LA MODELACIÓN CON TECNOLOGÍA EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN SENO

JUAN FERNANDO MOLINA TORO

Estudiante

Dr. JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA

Asesor

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

2013

Agradecimientos

Estas líneas son tal vez unas de las más difíciles de escribir para mi trabajo; todo porque es en estos momentos donde quisiera expresar mi gratitud con todas las personas que desde el trabajo, la universidad, un salón de clases, una salida de amigos y muy especialmente mi hogar; aportaron a la realización de mi tesis de maestría.

Hace algunos años me parecía inalcanzable poder realizar estudios de maestría y sacar una familia adelante con todas las obligaciones que ello genera, pero como no agradecerle a Dios si como dice la canción *"…me ha dado los hijos y la vida, si está presente en la tristeza y la alegría con la fe, con la esperanza y el amor…".*

Un abrazo y un agradecimiento muy especial a mi asesor, el Doctor Jhony Villa, quien desde el proyecto de investigación "incorporación de nuevos medios por un colectivo de profesores-con medios" UdeA-UdeM y Unesp, dedicó parte del recurso humano a lo largo de todo este proceso y se convirtió en un ejemplo de vida para mí. Al profesor José Alberto Rúa, quien como una bendición me brindó la posibilidad de vincularme a la Universidad de Medellín y con ello me abrió una puerta para seguir mis estudios en Educación Matemática.

Agradecimiento a la Secretaría de Educación de Medellín quien por medio de la Escuela del Maestro y el programa de formación avanzada, me brindaron una beca para adelantar mis estudios de maestría.

Agradecerles muy especialmente a mi madre, Regina; mi padre, Francisco; mis hermanos y amigos, por toda su colaboración y apoyo en momentos donde no veía como seguir.

Este trabajo se lo dedico con todo mi corazón a mi esposa Aleyda, mis hijos Thomas, Juan Andrés y Camilo; quienes son una bendición de Dios para mi.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

INDICE DE TABLAS

Capítulo 1

1. EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Durante varias décadas el estudio de la trigonometría ha estado inmerso en los currículos escolares de las instituciones educativas del país; su importancia y aplicación en problemas de la vida real, ha permitido que sea insumo, entre otras, para el estudio de la física o la geometría analítica proporcionando elementos que promueven el establecimiento de relaciones entre magnitudes, y permitiendo la interpretación y el análisis de algunos fenómenos periódicos como: ondas, vibraciones, electricidad, señales en telecomunicaciones, entre otros.

En este capítulo desarrollaré algunos elementos de carácter didáctico e histórico que dieron origen al estudio reportado en este trabajo, para luego dar cuenta del problema de investigación.

1.1 Antecedentes desde la experiencia en el Aula

En un curso de trigonometría es común encontrar jóvenes que, a pesar de haber pasado al menos nueve años de su formación matemática en las instituciones educativas, reflejan dificultades relacionadas con algunos conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades en el estudio de la misma. Hay una serie impedimentos para establecer relaciones entre cantidades (el doble de, la mitad de, la tercera parte de…) y otras dificultades que tienen que ver con el manejo del lenguaje simbólico y su decodificación (Mora, Nieto, Polanía, Romero, & González, 2012).

Cuando se trabaja con fracciones solamente parece que es claro, en algunos casos, todo el proceso algorítmico que se siguen con éstas para reducir expresiones numéricas o algebraicas; sin embargo, cuando se indaga por la naturaleza y la interpretación de los resultados, las consideraciones van acompañadas de números sin sentido o, en muchos casos, incomprensibles ($1.\overline{3}; \sqrt{2}; \pi, e, \ldots$). Parece que el excesivo énfasis en lo procedimental, ha dejado de lado la reflexión y el análisis de otras situaciones que van más ligadas al contexto en el cual se desarrolla la trigonometría (relaciones métricas en el triángulo rectángulo, solución de situaciones problema, entre otras).

El trabajo con magnitudes y, en éste, la relación de las mismas, muestra que conceptos previos como el de razón y proporción podrían estar en los cimientos de una buena comprensión de las razones y funciones trigonométricas y, por tanto, cualquier limitación en los primeros podría generar a priori, dificultades para el trabajo con elementos de la trigonometría. De manera particular, los estudiantes, en busca de la relación parte-todo, en ocasiones muestran una limitación en el entendimiento de expresiones como ($\sin\theta = \frac{y}{r},\ v = \frac{s}{t}, \ldots$) y, por ello, dejan frecuentemente todo el trabajo de aprendizaje de las razones trigonométricas a la repetición o a la aplicación de procedimientos algorítmicos. De allí que pueda perder sentido “resolver problemas” con la ayuda de las mismas o encontrar unas cantidades en términos de otras.

Observando el trabajo de análisis de gráficas, la experiencia en el aula de clase muestra que los estudiantes evidencian limitaciones en apreciar relaciones entre magnitudes; en algunos casos su descripción se reduce al trazado de líneas que parecen "montañas" y en otros, a una creación uniforme y regular de formas que visualmente son agradables, pero que se articulan poco con el entorno y pierden sentido en relación con la realidad (para el caso de las funciones seno y coseno). Hay una carencia de elementos conceptuales que no permiten dar cuenta de las diferentes variaciones que se pueden presentar en una representación gráfica y su relación con las magnitudes involucradas en ella; lo que limita el avance de los estudiantes, máxime cuando el estudio de la trigonometría implica ciertos cambios y desarrollos conceptuales.

Otro elemento que vale la pena mencionar tiene que ver con el tipo de contextos que se utilizan para establecer las conexiones entre la trigonometría y el entorno o cotidianidad. Se puede apreciar en algunos libros de textos, que "las tareas hacen uso más recurrente de enunciados verbales de contexto evocado " (Tavera & Villa-Ochoa, 2013, pág. 7) y dichas conexiones quedan en repetidos casos supeditados a los "problemas prototipo"; los cuales es común encontrarlos, cuando se hace una revisión de cada uno de los capítulos donde se desarrollan conceptos trigonométricos, y en los cuales se busca que el estudiante replique lo que se ha trabajado durante todas las sesiones, halle valores arbitrariamente y encuentre resultados atípicos a las situaciones que comúnmente aprecia en su entorno.

Es común encontrar en libros de texto por ejemplo, que las razones trigonométricas se definen en el triángulo rectángulo, luego se toma uno de éstos para desarrollar unos ejemplos en los cuales se repitan los procedimientos algorítmicos anteriores, se resuelve un "problema" que generalmente tiene que ver con la búsqueda de una altura, y posteriormente se enuncia la ejercitación, siguiendo casi la misma estructura de solución de triángulos y "problemas prototipo" para encontrar una distancia. En este sentido Borba y Villarreal (2005) afirman que en una actividad de aula tradicional, donde predomina el trabajo con libros de texto la secuencia teoría-ejemplos-ejercicios es común. Situaciones como estas muestran que ese énfasis en lo procedimental no permite ver las bondades del trabajo con la trigonometría, ni tampoco el análisis que se podría hacer al trabajar con mediadores en tecnologías de la información y la comunicación.

En el caso de la educación superior, los contenidos temáticos como amplitud modulada y frecuencia modulada en telecomunicaciones; corriente alterna y electricidad en ingeniería eléctrica o electrónica; el movimiento armónico simple en Física, entre otros; muestra que la trigonometría tiene una vasta cantidad de aplicaciones en muchos de los contextos de otras áreas del conocimiento y que sigue presente en varios de los currículos académicos universitarios; sin embargo, al parecer los estudiantes muestran también dificultades al reconocer el tipo de función trigonométrica que está inmersa en los problemas y las diferentes variaciones que éstas tienen al trabajar con información procesada en gráficos.

1.2 La trigonometría al interior del aula de clase

En la última década con la publicación de los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006), el estudio directo de la trigonometría se ubica en la Educación Media para los estudiantes que cursan el grado décimo y han pasado por el estudio de la aritmética, el álgebra y la geometría de la Educación Básica Secundaria.

El Ministerio de Educación Nacional en su texto de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas declara como un propósito al finalizar el ciclo de Educación Media que los estudiantes estén en capacidad de "*describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas*" (p. 88). Esto muestra que dentro de los documentos rectores, la trigonometría también es un vínculo que permite establecer relaciones entre la matemática y el contexto, y además, que su desarrollo está enmarcado en el pensamiento espacial, aunque no sea exclusivo de este tipo de pensamiento, y tenga elementos de lo numérico, lo variacional y lo métrico.

El acercamiento de los jóvenes al estudio de la trigonometría es un reto para el trabajo de aula, puesto que la descripción y modelación de una situación real, queda enmarcada no sólo en un contexto de la matemática, sino también, en el contexto y la dinámica que rodea el entorno escolar.

Los afanes de replantear la enseñanza de la trigonometría se ven expresados, entre otros, en el rediseño de los libros de texto (notas históricas, apuntes, diagramas, gráficos) que acompañan la dinámica de trabajo dentro del aula de clases, y son éstos el insumo inicial del que muchos profesores parten para diseñar los momentos de su intervención en el aula; de ahí que en algunas instituciones, los planes de área han estado marcados por las secuencias que presentan como guías, los libros de texto.

Una mirada a varios de estos materiales escolares publicados antes de las orientaciones dadas con la publicación de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, muestra que se toma el desarrollo de la trigonometría como un trabajo secuencial que iniciaba en el estudio de los ángulos, el triángulo rectángulo y el teorema Pitágoras, para un posterior estudio de las relaciones trigonométricas, también llamadas razones trigonométricas. Posiblemente este tipo de secuencias al interior del aula pueden inducir a una mirada de las matemáticas como un área “fría”, donde aparecen una serie de elementos abstractos (sen, cos, tan) que se interpretan en un juego de palabras dejadas en el discurso pedagógico y que reciben un tratamiento algebraico, pero en algunos casos, no establecen conexiones con elementos más cercanos a la realidad del estudiante. Este tipo de miradas se reafirma cuando el enfoque en este tipo de secuencias, no presta importancia a la naturaleza de tales nociones sino a las potencialidades que éstas tienen para el tratamiento algebraico de algunos problemas de aplicación. Poner el énfasis solo en el componente algebraico implica ver en la ejercitación procedimental una fuente poderosa de aprendizaje de los procesos algorítmicos en los cuales se hace fundamental saber diferenciar las partes que componen una razón trigonométrica y las múltiples combinaciones que se podrían establecer entre éstas, ya que finalmente existe un rótulo para cada una de ellas; sin embargo, no se aprecia el valor del estudio de la trigonometría en cuanto a la posibilidad de comprender su naturaleza y las diversas aplicaciones en otras ramas de las ciencias.

Las relaciones que se generaron al interior de los libros de texto entre los conceptos de ángulo, triángulo, razón, plano cartesiano, circunferencia, entre otros; dieron la idea de que para construir el concepto de función trigonométrica y hacer un estudio de su representación, era necesario establecer las razones trigonométricas, además del trabajo con las identidades, que durante mucho tiempo fue un detonante de múltiples percepciones hacia el trabajo con la matemática.

Los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006) colocaron un punto de referencia para establecer cambios en la manera como se puede diseñar el estudio de la trigonometría, pues el aprendizaje de las funciones trigonométricas son un eslabón más, para la modelación de situaciones de la “vida real” en el contexto de las matemáticas, ya que permite ampliar el campo de estudio al análisis de longitudes, al estudio de los movimientos periódicos y cíclicos, además de permitir el abordaje de contenidos presentes en la educación superior con problemas reales que allí se trabajan.

Todo lo anterior muestra la necesidad de buscar estrategias en las cuales la trigonometría esté en relación con los contextos en los cuales los estudiantes están inmersos, así como contextos de las demás ciencias; a estas relaciones me dedicaré en el siguiente apartado.

1.3 La trigonometría y los contextos cotidianos y científicos

Algunos libros de texto buscando establecer relaciones entre la trigonometría y la vida diaria, y manteniendo la misma secuencia de contenidos de los textos predecesores, empezaron a mostrar una evolución en la forma como se presentaban las actividades y como se planteaban los ejercicios, entre los cuales unos se llamaron problemas.

Las orientaciones desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas han permitido ampliar las posibilidades de presentar las matemáticas en el aula de clase y, en este sentido, los libros de texto con sus nuevos diseños llevan a los jóvenes a los escenarios de la historia de la matemática y, en ellos, a contextos de trabajo con elementos de astronomía, física e ingenierías, donde se puede ver vínculos entre la matemática y esa “realidad” en algunos casos desconocida por ellos; sin embargo, la presentación de las razones trigonométricas en cuanto a la estructura temática que le antecede, parece en algunos casos ser la continuación del trabajo que ha prevalecido desde hace muchos años, inclusive similar a la presentada en los textos de la década de los noventa. Para ilustrar esta situación, compararé dos trozos de las tablas de contenido de un par de textos trabajados en el ámbito escolar, para la enseñanza de la trigonometría, publicados en décadas diferentes.

<table>
<tr><td>Unidad 5.
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS</td><td>Unidad 2.
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS I</td></tr>
<tr><td>5-1. Repaso de algunos conceptos geométricos (Ángulos, ángulo en posición normal, radianes y arcos de circunferencia, relación entre grados y radianes
5-2. La función circular.
5-3. Las funciones seno y coseno.
5-4. Definición de seno, coseno y tangente en circunferencias de radio distinto de 1.
5-5 Signos de funciones trigonométricas.
5-6 Las funciones trigonométrica en el triángulo rectángulo.</td><td rowspan="3">Tema 1. Conceptos previos
- Ángulos, ángulos sobre el plano cartesiano, Medición de ángulos, longitud de arco, velocidad angular, velocidad lineal, triángulos.

Tema 2. Funciones trigonométricas
- Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, signos de las funciones trigonométricas en posición normal, funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantes.

Tema 3. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas para 30°, 45° y 60°, ángulos complementarios.

Tema 4. Reducción de ángulos al primer cuadrante.
- Ángulos de referencia, funciones trigonométricas de ángulos coterminales, valor numérico de expresiones que involucran funciones trigonométricas

Tema 5. Problemas de aplicación.
- Distancia a la tierra desde una nave espacial, ley de Snell.</td></tr>
<tr><td>Unidad 6.
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO</td></tr>
<tr><td>6-1. Funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.
6-2. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
6-3. Funciones trigonométricas de ángulos negativos.
6-4. Las seis funciones trigonométricas</td></tr>
<tr><td>Texto: Matemática. Una propuesta curricular 10. Bedout Editores 1990</td><td>Texto: Nuevas Matemáticas 10. Ed Santillana 2007</td></tr>
</table>

Tabla 1. Tablas de contenido de dos libros de texto del grado 10°.

En ambas tablas de contenido se puede apreciar cierta semejanza dada por la secuencia que tienen los temas, los conceptos fundamentales que se trabajan y las variaciones que hay para hablar en algunos casos, de razones trigonométricas y de funciones trigonométricas. Una parte que marca diferencia son los denominados, *problemas de aplicación*, pero al analizar este apartado, se encuentra que las situaciones allí planteadas se enfocan básicamente en la utilización de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, además de algunas pequeñas notas de carácter histórico que se dan en toda la unidad y la aplicación que tiene en otras áreas del conocimiento (por ejemplo la ley de Snell); sin embargo, no pareciera que se utilizaran para generar otro tipo de vínculo didáctico en el cual se construya la trigonometría o se explore el pensamiento de la época, en cuanto a sus necesidades y formas de solucionar sus problemas.

El "vestido" que se ha puesto con relatos y ejercicios cuyos encabezados trasladan la atención a épocas de Copérnico, Eratóstenes, entre otros; ha permitido dar pinceladas acerca de cómo surgió ese concepto de razón trigonométrica, o por lo menos saber quién trabajó algo de ello; sin embargo, todavía ese desarrollo de la teoría de los ángulos y sus unidades de medida, y el teorema de Pitágoras, son la antesala de lo que sin otra explicación diferente a las anteriores se llama trigonometría.

No siendo una finalidad de este trabajo, el desarrollar todo un análisis historiográfico para mostrar cómo fue evolucionando la trigonometría a través del tiempo; el análisis del trabajo de Montiel (2005), me permitió tener un acercamiento a algunos apartes de la historia en la cual, la trigonometría ha tenido un papel importante en la evolución del desarrollo del pensamiento; en la forma como el hombre ha podido cruzar ese puente que lo lleva de una noción intuitiva y explicativa de un fenómeno, a un razonamiento estructurado y

LA MODELACIÓN CON TECNOLOGÍA EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN SENO

RESUMEN

Este trabajo es fruto de la investigación realizada en el marco del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín. La investigación comienza con una revisión de la literatura en la cual se tuvo en cuenta como temáticas centrales la enseñanza de la trigonometría en la en la Educación Básica Secundaria y trabajos realizados alrededor de la modelación en educación matemática. A partir del análisis de toda la documentación recolectada y mi experiencia como docente de matemáticas, fui refinando mi problema de investigación, el cual delimité a través de la siguiente pregunta: *¿Cómo a través de la modelación matemática los estudiantes producen algunos aspectos conceptuales de la función trigonométrica seno asociados a la medición del tiempo?*

La revisión de los referentes teóricos sobre *Modelación en Educación Matemática* y el constructo teórico *Humans-with-Media*, me permitieron elaborar una concepción de la modelación en matemática vinculada a procesos de experimentación y simulación con tecnología, la cual fui reestructurando para diseñar el material de campo previsto para el desarrollo de la investigación.

En la convergencia entre el referente teórico, la pregunta de investigación, y siguiendo algunas recomendaciones desde la literatura, elegí el *estudio de caso* como método que permite describir los elementos alrededor de los cuales, surgen los conceptos matemáticos enmarcados en el proceso de modelación matemática que se desarrolló para este trabajo. Es desde esta perspectiva, como las observaciones en el trabajo de campo, los registros escritos y las simulaciones elaboradas permitieron obtener información para analizar cómo cuatro estudiantes de una institución educativa descubren elementos conceptuales relacionados con la función trigonométrica seno.

Los resultados, en resonancia con una construcción teórica de modelación-graficación, muestran cómo se van tejiendo vínculos entre unos objetos en movimiento dentro de una simulación, y unas representaciones gráficas desde las cuales subyacen nociones de amplitud,

período, dependencia e independencia, propias de la función seno, bajo la cual se realizó un modelo para la construcción de la experiencia.

La interfaz del programa Modellus 4 y el uso del software Camtasia (que capturó en audio y video las conversaciones y gestos de los estudiantes al interactuar con la simulación) muestran la manera como se dio la evolución de esa construcción de conocimiento matemático a lo largo de la investigación; de ahí que el papel de la tecnología, tanto para el desarrollo de la parte metodológica del trabajo, como para la producción de conocimiento es fundamental, y como lo menciona Borba & Villarreal (2005), en este tipo de procesos se convierte en un co-actor que favorece el proceso de experimentación desde el cual lo estudiantes aquí vínculados, exploran, construyen conjeturas y hablan de sus conclusiones con sus compañeros y profesores.

Palabras clave: Modelación matemática, tecnología, experimentación, trigonometría.

LA MODELACIÓN CON TECNOLOGÍA EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN SENO

RESUMEN

Este trabajo es fruto de la investigación realizada en el marco del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín. La investigación comienza con una revisión de la literatura en la cual se tuvo en cuenta como temáticas centrales la enseñanza de la trigonometría en la en la Educación Básica Secundaria y trabajos realizados alrededor de la modelación en educación matemática. La revisión de los referentes teóricos sobre *Modelación en Educación Matemática* y el constructo teórico *Humans-with-Media*, permitieron elaborar una concepción de la modelación en matemática vinculada a procesos de experimentación y simulación con tecnología. El trabajo se realizó bajo un enfoque cualitativo con el *estudio de caso* como método que permite describir los elementos alrededor de los cuales, surgen los conceptos matemáticos enmarcados en el proceso de modelación matemática que se desarrolló para este trabajo. Los resultados, en resonancia con una construcción teórica de modelación-graficación, muestran cómo se van tejiendo vínculos entre unos objetos en movimiento dentro de una simulación, y unas representaciones gráficas desde las cuales subyacen nociones de amplitud, período, dependencia e independencia, propias de la función seno, bajo la cual se realizó un modelo para la construcción de la experiencia en el aula.

Título del trabajo: La modelación con tecnología en el estudio de la función seno
Autor: Juan Fernando Molina Toro
Título otorgado: Magister en Educación Matemática
Asesor del trabajo: Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa
Programa de donde egresa: Maestría en Educación Matemática
Ciudad: Medellín
Año: 2013

Capítulo 1

1. EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Durante varias décadas el estudio de la trigonometría ha estado inmerso en los currículos escolares de las instituciones educativas del país; su importancia y aplicación en problemas de la vida real, ha permitido que sea insumo, entre otras, para el estudio de la física o la geometría analítica proporcionando elementos que promueven el establecimiento de relaciones entre magnitudes, y permitiendo la interpretación y el análisis de algunos fenómenos periódicos como: ondas, vibraciones, electricidad, señales en telecomunicaciones, entre otros.

En este capítulo desarrollaré algunos elementos de carácter didáctico e histórico que dieron origen al estudio reportado en este trabajo, para luego dar cuenta del problema de investigación.

1.1 Antecedentes desde la experiencia en el Aula

En un curso de trigonometría es común encontrar jóvenes que, a pesar de haber pasado al menos nueve años de su formación matemática en las instituciones educativas, reflejan dificultades relacionadas con algunos conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades en el estudio de la misma. Hay una serie impedimentos para establecer relaciones entre cantidades (el doble de, la mitad de, la tercera parte de…) y otras dificultades que tienen que ver con el manejo del lenguaje simbólico y su decodificación (Mora, Nieto, Polanía, Romero, & González, 2012).

Cuando se trabaja con fracciones solamente parece que es claro, en algunos casos, todo el proceso algorítmico que se siguen con éstas para reducir expresiones numéricas o algebraicas; sin embargo, cuando se indaga por la naturaleza y la interpretación de los resultados, las consideraciones van acompañadas de números sin sentido o, en muchos casos, incomprensibles ($1.\overline{3}; \sqrt{2}; \pi, e, \ldots$). Parece que el excesivo énfasis en lo procedimental, ha dejado de lado la reflexión y el análisis de otras situaciones que van más ligadas al contexto en el cual se desarrolla la trigonometría (relaciones métricas en el triángulo rectángulo, solución de situaciones problema, entre otras).

El trabajo con magnitudes y, en éste, la relación de las mismas, muestra que conceptos previos como el de razón y proporción podrían estar en los cimientos de una buena comprensión de las razones y funciones trigonométricas y, por tanto, cualquier limitación en los primeros podría generar a priori, dificultades para el trabajo con elementos de la trigonometría. De manera particular, los estudiantes, en busca de la relación parte-todo, en ocasiones muestran una limitación en el entendimiento de expresiones como ($\sin\theta = \frac{y}{r},\ v = \frac{s}{t}, \ldots$) y, por ello, dejan frecuentemente todo el trabajo de aprendizaje de las razones trigonométricas a la repetición o a la aplicación de procedimientos algorítmicos. De allí que pueda perder sentido "resolver problemas" con la ayuda de las mismas o encontrar unas cantidades en términos de otras.

