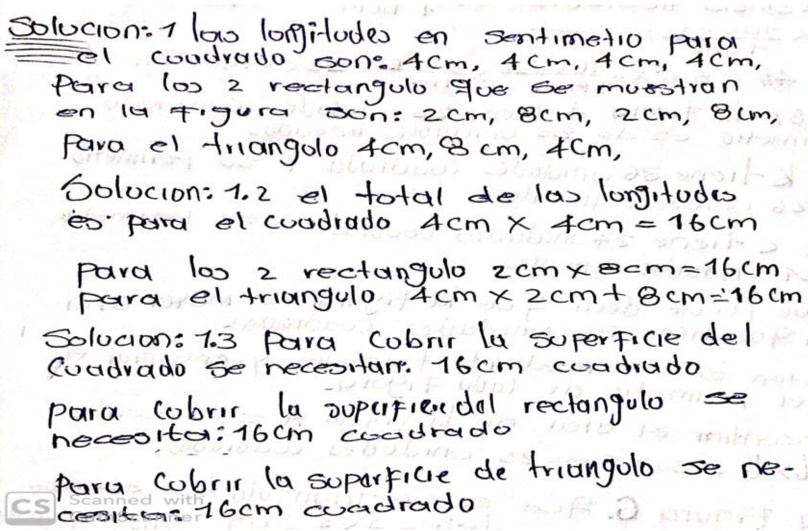
Con esto no se quiere decir que el estudiante haya construido el objeto, es clara la presencia de distintas estrategias para justificar la respuesta, mostrando desde la noción de conteo, medición y operaciones en los N. A continuación, se muestran algunas respuestas de los estudiantes.

Respuesta de los estudiantes E1 y E8 donde se evidencia la forma como realizaron el procedimiento para llegar a los resultados de la pregunta 1 y sus subdivisiones en 1,1; 1,2 y 1,3; ver figuras 16 y 17



SOLUCIÓN (1)
LAS LONGITUDES EN CENTIMETRO PARA EL CUADRADO SON: 4cm, 4cm, 4cm, 4cm,
PARA LOS 2 RECTANGULOS QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA SON: 2cm, 8cm, 2cm, 8cm,
PARA EL TRIANGULO 4cm, 8cm, 4cm.
SOLUCIÓN 1.2
EN TOTAL DE LAS LONGITUDES ES
PARA EL CUADRADO 4 X 4 = 16cm
PARA LOS DOS RECTANGULO.
2cm X 8cm = 16cm
PARA EL TRIANGULO.
4cm X 2cm + 8 = 16cm

Figura 16 E1, p1



Solucion: 1 las longitudes en sentimetro para el cuadrado son: 4Cm, 4Cm, 4cm, 4Cm,
Para los 2 rectangulo que se muestran en la figura son: 2cm, 8cm, 2cm, 8cm,
Para el triangolo 4cm, 8 cm, 4Cm,
Solucion: 1.2 el total de las longitudes es: para el cuadrado 4cm X 4cm = 16cm
para los 2 rectangulo 2cm X 8cm = 16cm
para el triangulo 4cm X 2cm + 8cm = 16cm
Solucion: 1.3 Para cobrir la superficie del Cuadrado se necesitan 16cm cuadrado
para cubrir la superficie del rectangulo se necesita: 16cm cuadrado
Para cobrir la superficie de triangulo se necesita: 16cm cuadrado

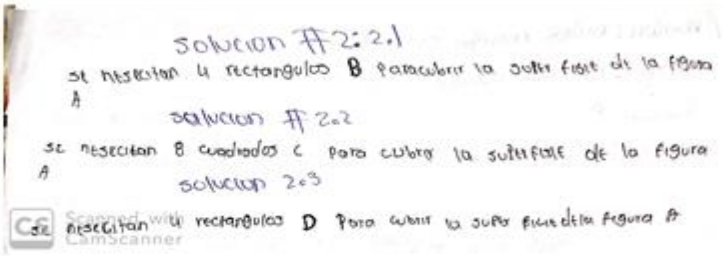
Figura 17 E8, p1

Pregunta 2.

Los estudiantes en esta pregunta debían realizar las operaciones con los N para conocer qué cantidad de rectángulo y cuadrados se necesitan para cubrir la superficie de la figura

A. E2, E4, E6 y E15: establecen relaciones entre las diferentes figuras desde la bidimensionalidad de la medida de la superficie y cuentan unidades cuadradas en cada una de las figuras; evidencian la identificación de algoritmos con la realización de operaciones en los N, conteos y la sustitución de las figuras en A. Es de anotar que algunos presentan argumentos donde muestran la imagen como quedaría la figura A al cubrir la superficie con las demás figuras.

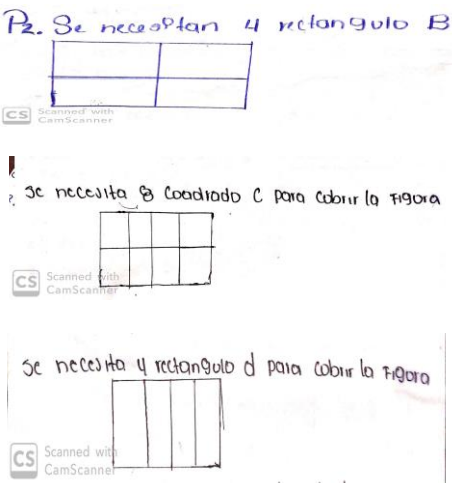
Desde la teoría APOE, los estudiantes E2, E4, E6 y E15, muestran acciones desde el recubrimiento de superficies, empleando las operaciones básicas y el reconocimiento de una figura geométrica con sus características; lo que permite evidenciar la Interiorización del concepto de Área como unidad cuadrada y el Perímetro como unidad lineal: (ver figuras 18, 20 y 21).



solucion #2: 2.1
se nesesitan 4 rectangulos B para cubrir la superficie de la figura A
solucion # 2.2
se nesecitan 8 cuadrados C para cubrir la superficie de la figura A
solucion 2.3
se nesecitan 4 rectangulos D para cubrir la superficie de la figura A

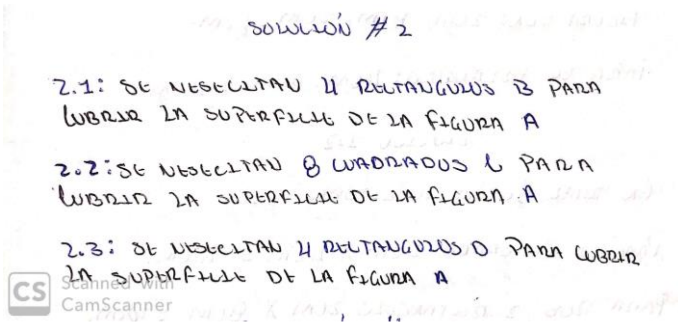
Figura # 18 E2, p2. 2.1,2.2 y 2.3

El estudiante E4 en la pregunta 2, no solo expresa en palabras cuantas figuras se necesitan para cubrir la superficie de A; si no que también materializa mostrando mediante grafica el dibujo de cada una de las figuras al cubrirla: (ver figura 19 E4 p2. 2.1, 2.2, 2.3)