Observando el trabajo de análisis de gráficas, la experiencia en el aula de clase muestra que los estudiantes evidencian limitaciones en apreciar relaciones entre magnitudes; en algunos casos su descripción se reduce al trazado de líneas que parecen “montañas” y en otros, a una creación uniforme y regular de formas que visualmente son agradables, pero que se articulan poco con el entorno y pierden sentido en relación con la realidad (para el caso de las funciones seno y coseno). Hay una carencia de elementos conceptuales que no permiten dar cuenta de las diferentes variaciones que se pueden presentar en una representación gráfica y su relación con las magnitudes involucradas en ella; lo que limita el avance de los estudiantes, máxime cuando el estudio de la trigonometría implica ciertos cambios y desarrollos conceptuales.

Otro elemento que vale la pena mencionar tiene que ver con el tipo de contextos que se utilizan para establecer las conexiones entre la trigonometría y el entorno o cotidianidad. Se puede apreciar en algunos libros de textos, que “las tareas hacen uso más recurrente de enunciados verbales de contexto evocado ” (Tavera & Villa-Ochoa, 2013, pág. 7) y dichas conexiones quedan en repetidos casos supeditados a los “problemas prototipo”; los cuales es común encontrarlos, cuando se hace una revisión de cada uno de los capítulos donde se desarrollan conceptos trigonométricos, y en los cuales se busca que el estudiante replique lo que se ha trabajado durante todas las sesiones, halle valores arbitrariamente y encuentre resultados atípicos a las situaciones que comúnmente aprecia en su entorno.

Es común encontrar en libros de texto por ejemplo, que las razones trigonométricas se definen en el triángulo rectángulo, luego se toma uno de éstos para desarrollar unos ejemplos en los cuales se repitan los procedimientos algorítmicos anteriores, se resuelve un “problema” que generalmente tiene que ver con la búsqueda de una altura, y posteriormente se enuncia la ejercitación, siguiendo casi la misma estructura de solución de triángulos y “problemas prototipo” para encontrar una distancia. En este sentido Borba y Villarreal (2005) afirman que en una actividad de aula tradicional, donde predomina el trabajo con libros de texto la secuencia teoría-ejemplos-ejercicios es común. Situaciones como estas muestran que ese énfasis en lo procedimental no permite ver las bondades del trabajo con la trigonometría, ni tampoco el análisis que se podría hacer al trabajar con mediadores en tecnologías de la información y la comunicación.

En el caso de la educación superior, los contenidos temáticos como amplitud modulada y frecuencia modulada en telecomunicaciones; corriente alterna y electricidad en ingeniería eléctrica o electrónica; el movimiento armónico simple en Física, entre otros; muestra que la trigonometría tiene una vasta cantidad de aplicaciones en muchos de los contextos de otras áreas del conocimiento y que sigue presente en varios de los currículos académicos universitarios; sin embargo, al parecer los estudiantes muestran también dificultades al reconocer el tipo de función trigonométrica que está inmersa en los problemas y las diferentes variaciones que éstas tienen al trabajar con información procesada en gráficos.

1.2 La trigonometría al interior del aula de clase

En la última década con la publicación de los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006), el estudio directo de la trigonometría se ubica en la Educación Media para los estudiantes que cursan el grado décimo y han pasado por el estudio de la aritmética, el álgebra y la geometría de la Educación Básica Secundaria.

El Ministerio de Educación Nacional en su texto de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas declara como un propósito al finalizar el ciclo de Educación Media que los estudiantes estén en capacidad de "*describir y modelar fenómenos periódicos* *del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas*" (p. 88). Esto muestra que dentro de los documentos rectores, la trigonometría también es un vínculo que permite establecer relaciones entre la matemática y el contexto, y además, que su desarrollo está enmarcado en el pensamiento espacial, aunque no sea exclusivo de este tipo de pensamiento, y tenga elementos de lo numérico, lo variacional y lo métrico.

El acercamiento de los jóvenes al estudio de la trigonometría es un reto para el trabajo de aula, puesto que la descripción y modelación de una situación real, queda enmarcada no sólo en un contexto de la matemática, sino también, en el contexto y la dinámica que rodea el entorno escolar.

Los afanes de replantear la enseñanza de la trigonometría se ven expresados, entre otros, en el rediseño de los libros de texto (notas históricas, apuntes, diagramas, gráficos) que acompañan la dinámica de trabajo dentro del aula de clases, y son éstos el insumo inicial del que muchos profesores parten para diseñar los momentos de su intervención en el aula; de ahí que en algunas instituciones, los planes de área han estado marcados por las secuencias que presentan como guías, los libros de texto.

Una mirada a varios de estos materiales escolares publicados antes de las orientaciones dadas con la publicación de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, muestra que se toma el desarrollo de la trigonometría como un trabajo secuencial que iniciaba en el estudio de los ángulos, el triángulo rectángulo y el teorema Pitágoras, para un posterior estudio de las relaciones trigonométricas, también llamadas razones trigonométricas. Posiblemente este tipo de secuencias al interior del aula pueden inducir a una mirada de las matemáticas como un área "fría", donde aparecen una serie de elementos abstractos (sen, cos, tan) que se interpretan en un juego de palabras dejadas en el discurso pedagógico y que reciben un tratamiento algebraico, pero en algunos casos, no establecen conexiones con elementos más cercanos a la realidad del estudiante. Este tipo de miradas se reafirma cuando el enfoque en este tipo de secuencias, no presta importancia a la naturaleza de tales nociones sino a las potencialidades que éstas tienen para el tratamiento algebraico de algunos problemas de aplicación. Poner el énfasis solo en el componente algebraico implica ver en la ejercitación procedimental una fuente poderosa de aprendizaje de los procesos algorítmicos en los cuales se hace fundamental saber diferenciar las partes que componen una razón trigonométrica y las múltiples combinaciones que se podrían establecer entre éstas, ya que finalmente existe un rótulo para cada una de ellas; sin embargo, no se aprecia el valor del estudio de la trigonometría en cuanto a la posibilidad de comprender su naturaleza y las diversas aplicaciones en otras ramas de las ciencias.

Las relaciones que se generaron al interior de los libros de texto entre los conceptos de ángulo, triángulo, razón, plano cartesiano, circunferencia, entre otros; dieron la idea de que para construir el concepto de función trigonométrica y hacer un estudio de su representación, era necesario establecer las razones trigonométricas, además del trabajo con las identidades, que durante mucho tiempo fue un detonante de múltiples percepciones hacia el trabajo con la matemática.

Los Estándares Básicos de Competencias (Colombia, 2006) colocaron un punto de referencia para establecer cambios en la manera como se puede diseñar el estudio de la trigonometría, pues el aprendizaje de las funciones trigonométricas son un eslabón más, para la modelación de situaciones de la “vida real” en el contexto de las matemáticas, ya que permite ampliar el campo de estudio al análisis de longitudes, al estudio de los movimientos periódicos y cíclicos, además de permitir el abordaje de contenidos presentes en la educación superior con problemas reales que allí se trabajan.

Todo lo anterior muestra la necesidad de buscar estrategias en las cuales la trigonometría esté en relación con los contextos en los cuales los estudiantes están inmersos, así como contextos de las demás ciencias; a estas relaciones me dedicaré en el siguiente apartado.

1.3 La trigonometría y los contextos cotidianos y científicos

Algunos libros de texto buscando establecer relaciones entre la trigonometría y la vida diaria, y manteniendo la misma secuencia de contenidos de los textos predecesores, empezaron a mostrar una evolución en la forma como se presentaban las actividades y como se planteaban los ejercicios, entre los cuales unos se llamaron problemas.

Las orientaciones desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas han permitido ampliar las posibilidades de presentar las matemáticas en el aula de clase y, en este sentido, los libros de texto con sus nuevos diseños llevan a los jóvenes a los escenarios de la historia de la matemática y, en ellos, a contextos de trabajo con elementos de astronomía, física e ingenierías, donde se puede ver vínculos entre la matemática y esa “realidad” en algunos casos desconocida por ellos; sin embargo, la presentación de las razones trigonométricas en cuanto a la estructura temática que le antecede, parece en algunos casos ser la continuación del trabajo que ha prevalecido desde hace muchos años, inclusive similar a la presentada en los textos de la década de los noventa. Para ilustrar esta situación, compararé dos trozos de las tablas de contenido de un par de textos trabajados en el ámbito escolar, para la enseñanza de la trigonometría, publicados en décadas diferentes.

<table>
<tr><td>Unidad 5.
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS</td><td>Unidad 2.
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS I</td></tr>
<tr><td>5-1. Repaso de algunos conceptos geométricos (Ángulos, ángulo en posición normal, radianes y arcos de circunferencia, relación entre grados y radianes
5-2. La función circular.
5-3. Las funciones seno y coseno.
5-4. Definición de seno, coseno y tangente en circunferencias de radio distinto de 1.
5-5 Signos de funciones trigonométricas.
5-6 Las funciones trigonométrica en el triángulo rectángulo.</td><td rowspan="3">Tema 1. Conceptos previos
- Ángulos, ángulos sobre el plano cartesiano, Medición de ángulos, longitud de arco, velocidad angular, velocidad lineal, triángulos.

Tema 2. Funciones trigonométricas
- Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, signos de las funciones trigonométricas en posición normal, funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantes.

Tema 3. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas para 30°, 45° y 60°, ángulos complementarios.

Tema 4. Reducción de ángulos al primer cuadrante.
- Ángulos de referencia, funciones trigonométricas de ángulos coterminales, valor numérico de expresiones que involucran funciones trigonométricas

Tema 5. Problemas de aplicación.
- Distancia a la tierra desde una nave espacial, ley de Snell.</td></tr>
<tr><td>Unidad 6.
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO</td></tr>
<tr><td>6-1. Funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.
6-2. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
6-3. Funciones trigonométricas de ángulos negativos.
6-4. Las seis funciones trigonométricas</td></tr>
<tr><td>Texto: Matemática. Una propuesta curricular 10. Bedout Editores 1990</td><td>Texto: Nuevas Matemáticas 10. Ed Santillana 2007</td></tr>
</table>

Tabla 1. Tablas de contenido de dos libros de texto del grado 10°.

En ambas tablas de contenido se puede apreciar cierta semejanza dada por la secuencia que tienen los temas, los conceptos fundamentales que se trabajan y las variaciones que hay para hablar en algunos casos, de razones trigonométricas y de funciones trigonométricas. Una parte que marca diferencia son los denominados, *problemas de aplicación*, pero al analizar este apartado, se encuentra que las situaciones allí planteadas se enfocan básicamente en la utilización de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, además de algunas pequeñas notas de carácter histórico que se dan en toda la unidad y la aplicación que tiene en otras áreas del conocimiento (por ejemplo la ley de Snell); sin embargo, no pareciera que se utilizaran para generar otro tipo de vínculo didáctico en el cual se construya la trigonometría o se explore el pensamiento de la época, en cuanto a sus necesidades y formas de solucionar sus problemas.

El "vestido" que se ha puesto con relatos y ejercicios cuyos encabezados trasladan la atención a épocas de Copérnico, Eratóstenes, entre otros; ha permitido dar pinceladas acerca de cómo surgió ese concepto de razón trigonométrica, o por lo menos saber quién trabajó algo de ello; sin embargo, todavía ese desarrollo de la teoría de los ángulos y sus unidades de medida, y el teorema de Pitágoras, son la antesala de lo que sin otra explicación diferente a las anteriores se llama trigonometría.

No siendo una finalidad de este trabajo, el desarrollar todo un análisis historiográfico para mostrar cómo fue evolucionando la trigonometría a través del tiempo; el análisis del trabajo de Montiel (2005), me permitió tener un acercamiento a algunos apartes de la historia en la cual, la trigonometría ha tenido un papel importante en la evolución del desarrollo del pensamiento; en la forma como el hombre ha podido cruzar ese puente que lo lleva de una noción intuitiva y explicativa de un fenómeno, a un razonamiento estructurado y fundamentado desde la matemática, rodeada de una elaboración de premisas y conjeturas a partir de su propia observación. Este acercamiento a la historia me dio elementos para reflexionar ciertas situaciones que se podrían desarrollar en el aula con los estudiantes, de allí que en las siguientes líneas, presentaré algunos momentos claves que en el trabajo de Montiel

(2005), dejan ver como históricamente la trigonometría estuvo asociada a problemas en contextos reales.

Un primer momento en el que se utilizan elementos de la trigonometría, aparece en el papiro de Rhind, con el nombre de *se-qet*; el cual determina una proporción en la pirámide (Heath, 1981), y al parecer dicha proporción se relacionaba con la cotangente del ángulo de inclinación de las caras de la misma.

La astronomía también estuvo rodeada de elementos geométricos en los cuales se dieron luces de algunas relaciones trigonométricas, un ejemplo de ello es el trabajo de Aristarco (310-230 aC) relacionado con la trayectoria de la luna alrededor de la tierra y las fases que ésta tiene por los rayos del sol (Commandino, 2007). Al parecer muchas culturas se basaron en observaciones de cuerpos celestes para dirigir actividades cotidianas de agricultura, medida del tiempo y comercio, generando con ello modelos astronómicos que les permitieron anticiparse a épocas de lluvia, sequía, la predicción de eclipses, entre otros.

El trabajo de Montiel (2005) presenta dos personajes que apoyados en la astronomía contribuyeron también al desarrollo de la trigonometría, por sus avances en la búsqueda de relaciones entre ángulos y lados de un triángulo, ellos son Hiparco y Eratóstenes. Este último encontró una medida del tamaño de la tierra, midiendo el ángulo de la sombra proyectada por una estaca colocada verticalmente en Alejandría, y la distancia a Siena el día del solsticio de verano. “Se considera que los cálculos y modelos de Hiparco y Eratóstenes son algunas; de las más importantes bases de la trigonometría por dar aproximaciones muy buenas, por ejemplo, al seno de ciertos ángulos” (Montiel, 2005, p. 74).

Posteriormente Ptolomeo, basándose en estudios de Hiparco, construyó una “tabla de cuerdas” para distintos arcos de circunferencia y realizó aportes a la trigonometría, los cuales aplicó también en la construcción de astrolabios. (Moreno, 2003).

El movimiento oscilatorio es también otro campo en el cual se fueron presentando elementos trigonométricos, y aunque no aparecen en la forma convencional que se conocen, se podían inferir en los trabajos de Christian Huygens con su péndulo cicloide y en toda la construcción de Robert Hooke con los resortes (Montiel, 2005). Ambos trabajos son ampliamente conocidos en la actualidad y para abordar el análisis de alguna situación relacionada con los mismos, no se les puede desligar del uso de la trigonometría.

Aunque son muchos los escenarios y momentos en los cuales la trigonometría ha estado presente en la elaboración de explicaciones y nuevas teorías, los apartados anteriores muestran como la construcción de la misma ha estado presente en diferentes momentos de la historia, acompañada de todo un pensamiento propio de la época que cada vez ha ido evolucionando y que de una forma general, han estado vinculadas a la modelación; por ello, para llevar al aula un trabajo que permita acercar al estudiante con hechos reales vividos en épocas anteriores, se hace necesario conocer algunos datos históricos y contextos que permitan el diseño de nuevas propuestas metodológicas para la enseñanza de la trigonometría.

1.4 La trigonometría y la Educación Matemática. Una mirada desde la literatura y la tecnología

El estudio del aprendizaje de la trigonometría no es nuevo en el entorno escolar, algunos estudios han determinado cuáles son los elementos didácticos más importantes que aparecen al interior del aula de clase cuando se aborda la enseñanza de la trigonometría, mostrando que en algunos casos, los docentes tienen sólo como estrategia didáctica la exposición y aunque algunas instituciones cuentan con recursos tecnológicos, los docentes hacen poco uso de ellos; además, un alto porcentaje no usa el computador como herramienta para el trabajo de clase (Sánchez, 2010).

Estudios posteriores (Arenas, Becerra, Morales, Urrutia, & Gómez, 2012) han centrado su mirada en la forma como los docentes conciben la enseñanza de la trigonometría; muestran cómo utilizan las razones trigonométricas para la solución de triángulos y problemas olvidando el contexto de los estudiantes y a partir de una intervención en el aula con una unidad didáctica, desarrollan procesos que apuntan a rescatar la representación gráfica para establecer conexiones entre las relaciones métricas y espaciales geométricas, partiendo de situaciones presentes en el entorno de los estudiantes. La tecnología aparece como mediador entre el conocimiento y el estudiante, dejando de tener el papel pasivo en el cual, como es el caso de las calculadoras, sólo se utilizaban para determinar razones trigonométricas, medidas de ángulos y longitudes.

La fenomenología entendida como la descripción de fenómenos organizados por los conceptos matemáticos y la relación existente entre ellos, surge como un eje articulador en el proceso de enseñanza. En ese sentido, Arenas et al. (2012) señalan que:

> *Algunos de estos fenómenos son la determinación de la altura de un objeto, de las coordenadas polares de un punto, de la dirección y del desplazamiento de un cuerpo en un sistema de coordenadas, el rastreo de un satélite, el cálculo de distancias inaccesibles, el cálculo de áreas y perímetros, el cálculo de ángulos de elevación y depresión y la construcción de componentes vectoriales (p. 354).*

Con estos fenómenos se construye toda una estructura metodológica que permite que el trabajo de la trigonometría tome sentido y en él sea posible determinar cuáles son específicamente las habilidades y destrezas que el estudiante está desarrollando, a partir del trabajo que realiza en el aula y fuera de ella. El papel del estudiante toma un rol que lo acerca más a la experimentación y a la necesidad en algunos casos de construir sus propias herramientas para el desarrollo de las actividades que se le asignan, dejando de lado la importancia solamente en el cálculo de datos.

La formación de los docentes es otro punto álgido en la enseñanza de la trigonometría, y estudios como el de *Comprensión de las razones Trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis* de Araya et al. (2007) muestran que la formación de los docentes, en algunos casos, no permite que se generen estrategias de enseñanza que salgan de los métodos “tradicionales”, que faciliten un aprendizaje no memorístico y que permitan una relación de los contenidos que se abordan con su aplicación en la realidad; al parecer ahí repercute una insuficiente formación de los docentes en algunos temas, y aunque se hace énfasis en la imposibilidad de generalizar los resultados, este estudio abre una línea de investigación acerca de los niveles de comprensión de los docentes de matemáticas. Al parecer, esa formación limita una enseñanza no mecánica y, a la vez, no permite encontrar en la trigonometría la evolución histórica de conceptos que han aparecido en la sociedad, vinculados a una serie de “situaciones reales”, en las cuales se generó un conocimiento matemático, que no se concebía linealmente ni tampoco se generaba de forma aislada (Figuereido, 2010). Conocer ese desarrollo histórico le posibilita al docente la determinación de los obstáculos epistemológicos, de acuerdo a la forma en que pensaban los matemáticos de aquella época y de alguna manera las dificultades que pudieran estar viviendo los estudiantes al momento de abordar contenidos matemáticos.

Desde una perspectiva socioepistemológica, un trabajo que aporta elementos de orden teórico y metodológico, muestra que “en la escuela se trata la función trigonométrica como una extensión de las razones y que su única explicación sobre la unidad de medida radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico” (Montiel, 2005, pág. 124); al parecer, la forma en que se trabaja la trigonometría desde un nivel escolar hasta un nivel medio superior, se hace para dar cuenta de algunos elementos como, dominio de la función trigonométrica, equivalencia entre grados y radianes, periodicidad, entre otros; y por lo tanto, Montiel infiere que el discurso matemático de niveles superiores asume que el trabajo alrededor de la función trigonometría ya se ha elaborado, y se debe buscar la manera de significar las prácticas en un contexto que produzca conocimiento y que vaya induciendo al estudiante a la construcción de las funciones trigonométricas. Para ello, la autora propone una visión diferente en la forma en que se aprende y se enseña la matemática, haciendo un estudio detallado de las concepciones que tienen los estudiantes sobre el estudio de la trigonometría, y de las cuales se puede inferir también cuáles son los mediadores que intervienen en el proceso de enseñanza. Dichas concepciones, anteceden a un análisis de las nociones de seno y de coseno como razón trigonométrica o como función, vistas desde diferentes marcos teóricos. Montiel, para defender su tesis desde un enfoque socio-epistemológico, hace una presentación de los momentos históricos que han permitido el desarrollo de la trigonometría y de ellos infiere tres momentos cruciales (matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor) que desde su enfoque, permiten la construcción de un modelo apoyado en actividades, prácticas de referencia y prácticas sociales.

Zengin, Furkan, y Kutluca (2011) y Fiallo (2008) realizaron trabajos en los cuales implementaron software educativos como Geogebra y Cabri, para mejorar el desempeño de los estudiantes en el aprendizaje de algunos elementos de la trigonometría; los primeros por ejemplo, encontraron que en un grupo experimental al trabajar con el Geogebra, habían avances significativos, ya que los resultados obtenidos en sus evaluaciones estaban por encima de la media del otro grupo, y que los niveles de comprensión se veian mas fortalecidos cuando el proceso de enseñanza era asistido por el ordenador.

Esto muestra a la trigonometría como un área de interés para investigar, en la cual se han realizado varias investigaciones Mora et al. (2012); Araya et al. (2007), Sanchez (2010), Arenas et al. (2012), entre otras; con resultados que permitieron observar varios significados de la razón trigonométrica, diversos sistemas de representación que aportan al trabajo individual de los estudiantes y muestran la necesidad de seguir buscando estrategias didácticas y pedagógicas con las cuales los procesos de enseñanza y de aprendizaje, faciliten la comprensión de la trigonometría en relación con el contexto que nos rodea y su comparación con otras situaciones reales que aparecieron a lo largo de la historia.

1.5 La modelación en la Educación Matemática

Durante la última década son varios los investigadores que han trabajado la modelación en Educación Matemática para desarrollar proyectos de aula. Trigueros (2009) muestra como docentes de México interesados en mejorar los resultados de los estudiantes en sus cursos, se apropiaron de unos referentes teóricos complementarios (modelación con teoría de aprendizaje de las matemáticas), para intentar garantizar el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos en sus estudiantes, y para ello, diseñaron actividades donde se pudiera aplicar la modelación a diferentes cursos, las cuales les permitiera introducir a los estudiantes la idea de variación y la ampliación de su propia visión frente al uso de las matemáticas y la física para abordar y solucionar problemas reales.

Algunos investigadores como Biembengut & Hein (2004) abordan las potencialidades que ofrece la modelación como método de enseñanza, ya que permite además de las bondades anteriormente mencionadas, mejorar la capacidad de leer, interpretar, formular y solucionar problemas. Para ejemplificar estas consideraciones, presentaron una parte del trabajo que diseñaron con una situación avícola, en la cual abordaron conceptos matemáticos como el de derivada, función , matrices y determinantes, entre otros.

Otros investigadores del ámbito internacional, como Borba y Villarreal (2005); han desarrollado trabajos que muestran la importancia de la modelación en matemáticas, y haciendo un recorrido de la evolución del concepto desde hace varios años, mencionan las diferentes concepciones tomadas por diversos autores y exponen cómo ésta lleva al aprendizaje de contenidos matemáticos relacionados con otras formas de conocimiento, además de posibiltar el trabajo interdisciplinario en convergencia con el apoyo de medios.

En el contexto nacional Villa-Ochoa (2007) desarrolló trabajos en los cuales la modelación ha sido un eje transversal que posibilita relacionar el entorno cotidiano del estudiante con las matemáticas y, en esa dirección, apropiándose de la modelación matemática como una actividad que se realiza en el aula de clases, ha propuesto a manera de ejemplo, una situación que vista desde un entorno económico, estudia el consumo de internet en una ciudad;

y para ello, propone una situación a plantearse a los estudiantes con el fin de construir conceptos relacionados con la función polinómica de grado cero y uno, generar la necesidad de utilizar diversos registros de representación y permitir el uso de software de matemáticas para su solución.

Uno de los últimos trabajos publicados en esta línea es el del profesor Berrío (2012), quien desarrolló un proceso de modelación en el aula enmarcado en el contexto del café, con el cual, posibilitó la transformación de las concepciones que sus estudiantes tenían sobre áreas cultivables en relación con la áreas euclidianas y las superficies agrarias, además de generar el reconocimietos de variables que intervienen en una situación de contexto, con algunas dependencias numéricas que les permitió la consolidación de su conocimiento, en escenarios de experimentación y reconstrucción de modelos matemáticos.

Los trabajos mencionados anteriormente son una muestra de cómo la modelacíón está siendo implementada al interior del aula, y cómo los procesos de aprendizaje no se dan sólo para el estudiante, sino también para el profesor que pone una serie de elementos dentro de la dinámica que el proceso necesita. Estudiar la matemática a lo largo de la historia permitió localizar en algunos contextos, situaciones donde ésta ha jugado un papel importante al momento de afrontar la solución de algunos problemas que fueron emergiendo en la relación hombre-mundo real. Dichos contextos posibilitaron que en la actualidad dentro de la Educación Matemática, se vea en la modelación, una estrategia que permite dotar de sentido la matemática al interior del aula y establecer otro tipo de vínculos de carácter cognitivo, social y ético entre los estudiantes, los conceptos matemáticos y el entorno que les rodea.

En el capítulo dos retomaré la modelación para describir las condiciones en las cuales se puede llevar a cabo una experiencia en el aula, además de mirar la importancia de la tecnología en el desarrollo de la misma.

1.6 El problema de investigación

La introducción de la trigonometría al aula de clases, como hasta ahora he mostrado, ha estado acompañada de diferentes circunstancias que han permeado los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje. Algunos de ellos al parecer, se atribuyen a las falencias en los programas de formación de profesores y otros caen en diferentes obstáculos didácticos o epistemológicos que han aparecido a lo largo de la historia de la mano con el desarrollo de la trigonometría.

La imposibilidad de algunos profesores de establecer relaciones entre la trigonometría y el “mundo real”, terminan agregándole a los diferentes procesos de enseñanza, una serie de obstáculos que afectan directamente la comprensión de la misma, y con ello, también se ven afectados los resultados obtenidos en diferentes pruebas de carácter institucional, nacional e internacional, las cuales en algunos casos, no indagan por resultados, valores, procedimientos, entre otros, sino por análisis, conclusiones y conjeturas que se elaboren a partir del estudio de situaciones muy precisas con las cuales se intenta valorar el nivel de aprendizaje de las matemáticas escolares.

Las situaciones más comunes con las cuales se quiere mostrar en el aula la importancia de la trigonometría han estado relacionadas frecuentemente con la medición de alturas o en su defecto, con la necesidad de hallar alguna medida; sin embargo, esos contextos históricos que ya se mencionaron anteriormente y en los que sobresalen aquellos que dejan ver otros elementos como la periodicidad, el análisis de datos reales, la abstracción de información de un fenómeno determinado, la medición en relación con otras variables, entre otras, han quedado al parecer rezagadas en el aula de clase, por lo que no se presenta en algunos casos un procesos de enseñanza que permita establecer la suficiente relación entre contextos y trigonometría.

Como una manera de atender a este tipo de necesidades en la literatura, se observa la modelación matemática como una estrategia que al vincular las matemáticas con contextos o situaciones de las demás ciencias, posibilita un aprendizaje en el cual las matemáticas tienen otros significados, en esta dirección (Villa-Ochoa, 2007) plantea que

> *La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un "micromundo" (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real.* (p. 70).

Por el desarrollo que han tenido las matemáticas a lo largo de la historia y la importancia que ha tenido al interior de otras ciencias aportando elementos para su avance, desarrollaré una propuesta de trabajo al interior del aula que permita desde la modelación, la producción de algunos conceptos relacionados con la trigonometría.

En este sentido esta investigación aborda la siguiente pregunta:

¿Cómo a través de la modelación matemática los estudiantes producen algunos aspectos conceptuales de la función trigonométrica seno asociados a la medición del tiempo?

1.7 Objetivo

Caracterizar algunos aspectos conceptuales de la función trigonométrica seno que producen los estudiantes cuando abordan su estudio a través de la modelación matemática.

Capítulo 2

2. REFERENTES TEÓRICOS

En el primer capítulo realicé una breve descripción de algunos trabajos enfocados en la modelación matemática, en los cuales, investigadores del ámbito nacional e internacional, han venido observando otras perspectivas desde donde se puede rescatar en el aula el papel de la matemática en relación con el contexto de los estudiantes, sus intereses y unos tópicos de estudio particulares, que les permita construir conocimiento matemático vinculado a escenarios de discusión, experimentación y simulación.

En este capítulo presentaré una serie de consideraciones tomadas desde varios investigadores, los cuales han construido aportes teóricos sobre el papel de la modelación en la escuela y la forma como ésta contribuye a la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes. No es una finalidad de este trabajo encontrar elementos en los cuales dichas consideraciones teóricas converjan o presenten diferencias; sin embargo, al realizar una revisión bibliográfica encontré que para el desarrollo de la presente investigación era importante considerar la forma como cada uno de los autores le ha aportado al proceso de modelación matemática en el aula; por ello, la elección del material a estudiar, no la hice desde investigaciones que tenían un fondo más filosófico que práctico, ya que, en este caso, mi problema de investigación está más dirigido al trabajo de campo con los estudiantes, y por lo tanto, mi necesidad inicial fue indagar fuentes de información que permitieran tener un amplio panorama de cómo desarrollar el proceso de modelación en el aula con los estudiantes, cuáles son las perspectivas desde las que se concibe este proceso y el tipo de relaciones que existe entre la modelación y el conocimiento matemático que se construye en este tipo de procesos. Inicialmente retomaré algunas ideas sobre la modelación en el aula de clases y sus aportes a la educación matemática, luego presentaré las perspectivas desde las cuales se han hecho elaboraciones teóricas alrededor de la modelación, y finalmente desarrollaré unos elementos teóricos relacionados con la modelación, la tecnología, los procesos de experimentación y simulación, que me permitieron construir una mirada personal de la modelación en educación matemática y dieron origen al diseño de una intervención en el aula, que presentaré en el siguiente capítulo.

2.1 La modelación matemática en el aula de clase

Durante la última década son varios los investigadores que han aportado desde sus trabajos a la enseñanza de la matemática, teniendo como estrategia didáctica la modelación (Burkhardt , 2006); Biembengut & Hein, (2004); Trigueros, (2009); Villa-Ochoa (2007); Kaiser & Schwarz, (2010). Según la literatura internacional, la modelación, ofrece otra posibilidad de trabajar la matemática en el aula de clase, permite abordar varios conceptos matemáticos, no desde la intención de llenar de historia o de información un preámbulo dirigido al desarrollo de una clase, sino con el propósito de generar conocimiento matemático desde el estudio en colectivo de un problema “ligado” a la realidad del estudiante. Dichos nexos requieren de un cambio en la forma como los docentes desarrollan sus clases, trascendiendo la enseñanza de una matemática descrita en mallas curriculares y optando por un proceso en el cual, el estudiante tenga otro rol que le permita ser partícipe de la construcción de su propio conocimiento desde la experimentación, el análisis, la toma de decisiones y la estructuración de modelos matemáticos, entre otros. En este sentido, Trigueros (2009) apunta que “en la mayor parte de los acercamientos a la modelación se intenta, más bien, aprovechar las ideas que surgen de los estudiantes para introducir conceptos importantes de la matemática" (pág. 80). Este tipo de consideraciones impone a los docentes una serie de necesidades y una gama más amplia de estrategias de enseñanza que favorezcan la convergencia de los intereses de los estudiantes a los procesos de aprendizaje de la matemática; algunas de estas estrategias deben ser en términos de Burkhardt (2006), diferentes a las utilizadas por la mayoría de los profesores para impartir el currículo esencialmente imitativo que domina las aulas en la mayoría de los países.

El trabajo con modelación matemática en el aula de clases conlleva a los estudiantes a la estructuración y validación de modelos matemáticos, los cuales se tomarán como "un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan describir, explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación" (Villa-Ochoa, 2007, p. 67); de allí que para lograr que tenga sentido su desarrollo dentro del aula de clase, es de vital importancia escoger cuáles son esos fenómenos objeto de estudio para los estudiantes, pues se busca que ellos focalicen allí sus intereses y generen unas discusiones particulares alrededor de la situación que se les presenta.

Hablar de modelación en el aula de clases no es sólo construir una serie de escenarios donde los estudiantes encuentren una expresión matemática que describa un fenómeno real; según Burkhardt (2006), las personas buscan modelos que parecen prometedores para explicar las características de datos, pero a menudo éstos resultan incompletos; por lo que reducir el sentido de la modelación sólo al hallazgo de una serie de términos matemáticos, es dejar de lado las bondades que en dicho proceso los estudiantes vivencian, a la vez que se omite una serie de situaciones en la cuales el estudiante mismo conjetura y reflexiona alrededor de la situación a la que se enfrenta. Según Trigueros (2009), en el proceso de modelación en el aula, no se piensa en construir la matemática para luego establecer un proceso de modelación, sino que se construye un conocimiento matemático a partir de la interacción y reflexión del contexto-estudiante, en el cual el docente deja de tener un papel protagónico para entregarle al estudiante la responsabilidad de tomar decisiones que le permitan construir toda una serie de significados de la situación que está estudiando.

Los contextos que posibilitan llevar a cabo el proceso de modelación en el aula, no son sólo los diferentes entornos que rodean al estudiante común en un aula de clases; algunos de ellos emergen en el discurso docente-estudiante-conocimiento, y otros, de los diferentes significados que afloran en ese diálogo pedagógico desde el cual se espera que el estudiante tome un papel protagónico y con el cual se tome su atención.

En las diferentes construcciones teóricas consultadas para el presente trabajo, se observa que la modelación es un proceso que pasa por una serie de momentos, etapas o también llamadas fases, en las cuales varios de los autores coinciden, se desarrolla toda la estrategia, haciendo énfasis en que no se da de forma lineal y, que por lo tanto, es posible que se esté retroalimentando constantemente, para rediseñar algunos elementos que la conforman.

Desde la literatura, a la unidad que forman cada una de estas fases se le conoce como el ciclo de modelación (Villa-Ochoa & Ruiz, 2009) y se hace alusión a una serie de etapas, entre las cuales aparece:

- La consecución a un fenómeno del mundo real (real en cuanto a la posibilidad de encontrarse en el contexto cotidiano que vivencian los estudiantes o en un hecho histórico). Dicho fenómeno llevado a un proceso experimental permite la observación de diferentes particularidades cuantificables con las cuales, se puede intentar obtener una serie de datos y así intentar la construcción de un modelo matemático.

- La consolidación del modelo que permita la interpretación de algunos resultados a la luz del fenómeno mismo y en algunos casos la posibilidad de predicción que emerge de su estructura matemática.
- El análisis del modelo para la estructura de una solución matemática.
- El análisis de la solución matemática a la luz del modelo, desde la cual se determinan unas conclusiones.
- Las conclusiones que emergen del análisis mismo del modelo en relación con el fenómeno y en coherencia con los resultados arrojados, permitiendo la consolidación del mismo y la elaboración de su respectiva evaluación y verificación, dando por terminado el ciclo.

Si al validar la coherencia entre el modelo encontrado y el fenómeno estudiado no se encuentran las relaciones esperadas, "se comienza de nuevo partiendo de la evaluación del fenómeno enriquecido con los análisis, se hace una observación, se ajustan los datos, las variables y se continúa la modificación del modelo… y así sucesivamente" (Villa-Ochoa & Ruiz, 2009, p. 5)

Desde el punto de vista anterior, la modelación es concebida como un proceso y particularmente para los modeladores expertos, modelado realmente implica "mirar hacia adelante" y "hacia atrás" (Burkhardt, 2006), lo que lleva a realizar una constante revisión a cada uno de los procesos y conclusiones que van obteniendo los estudiantes, para posibilitar los procesos de validación en colectivo y, por lo tanto, es importante vivir cada una de las etapas del ciclo sin el afán convencional que se maneja en un aula de clases, donde cada una de las orientaciones van encaminadas a la terminación del contenido temático.

Como se mencionó anteriormente, la modelación matemática exige que el docente amplíe su gama de estrategias para trabajar en el aula, que se desligue de la tarea de mencionar conceptos, construir procesos algorítmicos e imponer una serie de retos a sus estudiantes, ya que como lo indica Trigueros (2009):

> *La modelación no es una tarea fácil. Pensar como objetivo enseñar ambas cosas [modelación y matemáticas] simultáneamente sería muy complicado. El tiempo que puede perderse en este tipo de técnicas en un curso cuyo objetivo no es enseñar a modelar, puede empañar el propósito real de éste que es la introducción de ciertos conocimientos matemáticos, y perder la atención de los estudiantes en los aspectos conceptuales importantes de la disciplina. (p. 85)*

Aunque el papel del docente deja se ser protagónico, no por ello pierde importancia para el trabajo en el aula; la modelación matemática exige de él una postura creativa, realista, crítica e innovadora que le permita a sus estudiantes descubrir la riqueza de la matemática y su relación con los diferentes contextos en los cuales la matemática puede tener presencia.

Los escenarios, sin embargo, que favorecen el proceso de modelación pueden en algunos casos presentar limitaciones, y como lo plantea Biembengut & Hein (2004), el currículo, el horario dispuesto para las clases, el número de estudiantes por aula, y la falta de tiempo para acompañar simultáneamente el trabajo de los alumnos, puede alterar el proceso de modelación y obligar al docente a realizar modificaciones para su culminación. Otros factores apuntan a la necesidad de introducir tecnología en el aula, ya que como lo menciona Burkhardt (2006), ésta proporciona un apoyo inestimable para que los estudiantes establezcan estructuras analíticas, exploren en el cambio de valores, y efectúen cálculos de comprobación por rutas alternativas.

El desempeño de los estudiantes es otro punto en el cual se debe prestar atención, puesto que al parecer no todos los estudiantes pueden lograr interiorizar los conceptos de la forma esperada (Trigueros, 2009), lo cual muestra nuevamente la importancia de estar realizando una revisión constante del proceso para mirar que tipos de significados construyen los estudiantes, ya que el avance en los grupos de trabajo no es homegéneo, y pueden elaborarse concepciones equívocas en relación con las reflexiones que se hagan; sin embargo, como la modelación matemática en el aula ofrece ciertos vínculos que permiten otro tipo de acercamiento de los estudiante a la matemática, éste proceso permite que los estudiantes estén interrogándose constantemente y poniendo en juego sus concepciones con otros compañeros, por lo que es posible estar en una constante re-construcción de los elementos que acercan al estudiante con la matemática en la realidad.

2.2 Algunas perspectivas de la modelación matemática en Educación Matemática

Generar cambios en la enseñanza de las matemáticas, lleva consigo un conjunto de ideas y objetivos que develan la necesidad de concebir de forma diferente la matemática dentro de dicho proceso, puesto que, como se mencionó anteriormente, no es trabajar la matemática para posteriormente abordar el proceso de la modelación en el aula, sino construir conocimiento matemático dentro de dicho proceso. El análisis de esta serie de objetivos posibilitó la descripción de este apartado, entendiendo que la modelación como parte de un proceso de generación de conocimiento matemático, no se da siguiendo una sola línea de trabajo o idealizando una serie procedimientos que garanticen el aprendizaje de los estudiantes, en este sentido Kaiser & Sriraman (2006), puntualizan que no existe una comprensión homegenea sobre la modelación y sus fundamentos epistemológicos en el debate internacional sobre la temática; lo que llevaría a pensar, que para comprender dicho proceso en educación matemática, se debe ser consciente de las diferentes particularidades que ella tiene y la forma como varias personas la han concebido y han trabajado con ella; por lo que se deben estudiar sus mecanismos de implementación en diferentes lugares donde se ha investigado y se han elaborado cosntrucciones teóricas que le aportan a ese debate internacional.

Al parecer, se ha venido elaborando una caracterización de los diferentes enfoques a los cuales apunta el proceso de modelación en matematicas; un primer acercamiento a estas consideraciones para el presente trabajo, se realizó desde la investigaciones de Kaiser & Sriraman (2006), en la cuales se pueden encontrar algunas de las perspectivas en modelación matemática, sus objetivos, su relación con otras teorías y su origen; por lo tanto es posible apartase un poco de algunas consideraciones que tienen un elevado fondo filosófico y centrarse más en una categorización que permita establecer una serie de estrategias didácticas y relaciones mundo real-matemática desde los cuales se puede abordar la modelacion matemática.

Nombre de la perspectiva	**Objetivo central**	**Relación con perspectivas anteriores**	**Bases**

Realista	Resolver problemas el mundo real, la comprensión del mundo real, la promoción de las competencias de modelado	Perspectiva pragmática de Pollack	Pragmatismo Anglosajón y las matemáticas aplicadas
Contextual	Subject-related and psychological goals, i.e. solving word problems	información transformación enfoques principales a sistemas	Debates de solución a problemas de Estados Unidos así como las prácticas diarias en la escuela y el laboratorio psicológico
Educativa En sentido de lo: a) Didáctico b) Conceptual	Relación pedagogía y sujeto a) Estructuración de los procesos de aprendizaje y su promoción. b) Introducción de conceptos y desarrollo.	Perspectiva integrativa (Blum, Niss) y desarrollos del enfoque científico-humanista.	Teorías didácticas y teorías del aprendizaje.
Socio-crítica	Comprensión crítica de los alrededores mundo	perspectiva emancipadora	Enfoque Socio-crítico en sociología política
Epistemológica	promoción de la teoría del desarrollo	Perspectiva Científico-humanista "early" Freudenthal	Epistemología romana
Cognitiva (descrita como una especie de meta perspectiva)	Objetivos de investigación: a) Análisis de los procesos cognitivos que tiene lugar durante el proceso de modelado y la comprensión de estos procesos cognitivos Objetivos psicológicos: b) promoción de la matemática en procesos de pensamiento mediante el uso de modelos como imágenes mentales e incluso imágenes físicas, o haciendo hincapié en el modelado como proceso mental, como abstracción o generalización.		Sicología cognitiva.

Tabla 2. Clasificación de las perspectivas actuales en modelación. Traducción propia tomada en inglés de (Kaiser & Sriraman, 2006, p. 304)

Las perspectivas descritas anteriormente, surgieron de un análisis realizado a las propuestas convocadas por la revista ZDM en 2006. Los investigadores Kaiser & Sriraman (2006), presentaron esta categorización con toda una serie de construcciones teóricas que se fueron elaboradas por diferentes autores inscritos en unos constructos particulares; en cada una de ellas, al parecer es posible desarrollar cada una de las etapas del ciclo de modelación; sin embargo, la mirada se centrará en aspectos diferentes dependiendo del enfoque que se tome y los análisis que se elaboren con el material construido por los estudiantes.

Dada la variedad de enfoques desde los cuales puede abordarse la modelación matemática y teniendo en cuenta algunos elementos diferenciadores, este trabajo de investigación toma algunos de ellos según lo exija la situación.

Una mirada particular a la modelación matemática muestra como los estudiantes toman desiciones de acuerdo con el sistema cultural del que han venido haciendo parte, por lo tanto, para solucionar un problema propuesto en clase de matemáticas se piensa que un primer acercamiento se hace desde el interior de las mismas, y por ello, al reducir la solución a la elaboración de una expresión matemática, se está dejando de lado la estructura cognitiva que el estudiante moviliza para entregar, lo que en algunos casos es, su propia conclusión. En este sentido, Barbosa (2006) afirma que el discurso de los estudiantes son los datos, los cuales son una traducción de lo que está pasando en su cabeza regulado por el lenguaje que socialmente orienta lo que pensamos. Al respecto, se propone que ellos tengan la posibilidad de generar discusiones alrededor de ciertas caracterizaciones que se desprenden de la relación matemáticas-realidad.

La comprensión del modelo matemático construido por los estudiantes, no puede vincularse sólo a la solución del problema; en este sentido, Borba & Villarreal (2005) afirman que el modelo por sí mismo no puede determinar lo apropiado de su aplicación, sino es por el análisis y la discusión de las personas que llegan al mismo, los hallazgos, las convergencias y las limitaciones, que se dan en un examen colectivo de la solución que se acepta para tal fin.

El tipo de problemas trabajados en este sentido, deben extraerse de la realidad del sujeto que los estudiará, de los contextos cotidianos de las ciencias, pero no del interior de las matemáticas, puesto que se trata de producir conocimiento matemático a partir de la realidad cercana al sujeto y no de entornos en los cuales él no pueda inferir ciertos elementos de base que componen las construcciones teóricas desarrolladas en contextos científicos. Dichos problemas deben propiciar cierto tipo de discusiones, de las cuales Barbosa, (2006) propone las siguientes:

- Discusiones matemáticas referidas a ideas que pertenecen al campo de la matemática.
- Discusiones tecnológicas referidas a las técnicas de construcción del modelo matemático.
- Discusiones reflexivas referidas a la naturaleza misma del modelo, los criterios utilizados para su elaboración y los efectos de su utilización.

Las consideraciones anteriores dejan claro que, el trabajo en grupo, los debates y otro tipo de interacciones llevadas a cabo por los estudiantes, hacen parte del proceso de modelación matemática, y que en este tipo de entornos los estudiantes tienen una visible producción de conocimiento y re-elaboración de significados alrededor de la regulación que ejerce el otro en el conocimiento que colectivamente se construye.