P2. Se necesitan 4 rectangulo B
Se necesita 8 Cuadrado C para Cubrir la Figura
Se necesita 4 rectangulo d para Cubrir la Figura

Figura 19 E4, p2. 2.1,2.2 y 2.3



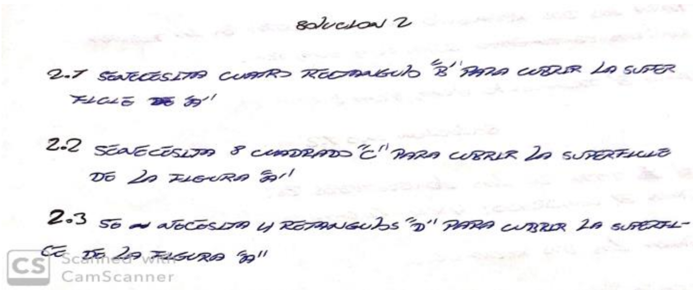
SOLUCIÓN # 2

2.1: SE NECESITAN 4 RECTANGULOS B PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE LA FIGURA A

2.2: SE NECESITAN 8 CUADRADOS C PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE LA FIGURA A

2.3: SE NECESITAN 4 RECTANGULOS D PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE LA FIGURA A

Figura 20 E6 p2. 2.1, 2.2 y 2,3



SOLUCION 2

2.1 SE NECESITA CUATRO RECTANGULO "B" PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE "A"

2.2 SE NECESITA 8 CUADRADO "C" PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE LA FIGURA "A"

2.3 SE NECESITA 4 RECTANGULOS "D" PARA CUBRIR LA SUPERFICIE DE LA FIGURA "A"

Figura 21, E15 p2. 2.1, 2.2 y 2.3

Pregunta 3 y 4

Los estudiantes en estas preguntas debían reconocer las unidades de medidas de longitud y las unidades de medidas de superficie, realizar conversiones y hacer uso de algunas operaciones básica.

Desde la teoría APOE, los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E8 y E11, muestran Acciones al reconocer estas unidades tanto las de longitud como las de superficie (Área); utilizando diferentes formas para realizar las conversiones. Algunos estudiantes realizan procedimientos mediante tablas, donde escriben las unidades de medida en la parte superior separadas unas de otra y en la parte inferior van escribiendo las diferentes conversiones, las cuales les permiten tener dominio de las conversiones de unidades para trabajar el objeto matemático.

A continuación, se presentan algunas respuestas de los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E8 y E11; donde se evidencia la forma como realizaron el procedimiento para llegar a los resultados de las preguntas 3 y 4; (ver figuras 22 y 23).

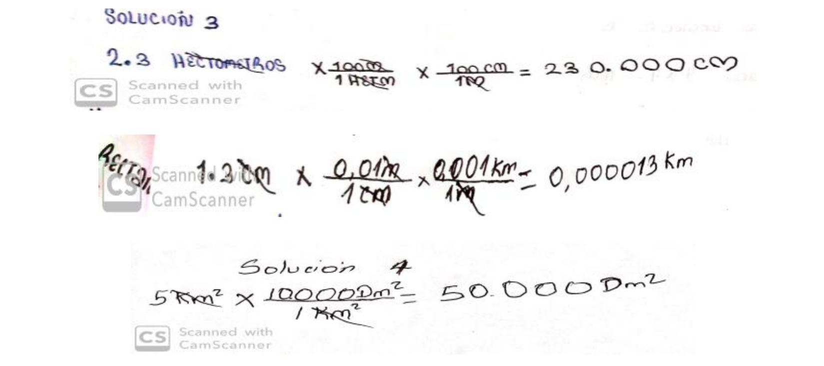


Figura 22 E1 p3 y 4

El estudiante E3, propone la siguiente tabla para realizar las conversiones de las unidades de longitud como para las unidades de superficie (Área), del mismo modo se evidencia el uso de algunas fórmulas matemáticas para el cálculo, dejando ver la construcción desde otra perspectiva de razonamiento; ver figura 23

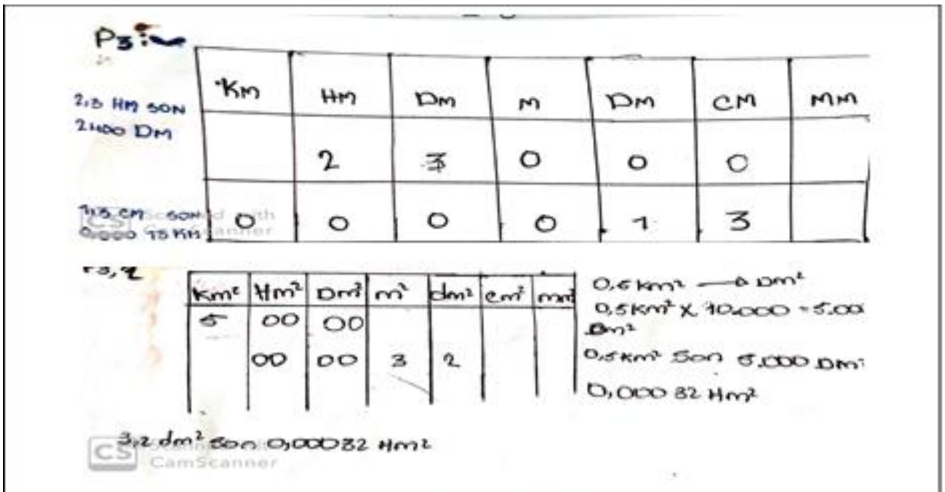
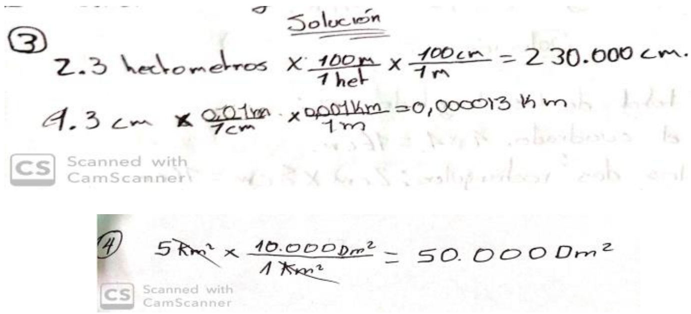


Figura # 23, E3, p3

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN


Solución

③ 2.3 hectometros $\times \frac{100m}{1 het} \times \frac{100cm}{1m} = 230.000$ cm.