En el siguiente apartado desarrollaré una mirada de la modelación que será fundamental para el desarrollo de la presente investigación, aclarando que no es una finalidad de la misma seguir un ciclo, sino observar de qué manera se produce conocimiento matemático alrededor de una situación de estudio, en la cual, el modelo matemático no se reduce a expresiones algebraicas, ya que en su lugar, la experimentación y la simulación como categorías emergentes de la modelación, permiten la construcción de conjeturas afines con el análisis de las funciones trigonométricas seno y coseno.

2.3 La modelación matemática con tecnología

En el ámbito escolar, ya ha sido ampliamente debatido que la modelación no es una tarea fácil (Trigueros, 2009) y que al estar constantemente sometida a la discusión, ella debe permitir la descentralización de una serie de procedimientos que hacen parte de la enseñanza imitativa que es común encontrar en aulas de clase. Las perspectivas que se elaboraron alrededor de la modelación, van en conjunto dirigidas a la transformación de la forma como el estudiante aborda el conocimiento matemático y no trabajando en un sentido donde la reflexión está doblegada ante la construcción de conceptos, dirigida por colectivos de profesores con premura por terminar ciclos de enseñanza, sino, encontrándole sentido a las matemáticas que van emergiendo en la solución de problemas. En este ámbito, la modelación no es un proceso sencillo y al respecto, Burkhardt (2006) habla de la necesidad de usar la tecnología para tal fin, aún abordando el estudio de un tema sencillo, pues al parecer, las bondades que ésta ofrece, proporcionan un apoyo invaluable al establecimiento de estructuras de análisis, la variación producida por diferentes tipos de datos y la disposición de múltiples rutas de comprobación de los resultados. Desde esta mirada, se hace importante abordar en este trabajo, el constructo teórico (Humans-with-media), desarrollado por los profesores Borba

& Villarreal (2005), en el cual parte de su discurso no se reduce a la forma como es utilizada la tecnología al interior del aula, sino que intenta analizar qué tipo de conocimiento se da, cuando se construye el conocimiento mediado por la tecnología y el papel que juega la experimentación matemática en este proceso.

2.3.1 Modelación vs Experimentación

Una mirada a la experimentación muestra que el uso de experimentos le ha permitido al hombre a lo largo de la historia, la reflexión de ciertos fenómenos de los cuales no se puede discernir con facilidad la génesis de su naturaleza y las consecuencias producentes del mismo; su práctica lo fue convirtiendo en un método para augurar resultados, dada la posibilidad de manipular los factores que se estudian en diferentes condiciones, permitiendo la validación o refutación de hipótesis. En este sentido, el constructo teórico afirma que la tecnología tiene un papel primordial en relación con el uso de experimentos en matemáticas y en la educación matemática, y que por ello, las matemáticas experimentales se han abierto campo, impulsadas por el impacto de los computadores. Al respecto Borba y Villarreal (2005) hablan de un movimiento en la comunidad matemática que valora el proceso de experimentación en la producción de matemáticas, y hacen énfasis en el papel de la tecnología representada entre otros, en ordenadores, calculadoras gráficas y diferentes interfaces que vinculados a ellos, pueden tomarse en conjunto como una unidad (humanos-con-los medios) reorganizante del pensamiento y de la forma misma como se produce conocimiento.

Desde esta perspectiva, se introduce otro tipo de relación entre la experimentación y la tecnología, que en términos de dicho constructo se llama experimentación-con-tecnología, y en la cual, la tecnología no es concebida como una herramienta de uso de la experimentación, sino que el vínculo mutuo de éstas permite establecer otro tipo de conjeturas e ideas nuevas, que se producen cuando se dispone de múltiples representaciones de la información, de diferentes tipos de “pruebas” y de otro tipo de dinámicas en el llamado “ensayo-error”, dada la posibilidad de poder en algunos casos, reestructurar un proceso y validarlo ilimitadamente. Aquí la *experimentación-con-tecnología* es parte de un proceso que aunque en algunos casos no se ve, abre la posibilidad de deducir las estructuras del conocimiento que se va construyendo.

La asociación de la experimentación, la tecnología y la modelación, en palabras de Borba & Villarreal (2005), contribuye a un enfoque pedagógico que también estará en resonancia con la accesibilidad a la matemática de todas las personas que con diversas aptitudes se encuentran con ella, y no sólo a algunos que a futuro se pueden dedicar a su estudio. En esta mirada, la modelación es un modo experimental de hacer matemáticas que desarrolla una forma de pensar particular e interpretativa, relacionada con la producción de conocimiento, la reunión de abstracciones y las formalizaciones relacionadas con fenómenos. En esta dirección Bassanezi citado en Borba & Villarreal (2005), considera que los pasos en un proceso de modelación son la experimentación, la abtracción, la resolución, validación y modificación, dejando de lado la importancia de un modelo matemático, poniendo como actor fundamenta la experimentación y con ella todas las diferentes alternativas en que se puede generar conocimiento no suceptible de ser validado y modificado en el proceso.

Los significados re-elaborados por los estudiantes en el proceso de modelación brindarán la posibilidad de analizar cuáles son aquellos fenómenos que permiten establecer vínculos entre las matemáticas y el mundo real, donde el colectivo de estudiantes a pesar de sus limitaciones, estructura modelos, los analiza y los valida a la luz de su propia concepción del mundo, elaborando en palabras de Trigueros (2009) sus sistemas conceptuales.

2.3.2 El papel de las gráficas en la modelación

Como se presentó anteriormente, el uso de la tecnología ofrece una serie de elementos que generan otro tipo de dinámicas al interior del aula, una de ellas, la posibilidad de tener diferentes tipos de representación de las características relacionadas con el fenómeno que se está estudiando, por ello, otro referente que complementa esta mirada particular de hacer modelación en el aula es el desarrollado por los investigadores Suárez & Cordero (2010), quienes han adoptado la modelación como una construcción teórica que realiza un individuo cuando al enfrentarse a una tarea matemática, pone en escena sus conocimientos. En este sentido, hablan de la estructura propia que posee la modelación, constituida por un sistema dinámico en el cual la simulación, es un medio que permite el desarrollo del razonamiento y la argumentación. En esta perspectiva formulan un marco de referencia en la que convergen la modelación y la graficación para la construcción de nociones de cambio y de variación.

La construcción y el uso de gráficas en modelación para Suárez & Cordero (2010), los llevó a estudiar el uso de las gráficas en la *Figuración de las Cualidades de Oresme*; y citando a Crombie señalan que "se ha identificado en este uso evidencias de modelación, en el sentido de aplicar la matemática de la época para explicar cambio en las cantidades físicas" (p. 322).

En este marco de referencia se tienen en cuenta tres premisas elaboradas por Suárez & Cordero (2010), las cuales se mencionan a continuación:

- La graficación antecede a la función, ya que ésta permite la construcción de ideas de variación. (Funcionalidad-1)
- La gráfica es argumentativa, ya que pasa a ser un elemento central de explicaciones y ello permite la construcción de argumentos. (Funcionalidad-2)

- El uso de las gráficas tiene un desarrollo en modelación, permite la cuantificación del movimiento y ciertas características asociadas con éste. (Funcionalidad-3)

En esta elaboración teórica, las gráficas toman un papel importante para la construcción de conocimiento matemático, del cual los autores concluyen que éstas, incluyen decisiones sobre elección de las variables a representar en cada eje coordenado, puntos de referencia y la percepción de aspectos característicos de la gráfica.

En conjunto, los elementos anteriores muestran que la modelación en matemática va más allá de la consecución de un modelo validado, éste aunque es muy importante para algunos autores, puede ser en algunos casos una limitante para el trabajo con los estudiantes, ya que pasar de la lectura de un fenómeno a la construcción de un modelo matemático que lo describa, es una acción mediada por toda una serie de visualizaciones, reflexiones, simulaciones, equivocaciones y conjeturas, entre otros elementos, que nutren toda la parte experimental en un proceso de modelación.

Capítulo 3

3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo presento el diseño metodológico con el cual se realizó la investigación; las etapas y técnicas para la recolección, análisis de datos y validación de resultados; en este sentido asumiré al investigador en palabras de Quecedo & Castaño (2002), como parte del entorno que estudia en interacción con sujetos inmersos en un contexto donde se producen continuamente acontecimientos, y por ello, esa interacción con el grupo de estudiantes será un mecanismo de gran utilidad para definir algunos elementos que fundamenten la investigación y le den el sentido a toda la dinámica del proceso. La consolidación de este diseño se realizará siguiendo algunos de los caminos definidos desde el enfoque cualitativo de investigación, del cual presentaré algunos elementos a continuación.

3.1 El enfoque cualitativo de la investigación

Desde hace varios años, estudios realizados con metodologías cualitativas han estado presentes en diversos trabajos de investigación (Gómez, 1998; Villa-Ochoa, 2011; Berrío, 2012) entre otros, en los cuales se observa en términos de Quecedo & Castaño (2002), la producción de datos descriptivos, en relación con las palabras (habladas o escritas) de las personas involucradas en la investigación y las conductas observables. En esta línea, la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM) de la cual hago parte, ha abordado algunas investigaciones alrededor de la modelación en Educación Matemática, mostrando otra dinámica que se genera al interior del aula de clase, cuando se pueden establecer algunas conexiones entre el “mundo real” y algunos contextos propios de las ciencias, atravesadas por el uso de medios. Esto es coherente con los planteamientos Williams et.al (2013) y de Borba & Villarreal (2005) quienes señalan que en el campo de la modelación, ven en la tecnología un medio que permite tener otras formas de representación y proporciona otra forma de enseñar las matemáticas. Estos medios (en términos de Borba y Villarreal) o artefactos (en términos de Williams) permiten el trabajo en matemáticas con otro tipo de experiencias para los estudiantes, diferentes en a aquellos que implican el uso de libros, donde la dinámica gira alrededor de la teoría, los ejemplos y los ejercicios. Una característica presente en la investigación cualitativa, es la visión particular que las personas que están siendo estudiadas hacen de las acciones, eventos y circunstancias que rodean el contexto en el que están inmersos (Aravena et al., 2006) y, en esta dirección, puesto que la pregunta de investigación indaga sobre los aspectos conceptuales que emergen en un proceso de modelación en el aula de clases, en relación con la función trigonométrica seno, esta investigación se abordará desde un enfoque cualitativo dado que desde esta perspectiva, es posible centrar la mirada en la forma como los estudiantes comprenden y profundizan aspectos que intervienen en la experimentación y simulación con elementos que subyacen del trabajo con representaciones gráficas y movimientos dependientes en un reloj.

La producción de conocimiento en esta línea debe contemplar algunas condiciones que desde Sandoval (2002) llevan a la recuperación de la subjetividad, la reclamación de la vida cotidiana como escenario para comprender la realidad socio-cultural y la intersubjetividad y el concenso, como vehículos para acceder al conocimiento validado de la realidad humana. Los vínculos establecidos entre estudiantes, conocimiento e investigador, permitirán crear condiciones de validación y verificación de algunas consideraciones que puedan emerger en el desarrollo de la investigación, las cuales en algunos momentos puedan ser puentes entre una apreciación propia de la realidad y un concepto matemático desarrollado desde la misma.

Bajo estas condiciones y teniendo en cuenta los elementos mencionados anteriormente, la investigación desarrollada desde un abordaje cualitativo, en términos de Bodgan & Biklen (1994) citado en Villa-Ochoa (2011) implica:

1. Que la fuente directa de datos sea el ambiente natural.
2. Que la investigación tenga un fuerte componente descriptivo
3. Que los investigadores se preocupen más por los procesos que por los resultados
4. Una tendencia a analizar los datos de forma inductiva
5. Y el significado se convierte en un elemento de importancia capital dentro de la investigación

Por lo tanto, de la relación de las consideraciones anteriores con el propósito de la investigación y el marco teórico, tomaré como método para el desarrollo de la investigación el estudio de casos y en el próximo apartado, desarrollaré algunas consideraciones con relación a dicho método.

3.2 El método

Conforme he mencionado en el desarrollo de este documento y dada la naturaleza de esta investigación, cuyas raíces se encuentran al interior de las aulas de clase, pretendo dar una respuesta a la pregunta:

¿Cómo a través de la modelación matemática los estudiantes producen algunos aspectos conceptuales de la función trigonométrica seno, asociados a la medición del tiempo?

Un acercamiento a la pregunta me llevó a indagar acerca del proceso de modelación en el aula de clase, su desarrollo, sus ventajas, limitaciones y la forma en que puede llevarse a cabo en el aula, motivo por el cual, elegí el estudio de casos, como método de investigación puesto que en palabras de Yin (2009), las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por la elección de dicho método para la investigación.

Varios autores han definido el estudio de casos, entre ellos destacaré tres que he encontrado en varios documentos de estudio. Yin (2009, p. 9) define que un estudio de caso es una pregunta empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real, sobre todo cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes; para él, el estudio de casos comprende una forma de abarcar el método en su totalidad con una lógica que incorpore el acercamiento al objeto de estudio y al análisis de datos.

De otro modo, Stake (2007, p. 11) señala que el estudio de casos *"es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes";* el caso se estudia por el interés que genera por sí mismo y de él [en el enfoque cualitativo] se esperan descripciones abiertas y la comprensión mediante experiencias; puesto que es una función constante del investigador en el estudio de casos, la interpretación de su centro de observación.

En esta perspectiva Salkind (1999) lo define como un *"método empleado para estudiar a un individuo o una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible"* (p. 211).

Las consideraciones anteriores dejan ver como, aunque no hay un discurso lineal que proyecte unicidad entre los diferentes elementos que defienden los autores, el estudio de casos ofrece una serie de herramientas para el desarrollo de la propuesta de investigación, dado que su fuerte componente descriptivo permite establecer unas unidades de análisis particulares, en las cuales el investigador puede interactuar con el contexto de estudio y desde allí plantear y hacer un análisis de la información, puesto que en palabras de Stake (2007), este tipo de estudios cualitativos se beneficia de la forma cotidiana de conocer las cosas.

En el siguiente apartado presentaré el diseño que se llevó a cabo en esta investigación y en palabras de Yin (2009), en éste estará la secuencia lógica que conecta todo el conjunto de datos empíricos a las respuestas que arroje inicialmente la investigación y finalmente a la elaboración de las conclusiones.

3.2.1 El diseño

Desde las orientaciones de Yin (2009) se tendrán en cuenta las preguntas de estudio, las proposiciones y las unidades de análisis, así como la forma en que ambas se conectan en el ambiente del desarrollo de la investigación, para poder realizar una interpretación y análisis de los hallazgos que emerjan durante el desarrollo del proyecto.

3.2.2 La pregunta de estudio y una proposición

Como se presentó en apartados anteriores, la presente investigación da una respuesta a cómo los estudiantes producen conocimiento matemático relacionado con la función trigonométrica seno en un proceso de modelación. Desde una perspectiva amplia sobre la *modelación*, asumo que esta pregunta puede tener una variedad de respuestas en cuanto a la forma como se aborde el "cómo"; sin embargo, para el presente trabajo será de gran ayuda no sólo detenerse en la observación directa de los conceptos emergentes en el desarrollo del proceso, sino también, en la forma y en las condiciones que propiciaron que dichos elementos salieran a relucir en unos contextos donde los estudiantes participantes de la investigación, pusieron en juego su estructura conceptual elaborada a lo largo de los años, y también, algunas consideraciones fruto de la experimentación y la simulación en el contexto de la escuela, para desarrollar una serie de actividades en las cuales vayan descubriendo a partir de la observación, elementos que les ayudarán a entender la dependencia de ciertas variables que se relacionan en el contexto de la medición del tiempo simulado virtualmente.

Como mencioné en el marco teórico, existen diferentes perspectivas sobre la modelación en educación matemática, cuyos elementos me permitieron tener una mirada propia sobre el proceso de modelación en la cual, la atención no se centra sólo en la construcción de una expresión matemática estática, sino también en los elementos dinamizadores del proceso, que permiten la producción de conjeturas en interacción de los sujetos con otros sujetos, consigo mismo y con múltiples medios. En la convergencia de estas características, emergió en términos de Yin (2009), una proposición (orientación) que dirige la atención a situaciones particulares de interés para la investigación; ésta se enmarca en dirección a:

Observar la forma como los estudiantes en interacción con los medios diseñados para la investigación, exteriorizan por medio de representaciones, verbalizaciones, observaciones, o gesticulaciones, las interpretaciones que subyacen de la experimentación y simulación en escenarios dinámicos, dotados de relaciones entre la medición y el movimiento con elementos gráficos asociados a la función trigonométrica seno.

3.2.3 El contexto

El trabajo se desarrolló en la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa del municipio de Medellín, la cual cuenta con dos sedes en las cuales se distribuyen casi 2000 estudiantes cuyos ciclos de formación están en la educación Básica Primaria, la educación Básica Secundaría y la Media Técnica en contabilidad y administración, que sirven en apoyo con personal del SENA.

3.2.4 Las Unidades de análisis

En este componente se relaciona fuertemente el caso a ser estudiado, con los elementos que hacen parte del problema de investigación; en esta dirección, Yin (2009) afirma que un grupo de personas pueden formar un caso a estudiar, donde cada uno de ellos hace parte de una unidad primaria de análisis, por lo que es importante presentar cada uno de los individuos que hacen parte de las unidades de análisis y las razones que llevaron a integrarlas al grupo de estudio. Hago claridad que no serán las personas propiamente mis unidades de análisis, sino las interacciones, los conocimientos, las acciones, las producciones y las características que dan cuenta de ciertos aspectos conceptuales relacionados con la función trigonométrica seno, en el contexto de la modelación

Los estudiantes seleccionados, son jóvenes del grado undécimo de la institución ya mencionada, los cuales recibí el año anterior en el curso de matemáticas. Para ese momento, yo no había tenido ningún contacto con los estudiantes, y tomaba con mucha expectativa trabajar con ellos la matemática prevista para el grado décimo. En un reconocimiento de las características del grupo, observé que los estudiantes tenían dificultades en el tratamiento de ejercicios con operaciones algebraicas, en la representación de elementos geométricos y algunos de ellos tenían dificultad para comunicar sus experiencias y conocimientos adquiridos hasta ese momento.

El trabajo con los estudiantes en el grado décimo fue productivo, y aunque no se alcanzó a abordar todo el contenido temático propuesto para el año, si se empezaron a utilizar otras herramientas de trabajo con ellos, diferentes a las utilizadas hasta ahora (cuaderno, tablero y libro).

Dada la posibilidad de continuar el proceso con los estudiantes matriculados en el grado undécimo, y puesto que a todos ya los había acompañado el año anterior, decidí realizar con todo el grupo la primera parte de la investigación [la concepción del fenómeno], que desde las orientaciones para trabajar la modelación en el aula, es un momento principal que direcciona el trabajo. Aquí se proyectó un video del cual hablaré más adelante, y finalizada la proyección, los estudiantes realizaron unas preguntas e hicieron unas observaciones frente al mismo. A partir de esta actividad y conforme a las orientaciones de Stake (2007) ,*"debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y en donde nuestras indicaciones sean bien escogidas,…,en los que se pueda identificar un posible informador"* (p. 17); razón por la cual, decidí invitar a la próxima sesión de trabajo a cuatro estudiantes que se mostraron muy receptivos con el tema, formularon preguntas que dan cuenta de su interés por apropiarse de conceptos desarrollados en el video y expresaron su intención de querer pertenecer al grupo de trabajo. Estos estudiantes se habían caracterizado en su grupo por ser responsables y por expresar educada y abiertamente sus puntos de vista individuales, aun estando en contraposición con lo que sus docentes o compañeros consideren, además de ser colaboradores y con buena disposición al trabajo. No fue una condición para su elección que tuvieran excelentes desempeños académicos o que se inclinaran por continuar estudios universitarios afines con la matemática.

3.3 Las fuentes, los instrumentos y el registro de la información

A continuación presentaré los instrumentos que me permitieron la obtención de los datos que serán analizados más adelante, teniendo en cuenta que la investigación se realiza desde un enfoque cualitativo.

- Observación-participante

Dado que mi papel en el trabajo de campo de esta investigación ha sido el de profesor e investigador, de acuerdo con Yin (2009), el estudio de casos agrega una fuente de evidencia enmarcada en la observación directa; en este sentido, la observación-participante, me permitió introducirme en el ambiente natural de los estudiantes, y mantener un diálogo directo alrededor de las dificultades que surgieron en la interacción de los mismos con las actividades que se proponían.

La participación en los espacios donde los estudiantes manipulaban las simulaciones, me permitió identificar aquellos momentos en los cuales, ellos empezaron a establecer relaciones entre las variables que manipulaban y los movimientos o cambios en los patrones que generaba la simulación, además de tener la posibilidad de hacer cuestionamientos alrededor de las conjeturas que ellos iban estableciendo. Para evitar los perjuicios o ideas falsas alrededor de las observaciones, se realizaron grabaciones que apoyaron el análisis posterior de la información.

- Documentos

Para Villa-Ochoa (2011) citando a Alves-Mazzotti, "puede considerarse como un documento cualquier registro escrito que pueda ser usado como fuente de información" (p.76). En este sentido, la presente investigación se apoyó en producciones escritas elaboradas por los estudiantes, en especial las que realizaron al momento de la práctica de laboratorio y las simulaciones, además de otros registros que les pedí que realizaran para representar algunas conclusiones, producto de la manipulación de las simulaciones, las cuales confirman evidencias proporcionadas por los videos y la observación-participante.

- Entrevista

Para Yin (2009), en un estudio de casos, la entrevista implica una conducta diferente por parte del investigador, la naturaleza de la misma es mucho más abierta; de allí la importancia de establecer un diálogo fluido en el cual, las preguntas vayan surgiendo. En la presente investigación, no hubo un episodio que pueda tener el rótulo de entrevista; sin embargo, las preguntas que pudieron conformar una, aparecieron en los diversos diálogos con los estudiantes al momento de interactuar con las simulaciones, de allí que algunas transcripciones de estos diálogos se utilicen como evidencia para confirmar algunas inferencias arrojadas en el trabajo.

3.4 Las fases del desarrollo

El trabajo de campo de la investigación se llevó a cabo en dos fases. En la primera, la cual nombré como fase de consolidación del fenómeno y preparación de los materiales, busqué a partir de un video, llevar a los estudiantes al campo de la observación de una situación compleja por muchos años como fue la medición del tiempo, y desde allí, hacer una abstracción de algunos instrumentos utilizados en la animación, para plantearles una práctica de laboratorio que me permitiera tener una aproximación a la forma como los estudiantes relacionan elementos matemáticos, con situaciones de medición y variación. La segunda fase la denominé de experimentación en modelación, ya que en ella pude encontrar la forma como los estudiantes fueron descubriendo algunas relaciones entre diferentes movimientos y algunas características particulares de la función trigonométrica seno.