9.3 cm $\times \frac{0.01m}{1cm} \times \frac{0.001Km}{1m} = 0,000093$ Km

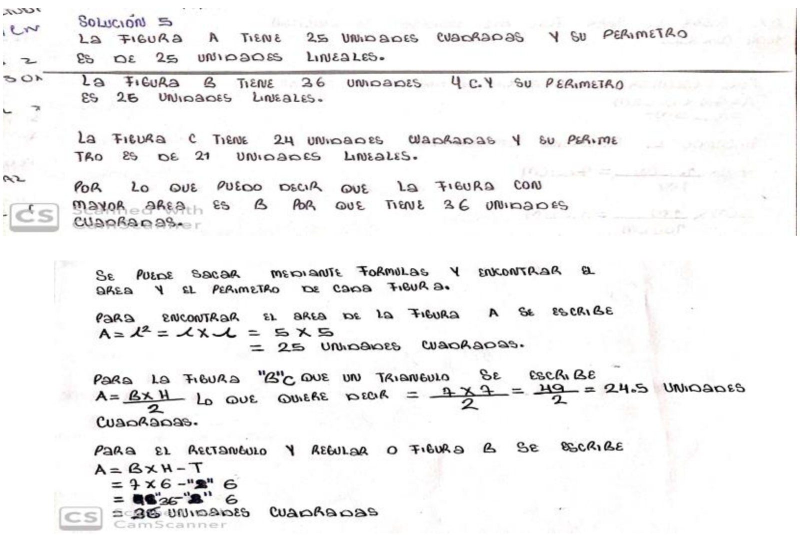
④ $5 Km^2 \times \frac{10.000 Dm^2}{1 Km^2} = 50.000 Dm^2$

Figura # 24, E5 p3 y 4

Pregunta 5

Los estudiantes debían realizar el cálculo del área de la superficie de las figuras, teniendo en cuenta la relación de los lados por lados llegando a la formalización de la noción de Área y Perímetro desde lo geométrico, algebraica y matemático.

El estudiante E7, reconoce la unidimensionalidad de las medidas de longitud y la bidimensionalidad de la medida de la superficie, cuenta unidades lineales y unidades cuadradas en cada una de las figuras; en ese mismo orden identifica la figura con mayor área para luego aplicar algoritmos numéricos que lo conlleven al cálculo del Área y el Perímetro; ver figura 25


SOLUCIÓN 5

LA FIGURA A TIENE 25 UNIDADES CUADRADAS Y SU PERIMETRO ES DE 25 UNIDADES LINEALES.

LA FIGURA B TIENE 36 UNIDADES 4 C.Y SU PERIMETRO ES 26 UNIDADES LINEALES.

LA FIGURA C TIENE 24 UNIDADES CUADRADAS Y SU PERIMETRO ES DE 21 UNIDADES LINEALES.

POR LO QUE PUEDO DECIR QUE LA FIGURA CON MAYOR AREA ES B POR QUE TIENE 36 UNIDADES CUADRADAS.

SE PUEDE SACAR MEDIANTE FORMULAS Y ENCONTRAR EL AREA Y EL PERIMETRO DE CADA FIGURA.

PARA ENCONTRAR EL AREA DE LA FIGURA A SE ESCRIBE

$A = l^2 = l \times l = 5 \times 5$

$= 25$ UNIDADES CUADRADAS.

PARA LA FIGURA "B"C QUE UN TRIANGULO SE ESCRIBE

$A = \frac{B \times H}{2}$ LO QUE QUIERE DECIR $= \frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$ UNIDADES CUADRADAS.

PARA EL RECTANGULO Y REGULAR O FIGURA B SE ESCRIBE

$A = B \times H - T$

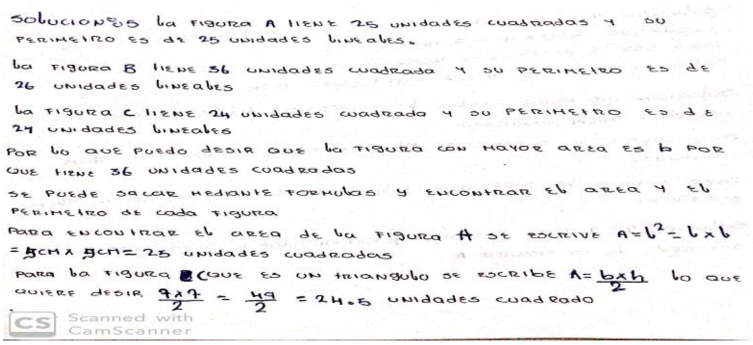
$= 7 \times 6 - $ "2" 6

= "36" "2" 6

= 36 UNIDADES CUADRADAS

Figura # 25, E7 p5

El estudiante E5, E13, E16 y E18; realizan bien el procedimiento con el conteo de los cuadrados de cada figura, pero también utilizan algorítmico numérico como por ejemplo para la primera figura emplean la multiplicación de lado por lado para encontrar el área y el perímetro, dejando ver la concepción objeto. Al escribir los centímetros cuadrados, menciona son las unidades cuadrados; donde se olvida que está trabajando con las medidas de longitud. Presentando dificultad al multiplicar centímetro por centímetro; (ver figura 26, 27, 28 y 29).



soluciones 5 la figura A tiene 25 unidades cuadradas y su perimetro es de 25 unidades lineales.

la figura B tiene 36 unidades cuadrada y su perimetro es de 26 unidades lineables

la figura C tiene 24 unidades cuadrado y su perimetro es de 24 unidades lineales

Por lo que puedo desir que la figura con mayor area es b por que tiene 36 unidades cuadradas

se puede sacar mediante formulas y encontrar el area y el perimetro de cada figura

Para encontrar el area de la figura A se escrive $A = l^2 = l \times l$ $= 5cm \times 5cm = 25$ unidades cuadradas

Para la figura C (que es un triangulo se escribe $A = \frac{b \times h}{2}$ lo que quiere desir $\frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$ unidades cuadrado