Fase 1: Fase de consolidación y preparación de los materiales

Como lo mencioné en las líneas anteriores, esta fase se inició con la observación de un video "Erase una vez los inventores: La medición del tiempo"[1], para ello organicé el aula de clase buscando una buena proyección del video y la posibilidad de tener un diálogo con los estudiantes, en cuanto a las preguntas y comentarios sobre el mismo. Terminada la proyección del video los estudiantes consignaron en una hoja dos elementos que serían vitales para el desarrollo de la investigación, el primero un breve comentario acerca del video, y el segundo, el planteamiento de una pregunta que quisieran hacerle al narrador de la animación [un adulto mayor]. El conjunto de preguntas y observaciones me permitió identificar aquellos estudiantes que se mostraron más receptivos e interesados en el tema, de este subgrupo seleccioné los

[1] Consultado en http://www.youtube.com/watch?v=jiXnmviBBdA agosto 10 de 2012

cuatro estudiantes que mencioné anteriormente. Posteriormente los cuatro estudiantes realizaron una práctica de laboratorio que describo a continuación.

- **La práctica de laboratorio**

Este momento del trabajo se desarrolló en el laboratorio de la institución educativa y el propósito del mismo, era identificar la forma cómo los estudiantes representan las relaciones de las variables que intervienen en la medición de la distancia y el tiempo, particularmente, la manera como ellos construyen y expresan esas relaciones, ya que podría ser un primer indicio del uso de las representaciones y las verbalizaciones para intentar explicar matemáticamente el fenómeno estudiado.

Para esta práctica de laboratorio se elaboró y entregó a los estudiantes una guía de trabajo denominada ***Laboratorio de mediciones 1*** (ver anexo 1); que contenía los materiales e instrucciones para su ejecución, con unas preguntas a partir de las cuales, ellos podían describir ciertas relaciones de dependencia entre las cantidades medidas por el desplazamiento de una canica en una superficie "plana" y los instrumentos utilizados para tomarlas. Algunas preguntas permitieron que los estudiantes realizaran representaciones gráficas de las relaciones que encontraban al analizar tablas de datos.

La ejecución de este laboratorio de mediciones me permitió poner a los estudiantes ante posibles dificultades que tuvieron algunas culturas para medir el tiempo, además de observar la forma como reaccionaban ante la inconsistencia de sus registros observados y los análisis que emergían de estos.

Fase 2: Experimentación y simulación en modelación

Para esta parte del trabajo realicé unas simulaciones en el software Modellus 4.0, para analizar el tipo de relaciones que los estudiantes seleccionados, podrían encontrar entre el movimiento de un reloj, un gráfico y una tabla que refleja las variaciones de los valores, que dependen de los movimientos de las manecillas del reloj. La última simulación se apartó del contexto del reloj y centró la atención en los tipos de dependencia en el movimiento lineal de un cuerpo, que genera la función trigonométrica seno; debido a la necesidad de observar el tipo de relaciones que establecen los estudiantes cuando se cambian los escenarios donde aparecen elementos conceptuales pertenecientes a las función que se está estudiando. A continuación presentaré las sesiones que dieron lugar al trabajo con cada simulación:

Sesión 1. Laboratorio de mediciones 2. En esta sesión se presentó una simulación diseñada a partir del ejemplo "*clock*" y "*fisicanalixa péndulo gravitico aproximacao*" presentado en el software Modellus. Para analizar la dependencia de la amplitud de la gráfica de la función seno, representada en el gráfico, se construyeron dos barras de nivel asociados a la longitud de un péndulo y al ángulo de oscilación inicial. La simulación construida permitió encontrar las dependencias de la amplitud y unas ideas sobre el período de la gráfica, asociadas con el movimiento del péndulo y los cambios producidos en éste por la modificación del nivel de las barras.

Las dependencias entre los elementos presentados en esta simulación, no se redujo a encontrar vínculos entre pares de éstas, sino, al paso por cada una de las diferentes representaciones de la simulación, esto es, a observar el efecto que produce la variación de las barras de nivel en el funcionamiento del reloj y posteriormente en la representación gráfica ofrecida por el programa.

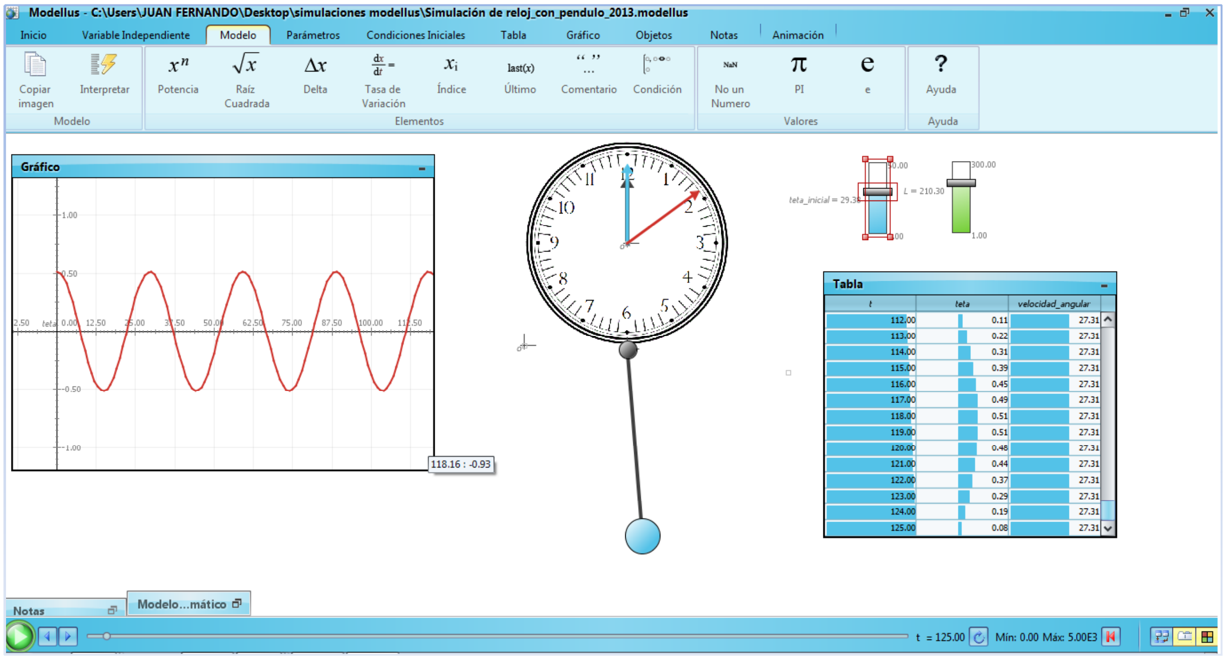


Ilustración 1. Laboratorio de mediciones II. Simulación en Modellus 4.0

Sesión 2. El movimiento de las manecillas del reloj. En esta sesión la simulación centró la atención en el periodo de la función seno, originada por la componente *y* de los vectores que representan las manecillas del reloj. Esta simulación permitió encontrar relaciones de dependencia para la amplitud de la gráfica y la representación de cada una de las manecillas en el gráfico, además de permitir predecir la forma de la gráfica de todas las manecillas en función de intervalos de tiempo largos y cortos.

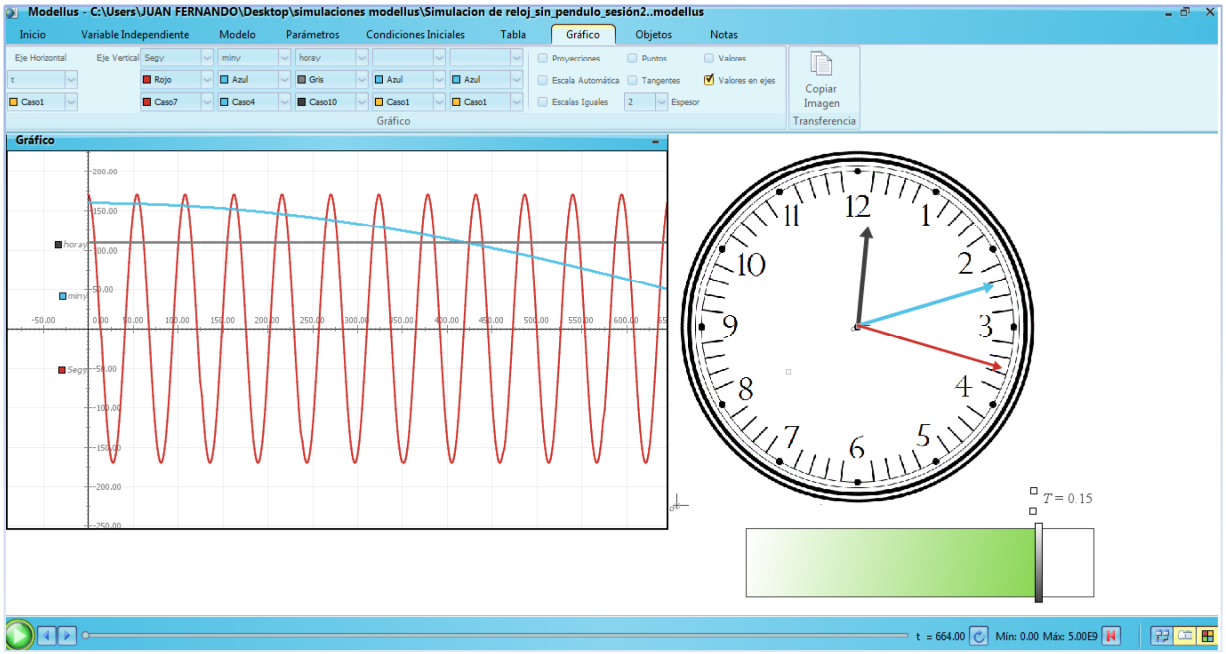


Ilustración 2. El movimiento de las manecillas del reloj. Simulación en Modellus 4.0

Sesión 3. El movimiento de dos cuerpos. Esta simulación centró la observación en las diferencias entre el movimiento de un balón de fútbol y uno de baloncesto, programados con un modelo en términos de la función seno y otro modelo con una función conocida como "diente de sierra". Esta simulación permitió observar y discriminar el movimiento de un cuerpo cuando se mueve regido por la función seno, además de identificar su amplitud y su periodo en términos de otra cantidad.

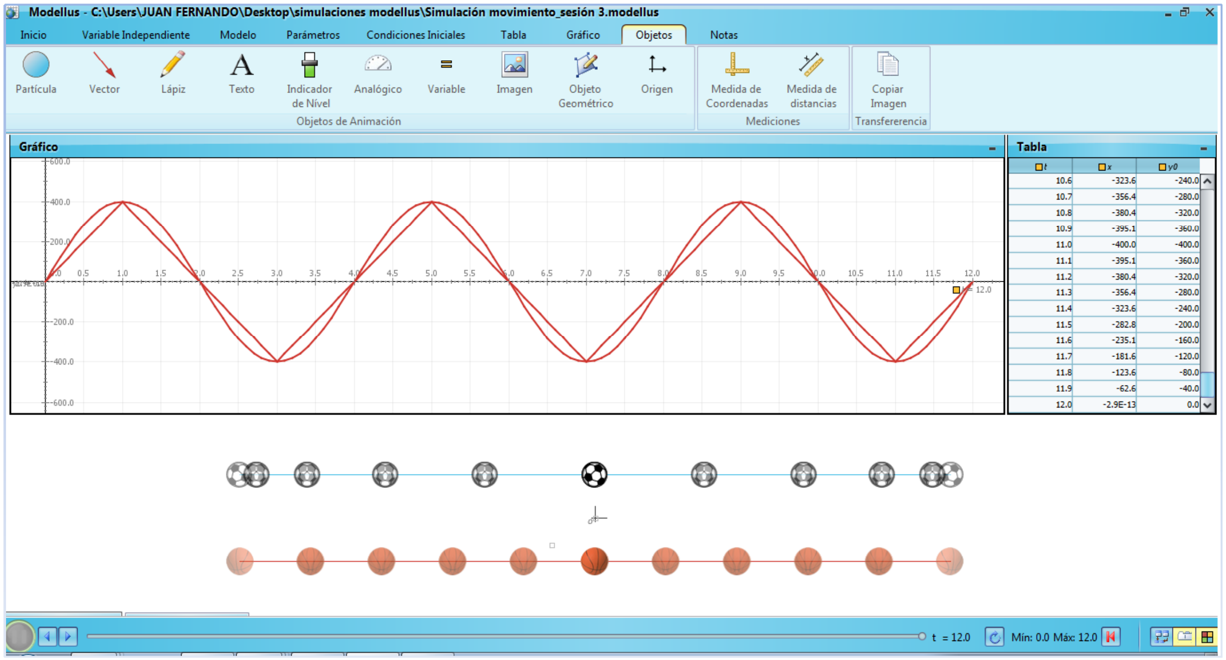


Ilustración 3. El movimiento de dos cuerpos. Simulación en Modellus 4.0

La información de estas sesiones de trabajo se registró en formatos de audio y video usando el software Camtasia; este software registró la pantalla donde los estudiantes hacían variaciones a todos los parámetros establecidos en las diferentes simulaciones, y al mismo tiempo registraba por medio de la cámara y el micrófono integrados en el computador, todos los gestos y diálogos que realizaban al interactuar con las simulaciones.

3.5 El análisis de la información

El análisis de la información se desarrolló teniendo en cuenta las orientaciones de Yin (2009), bajo las cuales establecí vínculos entre la proposición planteada anteriormente en el numeral 3.2.2, la información recogida en el trabajo de campo, la pregunta de investigación y el referente teórico delimitado en el presente trabajo. Con estas condiciones, el análisis de la información tiene en cuenta los siguientes momentos, algunos de ellos abordados por Villa-Ochoa (2011):

- ***Organización del material de información:*** En todos los escenarios donde se desarrolló la investigación, los documentos escritos por los estudiantes se digitalizaron y organizaron para facilitar la consulta de cada uno; igualmente, los videos y los audios fueron agrupados por parejas de trabajo. En este sentido, Yin (2009) recomienda organizar la información cronológicamente para favorecer su análisis posterior, y dado que mis unidades se análisis se ven reflejadas en cada pareja de estudiantes, este proceso favoreció la categorización que se muestra a continuación.

- ***Categorización individual:*** Las categorías definidas para la organización de la información se establecieron teniendo en cuenta los elementos del referente teórico adoptado para la investigación, en esta dirección se desarrollaron dos momentos:

Análisis inicial: El material recogido en el trabajo de campo se revisó con el fin de ubicar las expresiones, los diálogos, gestos y producciones escritas, que dieran cuenta de los elementos que emergen en cada una de las sesiones de trabajo en relación con la función seno. Este análisis me permitió extraer trozos de información que sirvió de insumo para ilustrar la descripción posterior del caso.

Estudio transversal del caso: Terminado el análisis inicial, el siguiente paso consistió en interpretar a la luz del referente teórico, los elementos encontrados en el trabajo de campo y establecer la forma como los estudiantes llegaron a determinar algunas conjeturas que se relacionan implícitamente con las simulaciones elaboradas con modelos matemáticos en términos de la función seno y coseno.

Al realizar las comparaciones entre las diferentes fuentes de información, con el referente teórico y el problema de investigación, se obtuvieron evidencias para las conclusiones; en este sentido Stake (2007) afirma que los estudios de caso permiten hacer comprensible el caso, lo cual se puede lograr a partir de las descripciones que se elaboren desde las experiencias sensoriales del investigador.

3.6 Validez de los resultados

Una de las premisas en las que convergen Stake (2007) y Yin (2009), al hablar de la validez del estudio de caso, es a la intencionalidad de no generalizar a otros casos; por lo tanto, las “inferencias” se hacen sobre eventos particulares y de ahí que los resultados que arroje esta investigación deben ofrecer una explicación acerca de cómo los estudiantes acá vinculados, construyen elementos conceptuales relacionados con la función trigonométrica seno; sin pretender con ello establecer generalizaciones a otros contextos donde posiblemente los estudiantes tengan condiciones diferentes a los relacionados en esta investigación. Dado que estos estudiantes son representantes de otros estudiantes, busqué encontrar los efectos que puede producir el trabajo de campo en los demás que no fueron invitados, de tal manera que pueda tener una comprensión más amplia de lo que sucede en el proceso educativo.

Capítulo 4

4. ELEMENTOS CONCEPTUALES EMERGENTES DE LA FUNCIÓN SENO, A TRAVÉS DE UN PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Aunque toda la propuesta metodológica elaborada para la intervención en el aula tuvo por objeto detectar la forma como van emergiendo ideas y elementos relacionados con la función trigonométrica seno, la construcción del fenómeno a estudiar, permitió abordar otros conceptos que fueron apareciendo a lo largo de los episodios en los cuales, los estudiantes pasaron por unos escenarios donde primó la experimentación y la simulación; de allí, la necesidad de ampliar el análisis de aquellos instantes, donde se puede apreciar el surgimiento de relaciones de dependencia vinculadas al proceso de modelación.

A continuación desarrollaré algunos momentos que dan cuenta del análisis en torno a elementos matemáticos emergentes del trabajo de campo, y utilizaré los seudónimos de Sergio, Esteban, Pablo y Ana; para referirme a los cuatro estudiantes que participaron en todo el desarrollo de la propuesta.

4.1 Un tema de estudio con el grupo de estudiantes

El trabajo de campo inició con la proyección de un video, el cual a lo largo de 27 minutos de duración, hace un recorrido histórico que muestra cómo fueron evolucionando los instrumentos con los cuales el hombre medía el tiempo. Estos datos y acontecimientos sirvieron de detonante y posibilitaron que los estudiantes reflexionaran acerca de la forma como la humanidad superó las dificultades que les generaba tratar de medir el tiempo cada vez de forma más precisa, en relación con las estrellas, la luna y el sol, entre otros.

Los comentarios y las preguntas de los estudiantes después de ver el video, se pudieron caracterizar en tres grandes grupos; unos mostraron su inclinación hacia querer conocer más a fondo algunos acontecimientos históricos que rodearon la medición del tiempo, otros se preguntaron más por la forma como se presentó el video y otros escribieron comentarios y preguntas que dan indicios de una apropiación y reflexión del video.

Algunos de los comentarios y preguntas más relevantes del grupo de 26 estudiantes, se transcriben textualmente a continuación.

1. *Estudiante 1: "…A medida que transcurre el tiempo el ingenio humano es más grande, me gustó como ideaban, para hacer de las cosas un uso más práctico y sencillo."*
2. *Estudiante 2: "En el video del tiempo conocí formas de medir el tiempo muy novedosas como el frasquito de agua…"*
3. *Estudiante 3: "… ¿Por qué gira al lado derecho?"*[en referencia al sentido en que giran las manecillas del reloj]
4. *Estudiante 4:" ¿Cómo determinaron cuántos días y meses tenía un año?…"*

Las apreciaciones y preguntas anteriores muestran algunas reflexiones hechas por los estudiantes después de observado el video; en éstas, se puede detectar que el contenido histórico no era de su conocimiento, que aparecen temas de posibles objetos de estudio en cuanto a las preguntas que se hacen buscando la explicación a episodios que no se desarrollaron en el mismo y también, en relación con ese espíritu investigativo que subyace de dar respuesta a tipos de preguntas como éstas.

El insumo dejado por este trabajo permitió crear un puente hacia las otras etapas de este proceso de investigación, puesto que, aunque los estudiantes expresaron sus ideas alrededor de todas las dinámicas que se desarrollaron para medir el tiempo y la forma como históricamente se fue refinando, las preguntas escritas y otras observadas en los registros de audio y video dejan ver que aparece en escena un fenómeno posible a ser estudiado al interior del aula (la medición del tiempo), iniciándose con ello la primera parte del ciclo de la modelación matemática en el aula de clase, la consecución de un fenómeno de estudio; con la cual se buscó generar una situación de interés a ser investigada por ellos mismos; aunque no partiera de su propia iniciativa. En este sentido Biembengut & Hein (2004) afirman que los factores de tiempo y currículo ligados al proceso de enseñanza hacen que se puedan hacer ciertas modificaciones al proceso de modelación, una de ellas la forma como se concibe el fenómeno. Los días posteriores a este primer momento dan cuenta del interés de los estudiantes por pertenecer a este proceso de investigación, dada la disposición del grupo en general de querer participar de la segunda etapa del trabajo y su aceptación para desarrollar otras actividades en horarios fuera del periodo de clases trabajado en la institución.

4.2 El trabajo en el laboratorio

Como lo mencioné anteriormente, para este trabajo invité a participar a cuatro estudiantes teniendo en cuenta sus comentarios, preguntas con relación al video y el tiempo que disponían para ir a la institución en horarios extra clase. Los estudiantes pertenecen a un grupo heterogéneo, entre los cuales hay unos con buen desempeño académico sin ser destacados en matemáticas; otros que sobresalen por sus resultados en matemáticas y otros, que muestran dificultades constantes en el aprendizaje de las mismas al interior del aula de clases.

Al iniciar la práctica, los estudiantes se distribuyeron de tal forma que uno, contaría el tiempo, otro soltaría la canica en el plano inclinado y otro daría aviso del momento donde pasara por los puntos de control. Los estudiantes afrontaron momentos de angustia al no poder tomar con “exactitud” todas las medidas que se pedían, ya que los instrumentos de medición que se dispusieron para ello no permiten determinar con mayor precisión la cantidad de agua que cae de la bolsa en relación con una unidad de longitud medida en centímetros.

Ilustración 4. Práctica " Laboratorio de Mediciones 1"

En esta práctica de laboratorio los estudiantes se vieron enfrentados a tratar de construir una relación que les permitiera conocer la posición de una canica a partir de la cantidad de agua caída de una bolsa de suero; en la guía de observación cada estudiante consigno además de las medidas, el tipo de relación que encontraron entre la posición y el tiempo medido en gotas. Para estudiantes como Esteban y Pedro, las relaciones deberían expresarse utilizando herramientas de la matemática que les permitiera encontrar los valores que no podían medir desde la experimentación que estaban realizando; mientras que para Ana y Sergio, la descripción de cualidades observadas en la práctica, era suficiente para determinar dicha relación.

Esteban y Pedro, después de intentar hallar una relación de proporcionalidad entre las magnitudes tiempo y distancia, decidieron representar en un gráfico los datos encontrados en la práctica, ya que sus intentos por describir el fenómeno de una forma lineal o cuadrática les implicaba recordar las variables y fórmulas asociados a ellas. Cada uno de ellos cuando conjuntamente consideraron realizar una gráfica, determinaron que ubicando cada punto tendrían una idea de la forma que ésta tendría, y con ello posiblemente poder determinar de una manera más fácil el tipo de relación que se estaba esperando, aunque para uno de ellos el movimiento se vinculara a la gráfica de una línea recta y para el otro a la gráfica de una función cuadrática.

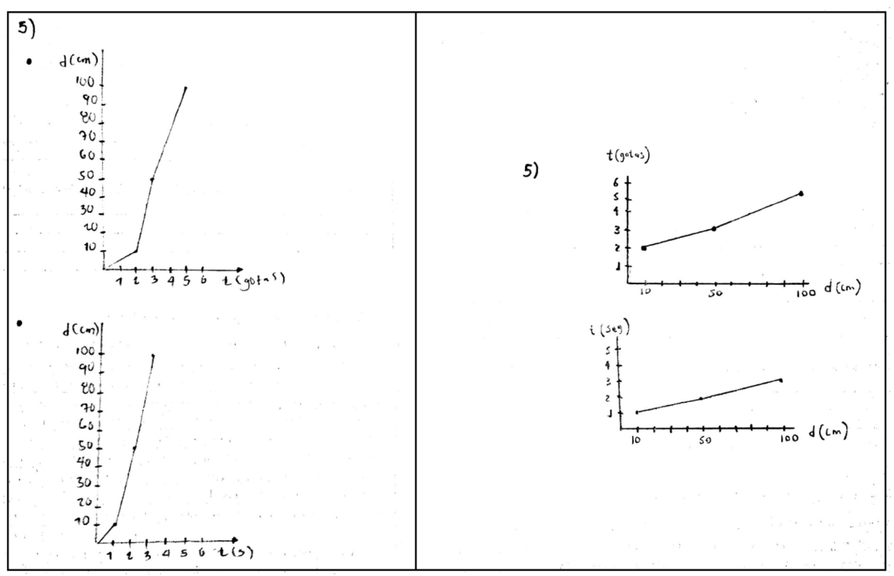


Ilustración 5. Representación de la relación entre las magnitudes tiempo y distancia hechas por Pedro (izquierda) y Esteban (derecha).

Para Esteban la relación debería ser directamente proporcional, puesto que la canica debería recorrer distancias iguales en la misma cantidad de tiempo, y aunque este supuesto se modificó más adelante cuando fue consciente de que la canica se desaceleraba por la fricción con el plano, él expresó que la representación era adecuada si se despreciara la misma, y se tomará un análisis similar al que se hace en la física cuando se desprecian algunos factores vinculados al movimiento. Pedro en cambio, decidió no despreciar la fricción y optó por hacer una representación no lineal para encontrar su relación. Esteban aunque hace una simplificación en términos de despreciar la fricción, no identifica la relación independencia-dependencia y por lo tanto su gráfico muestra que el tiempo depende de la distancia recorrida por la canica.

Ana y Sergio al parecer, no sintieron la necesidad de usar álgebra para representar la relación entre las magnitudes presentes en el trabajo de laboratorio, y esta no aparición de cierto tipo de expresiones, se debe posiblemente a que no habían sido enfrentados a esta clase de actividades en el aula como ellos mismos lo expresaron, teniendo una mirada "pobre" del papel que tiene la matemática para abordar el estudio de una situación como esta. Esteban y Pedro por el contrario, aunque mostraron la intención de relacionar la situación con una expresión matemática, sólo lograron bosquejar una gráfica que les permitiera acercarse a un tipo de relación matemática.

La limitaciones de los estudiantes en la práctica de laboratorio me llevo a trabajar la siguiente sesión con la primera simulación, ya que para ellos en general, fue difícil describir con elementos matemáticos lo que sucedía con la canica, además de la insatisfacción que les produjo el no poder tomar los datos con mayor exactitud. Esta situación me permitió observar que la simulación iba a jugar un papel importante dentro del trabajo, ya que al parecer los estudiantes se sentían más seguros estableciendo descripciones y dialogando alrededor de una situación compleja para ellos.

4.3 Elementos iniciales de dependencia que emergen por medio de la visualización.

Para la segunda fase de la investigación, los estudiantes trabajaron en parejas con simulaciones en el programa Modellus 4.0; éstas aunque se generaban a partir de un reloj, tuvieron como fin llevar al estudiante a un contexto de observación donde ciertos movimientos del reloj, o del péndulo, variaban cuando se modificaban parámetros que afectaban valores en una función seno.

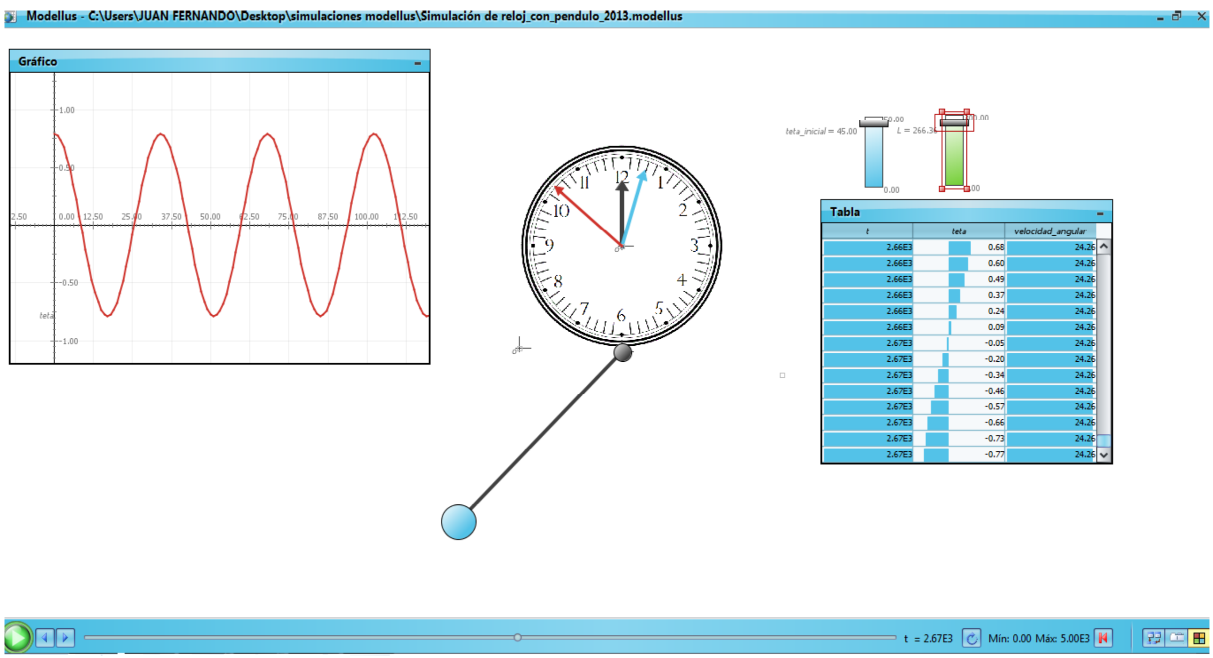


Ilustración 6. Simulación de reloj con péndulo elaborada en Modellus 4.0

En esta simulación, los estudiantes encontraron inicialmente una relación entre el movimiento del reloj y la generación de la gráfica; comentarios como *"cuando aquí recorre 30, aquí baja y en los otros 30 sube"*, "*cada 15 minutos se forma esta parte de la gráfica*", (haciendo alusión a los intervalos donde la gráfica crece o decrece) dan cuenta de unas relaciones iniciales que establecieron los estudiantes al correr la simulación. En esta parte, los estudiantes observaron con detenimiento la forma como se generaba la gráfica para luego establecer los puntos donde ésta presenta valores máximos o mínimos y de esta forma, ver como se formaba de igual manera sucesivamente.

Sergio, al comparar sus observaciones con la tabla, verbaliza *"en 1 segundo se encuentra a 0.86 en 2 segundos 0.82"*, aquí empieza a cobrar sentido la tabla en términos de servir como puente para encontrar relaciones de proporcionalidad o descartarlas y también para observar la variación

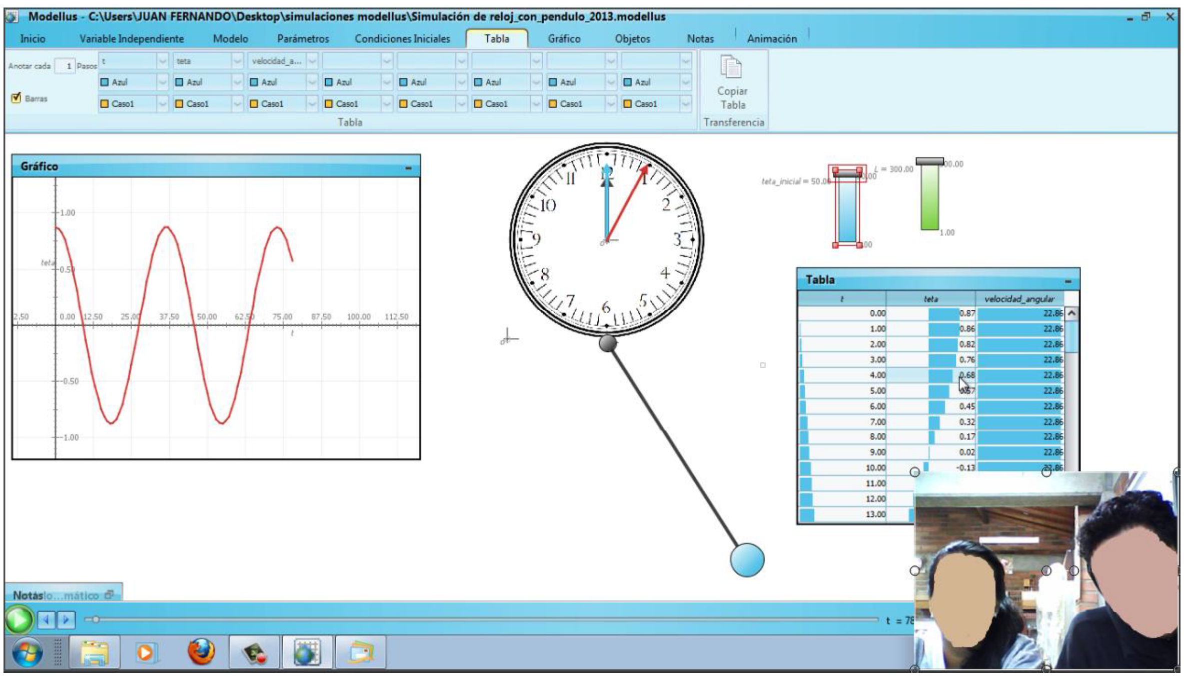


Ilustración 7. Ana y Sergio encontrando relaciones en la primera simulación.

Sergio observa la relación en los tiempos de desplazamiento del péndulo y posteriormente, relaciona la medida adecuada del tiempo en el reloj con las condiciones en que esté la barra de longitud y la barra del ángulo inicial; además de encontrar una relación inicial con el periodo del péndulo, como se da en los modelos cotidianos que se conocen para trabajar con el mismo, en el movimiento armónico simple, el cual se simula aquí también.

Ana y Sergio, aunque no lograron encontrar un valor para el ángulo y la longitud del péndulo que permitieran en conjunto con el reloj de la simulación, medir el tiempo de la forma convencional que conocemos, hallaron las razones por las cuales el reloj no serviría para ello, observando la relación entre el desplazamientos del segundero y el tiempo *t* mostrado en la gráfica. Sus observaciones se enfocaron en apreciar las características del péndulo en relación con el reloj, de tal manera que comentarios como el de Sergio: *"si el péndulo parte desde aquí* [señalando la posición inicial desde donde parte y tomando en cuenta la altura] *llega hasta esa altura allá* [señalando la posición que tendría el péndulo al otro lado], *es como el ángulo de caída"*, *"mire que cuando está más larga, la velocidad [de formación de la gráfica] cambia"*, dan cuenta de la observación de características propias de movimientos estudiados en la Física.

En la simulación, Sergio varía la longitud de la barra que condiciona el ángulo inicial del péndulo y señala en el gráfico desde donde iniciará el movimiento dando cuenta de una primera relación entre el movimiento horizontal del péndulo y la amplitud de la gráfica

El siguiente diálogo muestra la relación que se encuentra entre la longitud del péndulo y la velocidad de formación de la gráfica, encontrando los primeros elementos que evidencian la formación del concepto del periodo en relación con el tiempo

Investigador :	*¿Qué otro efecto produce la variación de la longitud del péndulo en el gráfico?*
Sergio :	*Dependiendo de la longitud del péndulo, la línea del tiempo, el transcurso, se va hacer más largo o más corto. ¡No sé cómo explicarlo!* [Sergio señala la longitud del péndulo en la gráfica]

Sergio : *Porque si se hace muy cortico este, va a estar llegando más rápido a un punto.*

Investigador : *Utiliza la flecha del mouse para mostrarme eso.*

Sergio : *Si se está haciendo muy cortico, va a estar subiendo y bajando más rápido.* [Señala el primer periodo de la gráfica]. S*i se hace más largo va a llegar como más rápido al punto.*

Esto muestra que lo primero que la experimentación hace, es generar condiciones para inferir relaciones directa e inversa en la covariación entre algunas cantidades, y desde allí, establecer vínculos entre elementos matemáticos presentes en gráficas y movimientos, en este caso relacionados con el reloj.

El grupo de Esteban y Pedro se enfocó igualmente en observaciones en relación con el reloj y la gráfica. Pedro después de reiniciar varias veces la simulación y cambiar los valores de la longitud del péndulo y el ángulo, hace observaciones como *"al subir el ángulo la gráfica se alarga"; "al subir la longitud la gráfica se forma como más rápido ";* evidenciándose una conexión entre lo que se observa y la imagen que tiene de la forma del gráfico. En el siguiente diálogo doy cuenta de este tipo de relación:

Pedro : *¿Qué función es esta?*

Investigador : *¿A cuál se te hace familiar?*

Pedro : *¿Seno?,* [hace una pausa] *¡es que siempre abre hacia abajo!*

Investigador : *¿Por qué la asocias con seno?; ¿por la forma?*

Pedro : *No, yo asocio las gráficas es por donde se empiezan a abrir; uhmm, y por la forma, sii.*

Pedro y Esteban mostraron apreciaciones muy similares referidas a las relaciones que hallaron por medio de la simulación y los efectos que producen en la gráfica; sus observaciones aunque realizadas en momentos diferentes a las de Ana y Sergio, dan cuenta de elementos comunes hallados por ambas parejas, los cuales les permitieron tener parámetros de comparación para determinar el tipo de gráfico que podría tener la manecilla del minutero o la manecilla de la hora.

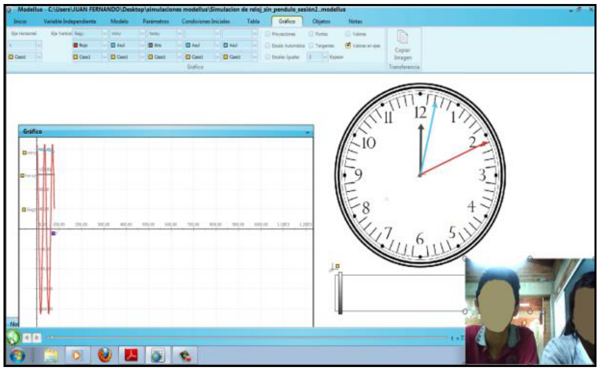
Ambos grupos presentaron descripciones muy cualitativas, en las cuales prevalecieron las relaciones entre la longitud y el ángulo de oscilación del péndulo; otras investigaciones como la de Trigueros (2009), muestran también, después de trabajar la modelación en el aula, que los estudiantes identifican los patrones inicialmente apoyados en lo que eran capaces de observar y no por los conocimientos que tienen; en este sentido aunque Sergio y Esteban creían estar ante la representación de una función trigonométrica, no pudieron establecer un vínculo entre la gráfica y un modelo matemático, dado que al parecer no encontraban elementos que les permitiera establecer nexos entre la gráfica y la función seno o coseno, su fundamento se daba a partir de la formación de la gráfica, dejando ver que si la gráfica pasaba por el origen, estaban ante la representación de la función seno.

Las conjeturas hechas por los estudiantes a partir del análisis del movimiento de las manecillas del reloj, el péndulo y el tipo de gráfica que en conjunto producen, dan cuenta, en términos de la Figuración de las cualidades (Suárez & Cordero, 2010), que están determinando una nueva funcionalidad (1) la cual les ayuda a "comprender" el fenómeno que estudian, detallando algunas particularidades de los movimientos, cuando la gráfica es creciente o decreciente, qué incidencia tiene el aumentar el ángulo inicial en el péndulo, a la vez que van descubriendo porque el reloj aunque tienen el movimiento de un mecanismo convencional, y la dependencia entre cada una de sus manecillas como las tiene un reloj análogo común, éste no mide en las escalas de segundos, minutos y horas correctamente. Las observaciones que realizaron y el tipo de relaciones que encontraron son, en términos de Borba & Villarreal (2005), la reunión de abtracciones producto del proceso de modelación-tecnología, dado que es por la simulación, su ambiente gráfico, la interacción con sus variables y la posibilidad de reanudar el movimiento, las veces que sea necesario, que los estudiantes pueden reorganizar esas primeras percepciones que construyen cuando observan por primera vez como el péndulo de un reloj, varía la velocidad ángular de las manecillas de un reloj y forma las gráficas correspondientes a cada una de ellas.

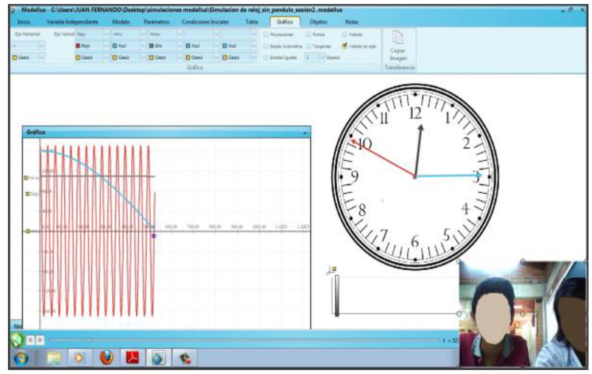
4.4 Centrando la observación en la gráfica de la función seno.

En esta sesión los estudiantes estuvieron trabajando con una simulación en la cual desaparecieron el péndulo y las barras de nivel verticales y en su lugar, se agregó una barra horizontal cuya finalidad era variar el período con el cual se variaría el período de la función trigonométrica que rige el movimiento del reloj. Esta sesión estuvo dirigida fundamentalmente a observar la relación reloj-gráfica y tratar de encontrar dependencias al interior de la simulación.

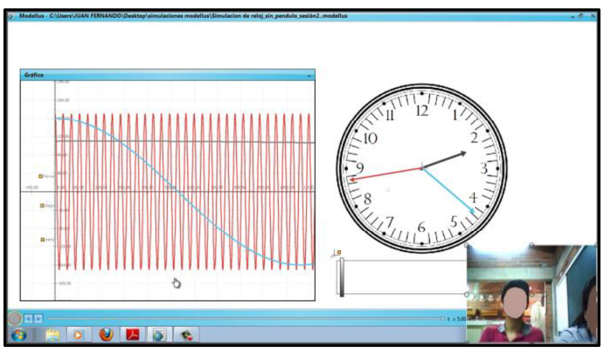
El trabajo con Ana y Sergio inició haciendo un recuento de la simulación pasada, posterior a ello, Sergio corre la segunda simulación, con la cual en el programa se empiezan a formar tres gráficas, cada una de ellas como representando la componente vertical del vector con el que se construyeron las manecillas del reloj. Sus primeras observaciones se centraron en ver qué pasaba en el gráfico cuando había transcurrido un minuto; observaciones como *"en treinta segundos va de arriba hacia abajo"*, *"en un minuto vuelve a empezar"*; dan cuenta del hallazgo de una relación entre el movimiento de la manecilla del reloj, el tiempo y el gráfico. La siguiente secuencia muestra partes de la simulación cuando han transcurrido unos minutos después de iniciada, en ella se observan las líneas que se formaban en el gráfico, cuando cada manecilla del reloj hacía su movimiento convencional:



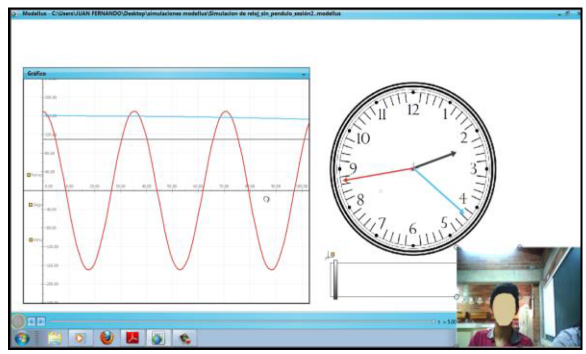
1)



2)



3)



4)

Ilustración 8. Secuencia de la segunda simulación

Después de varios minutos, cuando han pasado más de dos horas en el tiempo del reloj, Santiago y Ana empiezan a asociar características en el gráfico; éstas aparecen en el siguiente diálogo:

Investigador : *¿Qué pasa si estiramos la gráfica roja?..¿Qué forma tendría?*[en ese momento veían la imagen 3]

Sergio : *Veremos triángulos; siii, picos. Pero si se estirara más...[hace una pausa]*

Ana : *Yo digo que sería como más ovalada; ya no sería así en punta sino como más ovalada.*

Investigador : *¿Y tendría alguna relación con otra que veamos ahí?*

Sergio : *Sii, sería ovalada como la azul.*

Sergio hace clic sostenido y amplía la gráfica hasta que se ve la imagen 4.

La secuencia y el diálogo anterior muestran que tanto Ana como Sergio empiezan a asociar en el movimiento del reloj la forma que toma la gráfica de las manecillas del reloj. Esta observación les permitió más adelante predecir la posición de las manecillas haciendo una lectura de la gráfica, de tal manera que contando los "picos" de la gráfica podían encontrar el tiempo transcurrido en el reloj de la simulación.

La segunda parte de esta simulación se centró en la observación del recuadro amarillo ubicado a la izquierda del gráfico; éste tuvo un movimiento vertical de acuerdo con el movimiento del segundero.