Figura # 26, E5, p5

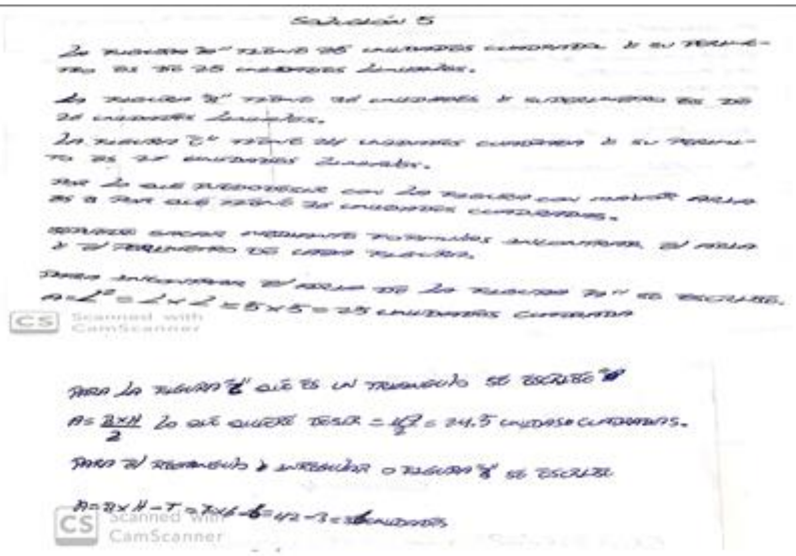
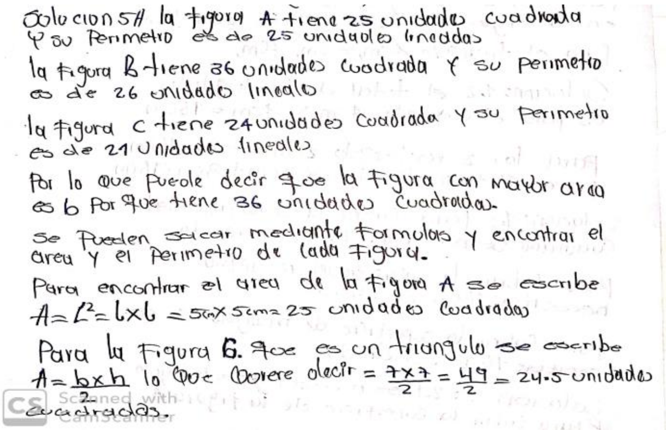
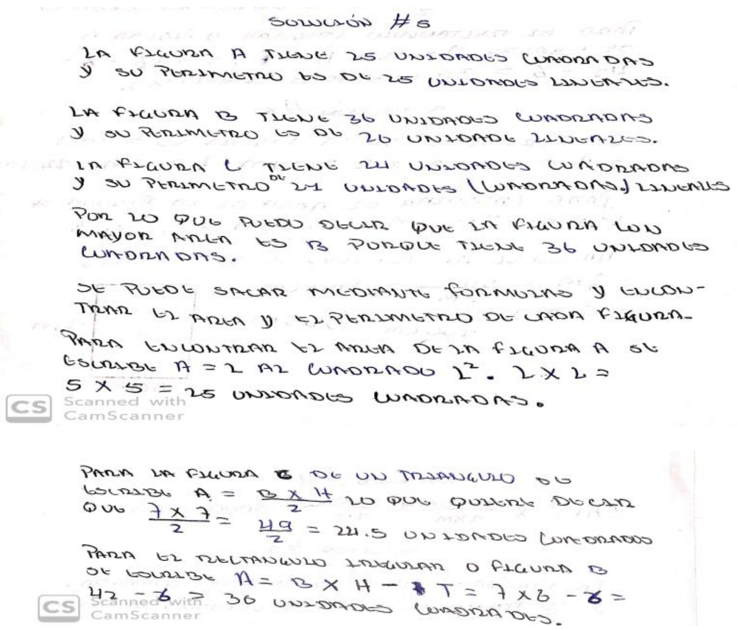


Figura # 27, E13, p5



Solucion 5# la figura A tiene 25 unidades cuadrada y su Perimetro es de 25 unidades lineales
la figura B tiene 36 unidades cuadrada y su perimetro es de 26 unidades lineales
la figura C tiene 24 unidades cuadrada y su perimetro es de 21 unidades lineales
Por lo que puede decir que la figura con mayor area es B por que tiene 36 unidades cuadradas.
Se pueden sacar mediante formulas y encontrar el area y el perimetro de cada figura.
Para encontrar el area de la figura A se escribe
$A = L^2 = L \times L = 5cm \times 5cm = 25$ unidades cuadradas
Para la figura B. que es un triangulo se escribe
$A = \frac{b \times h}{2}$ lo que quiere decir $= \frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$ unidades cuadradas.

Figura 28, E16, p5



SOLUCIÓN #5
LA FIGURA A TIENE 25 UNIDADES CUADRADAS Y SU PERIMETRO ES DE 25 UNIDADES LINEALES.
LA FIGURA B TIENE 36 UNIDADES CUADRADAS Y SU PERIMETRO ES DE 26 UNIDADE LINEALES.
LA FIGURA C TIENE 24 UNIDADES CUADRADAS Y SU PERIMETRO DE 21 UNIDADES (CUADRADAS) LINEALES
POR LO QUE PUEDO DECIR QUE LA FIGURA CON MAYOR AREA ES B PORQUE TIENE 36 UNIDADES CUADRADAS.
SE PUEDE SACAR MEDIANTE FORMULAS Y ENCONTRAR EL AREA Y EL PERIMETRO DE CADA FIGURA.
PARA ENCONTRAR EL AREA DE LA FIGURA A SE ESCRIBE $A = L$ AL CUADRADO L^2. $L \times L = 5 \times 5 = 25$ UNIDADES CUADRADAS.

PARA LA FIGURA B QUE ES UN TRIANGULO SE ESCRIBE $A = \frac{B \times H}{2}$ LO QUE QUIERE DECIR QUE $\frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$ UNIDADES CUADRADOS
PARA EL RECTANGULO IRREGULAR O FIGURA B SE ESCRIBE $A = B \times H - T = 7 \times 6 - 6 = 42 - 6 = 36$ UNIDADES CUADRADOS.

Figura 29, E18, p5

Pregunta 6

Esta pregunta los estudiantes E4, E9, E11 y E19, realizaron el dibujo del rectángulo para luego calcular su área y su perímetro, relacionando la formalización aritmética, algebraica y geométrica; lo que permite afirmar que la concepción objeto fue asimilada ya que responden correctamente a los interrogantes planteados: ver figuras 30

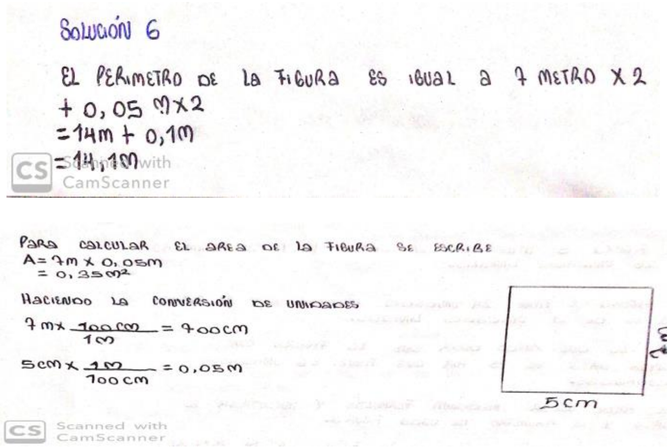


Figura 30, E4, p6

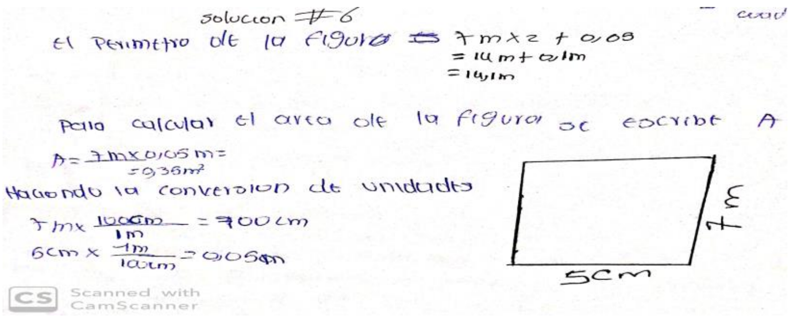
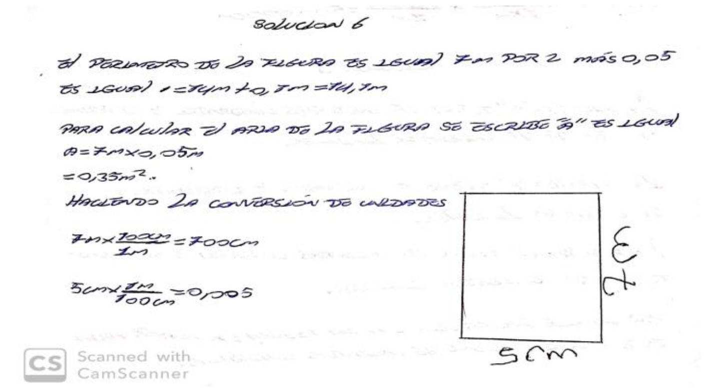


Figura 31, E9, p6



Solución 6

El perímetro de la figura es igual 7m por 2 más 0,05
es igual a $=14m + 0,1m = 14,1m$

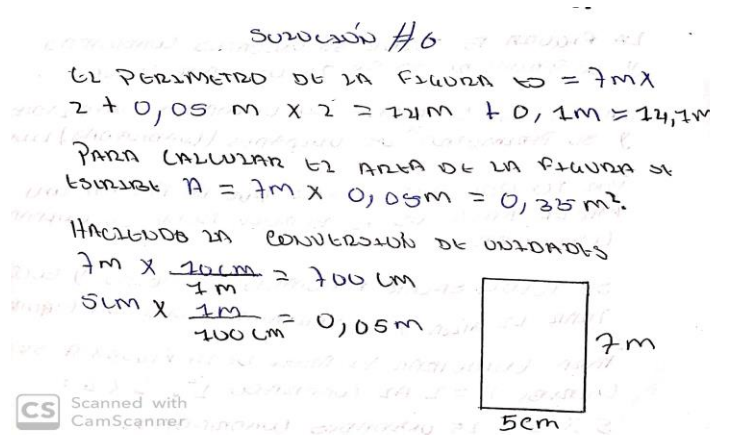
Para calcular el área de la figura se escribe "A" es igual
$A = 7m \times 0,05m$
$= 0,35m^2$.

Haciendo la conversión de unidades

$7m \times \frac{100cm}{1m} = 700cm$

$5cm \times \frac{1m}{100cm} = 0,005$

Figura 32, E11 p6



Solución #6

El perímetro de la figura es $= 7m \times 2 + 0,05\ m \times 2 = 14m + 0,1m = 14,1m$

Para calcular el área de la figura se escribe $A = 7m \times 0,05m = 0,35\ m^2$.

Haciendo la conversión de unidades

$7m \times \frac{10cm}{1m} = 700\ cm$

$5cm \times \frac{1m}{100\ cm} = 0,05m$

Figura 33, E19, p6

5.2 DISCUSIONES DEL CAPITULO

De acuerdo con los resultados obtenidos por parte de los estudiantes en la aplicación del cuestionario se pudo evidenciar la forma como los estudiantes logran comprender los conceptos de Área y Perímetro de figuras planas mediante la manipulación de objetos concretos con el recubrimiento de longitudes y superficies denominadas acciones, llegando a la formalización algebraica del objeto matemático conocido como proceso. Lo que permite llegar al cálculo de áreas y perímetros de cualquier figura plana.

De este modo queda demostrado la validación de la Descomposición Genética como modelo para que los estudiantes comprendan el objeto matemático y para que las practicas docentes sean más fructíferas a la hora de abordar dichos conceptos.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En capítulo 6, se presentan las conclusiones del Área y del Perímetro de figuras planas como objetos de estudio matemático. Desde este punto de vista se presentan las conclusiones en términos de lo epistemológico, la Teoría APOE, objetivos, pregunta de investigación, relación de los pensamientos geométrico y numérico variacional y por último la unidad didáctica.

6.1 DESDE EL HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

Los conceptos de Área y Perímetro han evolucionado considerablemente, ya que se presentan algunas etapas en su desarrollo; una primera etapa se centra en la mirada de lo geométrico donde se evidencian Acciones en la medición de tierra y la construcción de cavas para el almacenamiento de los alimentos, mirando a si una aproximación emperica al objeto matemático. Esto se logra gracias a las civilizaciones egipcias y Babilónicas, registrados en algunos papiros. Una segunda etapa es la formalización de los conceptos determinado por el proceso donde aparecen los algoritmos y fórmulas matemáticas, comenzándose a hablar de longitudes y superficies; esto se logra gracias a las civilizaciones griegas que fueron los que recopilaron toda la información encontrada en los papiros y lo establecen en lo que hoy se conoce como demostraciones y postulados. Una última etapa es la relación que existe entre los conceptos de Área y Perímetro objeto de estudio con otros conceptos matemáticos, tal como es el planteamiento y resolución de situaciones donde utilicen la parte algebraica.

6.2 CON BASE A LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

Las estructuras y mecanismos mentales definidos en la descomposición genética hipotética, permitió apreciar la manera como los estudiantes construyen mentalmente los conceptos de Área y Perímetro de figuras planas; validando a si la hipótesis, por medio de los resultados obtenidos en el cuestionario y el estudio epistemológico del objeto matemático.