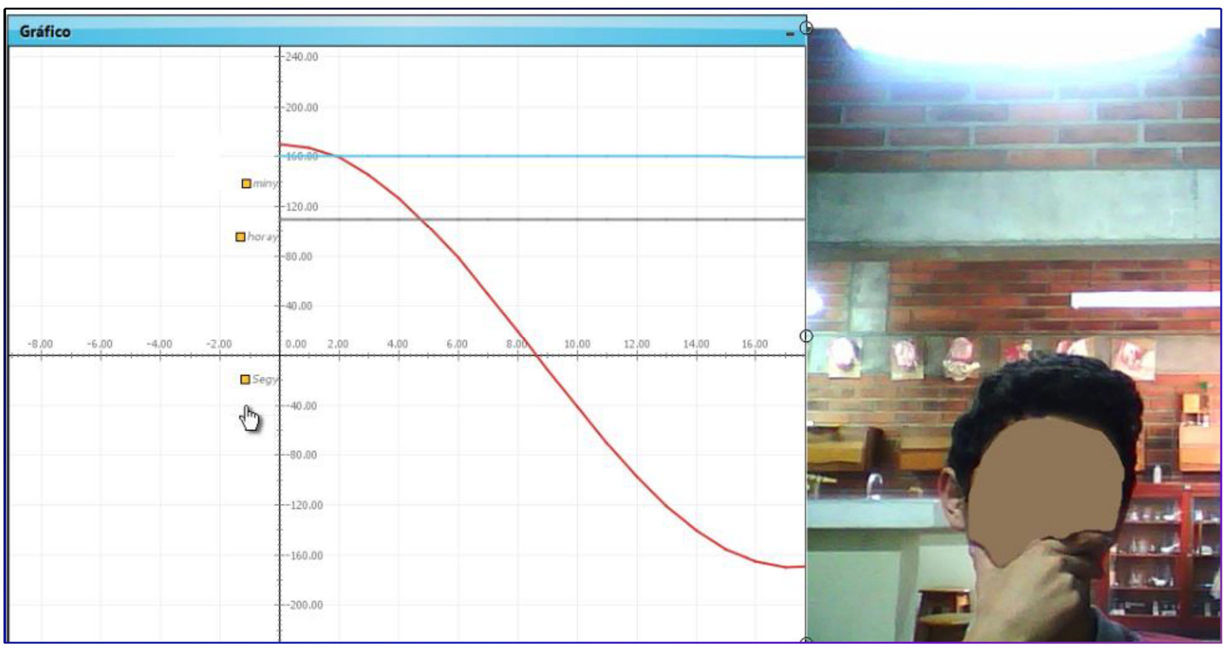


Ilustración 9. Sergio analiza el movimiento del cuadro amarillo en relación con el movimiento del segundero en el reloj.

En la ilustración anterior muestra la actitud de Sergio cuando se le pide que describa su posición en relación con el segundero. Preguntas como *¿dónde estará el cuadro cuando el* *reloj marque las 3 en punto?*, causaron dudas en Sergio y Ana al momento de responder; sin embargo, reiniciar la simulación, y dejarla correr un momento, les permitió inferir la posición del cuadro en lapsos diferentes de tiempo.

En el caso de Pedro y Esteban, sus primeras observaciones se centraron en los movimientos de las manecillas, e intentaron ver como se da la relación de éstas con el gráfico; al respecto en el caso del segundero pudieron encontrar con facilidad que cuando pasa por el 3 y 9, corta al eje horizontal; y cuando está en 12 y 6, se encuentra en el punto más bajo y más alto de la gráfica. Unos minutos después las observaciones se centraron en los recuadros que se ubicaron en el extremo izquierdo de la gráfica.

Investigador : *¿Con quién se relacionan esos cuadros?*

Pedro : *¡Con el reloj…!*

Investigador : *¿Pero específicamente con qué?, porque hay muchas cosas en el reloj.*

Pedro : *Con la gráfica…*

Esteban : *Pues, describe los movimientos del minutero, segundero.*

Investigador : *Entonces, ¿con esos cuadritos podríamos determinar también las posiciones en 3, 6, 9, 12?*

Esteban : *Sii*

Pedro : *Si, también*

Investigador : *Cuándo esté en el 3, ¿dónde va a estar el cuadrito?*

Esteban : *¡En la mitad!*

Pedro : *Uhmm, sii, va a estar en la mitad*

Investigador : *¿Y cuando esté en el nueve?*

Pedro : *También.*

Investigador : *Y entonces ¿cómo sabrían si es el 6 o el nueve?*

Esteban : *¡Depende si va hacia abajo o va hacia arriba!*

Pedro : *Cuando va bajando es el tres, cuando va subiendo es el nueve*

Investigador : *Ok. ¿Ese cuadro se mueve siempre a la misma velocidad?*

Pedro : *Sii; debería moverse a la misma velocidad.*

Investigador : *¿Se mueve a la misma velocidad siempre?*

Pedro : *Sii, no cambia.*

Por unos instantes fijan la mirada en el movimiento del cuadro

Pedro : *Si, se mueve a una velocidad media.* [Hace una pausa]. *Aunque pensando bien la pregunta, aquí reduce la velocidad para volver a subir.* [Señala el extremo inferior de la gráfica].

Investigador : *¿Da la idea de quedarse quieto?*

Pedro : *Es como cuando uno tira algo; y ya que llega como a su punto máximo y vuelve y baja.*

Investigador : *Si algo llega sube y baja; ¿debe haber cambio de la velocidad o no?*

Pedro : *En estas dos puntas sí. No va con la misma velocidad aquí, que ya acá.* [señala el extremo inferior y la mitad de la trayectoria]

Esteban : *Debe ser la velocidad que se tiene en cada parte.*

Investigador : *Pero cuando dices la misma velocidad es ¿qué? ¿La misma cuando se está deteniendo aquí encima? o ¿cuál?*[señala varios tramos del recorrido de recuadro]

Esteban : *No pues, sii; tiende como a pararse; como si descansara para tomar impulso.*

En el anterior diálogo puede observarse que los estudiantes inicialmente responden lo que a primera vista pueden inferir; sin embargo, la posibilidad que da la simulación de centrar la mirada en unos aspectos y luego empezar a detectar vínculos entre diferentes movimientos, hace que los estudiantes reaccionen y comiencen a mostrar otro tipo de posiciones diferentes, frente a sus análisis iniciales.

Al centrar nuevamente la observación en la gráfica, los estudiantes inicialmente no logran establecer los vínculos entre las manecillas del reloj y las trayectorias que se generan en los gráficos; pese a esto, igual que en el caso de Ana y Sergio, volver nuevamente la mirada a aquellas relaciones biunívocas entre cada manecilla y su gráfica, hacen que se puedan encontrar expresiones más precisas de los que está pasando al interior de la simulación.

Ambas parejas, cuestionadas por la forma de la gráfica que representa el movimiento de la manecilla de la hora, daban cuenta que inicialmente sus observaciones se limitaban sólo a ver una línea; que no había ningún tipo de conexión entre esos movimientos, dado que no podían inferir inicialmente que esa aparente línea que veían, con el paso del tiempo tomaría la forma de las otras gráficas; sin embargo, la posibilidad de manipular la herramienta gráfica, desplazarla, ampliarla o reducirla, les permitió ir aclarando ciertas dudas al respecto e ir transformando esas ideas iniciales al interactuar con la simulación.

Una situación de mi interés en esta parte del trabajo se generó cuando Esteban se cuestionó por la amplitud de cada gráfica, ya que al parecer él esperaba que todas tuvieran la misma amplitud (situación que después él mismo respondió). Al preguntarse por las gráficas, expresiones como " *yo digo que pueden tener la misma forma* [haciendo referencia a la gráficas de cada manecilla del reloj]; *pues la del segundero baja y sube pero demasiado rápido entonces eso hace que sea como más,…¡más qué!, como lo digo, …que se vean más cercanas las ondulaciones"*(véase ilustración 11), son una muestra de los cambios que se generan en las diferentes interacciones con la simulación y las ideas que los estudiantes refinan en espacios de experimentación; sus posteriores conjeturas muestran una construcción de ciertos vínculos establecidos por la convergencia hacia las relaciones que se establecen en la simulación, y de las cuales, se puede ir construyendo cada concepto referido a la función trigonométrica seno.

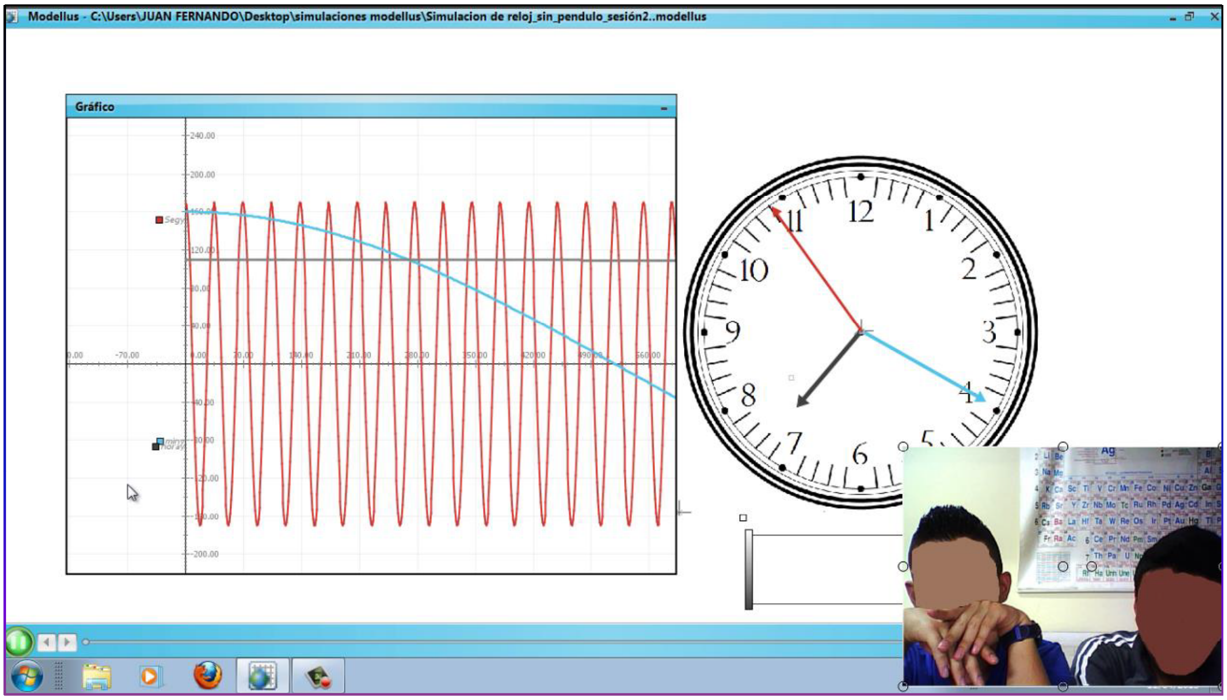


Ilustración 10. Esteban compara el movimiento de las manecillas del reloj.

Minutos antes de finalizar esta simulación ambos grupos pudieron dar cuenta del trazado de la gráfica asociando la forma de cada una; por donde se está haciendo el trazado, y a pesar de no vincular inmediatamente la gráfica con el nombre que tiene, cada vez más es común encontrar que sus conjeturas relacionan la amplitud y ciertas formas de medir el período; en este aspecto Esteban, luego de mirar el gráfico una y otra vez, desplazarlo de izquierda a derecha, de arriba abajo y después de dejar sólo un gráfico en el plano, llega a la siguiente conclusión:

Investigador : *Bueno ¿a qué se deberá entonces, que las gráficas no suban hasta la misma parte?*

Esteban : *Ehh sonaría muy ridículo, pero yo no sé. ¿Es por la altura de las manecillas?*

Investigador : *Por eso es*

Pedro : *Jejeje…*

Hubo risas entre las tres personas.

Minutos después Pedro y Esteban insisten en conocer cómo se llama esta característica, a lo que el investigador responde “amplitud”.

Pedro terminó hablando de aberturas, para referirse a las concavidades de la gráfica y Esteban encontrando relaciones con la amplitud; observaciones que para personas con formación en matemáticas serían muy obvias, pero muy llenas de sentido para los estudiantes que en interacción con un medio descubren relaciones matemáticas en un proceso de modelación-graficación. En esta dirección, los estudiantes en términos de Suárez & Cordero (2010), muestran un nuevo uso (funcionalidad 2) al establecer relaciones entre la gráfica y las situaciones de variación que significan, tomando cada vez más importancia para este trabajo el hecho de no centrar la atención de los estudiantes en un modelo matemático con expresiones algebraicas, sino en un modelo visual que les permite identificar particularidades propias de la función trigonométrica seno, como la amplitud, el período, por que se forman gráficas con amplitudes y con períodos diferentes, sin que cada uno de ellos sepa “recitar” las definiciones convenciaonales de ello.

En este segundo momento de trabajo con los estudantes, centrar la atención en las gráficas, permitió simplificar las variables relacionadas con el movimiento del reloj y la gráfica que producen sus manecillas. El diálogo entre los estudiantes, el investigador y la simulación permitió la construcción de unas ideas generales alrededor de la gráfica de la función seno, en este sentido Borba & Villareal (2005) hablan de las potencialidades que ofrecen las representaciones gráficas e interfaces para reorganizar el pensamiento y cambiar la naturaleza de la producción de conocimiento en el colectivo con los medios. La exteriorizaciones verbales de los estudiantes produjeron en el ambiente la necesidad de establecerse acuerdos comunes entre ellos para explicar el funcionamiento del reloj, ya que aparecieron unos gráficos más complejos de observar que otros, y las preguntas hechas por el investigador les obligó a construir nuevamente ciertas ideas alrededor de los elementos que vinculaba la simulación; el hecho de que los estudiantes lancen una afirmación, y luego lancen otra, con unos elementos más estructurados que la anterior, es una muesrra de que se están haciendo elaboraciones mentales, que se reconstruye un conocimiento y que se sustenta desde los medios; en este caso particular, la simulación.

4.5 La función seno y el movimiento en una dimensión.

La última sesión de trabajo preparada para esta primera fase de la investigación, pondría en juego las nociones que desde días atrás los estudiantes ya venían reflexionando, pero esta vez la simulación no tendría tantas herramientas para establecer relaciones y conjeturas. Las gráficas y las tablas de valores fueron ocultas para evitar sesgos en las observaciones de los estudiantes y poner en escena todas conclusiones que hasta aquí habían elaborado.

La siguiente ilustración muestra la interfaz en la que se desarrolló esta sesión.

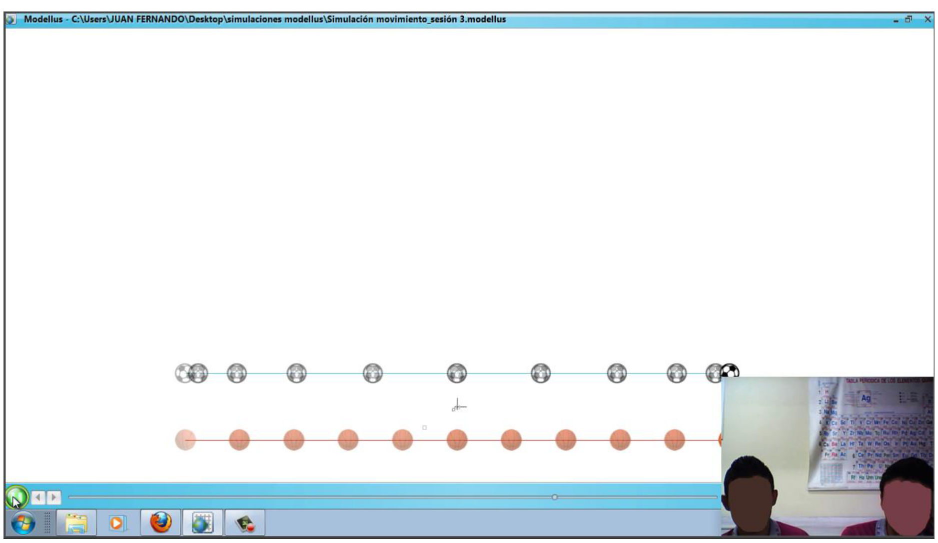


Ilustración 11. Pedro y Esteban establecen relaciones a partir de movimientos.

Como ya he mencionado, hasta esta simulación el trabajo de los estudiantes había girado alrededor de la observación, el establecimiento de conjeturas y la búsqueda de validación de las mismas a partir de la interacción con las simulaciones; sin embargo, no se habían desarrollado en escenarios donde tuvieran la posibilidad de utilizar los recursos gráficos y numéricos, como pasó en esta sesión. La pregunta general para el trabajo con los estudiantes fue *¿cómo sería la representación gráfica del movimiento de cada balón?*; lo que llevo a que ambas parejas de trabajo tuvieran que realizar una gráfica, con la posibilidad de ver el movimiento una y otra vez.

Inicialmente, los estudiantes mostraron con sus gestos la dificultad que les generaría realizar el gráfico adecuado; expresiones como *"uyy, ésta si está muy dura"*, son una muestra del reto que estaba por delante, ya que la respuesta para esta pregunta no era algo que emergía de la nada, porque ya se conocía o porque era básicamente hacer un trazo; era la muestra de que todo lo que se plasmaría a continuación, sería una elaboración nueva y original de cada uno de ellos. Luego de observar varias veces el movimiento, los estudiantes preguntaron cada cuánto quedaban las marcas en el recorrido, a lo que contesté, 2 segundos, siendo ésta la única observación hecha para intentar darles una pista para seguir; no obstante aunque tenía la tabla de valores que generaba cada movimiento, el reto era trabajar con la menor cantidad de ayudas posibles.

Después de la observación arriba mencionada, los estudiantes procedieron a elaborar su propio gráfico con el cual representarían el movimiento de los balones. Expresiones como *"voy a suponer que de aquí a allá hay 10 cm", "aquí la distancia es mayor y aquí es menor", "aquí para, y vuelve a coger velocidad", "¿Por qué se acelera más aquí?"*; dan cuenta que las observaciones hechas por los estudiantes no son tan superficiales como cuando empezaron el trabajo, ya que, la necesidad de definir variables a relacionar en el gráfico y encontrar un "modelo" que le permitiera trazar una línea teniendo en cuenta las particularidades del movimiento (cuando va a la derecha, cuando va a la izquierda, cuando se detiene, cuando acelera, cuando desacelera), son una muestra de que en todo el proceso de construcción de la gráfica aparece la modelación con varias de las etapas o pasos que se describieron anteriormente.

Aunque en esta parte de la investigación, la atención no se ha centrado en los modelos matemáticos que los estudiantes elaborarían para satisfacer unos movimientos particulares en la simulación, ni tampoco en las expresiones matemáticas generaron las representaciones gráficas de las simulaciones, los estudiantes muestran avances en el proceso de modelación-graficación desde el cual se han venido realizando algunos análisis en este trabajo.

A continuación presentaré las representaciones gráficas elaboradas por cada estudiante, las cuales se compararán con la arrojada por la simulación.

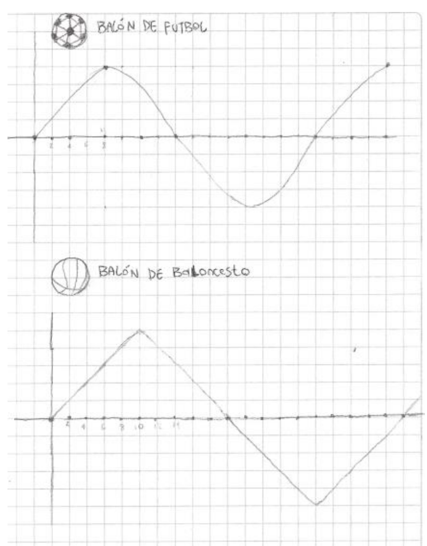


Ilustración 12. Representación gráfica elaborada por Esteban

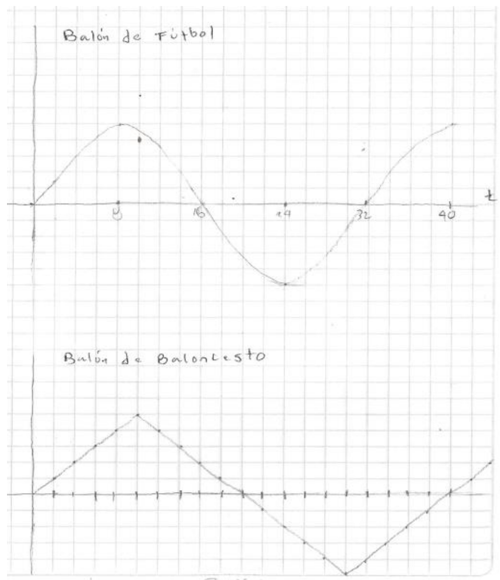


Ilustración 13. Representación gráfica elaborada por Pedro

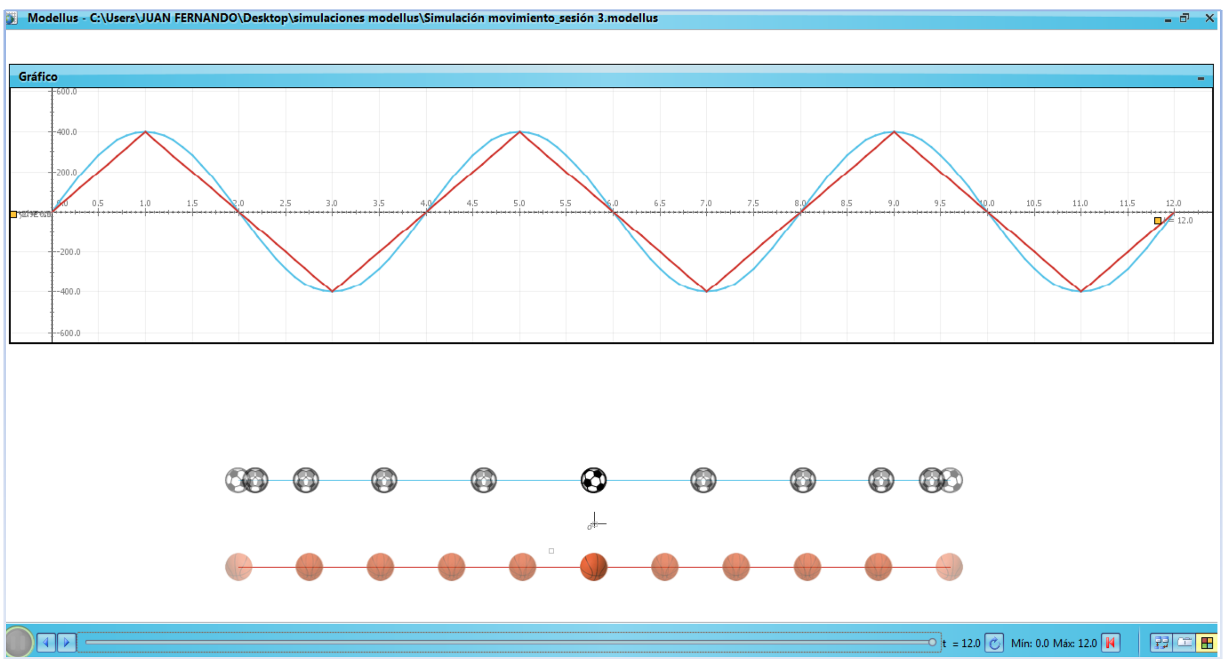
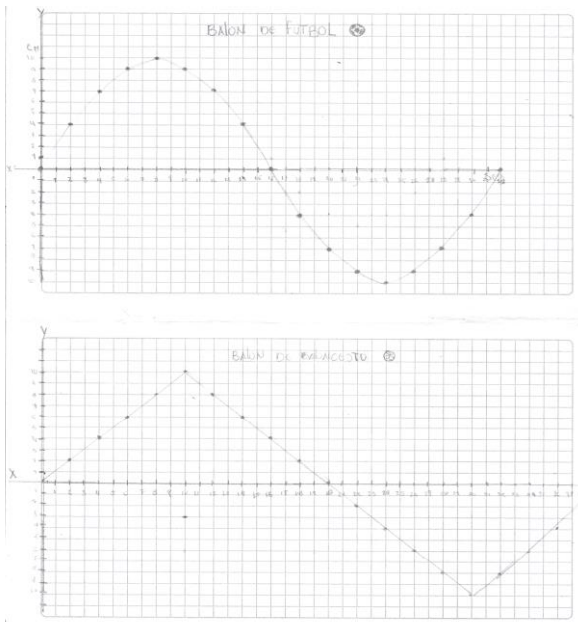
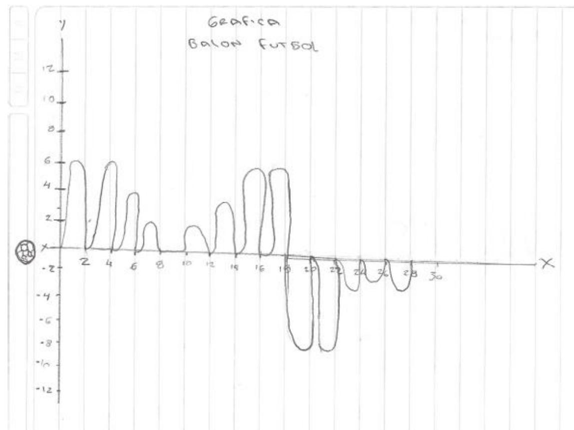


Ilustración 14. Representación gráfica en el Modellus 4.0





b)

a)

Ilustración 15. Representaciones gráficas elaboradas por Sergio (a) y Ana (b)

Como puede observarse, las gráficas de Pedro, Sergio y Esteban, dan cuenta de una interpretación cercana a lo que sucedía en la simulación. Inicialmente, ellos tuvieron la necesidad de definir las variables a relacionar en el plano cartesiano y por ello, cuando lo trazaron surgieron preguntas como *¿Qué puedo poner en los ejes?¿centímetros?¿segundos?* de tal manera que al definir lo que cada uno de ellos representaría, pudieron observar la simulación de manera diferente, intentando establecer un vínculo entre la posición de los balones y un punto en el plano diseñado por cada uno de los estudiantes; debo aclarar aquí que esta situación fue común a los cuatro estudiantes, aunque Ana haya hecho otro tipo de representación. La unión de esos puntos en el plano les permitió a los estudiantes obtener cada una de las gráficas que presenté anteriormente, y con ellas, la posibilidad de que cada uno de ellos estableciera patrones de desplazamiento, aceleración y desaceleración, entre otros.