Para el recorrido propuesto en la D.G y el objeto Área y Perímetro de figuras planas, se debe tener en cuenta la importancia de la relación del saber matemático con lo geométrico teniendo acciones concretas para la formalización en procesos, iniciando con acciones de conteo de unidades y recubrimiento de superficies que facilita la construcción de los conceptos de Área y Perímetro; en el planteamiento de situaciones que relacionan operaciones con números reales, en contextos de medición de superficies y longitudes, lo que permite una comparación entre superficies teniendo en cuenta que las más pequeñas son tomadas como punto de referencia para la comprensión y representación de los conceptos. Dando origen a procesos de carácter iniciador y generador.

El mecanismo de interiorización se presenta en la medida en que el estudiante genera acciones mediante el conteo lineal y el recubrimiento de superficie de figuras planas, llegando a familiarizarse con situaciones geométricas; también se puede decir que se tiene acción con el uso de unidades de medidas que permiten asignar valor numérico y con lleven a identificar algoritmos que sustituyen el conteo desde dos miradas una unidimensional y la otra bidimensional de los conceptos de Área y Perímetro.

De igual manera la formalización se logra cuando dos procesos son coordinados, como es el caso del que determina el iniciador geométrico y el generador métrico numérico lo que permite llegar de lo concreto a lo general de los conceptos del Área y el Perímetro, llegando a si a la encapsulación en la medida que el estudiante es capaz de reconocer las características del Objeto matemático en cualquier situación que involucre el paso del recubrimiento y asignación numérica al uso generalizado teniendo en cuenta las unidades de medidas unidimensional y bidimensional. Por lo que no fue posible lograr demostrar el mecanismo de encapsulación del Objeto. Confirmando lo dicho por Mena (2011) en Gamboa (2013), cuando afirma que, en la construcción del objeto matemático, el mecanismo de encapsulación es el más importante, pero a la vez el más difícil de lograr.

6.3 CON BASE A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que la pregunta de investigación es: ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos de Área y el Perímetro de figuras planas en el grado octavo, al implementar una unidad didáctica fundamentada en la teoría de APOE para el desarrollo de competencias matemáticas?, con el análisis de los resultados y las evidencias obtenidas esta la respuesta, lo que consolida a la DG del objeto Áreas y Perímetro, donde se evidencia la manera como los estudiantes llegan a la construcción del conocimiento, entendiendo el Área como una región limitada en el plano o la cantidad de unidades cuadradas que recubre una superficie y el Perímetro como la longitud total del contorno de una figura o que tan largo es un objeto lo que permite establecer relaciones entre la concepción geométrica y numérica lo que conlleva a una asimilación del objeto matemático y relacionarlo con otros conceptos contextualizando las prácticas de aula en actividades propias de la Unidad Didáctica. Lo que permite potencializar las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos de área y perímetro de figuras planas en la realización de actividades en el aula.

6.4 CON BASE A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIO.

En cuanto el alcance de los objetivos trazados en este trabajo de investigación se muestra evidencia que permite demostrar el cumplimiento y lo importante que puede ser en las prácticas educativas, teniendo en cuenta el análisis de los resultados y la validación de la descomposición genética, es relevante resaltar el conocimiento de las estructuras y mecanismos mentales en las escuelas.

Se plantea el objetivo general como: Analizar las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos de Área y el Perímetro de figuras planas en el grado octavo, al implementar una unidad didáctica fundamentada desde la teoría de APOE en las prácticas de aula. Queda evidenciado cuando en la validación de la DG se reconoce la necesidad de realizar actividades que lleven a los estudiantes al reconocimiento de los conceptos de área y perímetro con material didáctico concreto, teniendo en cuenta las estructuras y mecanismos mentales que describe la teoría APOE, el recubrimiento, la comprensión de unidades unidimensionales y bidimensionales para llegar a la generalización del objeto.

Por otro lado, los objetivos específicos se abordan a lo largo de la investigación desde el inicio con la definición de las estructuras y mecanismos mentales que se evidencian en las prácticas de aula de los conceptos de Área y Perímetro de figuras planas, sirviendo de base para el diseño de la DG del objeto matemático que fundamenta la Unidad Didáctica del mismo, realizando actividades de aula para los estudiantes que propician el desarrollo de las competencias matemáticas.

Desde ese punto de vista se puede decir que:

- Se logró diseñar la DG que describe las estructuras y mecanismos mentales que debía lograr un estudiante para comprender los conceptos área y perímetro de figuras planas.

- Se logró identificar las dificultades de los estudiantes cuando resuelven situaciones relacionados con las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos área y perímetro de figuras planas.

- Se implementaron actividades fundamentada en la teoría APOE para la construcción del objeto matemático.

- Se diseñó e implementó la Unidad Didáctica, que permitió potencializar las construcciones de los estudiantes sobre el objeto matemático

6.5 LA UNIDAD DIDACTICA

Como resultado al trabajo de investigación sustentado en la DG de los conceptos del Área y el Perímetro de figuras planas, presentando diversos pasos que permiten pasar por las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes construidos a partir del recubrimiento y manipulación de material concreto que lo conlleva a construcciones más complejas, por lo que las prácticas educativas dejan de ser trasmisión de fórmulas y algoritmos para convertirse en espacios más llamativos donde se mezcle lo geométrico con lo variacional. En este orden de idea las situaciones encontradas en la Institución Educativa Ambiental Saulo Sánchez Córdoba en el componente geométrico métrico en las pruebas internas y externas se atacan profundizando en los conceptos de operaciones básicas, elementos básicos de la geometría y en las variables ya que son base para otros procesos matemáticos que van a permitir mejorar los resultados en las aulas. Convirtiéndose en un factor motivante para el desarrollo de las distintas actividades propuestas, mostrando así la forma de construir el Objeto matemático, mediante las estructuras y mecanismos mentales diseñadas por la Descomposición Genética hipotética.

6.6. CONTINUIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se puede continuar teniendo en cuenta lo siguiente:

Aplicando en las prácticas de aulas la estrategia pedagógica de APOE denominada ciclo de enseñanza ACE, para profundizar en la DG y mejorar las construcciones mentales de los estudiantes.

Dar a conocer en otras instituciones educativas el proyecto de investigación

6.7. PARA MEJORAR.

Vincular al cuerpo de docentes de la institución con la aplicación de un cuestionario, para observar cómo están impartiendo los conceptos matemáticos en sus educandos. Esto se puede hacer a través de preguntas basadas en las metodologías y estrategia utilizadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J.H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. Rev.investig. desarro. innov, 7(1), 77-92.

Asiala (1996). for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (Vol. 6, pp.1 - 32). Rhode Island, U.S.A.: American Mathematical Society.

Arenas Avella, M. F. Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia, Medellín).

Arnon, I. Cottrill, J. Dubinsky, E. Martínez, O. Roa, D. Trigueros, M. y Weller, K. (2014) Teoría APOE: Un marco para la investigación y el plan de estudios. Desarrollo en materia de enseñanza de la matemática. Ed. Springer Science+Business Media Nueva York.

Corberán, R. (1996). *EL ÁREA RECURSOS DIDÁCTICOS PARA SU ENSEÑANZA EN PRIMARIA*. Recuperado el 18 de febrero de 2018, de http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime* (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa). Vol. 10, N.39-68. ISSN: 1665-2436.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática. 8(3), 25 – 41.

Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer, 95- 126.

Camargo, L., García, G. (2003). Matemática Alfa con estándares 7º Enseñanza secundaria. Editorial Norma. Bogotá.

Del Olmo, M., Moreno, M., & Gil, F. (1993). Superficie y volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid, España: Síntesis.

Gutiérrez-Figueroa, Ximena; Parraguez, Marcela (2017). *Construcción cognitiva del fractal curva cerrada de Koch*. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 633-642). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González Molina, J. D. (2014). *Comprensión de los Conceptos de Perímetro y Área y la Independencia de sus Medidas, en el Contexto de la Agricultura del Café.* Recuperado el 91 18 de noviembre de 2017, de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6518/1/JuanGonzalez_2014_perimetroarea.pdf

Guzmán Santos, E. A. (2007). La enseñanza de la geometría (área y perímetro) en el sexto grado. Zamora, Michoacán, México. Recuperado el 11 de 11 de 2017, de http://200.23.113.51/pdf/25404.pdf

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112- 2124.

Parraguez, M (2009). Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial. Tesis para obtener el grado de Doctora en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México.

Pérez, B. (2012). Una Construcción del Pensamiento Aleatorio y Determinista a través de la Regresión Lineal. Trabajo final para obtener el grado de magister en didáctica de la matemática. IMA-PUCV. Chile.

Roldán, G. J., & Rendón, H. (2014). Estrategia para el estudio del área y del perímetro de figuras planas articulada al modelo socio crítico para los estudiantes de la institución educativa María de los Ángeles Cano Marques (Doctoral dissertation, Tesis de maestría no publicada. Medellín, Colombia).

Roa, S. (2009). Construcción de una descomposición genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal. Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa. 13 (1)

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto 'transformación lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigaciones y de 'Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Roa-Fuentes, S. (2008). Transformación Lineal una perspectiva desde la teoría APOE. Reporte de Investigación presentado en RELME 22 CLAME, México.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(2), 199 – 232.

Salgado, H. (2007), Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México. 129

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, volumen 17, 5-31. Trigueros M. y Oktaç, A. (2005). La Thèorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 10, 157-176

López O y García S; La enseñanza de la geometría, Instituto Nacional para la evaluación en la educación, México, 2008

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: Atale of two objects. 'In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics* '*Education* (Vol. IV, pp. 77 - 102). Providence, EEUU American Mathematical Society.

Mena, A (2011). Estudio Epistemológico del teorema del isomorfismo de Grupos. Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México.

ANEXO 1

CUESTIONARIO

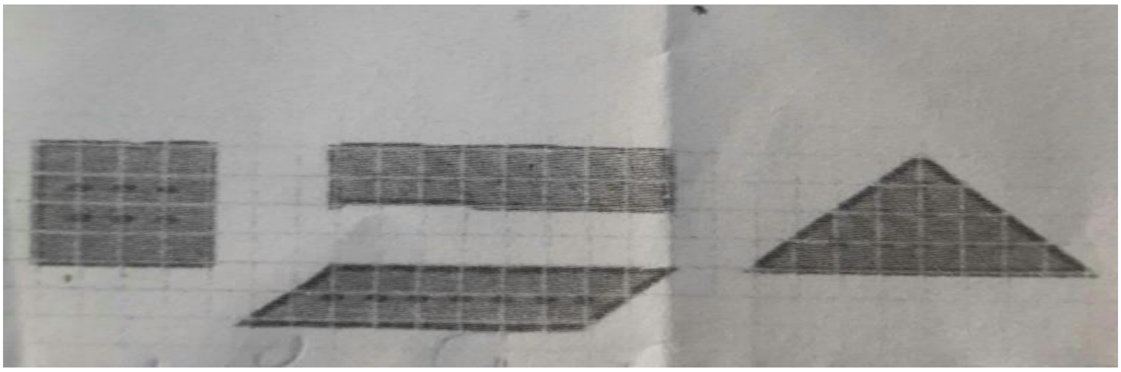
INSTITUCION EDUCATIVA AMBIENTAL SAULO SANCHEZ CORDOBA

Objetivo; verificar las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos de área y perímetro.

Tiempo previsto 1 hora y 30 segundos.

Teniendo en cuenta tu conocimiento responde las siguientes preguntas:

Pregunta 1. Observa las siguientes figuras y responde.

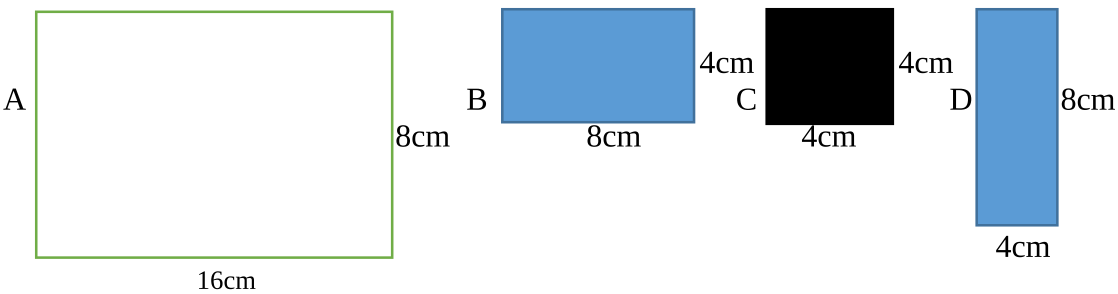


1.4 ¿Cuál es la medida de las longitudes de sus lados en centímetro?

1.5 ¿Cuál es el total de las longitudes?

1.6 ¿Cuantos cuadrados se necesitó para cubrir la superficie de cada figura?

P2. Observa la figura A; teniendo en cuenta la longitud de sus lados y la superficie de las figuras (B, C y D), responde y realiza cada diseño.



2.1 ¿Cuántos rectángulos B se necesitan para recubrir la figura A?