La dificultad para trabajar con la escala del tiempo, es tal vez un problema que se detecta en sus gráficos en comparación con el arrojado en el Modellus 4.0; sin embargo, dadas las características de la simulación, se aprecia que sus conjeturas expresadas en la representación, se acercan a unas características propias que arrojan este tipo de movimientos al ser representados gráficamente; en términos de Suárez & Cordero (2010), en esta parte del trabajo dan cuenta como lo mencioné, de:

> "*decisiones sobre la elección de las variables a representar en cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia, la elección de los cuadrantes y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos"(p. 329)*

En este último momento de la construcción de las gráficas es que aparece la funcionalidad 3.

Con el desarrollo de estas sesiones se observa como la modelación, en este caso vista desde la perspectiva de la experimentación y la simulación con gráficas, generan en términos de Borba & Villareal (2005), ambientes que pueden considerarse como laboratorios, donde los experimentos en un sentido amplio, posibilitan en los estudiantes la formación de conjeturas con la coordinación de representaciones múltiples, con "pruebas" de ensayo, y una nueva clase de juicio de "error", y un modo de aprender matemáticas que ha alcanzado mucha resonancia con la modelación como enfoque pedagógico.

Los estudiantes pasaron por esos pasos de los que habla Bassanezi citado en Borba & Villarreal (2005), la experimentación , vinculada a cada uno de los momentos en los cuales los estudiantes interactuaron con sus compañeros, con el investigador, con las simulaciones y toda la información elaborada con ellas; la abstracción, expuesta en cada una de las exteriorizaciones de los estudiantes a partir de la interación con los medios para la investigación, la resolución, en términos de todo el procesos vivido por los estudiantes para reponder a cada una de las preguntas realizadas alrededor del funcionamiento del reloj, la medición y el trabajo con las gráficas; no expongo aquí la resolución de un problema en general, sino todos esos momentos en los cuales los estudiantes vieron la necesidad de encontrar una respuesta a una pregunta que les obligaba detenerse un poco, a observar la relación de elementos matemáticos con situaciones que aunque él la aprecia, no las puede , explicar y deducir con facilidad.

La validación y modificación van de la mano en conjunto con todos los momentos particulares vividos por los estudiantes con la simulación tres; dicha simulación les permitió concebir un modelo gráfico que se aproxima al representado por el movimiento de los balones, el cual pudo ser validado y modificado cuando se presentó la herramienta visual en la simulación.

La siguiente tabla presenta un resumen de cómo los estudiantes logran pasar por tres momentos desde en los cuales, se puede inferir el uso de las funcionalidades a las que hace referencia Suárez & Cordero (2010).

PREMISAS	DESCRIPCIÓN
Funcionalidad - 1	Las conjeturas hechas por los estudiantes a partir del análisis del movimiento de las manecillas del reloj, el péndulo y el tipo de gráfica que en conjunto producen; dan cuenta de la determinación de esta funcionalidad y les permite la construcción de ideas de variación. (Simulación 1)
Funcionalidad - 2	Los estudiantes identifican particularidades que les permite la construcción de argumentos relacionados con la amplitud y el período de la gráfica. (Simulación 2)
Funcionalidad - 3	Los estudiantes cuantifican gráficamente el movimiento de los balones, asociando en ella características propias de cada uno. (Simulación 3)

Tabla 3. Funcionalidades observadas en los estudiantes.

Las descripciones anteriormente mostradas dan cuenta de momentos en los cuales, los estudiantes vinculados al proyecto pasan por tres momentos particulares en los que se desarrolla el proceso de modelación con gráficas.

Capítulo 5

5. CONCLUSIONES

En el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Medellín, mi intención con este trabajo fue la de diseñar y ejecutar un proyecto en el cual se vieran reflejados varios de los contenidos desarrollados en los seminarios de formación, y también el plasmar en él, algunos resultados emergentes de las interacciones con los estudiantes, desde mi experiencia como docente de matemáticas; es por ello que, en todos los capítulos que se escribieron hay un alto componente interpretativo, no sólo de toda la construcción teórica construida por investigadores; sino también de esas lecturas que como personas inmersas en algunos contextos de la educación, vamos interiorizando, buscando algún día tener una experiencia como estas para re-estructurarlas y ponerlas a disposición de pares para su debate y re-construcción.

En el primer capítulo presenté una revisión bibliográfica desde la cual se pudo apreciar las dinámicas que se han generado alrededor de la enseñanza de la trigonometría, los intentos por descubrir otras formas de presentarlas en el aula, y el papel que tiene la historia en la construcción de conceptos matemáticos relacionados con la misma. Otros artículos y trabajos centraron la atención en el papel de la modelación, que en términos de Borba y Villarreal (2005), se tomó como un enfoque pedagógico que puede penetrar la atmósfera en el aula y transformar la manera como se relacionan profesores y estudiantes para abordar la producción de conocimiento matemático a partir de temas de interés para ellos en este sentido, las directrices propuestas desde el Ministerio de Educación Nacional para su implementación, se convirtieron también en un referente para no generar disonancia al momento de establecer acciones desde los referentes teóricos consultados para el trabajo.

Desde los referentes tomados para el trabajo, elaboré una síntesis de los principales elementos de discusión a nivel nacional e internacional sobre la modelación y las diferentes perspectivas que se han generado alrededor de la misma; es así como encuentro en las propuestas de Barbosa (2006), Villa-Ochoa (2007), Borba & Villarreal (2005) y, Suárez & Cordero (2008), elementos que están en resonancia con mi intención de desarrollar un proceso de modelación matemáticas y la forma y el tipo de miradas frente a ella.

Las simulaciones con el software Modellus 4.0 y la interacción de los estudiantes con sus compañeros y con el investigador, fueron un elemento central que permitió encontrar evidencia de cómo estos cuatro jóvenes construyen elementos conceptuales relacionados con la función trigonométrica seno.

El análisis de gráficas permitió que los estudiantes vincularan movimientos en una y dos dimensiones, con representaciones visuales conocidas, que aunque habían trabajado en el grado décimo, carecía de elementos que les ayudara a comprender por qué se forma esta representación y que particularidades tiene un fenómeno que se represente con la misma, en este sentido propongo a partir de esta investigación que el trabajo de gráficas de las funciones trigonométricas no se reduzca sólo a la ubicación y unión de puntos, producto de la interacción de un estudiante con la calculadora, o producto de la ubicación de unas líneas en el plano cartesiano que surgen de la formación de una circunferencia y unos segmentos asociados a ésta; sino que su estudio vincule también los escenarios dinámicos que permitan ver la naturaleza de la formación de las mismas y la variación que en ellas se produce cuando los elementos que la fundamentan no permanecen siempre constantes, aportando desde este tipo de situaciones al desarrollo del pensamiento variacional.

Las exteriorizaciones hechas por los estudiantes permitieron ubicar momentos en los cuales se da un proceso de modelación en el aula, que no se centra en la obtención de un modelo matemático algebraico, sino que toma unas descripciones de los estudiantes que se van refinando en la medida en que éstos interactúan con sus compañeros, con las simulaciones y con el investigador, permitiendo encontrar características visuales en la gráfica de la función seno, que posteriormente se convirtieron en un modelo gráfico con el cual pudieron dar respuesta a una situación de movimiento no convencional y nuevo para ellos. Las elaboraciones individuales de Pedro, Esteban y Sergio, dan cuenta de un reconocimiento del período y la amplitud, centradas en la representación gráfica de la función trigonométrica seno, a partir de las construcciones individuales con las que cada uno de ellos trató de presentar un modelo gráfico que diera información sobre la posición de cada balón y el tiempo en que estuviera allí; en este sentido, Suárez & Cordero (2008) encontraron que hay ciertas actividades que están intrínsecamente relacionadas con el conocimiento matemático, permitiendo la funcionalidad de éstos. Ana por su parte, aunque no da cuenta de una "comprensión" amplia de varias de las situaciones aquí propuestas, ha refinando la forma en que interpreta las situaciones en que interactúa, una muestra de ello es la gráfica del balón de fútbol (ilustración 15. d), la cual, aunque no deja ver claramente la interpretación de un movimiento establecido a partir de la función seno, si muestra como la estudiante percibe las variaciones en la gráfica y las plasma para intentar describir su movimiento.

Las observaciones hechas por los estudiantes, de las relaciones vinculadas en las gráficas, mostraron como surgen en paralelo a esta situación, una serie de argumentos que reconstruyen las percepciones iniciales de los mismos y les ayuda a realizar transferencias cuando abordan otro tipo de situaciones diferentes en las cuales, algunos elementos vinculados con sus nociones, parecen ocultos, generando la necesidad de refinar cada vez más sus conjeturas. Estas observaciones, permitieron verificar la forma como éstos dan cuenta del uso de la gráfica en relación con las premisas de Suárez & Cordero (2008), cuyas funcionalidades fueron emergiendo de forma natural en el discurso de cada estudiante, cuando construyeron ideas nuevas, cuando explicaron ciertas particularidades de algunos movimientos en relación con la gráfica que éstos generaban, vinculando la construcción de argumentos con las formas visuales de las gráficas. Finalmente en el trabajo con la simulación tres, los estudiantes dan cuenta de una cuantificación del movimiento, a partir de las características, las simplificaciones y las relaciones de dependencia que tuvieron en cuenta para realizar una representación gráfica asociada al movimiento.

En resonancia con varios de los planteamientos de Suárez & Cordero (2008) y de Borba&Villarreal (2005), los estudiantes vinculados a la investigación construyeron conocimiento matemático vinculado a unas situaciones de movimiento, presentes en interfaces donde se desarrolló el proceso de modelación; sus observaciones vinculadas a medios, sus exteriorizaciones, sus discusiones y posteriormente los acuerdos y desacuerdos logrados en conjunto, dan cuenta de una producción de conocimiento en colectivo de seres-humanos-con-medios.

Otro elemento pilar del desarrollo de esta investigación es la dinámica que se genera alrededor del estudiante cuando se asume en un rol desde el cual aporta a su proceso de formación, discute, descubre sus errores o (re)afirma sus concepciones y se convierte en un dinamizador del proceso en el aula, generandose cambios en su motivación, su sentido de responsabilidad y en la forma de percibir el conocimiento con sus compañeros, y no como un ser individual externo a ellos.

Finalmente, es necesario aclarar que esta investigación tiene para su ampliación posterior, un trabajo de campo donde se espera concluir el ciclo de la modelación presentado en el capítulo 2; bajo la premisa de ver cómo con los elementos emergentes de todos estos escenarios de simulación, los estudiantes construyen expresiones matemáticas que permitan refinar y mejorar la medición del tiempo en otros relojes donde las dependencias entre sus medidas no se dan de la forma convencional que conocemos. Esta parte del trabajo se espera presentar en un artículo, fruto del desarrollo del posterior trabajo de campo.

Bibliografía

Aravena, M., Kimelman, E., Michelli, B., Torrealba, R., & Zuñiga, J. (2006). *Investigacion Educativa I.* Recuperado el 20 de marzo de 2013, de Scribd: http://es.scribd.com/doc/60213332/Investigacion-Educativa

Araya Chacón, A. M., Monge Sánchez, A., & Morales Quirós, C. (Mayo de 2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de compresión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 7*(2), 1-31.

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L., & Gómez, P. (2012). Razones Trigonométricas. En P. Gomez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (págs. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38(3)*, 293-301.

Berrío, M. (10 de Septiembre de 2012). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos: El caso del cultivo de café.* Recuperado el 12 de Diciembre de 2012, de Biblioteca Digital-Repositorio Institucionan Universidad Nacional: http://www.bdigital.unal.edu.co/5883/ trabajo de investigación de maestría.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafios para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(002), 105-125.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM, 38*(2), 178-195.

Colombia-Men. (1998). *(Ministerio de Educación Nacional).Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Colombia-MEN. (2006). *(Ministerio de Educación Nacional). Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Commandino, F. (2007). *Aristarco de Samos. Sobre los tamaños y las distancias del sol y la luna.* Cádiz: Servicios de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Fiallo Leal, J. E. (octubre de 2008). *Propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.* Recuperado el noviembre de 2011, de Funes. Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/937/1/5Cursos.pdf capítulo de libro.

Figuereido, A. M. (2010). *Estructura cognitiva y conceptos nucleares en la enseñanza/aprendizaje de la trigonometría: Estudio comparativo realizado con alumnos de 10° al 12° curso de Enseñanza Secundaria mediante la aplicación de diferentes metodologías.* Recuperado el 03 de 05 de 2012, de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=20863

Gómez, I. M. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(3), 431-450.

Heath, S. T. (1981). *A History of greek mathematics Vol 1.* New York: Dover Publications, Inc.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31(1)*, 52-76.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38(3)*, 302-310.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Recuperado el 03 de 2012, de Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada: http://www.cicata.ipn.mx/FILES/PDF/PROME_D_20051200_001.PDF

Mora, M. F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., Romero, M. L., & González, M. J. (2012). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. En P. Gómez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (págs. 261-341). Bogotá: Universidad de los Andes.

Moreno, M. (2003). *Filosofia* (Vol. III). Sevilla, España: Mad.

Quecedo, L., & Castaño, c. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*(14), 5-39.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de comprensión y representación en la investigacion en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Salkind, N. J. (1999). *Métodos de Investigación.* Mexico: Prentice hall.

Sánchez, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICS. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*(31), 1-19.

Sandoval, C. A. (2002). *Investigación Cualitativa.* Bogotá: ARFO.

Scucuglia, R. (2006). *A investigaçao do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas.* Recuperado el 05 de 2012, de Universidade Estadual Paulista: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/scucuglia_r_me_rcla.pdf

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.

Suárez, L., & Cordero, F. (2008). *Modelling- Use of Graphs. A Category in Calculus that Redefines Variation in Situations of Modelling Movement*. Recuperado el 20 de enero de 2013, de ICME 11 Mexico 2008: traducción libre al español en http://tsg.icme11.org/document/get/672

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13 (4-II)*, 319-333.

Tavera, F., & Villa-Ochoa, J. (2013). La variación en las tareas de los libros de texto de matemáticas: El caso de las relaciones trigonométricas. *Articulo sin publicar*.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas, un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, *19*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada.* Tesis doctoral no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*(27), 1-21.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante Quintero, C. A., Berrío Arboleda, M. d., Osorio Castaño, J. A., & Ocampo Bedoya, D. A. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Williams, J., & Goos, M. (2013). Modelling with Mathematics and Technologies. En M. (. Clements, A. J. Bishop, J. Kilpatrick, & F. Leung, *Third International Handbook of Mathematics Education* (págs. 549-569). New York: Springer.

Yin, R. K. (2009). *Case study research, Design and methods.* Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.

ANEXOS

ANEXO N° 1

Laboratorio de mediciones 1.

Objetivo

Identificar los principales aciertos y dificultades en las diferentes formas de medir del tiempo; teniendo en cuenta la época en que fueron utilizadas.

Materiales

- Una regla graduada o metro.
- Una canica.
- Un plano inclinado o similar.
- Un reloj convencional (no digital).
- Equipo de administración de medicamento intravenoso.

Como se observó en el video (Erase una vez los inventores "La medición del tiempo"), la búsqueda por medir el tiempo ha estado presente en muchas de las culturas a lo largo de la historia. Muchas personas han desarrollado métodos para medirlo, sin embargo, sólo aquellos que han proporcionado mayor precisión han permanecido en el tiempo.

Instrucciones

1. Coloca la canica en la cima del plano inclinado toma las siguientes medidas tres veces y registre el promedio:

Preguntas

a) ¿cuántas gotas salen del equipo de administración de medicamento, cuando la canica recorre 10cm después de salir del plano inclinado?

____

b) ¿cuántas gotas salen del equipo de administración de medicamento, cuando la canica recorre 50cm después de salir del plano inclinado?

____

c) ¿cuántas gotas salen del equipo de administración de medicamento, cuando la canica recorre 100cm después de salir del plano inclinado?

____

Escribe los datos en la tabla.

Distancia (cm)	10	50	100
Tiempo (en gotas)			

2. Toma las medidas del ítem anterior, pero esta vez utiliza como instrumento de medida el reloj convencional (no digital). Lleva la respuesta a las preguntas a la siguiente tabla.

Distancia (cm)	10	50	100
Tiempo (en segundos)			

3. ¿Se puede encontrar alguna relación entre la medida tomada con el agua y la tomada con el reloj? Justifica.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. ¿Es posible predecir con los datos anteriores, la medida del tiempo cuando la canica haga un recorrido de 20 metros? ¿cómo se puede hacer?

5. ¿cómo se podrían representar los datos recogidos en el desplazamiento de la canica? ¡Hazlo!

6. Describa las dificultades que se presentaron para desarrollar el laboratorio.

7. Escriba algunas conclusiones del experimento realizado.

¡Muchas gracias por el compromiso con su trabajo…!

ANEXO N° 2

Laboratorio de Mediciones 2.
MODELLUS

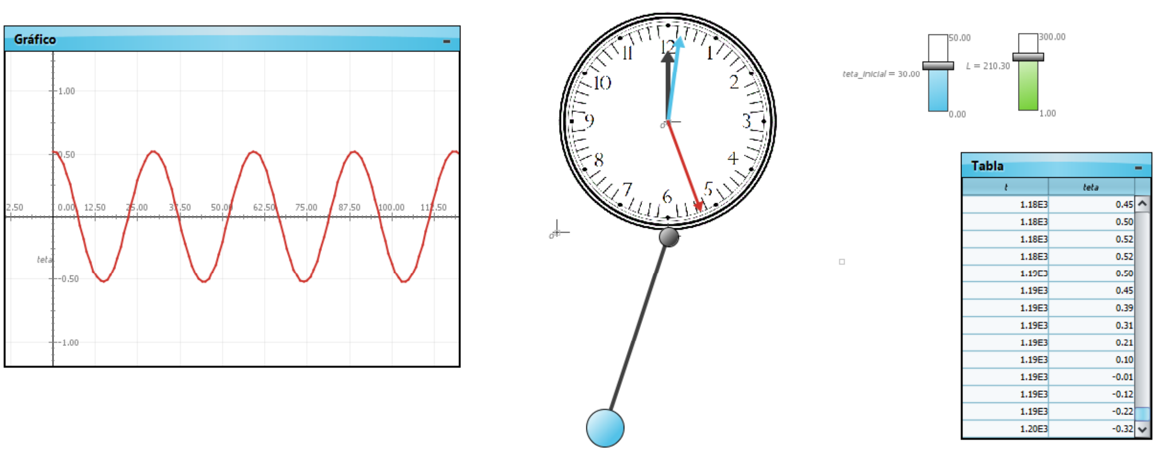
Objetivo

Identificar los elementos que intervienen en el funcionamiento de un reloj análogo y encontrar las relaciones de estos con relación a un modelo matemático.

Instrucciones

Ejecute el archivo *Simulación de reloj Modellus 4.0;* en ésta aparece un reloj que funciona de una manera muy particular (en la realidad su funcionamiento depende de más elementos).

Se abrirá una ventana como la que aparece a continuación.



t	teta
1.18E3	0.45
1.18E3	0.50
1.18E3	0.52
1.18E3	0.52
1.19E3	0.50
1.19E3	0.45
1.19E3	0.39
1.19E3	0.31
1.19E3	0.21
1.19E3	0.10
1.19E3	-0.01
1.19E3	-0.12
1.19E3	-0.22
1.20E3	-0.32

La barra azul representa el ángulo desde el cual inicia el movimiento del péndulo, la barra verde representa la longitud del mismo. Al lado izquierdo está la ventana de gráficos y al lado derecho aparece una tabla de datos.

Preguntas

1. ¿Está el reloj haciendo una medición adecuada del tiempo? ¿por qué?

2. ¿Qué pasa cuando se varía el ángulo de oscilación del péndulo? ¿se logra ajustar el reloj? ¿Por qué?

3. ¿Qué cambio genera cambiar la longitud del péndulo? ¿qué efectos en el reloj producen esos cambios?

4. ¿Qué pasa en el gráfico cuando se varía el ángulo de oscilación del péndulo? ¿por qué?

5. ¿Qué pasa en el gráfico cuando varía la longitud del péndulo? ¿por qué?

6. ¿Cuáles elementos de la simulación aparecen relacionadas en el gráfico? ¿de qué forma se puede apreciar esta relación?

7. Cuando se quiere relacionar otros elementos de la simulación ¿qué se obtiene en el gráfico? ¿por qué?

¡Muchas gracias por el compromiso con su trabajo…!