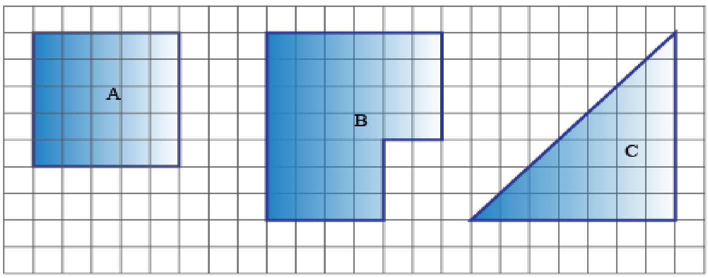
2.2 ¿Cuántos cuadrados C se necesitan para recubrir la figura A?

2.3 ¿Cuántos rectángulos D se necesitan para recubrir la figura A?

P3. Teniendo en cuenta los patrones de medida de longitud, realiza las siguientes conversión pasar 2,3 hectómetros a centímetros y 1.3 centímetros a kilómetros.

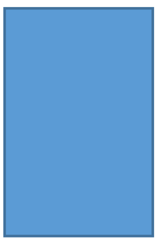
P4. Pasar 5 kilómetros cuadrados a decámetros cuadrados y 3,2 decímetros cuadrados a hectómetro cuadrados.

P5. Teniendo en cuenta las unidades lineales y las unidades cuadradas, observa las siguientes figuras y responde.



P5. . Cual es la superfice (area) que recubre cada figura, que Perimetro tiene cada una y determina cual de las Area es mayor. Si es posible utiliza otras formas de calculo.

P6. Calcula el area y el perimetro de un rectangulo que mide 7 metros de altura y 5 centimetro de base.



7 m

5cm

Respuestas de los estudiantes E1 hasta E20.

Preguntas P1 hasta P6.

Solucion: 1 las longitudes en sentimetro para el cuadrado son: 4Cm, 4Cm, 4Cm, 4Cm, Para los 2 rectangulo que se muestran en la figura son: 2cm, 8cm, 2cm, 8cm, Para el triangolo 4cm, 8 cm, 4Cm,

Solucion: 1.2 el total de las longitudes es para el cuadrado 4cm x 4cm = 16cm

para los 2 rectangulo 2cm x 8cm = 16cm
para el triangulo 4cm x 2cm + 8cm = 16cm

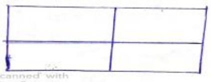
Solucion: 1.3 Para cobrir la superficie del Cuadrado se necesitan 16cm cuadrado

para cobrir la superfiecdel rectangulo se necesita: 16cm cuadrado

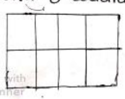
Para cobrir la superficie de triangulo se necesita: 16cm cuadrado

Pregunta 1

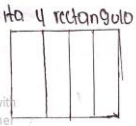
P2. Se necesitan 4 rectangulo B



se necesita 8 Cuadrado C para Cobrir la Figura



se necesita 4 rectangulo d para cobrir la Figura



Pregunta 2. 2.1,2.2 y 2.3

Soluciones la figura A tiene 25 unidades cuadradas y su perimetro es de 25 unidades lineales.

la figura B tiene 36 unidades cuadrada y su perimetro es de 26 unidades lineales

la figura C tiene 24 unidades cuadrada y su perimetro es de 24 unidades lineales

Por lo que puedo desir que la figura con mayor area es b por que tiene 36 unidades cuadradas

se puede sacar mediante formulas y encontrar el area y el perimetro de cada figura

Para encontrar el area de la figura A se escrive $A = l^2 = l \times l$ $= 5cm \times 5cm = 25$ unidades cuadradas

Para la figura B (que es un triangulo se escribe $A = \frac{b \times h}{2}$ lo que quiere desir $\frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$ unidades cuadrado

SOLUCIÓN #6

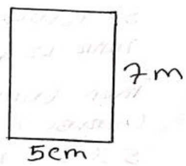
EL PERIMETRO DE LA FIGURA ES $= 7m \times 2 + 0,05\ m \times 2 = 14m + 0,1m = 14,1m$

PARA CALCULAR EL AREA DE LA FIGURA SE ESCRIBE $A = 7m \times 0,05m = 0,35 m^2$.

HACIENDO LA CONVERSION DE UNIDADES

$7m \times \frac{100cm}{1m} = 700\ cm$

$5cm \times \frac{1m}{100\ cm} = 0,05m$



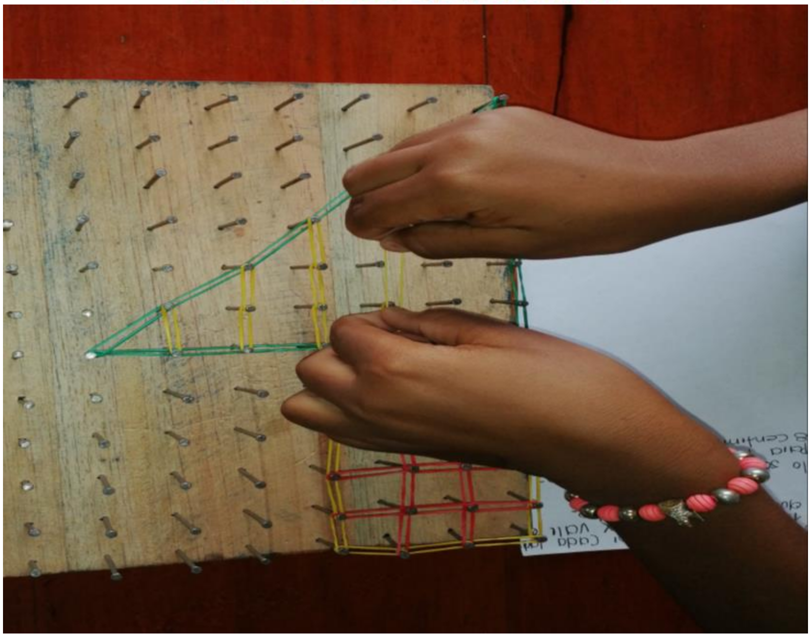
UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

ANEXO 2

Construcción del geo plano con cada uno de los grupos de trabajo en el salón de clase, para el cálculo del área y el perímetro mediante este material.

El propósito de esta actividad es mirar la importancia que tiene la utilización de materiales concretos en las prácticas de aula.

Respuesta del grupo G1 y G7 calculando área y perímetro mediante el recubrimiento de figura utilizando material concreto geo plano, alcanzando la concepción acción del objeto de estudio.



En cuanto al reconocimiento de las figuras planas el grupo G4 y G3 construyeron los siguientes dibujos

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN